集合と位相１・読み書きワークシート１ 2018 年　月　日
論理記号で書かれた命題の文章化１ （１・２・３・４・５）

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ____________________

以下の文章をよく読み、解答しなさい。各解答は枠内に直接書き込みなさい。

[実数における有理数の稠密性]

任意の実数 x に対して次が成立する：

(∗) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q}\ \text{ s.t. }\ |x - r| < \varepsilon.$$

上記の命題は実数における有理数の稠密性と呼ばれ、どんな実数についても、そのいくらでも近くに有理数が存在するということを主張する定理である。

(∗) の読み方、意味の取り方、文章化の仕方を説明しよう。「∀ 〜」は「任意の〜に対して」と訳され、「∃ ◯◯◯」は「◯◯◯が存在する」と訳される。ε については単に $\varepsilon > 0$ としか書かれていないが、文脈から実数であると判断される。これらを踏まえて、(∗) を読むときには、左から順に次のように読む。

[読み]

任意の正の数イプシロンに対して、ある有理数アールが存在して、エックス・マイナス・アールの絶対値はイプシロンより小さい。

これでは意味が取りにくいので、文章化するときには次のように表現する。

[書き]

任意の正の数 ε に対して、条件「$|x - r| < \varepsilon$」を満たす有理数 r が存在する。

上の表現において、読点の位置が大切である。「対して」の後ろにある読点を省略したり、「$|x - r| < \varepsilon$ である」の後ろに読点を打ったりすると、二重の意味を持ったり、違った内容の命題になってしまう。一括りとして読むべき箇所を鍵括弧で括ったり、読点をはっきりと打つなど注意深く書く必要がある。

なお、内容をきちんと押さえた上であれば、どんな正の数 ε に対しても、うまく有理数 r を取ると、$|x - r| < \varepsilon$ を満たすようにできる、のように少し崩して読み書きしても構わない。

[**課題１**] 以下の薄いグレーで書かれている文章を小さな声で読みながら、鉛筆またはシャープペンでなぞりなさい (一字一句、丁寧になぞること)。

1. 任意の正の数 ε に対して、条件「$|x - r| < \varepsilon$」を満たす有理数 r が存在する。

2. 任意の正の数 ε に対して、条件「$|x - r| < \varepsilon$」を満たす有理数 r が存在する。

(裏面に続く)

3. 任意の正の数 ε に対して、条件「$|x-r|<\varepsilon$」を満たす有理数 r が存在する。

4. 任意の正の数 ε に対して、条件「$|x-r|<\varepsilon$」を満たす有理数 r が存在する。

[**課題２**] [書き] に書かれている文章を丁寧な文字で下記解答欄に 4 回繰り返して書き、さらに、それを 4 回読みなさい。

1.

2.

3.

4.

[**課題３**] x を実数とします。次の論理式 $(*)$ で書かれた命題を、$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい (解答は下の枠内に書くこと)。

$$(*) \qquad \forall\varepsilon>0,\ \exists r\in\mathbb{Q}\ \text{ s.t. }\ |x-r|<\varepsilon.$$

[**課題４**] 実数における有理数の稠密性とはどんな内容の定理ですか。$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、下の解答欄に文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート２ 2018 年　月　日
論理記号で書かれた命題の文章化２ （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[実数列が有界であることの定義]

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**有界**であるとは、

$$(*) \qquad \exists K > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n| < K$$

が成り立つときをいう。

$(*)$ を文章で表現すると次の (1) または (2) のようになる。

[書き]

(1) 条件「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」を満たす $K > 0$ が存在する。
(2) 「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」となる $K > 0$ が存在する。

(2) のように書く場合、単純に鍵括弧を省略すると、意味が２通りにとれてしまうのでよくない。また、“任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|x_n| < K$ となる $K > 0$ が存在する”と書くと、別の内容の主張になってしまう！

$(*)$ を読むときには、例えば次のように読めばよい。

[読み]

(1) ある正の数ケイが存在して、任意の自然数 n に対して、エックス・エヌの絶対値はケイより小さい。
しかし、これでは意味が取りにくいので、意味が通じるように読むときには、例えば次のように読む。
(2) 次の条件を満たす正の数 K が存在する。すべての自然数 n に対して、x_n の絶対値は K より小さい。

内容をきちんと押さえていれば、“うまく正の数 K を取ると、すべての自然数 n に対して、x_n の絶対値が K より小さくなる”のように少し崩して読んでもよい。

[**課題１**] 以下の薄いグレーで書かれている文章を小さな声で読みながら、鉛筆またはシャープペンでなぞりなさい (一字一句、丁寧になぞること)。

1. 条件「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」を満たす $K > 0$ が存在する。

2. 条件「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」を満たす $K > 0$ が存在する。

3. 条件「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」を満たす $K > 0$ が存在する。

(裏面に続く)

4. 条件「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| < K$」を満たす $K > 0$ が存在する。

[**課題２**] [書き] に書かれている文章を丁寧な文字で下記解答欄に 4 回繰り返して書き、さらにそれを 4 回繰り返して読みなさい。

1.

2.

3.

4.

[**課題３**] 次の論理式 $(*)$ で書かれた命題を、$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい (解答は下の枠内に書くこと)。

$(*)$ $$\exists\, K > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_n| < K.$$

[**課題４**] 実数列が有界であることの定義を、$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、下の解答欄に文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート３　　　　　　　　2018 年　　月　　日
論理記号で書かれた命題の文章化３　　　　　　　　（ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の文章をよく読み、解答しなさい。各解答は枠内に直接書き込みなさい。

[数列が収束することの定義]

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**点** $\alpha \in \mathbb{R}$ **に収束する**とは、次が成立するときをいう：

(∗)　$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとき、単に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束すると呼ばれる。

「∀ ∼」は「任意の∼に対して」と訳され、「∃ ◯◯◯」は「◯◯◯が存在する」と訳される。「P ⇒ Q」は「P ならば Q」と訳されるが、今の場合、P に未定義な文字 n が含まれている (つまり、n に対する条件になっている) ので、「P が真であるようなすべての n に対して」と訳した方が自然な表現になる。さらに、n は文脈から自然数であることを前提としているとわかるので、これらを総合して (∗) を文章で表現すると次のようになる。

[書き]

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件

「$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」

を満たす自然数 N が存在する。

上の表現において、読点の位置が大切である。「対し」の後ろにある読点を省略したり、「$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」の後ろに読点を打ったりすると、二重の意味を持ったり、違った内容の命題になってしまう。一括りとして読むべき箇所を鍵括弧で括ったり、読点をはっきりと打つなど注意深く書く必要がある。

[**課題１**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とし、α を実数とする。次の各論理記号で書かれた命題を、$\forall, \exists, \Rightarrow$ などの論理記号を用いずに、文章に直しなさい。

(1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$

(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \geq N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leq \varepsilon.$

(3) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_n - \alpha| < \varepsilon \ \Rightarrow\ n > N.$

(裏面に続く)

再び、[数列が収束することの定義] の中の $(*)$ を考える。$(*)$ は次を意味する命題である。

[意味]

正の数 ε が任意に与えられたとき、(それに応じて) 自然数 N を上手く選ぶと、N よりも大きなどんな (自然数) n に対しても、a_n と α との差は ε よりも小さくなる (ようにできる)。

単に読むだけであれば、$(*)$ を便宜的に次のように読んでもよい：

任意の正の数イプシロンに対し、ある自然数 (ラージ) エヌが存在して、(スモール) エヌが (ラージ) エヌよりも大きい、ならば、エイ・エヌ・マイナス・アルファの絶対値はイプシロンよりも小さい。

日本語として意味が通じるように読むときには、[意味] に書かれているように読んだり、次のように読んだ方がよい。

[読み]

任意の正の数 ε に対し、次の条件を満たす自然数 N が存在する。「N よりも大きいすべての (自然数) n に対して、$a_n - \alpha$ の絶対値は ε よりも小さい。」

[**課題２**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とし、α を実数とする。次の各論理記号で書かれた命題の意味を、$\forall, \exists, \Rightarrow$ などの論理記号を用いずに、文章で説明しなさい。

(1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$

(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \geq N\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leq \varepsilon.$

(3) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\ \Rightarrow\ n > N.$

[**課題３**] 数列が収束することの定義を、$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、下の解答欄に文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート４ 2018 年　月　日
論理記号で書かれた命題の文章化４ （１・２・３・４・５）

学籍番号 ________________ 氏名 ______________________

[1 変数連続関数の定義]

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S 上で定義された関数とする。
$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が点 $a \in S$ で**連続**であるとは、

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ x \in S,\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう。f がすべての点 $a \in S$ で連続であるとき、f は連続であると呼ばれる。

$(*)$ を文章で表現すると次のようになる。

[書き]

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件
「$|x-a| < \delta$ を満たすすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である」
を満たす $\delta > 0$ が存在する。

$(*)$ を読むときには、例えば次のように読めばよい。

[読み]

任意の正の数イプシロンに対し、ある正の数デルタが存在して、エックスがエスの元で、エックス・マイナス・エイの絶対値がデルタよりも小さい、ならば、エフ・エックス・マイナス・エフ・エイの絶対値はイプシロンよりも小さい。

しかし、これでは意味が取りにくい。意味が通じるように読むときには次のように表現する。

[意味]

任意に正の数 ε が与えられたとき、(それに応じて) 正の数 δ を上手く選ぶと、a との差が δ よりも小さいすべての S の元 x に対して、$f(x)$ と $f(a)$ との差は ε よりも小さくなる (ようにできる)。

[**課題１**] 以下の薄いグレーで書かれている文章を小さな声で読みながら、鉛筆またはシャープペンでなぞりなさい (一字一句、丁寧になぞること)。

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件「$|x-a| < \delta$ を満たすすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である」を満たす $\delta > 0$ が存在する。

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件「$|x-a| < \delta$ を満たすすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である」を満たす $\delta > 0$ が存在する。

3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件「$|x-a| < \delta$ を満たすすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である」を満たす $\delta > 0$ が存在する。

4. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、条件「$|x - a| < \delta$ を満たすすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である」を満たす $\delta > 0$ が存在する。

[**課題２**] [書き] に書かれている文章を丁寧な文字で下記解答欄に４回繰り返して書き、それを見ながら、[意味] に書かれているように４回繰り返して読みなさい。

1.

2.

3.

4.

[**課題３**] 次の論理式 (∗) で書かれた命題を、∀, ∃, ⇒ などを使わずに、文章で書きなさい (解答は下の枠内に書くこと)。

(∗) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ x \in S,\ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

[**課題４**] $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 S 上で定義された関数が連続であることの定義を、∀, ∃, ⇒ などを使わずに、下の解答欄に文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート５ 2018 年　月　日

証明へのアプローチ１ （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の説明をよく読み、$\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい。

[集合の相等の定義]

２つの集合 A と B について $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき、A と B は**等しい**といい、$A = B$ と書き表わす。

[**課題**] 集合 $A,\ B$ を $A = \left\{ \dfrac{1}{x^2+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\},\ B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1 \,\}$ と定めるとき、$A = B$ である。この証明の書き方を学ぶ。

２つの集合が等しいことを示したいので、① $A \subset B$ と ② $B \subset A$ の２つを示すことになる。両方同時に示せないので、先に示す方を決める。ここでは①を先に示すことにしよう。

①の証明のスタート

まず、「① $A \subset B$ を示す」と宣言する。
次に、これを示すために、何よりも先に、$\boxed{}$ から任意に元 a をとる。

このとき、最終的に次が示されればよい。

①の証明の最終目標

最初にとった a は $\boxed{}$ に属する。すなわち、

(∗1) $$\boxed{} < a \leq \boxed{}$$

が成り立つ。

証明のスタートから最終目標に到達するために次のような考察を行う。

[**考察と証明①**]

a を $\boxed{}$ から任意にとると、$\boxed{}$ の定義より、ある実数 x を用いて

(♮1) $$a = \boxed{}$$

のように表わすことができる。$x^2 \geq 0$ であるから $x^2 + 1 \geq 1$ であり、その逆数をとって、$\dfrac{1}{x^2+1} \leq \boxed{}$ を得る。よって、(♮1) より $a \leq \boxed{}$ を得る。また、$\dfrac{1}{x^2+1} > 0$ であるから (♮1) より $a > \boxed{}$ であることもわかる。これで、a は (∗1) を満たすことが示された。

今度は②を示す。先ほどと同様に、証明のスタートとゴールを明確にさせて、証明していく。

②の証明のスタート

「② $B \subset A$ を示す」と宣言し、何よりも先に、$\boxed{}$ から任意に元 b をとる。

②の証明の最終目標

最初にとった b は $\boxed{}$ に属する。すなわち、ある実数 x を用いて

(∗2) $$b = \boxed{}$$

と表わすことができる。

[考察と証明②]

b を $\boxed{}$ から任意にとると、$\boxed{}$ の定義より、実数 b は $0 < b \leq 1$ を満たす。現時点では (∗2) を満たすような実数 x が本当にあるのかわからないので、一旦、そのような x が存在したと仮定してみて、x がどんな形をしているのかを探る。つまり、(∗2) を x に関して解いてみる。すると、2 つの解

(♮2) $$x = \boxed{}$$

が見つかる ($0 < b \leq 1$ によりこれは確かに実数である)。上記の 2 つの解は (∗2) が成り立つと仮定した上で導いたものなので、改めて (∗2) が成り立っているかどうかを確認すると、

$$\frac{1}{x^2+1} = \boxed{} = b$$

となって、確かに満たされることがわかる。こうして、$b \in \boxed{}$ に対して x を (♮2) のうちのどちらか、例えば、正の方に定めれば、b が (∗2) の形に表されることが示された。

以上の考察を踏まえて、$A = B$ の証明を整理したものが次である。

[整理した証明]

① $\boxed{}$ を示す。任意に $a \in \boxed{}$ をとると、

$$a = \boxed{ (x \in \mathbb{R})}$$

と表わすことができる。$x^2 \geq 0$ より $x^2 + 1 \geq 1$. したがって、$\boxed{} = \dfrac{1}{x^2+1} \leq \boxed{}$ を得る。また、$\boxed{} = \dfrac{1}{x^2+1} > 0$ であるから a は $\boxed{} < a \leq \boxed{}$ を満たす。よって、$a \in \boxed{}$ である。これで、①は示された。

② $\boxed{}$ を示す。任意に $b \in \boxed{}$ をとる。$0 < b \leq 1$ より、

$$x = \boxed{}$$

とおくと、これは実数として定まり、

$$\frac{1}{x^2+1} = \boxed{} = b$$

が成り立つ。よって、$b \in \boxed{}$ である。これで、②は示された。

①, ②より、$A = B$ が証明された。 □

集合と位相１・読み書きワークシート６ 2018 年　月　日
証明へのアプローチ２ （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の説明をよく読み、$\boxed{\quad}$ 内に適当な言葉・文章や数式・文字・記号等を書き入れなさい。

[数列の極限の定義]

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは、次が成立するときをいう：

$$(*)\qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

これを文章で表現すると次のようになる。
どのような実数 $\varepsilon > 0$ に対しても、条件

「$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」

を満たす自然数 N が存在する。
このとき、α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**といい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

のように書き表わす。

$(*)$ において $\forall \varepsilon > 0$ 以降の部分を $P(\varepsilon)$ とおくと、$(*)$ は全称命題「$\forall \varepsilon > 0,\ P(\varepsilon)$」の形をしている。したがって、実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束することを示したかったら、まずは任意に正の実数 ε をとるところから始める。そして、$P(\varepsilon)$ が成り立つことを示す。

正の実数 ε に対して、$P(\varepsilon)$ は存在命題であるから、それが成り立つことを示すためには、s.t.(=such that) 以降の条件 “$n > N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$” を満たす自然数 N が存在することを示すことになる。その示し方は与えられた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の形やそれに対する条件等によって変わるが、N を (どのようにとればうまくいくのかを予め調べておいた上で) 与えて、それが s.t.(=such that) 以降の条件を満たす、という順番で証明を書いていくことには変わりがない。

[**課題**] 実数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ となる。これはアルキメデスの原理「任意の正の実数 a, b に対して、$a < nb$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する」を用いて証明される。この読み書きワークシートでは、その証明の書き方を学ぶ。

まず、証明すべき事柄を理解するために、実数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することを論理記号で下の枠内に書こう。

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

これを、$\forall, \exists, \Rightarrow$ などの論理記号を用いずに、文章に直すと次のようになる。

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

上で論理記号および文章で書いた証明すべき事柄を示したい。そのために、まずは

証明のスタート

何よりも先に、正の数 $\boxed{}$ を任意にとる。

このとき、最終的に次が示されればよい。

証明の最終目標

「$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$」が成り立つような自然数 $\boxed{}$ が存在することを示す。

証明のスタートから最終目標に到達するために次のような考察を行う。

[考察と証明]

先に任意にとった正の数 $\boxed{}$ に対して、どのくらい自然数 n_0 を大きくとれば $\left|\frac{1}{n_0}\right| < \varepsilon$ となるのかを考察する。一旦、このような自然数 n_0 が見つかれば、それよりも大きなどんな自然数 n も $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ を満たす (なぜならば、$n > n_0$ ならば $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ となるからである)。したがって、$\left|\frac{1}{n_0}\right| < \varepsilon$ となる $\boxed{} \in \mathbb{N}$ が存在することを示せばよい。

$\frac{1}{n_0}$ は正であるから絶対値は外してよい。すると、$\left|\frac{1}{n_0}\right| < \varepsilon$ は $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ となり、これは $1 < n_0\varepsilon$ と書き換えられる。このような $\boxed{} \in \mathbb{N}$ が存在することはアルキメデスの原理から保証される。実際、2 つの正の実数 $\boxed{}$ と $\boxed{}$ に対してアルキメデスの原理を適用すると、$\boxed{}$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる。

以上より、任意にとった正の数 $\boxed{}$ に対して、上記のような $n_0 \in \mathbb{N}$ をとれば、$n > n_0$ を満たすすべての $\boxed{}$ に対して $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ となる。これで、実数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ となることが示された。

上の考察を踏まえて、実数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ となることの証明を整理したものが次である。

[整理した証明]

任意に $\boxed{} > 0$ をとる。
2 つの正の実数 $\boxed{}$ と $\boxed{}$ に対して $\boxed{}$ の原理を適用すると、$\boxed{}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる。このとき、$n > N$ を満たすすべての $\boxed{}$ に対して

$$\boxed{} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \boxed{}$$

が成り立つ。したがって、実数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ となる。 □

集合と位相１・読み書きワークシート７ 2018 年　月　日
写像を定めるときの表現 （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[写像の定義]

A, B を 2 つの空でない集合とする。A に属する各々の元に対して、B の元を 1 つずつ定める対応規則のことを A から B への**写像**という。f が A から B への写像であることを

$$f : A \longrightarrow B$$

のように書き表わす[†]。また、写像 f の下で $a \in A$ が $b \in B$ に対応づけられるとき、a は f によって b に**写される**、あるいは、f は a を b に**写す**といい、この b を $f(a)$ と書き表わす。$f(a)$ は f による a の**像**と呼ばれる。
写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して、A を f の**定義域**または**始域**といい、B を f の**終域**という。
写像は次の 3 つを指定することにより定められる。

① 定義域となるべき集合 A,
② 終域となるべき集合 B,
③ 定義域 A の中の各元に対して終域 B の元を 1 つずつ定める対応規則.

[**注意** †] ここでは抽象的設定のため、元の対応規則が書かれていない (けれども、写像の条件を満たす、元の対応規則が何か 1 つ与えられていると考える)。しかし、具体的に写像を 1 つ定めるときには、定義域と終域とともに、元の対応規則も明記しなければならない。

[**例１**] 集合 A と B を $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ によって定義する。このとき、A の元 1 に対して B の元 4 を対応させ、A の元 2 に対して B の元 5 を対応させ、A の元 3 に対して B の元 6 を対応させることにより、A から B への写像が 1 つ定まる。この写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

($\sharp$)　　写像 $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 4,\ f(2) = 5,\ f(3) = 6$ によって定義する。

ここで、写像を表わす文字として f を用いたが、すでに意味が確定している A, B 以外の文字であれば何でもよい。例えば、文字 g や f_1 などを用いてもよい。

[**課題１**] 集合 A と B を $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ によって定義する。次の (1) から (3) までの各対応規則によって定まる A から B への写像を ($\sharp$) の形式で表現しなさい。

(1) A の元 1 に対して B の元 4 を対応させ、A の元 2 に対して B の元 4 を対応させ、A の元 3 に対して B の元 5 を対応させることにより定まる A から B への写像:

(2) A の元 1 に対して B の元 5 を対応させ、A の元 2 に対して B の元 6 を対応させ、A の元 3 に対して B の元 5 を対応させることにより定まる A から B への写像:

(3) A の元 1 に対して B の元 6 を対応させ、A の元 2 に対して B の元 5 を対応させ、A の元 3 に対して B の元 4 を対応させることにより定まる A から B への写像:

[**課題 2**] 集合 A を $A = \{1, 2, 3\}$ によって定義する。次の (1) から (3) までの各対応規則によって定まる A から実数の全体 $\mathbb{R}$ への写像を ($\sharp$) の形式で表現しなさい。

(1) A の元 1 に対して $\mathbb{R}$ の元 4 を対応させ、A の元 2 に対して $\mathbb{R}$ の元 4 を対応させ、A の元 3 に対して $\mathbb{R}$ の元 5 を対応させることにより定まる A から $\mathbb{R}$ への写像:

(2) A の元 1 に対して $\mathbb{R}$ の元 -1 を対応させ、A の元 2 に対して $\mathbb{R}$ の元 -2 を対応させ、A の元 3 に対して $\mathbb{R}$ の元 -3 を対応させることにより定まる A から $\mathbb{R}$ への写像:

(3) A の元 1 に対して $\mathbb{R}$ の元 1 を対応させ、A の元 2 に対して $\mathbb{R}$ の元 $\sqrt{2}$ を対応させ、A の元 3 に対して $\mathbb{R}$ の元 $\sqrt{3}$ を対応させることにより定まる A から $\mathbb{R}$ への写像:

[**例 2**] 定義域が無限集合の場合、($\sharp$) の形式で写像を定めることはできない。このような時には、「式」を用いて写像を表現することになる。例えば、自然数の集合 $\mathbb{N}$ から有理数の集合 $\mathbb{Q}$ への写像であって、各自然数に対して、その逆数を対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

($\sharp$2) 写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を $f(n) = \dfrac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$ によって定義する。

1 つの「式」で表現しきれないときには、場合分けして表現する。例えば、自然数の集合 $\mathbb{N}$ から自分自身への写像であって、各自然数 n に対して、それが偶数のときには $n-1$ を対応させ、奇数のときには n を対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

($\sharp$3) 写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を次で定義する。$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \text{ が偶数のとき}), \\ n & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$

[**課題 3**] 次の (1) から (3) までの各対応規則によって定まる $\mathbb{N}$ から実数の全体 $\mathbb{R}$ への写像を ($\sharp$2) または ($\sharp$3) の形式で表現しなさい。

(1) 各自然数に対して、その正の平方根を対応させる $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像:

(2) 各自然数 n に対して、$n^2 - n + 1$ を対応させる $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像:

(3) 各自然数 n に対して、n が 3 の倍数のときには $\frac{n}{3}$ を対応させ、n が 3 の倍数でないときには 0 を対応させる $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像:

集合と位相１・読み書きワークシート８ 2018 年　月　日

関数から写像へ・写像の相等 （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[**例１**] 高校で学ぶ関数は、終域が $\mathbb{R}$ であるような写像として捉えることができる。例えば、関数 $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ は、

① 定義域が $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$,

② 終域が $\mathbb{R}$,

③ 元の対応規則が $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$, (すなわち、0 以上の各実数 x に対して実数 $\sqrt{x}$ を対応させる規則)

によって与えられる写像 $f : \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ として捉えられる。

[**課題１**] 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式を入れなさい。

(1) 関数 $f(x) = x^2\ (x \in \mathbb{R})$ は、

① 定義域が $\boxed{}$,

② 終域が $\boxed{}$,

③ 元の対応規則が $\boxed{}$

によって与えられる写像 f : $\boxed{}$, $\boxed{}$ として捉えられる。

(2) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$ は、

① 定義域が $\boxed{}$,

② 終域が $\boxed{}$,

③ 元の対応規則が $\boxed{}$

によって与えられる写像 g : $\boxed{}$, $\boxed{}$ として捉えられる。

[**例 2**] 写像を具体的に定義するときには、次の 3 項目を常に明示する。

① 定義域となるべき集合 A,

② 終域となるべき集合 B,

③ 定義域 A の中の各元に対して終域 B の元を 1 つずつ定める対応規則.

例えば、$\mathbb{R}^3$ の各元 (x, y, z) に対して、$x^2 + y^2 - z^2$ という実数を対応させる写像を定義したいときには次のように書く：

($\sharp$)　写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2\ ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する。

[**課題 2**] 以下の (1) から (3) で定められている各写像を ($\sharp$) の形式で表現しなさい。

(1) 各実数 t に対して、$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ という $\mathbb{R}^2$ の元を対応させる写像

(2) 区間 $[0, 1)$ の各元 t に対して、$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ という $\mathbb{R}^2$ の元を対応させる写像

(3) 区間 $[0,1)$ の各元 t に対して、$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ という単位円周 $\mathbb{S}^1$ の元を対応させる写像

[写像の相等]

２つの写像 $f: A \longrightarrow B$ と $g: A' \longrightarrow B'$ が**等しい**とは、次の 3 条件が成り立つときをいう。

❶ $A = A'$ (定義域が等しい),

❷ $B = B'$ (終域が等しい),

❸ すべての $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ (元の対応規則が等しい).

このとき、$f = g$ と書き表わす。等しくないときには、$f \neq g$ と書き表わす。

[**例 3**] 写像 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義されていて、写像 $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $g(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{Q})$ によって定義されているとき、これらの定義域は等しくないので、写像としては $f \neq g$ である。

この例のように、たとえ写像を定める 定義式が同じであっても、定義域や終域が等しくなければ、写像として等しくない ことに注意する。

[**課題 3**] 次の 2 つの写像 f と g は等しいか等しくないかを判定しなさい (理由を書くこと)。

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow (0, \infty), \quad f(x) = x^2 \ \ (x \in \mathbb{R} - \{0\}),$$
$$g: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \ \ (x \in \mathbb{R} - \{0\})$$

[**課題 4**] 次の 2 つの写像 f と g は等しいか等しくないかを判定しなさい (理由を書くこと)。

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = \cos(n\pi) \ \ (n \in \mathbb{N}),$$
$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = (-1)^{n+1} \ \ (n \in \mathbb{N})$$

[**課題 5**] $\mathbb{R}$ から $(0, \infty) = \{\ y \in \mathbb{R} \mid y > 0\ \}$ への写像の定値写像でない例を 3 つ与えなさい。(($\sharp$) の形式に則って書くこと。また、3 例とも本質的に異なる写像にすること。)

集合と位相１・読み書きワークシート９ 2018 年　月　日
逆像を理解する （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の説明をよく読み、$\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい。

[1 点の逆像の定義]

$f : A \longrightarrow B$ を写像とする。各 $b_0 \in B$ に対して、A の部分集合 $f^{-1}(b_0)$ を次で定める。

$$(*1) \qquad f^{-1}(b_0) := \{ \ a \in A \mid f(a) = b_0 \ \}.$$

これを f による b_0 の**逆像**という。
定義より、$a \in A$ に対して、次が成り立つ。

$$(*2) \qquad a \in f^{-1}(b_0) \iff f(a) = b_0$$

注意：逆像はその定義からわかるように定義域の部分集合であって、元ではないことに注意する。

[**課題１**] 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。$f^{-1}(1)$ と $f^{-1}(4)$ を求めよ。

[**考察**]

● 定義域 $\mathbb{R}$ の元 x に対して、逆像の定義より、

$$x \in f^{-1}(1) \iff f(x) = \boxed{} \iff -x^2 + 3 = \boxed{}$$

である。これを満たす $x \in \mathbb{R}$ は $x = \boxed{}$ であるから、$f^{-1}(1) = \boxed{}$ である。
● 定義域 $\mathbb{R}$ の元 x に対して、逆像の定義より、

$$x \in f^{-1}(4) \iff f(x) = \boxed{} \iff -x^2 + 3 = \boxed{}$$

である。これを満たす $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから、$f^{-1}(4) = \boxed{}$ である。

[**課題２**] 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。$f^{-1}(3)$ と $f^{-1}(-6)$ を求めよ (上の [考察] を真似て解答を書くこと)。

$\boxed{}$

[逆像の定義：一般の場合]

$f : A \longrightarrow B$ を写像とする。B の部分集合 T に対して、f で写すと T に属するような A の元全体からなる集合が定まる。これを $f^{-1}(T)$ と書き、f による T の**逆像**という：

(∗3) $$f^{-1}(T) := \{\ a \in A \mid f(a) \in T\ \}.$$

定義より、$a \in A$ に対して、次が成り立つ。

(∗4) $$a \in f^{-1}(T) \iff f(a) \in T$$

[**課題3**] 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。$f^{-1}([2, 3])$ を求めよ。

[**考察**]

定義域 $\mathbb{R}$ の元 x に対して、逆像の定義より、

$$x \in f^{-1}([2, 3]) \iff f(x) \in \boxed{} \iff \boxed{} \leq -x^2 + 3 \leq \boxed{}$$

である。この不等式を満たす $x \in \mathbb{R}$ の範囲は

$$\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$$

である。これは $x \in \boxed{}$ と書き換えられるから、$f^{-1}([2, 3]) = \boxed{}$ である。

[**課題4**] 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。$f^{-1}([-1, 4])$ を求めよ。

[**課題5**] 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。$f^{-1}((-\infty, 4])$ および $f^{-1}((3, \infty))$ を求めよ。

集合と位相 1・読み書きワークシート 10 2018 年　月　日
集合を写像の逆像で書く （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の説明をよく読み、$\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい。

[逆像の定義]

$f: A \longrightarrow B$ を写像とする。B の部分集合 T に対して、f で写すと T に属するような A の元全体からなる集合が定まる。これを $f^{-1}(T)$ と書き、f による T の**逆像**という：

(∗1) $$f^{-1}(T) := \{\ a \in A \mid f(a) \in T\ \}.$$

$T \subset B$ が $b_0 \in B$ だけからなる集合のとき、$f^{-1}(T)$ をしばしば $f^{-1}(b_0)$ と表わす：

(∗2) $$f^{-1}(b_0) := \{\ a \in A \mid f(a) = b_0\ \}.$$

注意：逆像はその定義からわかるように定義域の部分集合であって、元ではないことに注意する。

[**課題 1**] $A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\ \}$ に対し、関数 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ であって、$A = f^{-1}(0)$ となるものを 1 つ見つける方法を学ぶ。

[**考察**]

まず、集合 A を規定している条件 (すなわち、縦棒 | の右側の式)

$$\boxed{}$$

に注目する。これは、

(♮1) $$\boxed{} = 0$$

のように書き換えることができる。この等式の左辺を $f(x, y)$ とおく。すなわち、

(♮2) $$f(x, y) = \boxed{}$$

とおく。f は $\mathbb{R}^2$ を定義域とする実数値関数とみることができる。$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について、集合 $\boxed{}$ の定義より

(♮3) $$\boxed{} \in A \iff x^2 + y^2 = 1$$

が成立し、(♮1), (♮2) より、

(♮4) $$x^2 + y^2 = 1 \iff f(x, y) = 0$$

が成立し、逆像の定義より、

(♮5) $$f(x, y) = 0 \iff \boxed{} \in f^{-1}(0)$$

が成立する。(♮3), (♮4), (♮5) から、$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が A に属することと $\boxed{}$ に属することとは同値であることがわかる。これは $A = f^{-1}(0)$ と表わされること意味する。

(裏面に続く)

[整理した解答]

関数 $f:\boxed{}\longrightarrow\boxed{}$ を

$$f(x,y)=\boxed{}$$

によって定義する。このとき、$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\boxed{}\in A \iff \boxed{}=1 \iff \boxed{}=0 \iff \boxed{}\in f^{-1}(0)$$

が成立する。よって、A は上記の関数 f を用いて $A=\boxed{}$ と表わされる。

[**課題 2**] 今度は $B=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\ \}$ に対し、関数 $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ であって、$B=g^{-1}([0,\infty))$ となるものを 1 つ見つける方法を学ぶ。

[考察]

課題 1 と同様に、集合 B を規定している条件に注目し、これを

(♯1) $$\boxed{}\ge 0$$

のように書き換える。この等式の左辺を $g(x,y)$ とおく。すなわち、

(♯2) $$g(x,y)=\boxed{}$$

とおく。g は $\mathbb{R}^2$ を定義域とする実数値関数とみることができる。$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について、

(♯3) $$\boxed{}\in B \iff x^2+y^2\le 1$$

が成立し、(♯1), (♯2) より、

(♯4) $$x^2+y^2\le 1 \iff g(x,y)\ge 0$$

が成立し、逆像の定義より、

(♯5) $$g(x,y)\ge 0 \iff g(x,y)\in\boxed{} \iff \boxed{}\in g^{-1}([0,\infty))$$

が成立する。よって、(♯3), (♯4), (♯5) をつなげると $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が B に属することと $\boxed{}$ に属することとは同値であることがわかる。したがって、$B=\boxed{}$ と表わされることがわかる。

[**課題 3**] 集合 $C=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x+y|\le 1\ \}$ に対して、$C=h^{-1}([-1,1])$ となるような関数 $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ を見つけなさい (下の枠内に整理した解答を書くこと)。

集合と位相１・読み書きワークシート 11 2018 年 月 日
全射と単射 （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

集合 $A = \{1, 2\}$ を定義域とし、集合 $B = \{1, 2, 3\}$ を終域とする写像を与えるには、定義域である A の中の各元 a に対して、それぞれ B の元を 1 つだけ対応させる規則を与えればよい。今の場合、A の元は 1 と 2 の 2 つだけなので、そのような対応規則 f を与えるには、$f(1)$ と $f(2)$ を決めればよいことになる。例えば、$f(1) = 1, f(2) = 2$ と決めれば、この規則によって写像 $f : A \longrightarrow B$ が 1 つ定まり、$f(1) = 1, f(2) = 3$ と決めれば、この規則によっても写像 $f : A \longrightarrow B$ が 1 つ定まる。$f(1)$ と $f(2)$ の決め方はそれぞれ 3 個づつあり、それらは独立に決めることができるので、$A = \{1, 2\}$ を定義域とし、$B = \{1, 2, 3\}$ を終域とする写像は全部で $3 \times 3 = 9$ 個あり、それらは次で与えられる。

$$
(*) \qquad
\begin{aligned}
&f_1 : A \longrightarrow B,\ f_1(1) = 1,\ f_1(2) = 1, \quad f_2 : A \longrightarrow B,\ f_2(1) = 1,\ f_2(2) = 2,\\
&f_3 : A \longrightarrow B,\ f_3(1) = 1,\ f_3(2) = 3, \quad f_4 : A \longrightarrow B,\ f_4(1) = 2,\ f_4(2) = 1,\\
&f_5 : A \longrightarrow B,\ f_5(1) = 2,\ f_5(2) = 2, \quad f_6 : A \longrightarrow B,\ f_6(1) = 2,\ f_6(2) = 3,\\
&f_7 : A \longrightarrow B,\ f_7(1) = 3,\ f_7(2) = 1, \quad f_8 : A \longrightarrow B,\ f_8(1) = 3,\ f_8(2) = 2,\\
&f_9 : A \longrightarrow B,\ f_9(1) = 3,\ f_9(2) = 3
\end{aligned}
$$

[**課題 1**] $A = \{0, 1, 2\}$ を定義域とし、$B = \{-1, 1\}$ を終域とする写像をすべて求めなさい。

[全射]

写像 $f : A \longrightarrow B$ が**全射**であるとは、

$$(\sharp) \qquad \forall\, b \in B,\ \exists\, a \in A \ \ \text{s.t.}\ \ b = f(a)$$

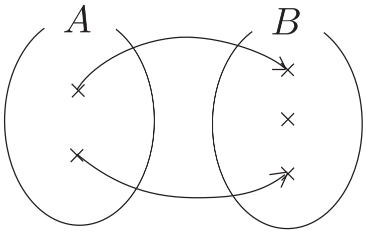
が成り立つときをいう。

$(\sharp)$ は、B の中のどんな元も、f によって A の元を写したものになっていることを意味する。

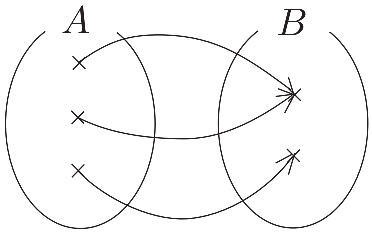
例えば、$f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義される関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は、$f(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないから全射でない。しかし、f の終域を 0 以上の実数全体 $[0, \infty)$ に制限することにより得られる写像 $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ は全射である。

[**課題 2**] [課題 1] で列挙した写像のうち、全射であるものをすべて挙げなさい。

[**課題 3**] 自然数全体からなる集合 $\mathbb{N}$ から $\{-1,1\}$ への写像で、全射なものを 1 つ与えなさい。



単射であるが全射でない



全射であるが単射でない

[単射]

写像 $f : A \longrightarrow B$ が**単射**であるとは、

($\natural$) $$a, a' \in A,\ a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

が成り立つときをいう。

($\natural$) は異なる 2 元が f によって異なる 2 元に写されることを意味する。

[**課題 4**] ($*$) で列挙した写像のうち、単射であるものをすべて挙げなさい。

[**課題 5**] $\{1,2,3\}$ から $\{1,2,3\}$ への写像で、単射なものをすべて列挙しなさい。

[**課題 6**] $(0,\infty)$ から $(-\infty,0)$ への写像で、単射であるものを 1 つ与えなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート 12 2018 年　　月　　日

場合分けによって与えられる写像 （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

写像を 1 つの式で定義することが困難な場合、場合分けによって定義することになる。例えば、x が有理数のとき x を対応させて、x が無理数のとき x^3 を対応させる $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像は次のような表現形式で定義することになる。

写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$(*)\qquad f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}), \\ x^3 & (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ のとき}). \end{cases}$$

[**課題 1**] x が 1 以上の実数のとき $x + 1$ を対応させて、x が 1 未満の実数のとき $x^2 - 2x + 2$ を対応させる $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像を、写像の表現形式 $(*)$ に倣って表わしなさい。

[単射の定義]

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が**単射**であるとは、すべての $x, x' \in X$ に対して、条件

$$(\natural 1)\qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

が成り立つときをいう。

$(\natural 1)$ は異なる 2 元が f によって異なる 2 元に写されることを意味する。$(\natural 1)$ の対偶をとることにより、次の言い換えが成立する ($\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい)。

[単射の言い換え]

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるための必要十分条件は、すべての $x, x' \in X$ に対して、条件

$$(\natural 2)\qquad \boxed{} \implies \boxed{}$$

が成り立つことである。

$(*)$ によって定義される写像 f が単射か否かを調べる。そのためには、$(\natural 1)$ か $(\natural 2)$ が成り立つか否かを調べればよい。ここでは $(\natural 2)$ について調べよう。

考察のスタート

まず x, x' を定義域の $\mathbb{R}$ の中から任意にとる。そして、それらが $f(x) = f(x')$ を満たしているとする。

このとき、このような x, x' は $x = x'$ に限られるか否かを調べる。

[**課題 2**] 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい。

x, x' が有理数なのか無理数なのかによって $f(x)$, $f(x')$ の値は変わってくる。実際、

① $x \in \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{Q}$ のとき、　$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ である。
② $x \in \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき、　$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ である。
③ $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{Q}$ のとき、　$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ である。
④ $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ である。

f が単射であるためには、上の 4 つのどの場合においても $f(x) = f(x')$ から $x = x'$ が導かれなければならないが、②と③のときには必ずしも $x = x'$ にならないように思える。そのことを確認するために $x = \boxed{} \in \mathbb{Q}$ と $x' = 2^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ を考えてみる。すると、$f(x) = f(x')$ であるのに $x \neq x'$ である。こうして、写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射ではないことがわかる。

[**整理した考察結果**]

(∗) によって定義される写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\boxed{}$ でない。実際、$x = \boxed{} \in \mathbb{Q}$ と $x' = \boxed{} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対して $f(x) = \boxed{} = \left(\boxed{}\right)^3 = f(x')$ であるが、$x \neq x'$ である。

[**課題 3**] 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式・記号を書き入れなさい。

次の式で定義される写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射である。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}), \\ x + 1 & (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ のとき}). \end{cases}$$

これを示す。そのために、$x, x' \in \mathbb{R}$ が $f(x) = f(x')$ を満たしているとする。

① $x \in \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ であるから、$f(x) = f(x')$ より $\boxed{} = \boxed{}$ を得る。

② $x \in \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ であるから、$f(x) = f(x')$ は $\boxed{} = \boxed{}$ となる。しかし、左辺は $\boxed{}$ 数で、右辺は $\boxed{}$ 数であるから、この等式は起こりえない。つまり、$f(x) = f(x')$ の状況では ②の場合は生じない。

③ $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{Q}$ のときも $\boxed{}$ の場合と同様に生じないことがわかる。

④ $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ x' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = \boxed{}$, $f(x') = \boxed{}$ であるから、等式 $f(x) = f(x')$ は $\boxed{} = \boxed{}$ となる。したがって、$\boxed{} = \boxed{}$ を得る。

以上より、$x, x' \in \mathbb{R}$ について、$f(x) = f(x')$ であれば $x = x'$ となることがわかったから、f は $\boxed{}$ である。

[**課題 4**] 写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$f(n) = \begin{cases} n + 1 & (n \text{ は偶数のとき}), \\ \sqrt{n} & (n \text{ は奇数とき}). \end{cases}$$

この写像は単射であるか否かを調べなさい (整理した考察結果を下の枠内に書くこと)。

集合と位相１・読み書きワークシート 13 2018 年　月　日
命題を否定する１ （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とする。

命題 $(*)$「$n \in \mathbb{N},\ n > 100 \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$」

は「自然数 n が 100 よりも大きければ (いつでも)、$|a_n - 2018| < \varepsilon_0$ である」という意味の命題である。その否定は、100 よりも大きい自然数 n の中に $|a_n - 2018| < \varepsilon_0$ を満たさないものがある、ということであるから、命題 $(*)$ の否定命題は

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > 100,\ |a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$$

である。これは、

「$n > 100$ であり、かつ、$|a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$ である」を満たす自然数 n が存在する

という意味の命題である。

[**課題１**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*1)$ を考える。

$(*1)$ $$n \in \mathbb{N},\ n > 100 \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*1)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*1)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題２**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*2)$ を考える。

$(*2)$ $$n \in \mathbb{N},\ n > 100 \implies |a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*2)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*2)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題３**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*3)$ を考える。

$(*3)$ $$n \in \mathbb{N},\ n < 100 \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*3)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*3)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

$a,\ b,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ を実数とする。

命題 ($\sharp$)「$|a-2018|<\varepsilon_1,\ |b-2018|<\varepsilon_2$」

は「$|a-2018|<\varepsilon_1$ であり、かつ、$|b-2018|<\varepsilon_2$ である」という意味の命題である。その否定は $|a-2018|<\varepsilon_1$ と $|b-2018|<\varepsilon_2$ のうちどちらかが成り立たないということであるから、命題 ($\sharp$) の否定命題は

$$|a-2018|\geq\varepsilon_1 \quad \text{or} \quad |b-2018|\geq\varepsilon_2$$

である。これは、

$|a-2018|\geq\varepsilon_1$ であるか、または、$|b-2018|\geq\varepsilon_2$ の少なくともどちらかである

という意味の命題である。

[**課題4**] $a,\ b,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ を実数とし、次の命題 ($*4$) を考える。

($*4$) $$|a-2018|<\varepsilon_1,\ |b-2018|<\varepsilon_2$$

(1) 命題 ($*4$) の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 ($*4$) の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題5**] $a,\ b,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ を実数とし、次の命題 ($*5$) を考える。

($*5$) $$|a-2018|<\varepsilon_1,\ |b-2018|\geq\varepsilon_2$$

(1) 命題 ($*5$) の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 ($*5$) の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題6**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 ($*6$) を考える。

($*6$) $$m,n\in\mathbb{N},\ m,n>100 \implies |a_m-2018|<\varepsilon_0,\ |a_n-2018|<\varepsilon_0$$

(1) 命題 ($*6$) の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 ($*6$) の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート 14 2018 年　月　日
命題を否定する 2 （１・２・３・４・５）

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とする。

命題 $(*)$「$\exists\, N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$」

は条件「自然数 n が N よりも大きければ (いつでも)、$|a_n - 2018| < \varepsilon_0$ である」を満たす自然数 N が存在する、という意味の命題である。その否定は、どんな自然数 N を与えても、N よりも大きい自然数 n の中に $|a_n - 2018| < \varepsilon_0$ を満たさないものがある、ということであるから、命題 $(*)$ の否定命題は

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N,\ |a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$$

である。これを文章で書くと次のようになる。

どんな自然数 N に対しても、「「$n > N$ であり、かつ、$|a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$ である」を満たす自然数 n が存在する」

[**課題１**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*1)$ を考える。

$(*1)$ $$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*1)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*1)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題２**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*2)$ を考える。

$(*2)$ $$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| \geq \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*2)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*2)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題３**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、ε_0 を正の実数とし、次の命題 $(*3)$ を考える。

$(*3)$ $$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \in \mathbb{N},\ n < N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon_0$$

(1) 命題 $(*3)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*3)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする。

$$\text{命題} (\sharp)「\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_N - 2018| < \varepsilon」$$

は、どんな正の実数 ε に対しても、「$|a_N - 2018| < \varepsilon$ を満たす自然数 N が存在する」という意味の命題である。その否定は、ある正の実数 ε に対しては「$|a_N - 2018| < \varepsilon$ を満たす自然数 N が存在する」が成り立たないということであるから、命題 $(\sharp)$ の否定命題は

$$\exists \varepsilon > 0\ \text{ s.t. }\ \forall N \in \mathbb{N},\ |a_N - 2018| \geq \varepsilon$$

である。これは、

条件「すべての自然数 N に対して $|a_N - 2018| \geq \varepsilon$ である」を満たす正の実数 ε が存在する

という意味の命題である。

[**課題4**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*4)$ を考える。

$(*4)$ $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_N - 2018| < \varepsilon$$

(1) 命題 $(*4)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*4)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題5**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*5)$ を考える。

$(*5)$ $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_N - 2018| = \varepsilon$$

(1) 命題 $(*5)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*5)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題6**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*6)$ を考える。

$(*6)$ $$\forall \varepsilon < 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ |a_N - 2018| < -\varepsilon$$

(1) 命題 $(*6)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*6)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

集合と位相１・読み書きワークシート 15 2018 年　月　日
命題を否定する３ （ 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 ・ 5 ）

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列 を正の実数とする。

命題 $(*)$「$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon$」

はどんな正の実数 ε に対しても、“s.t. (= such that)” 以下の条件を満たす自然数 N が存在する、という意味の命題である。その否定は、ある正の実数 ε に対しては、どんな自然数 N を与えても、“s.t.” 以下の条件が満たされないということであるから、命題 $(*)$ の否定命題は

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \text{ s.t. }\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N,\ |a_n - 2018| \geq \varepsilon$$

である。これは、

ある正の実数 ε については、どんな自然数 N を与えても、

「「$n > N$ であり、かつ、$|a_n - 2018| \geq \varepsilon$ である」を満たす自然数 n が存在する」

という意味の命題である。

[**課題１**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*1)$ を考える。

$(*1)$ $$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon$$

(1) 命題 $(*1)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*1)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題２**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*2)$ を考える。

$(*2)$ $$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |a_n - 2018| < \varepsilon$$

(1) 命題 $(*2)$ の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(2) 命題 $(*2)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

[**課題３**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし、次の命題 $(*3)$ を考える。

$(*3)$ $$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - 2018| \leq \varepsilon$$

命題 $(*3)$ の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するとは、

$(\sharp)$ $$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列であるから、a_n の n が自然数であることは暗黙の了解事項である。そのため、通常、$n \in \mathbb{N}$ の部分は省略される。($\sharp$) は、どんな正の実数 ε に対しても、"s.t. (= such that)" 以下の条件を満たす自然数 N が存在する、という意味の命題である。その否定は、ある正の実数 ε に対しては、どんな自然数 N に対しても、条件「N よりも大きなすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」が成り立たないということであるから、命題 ($\sharp$) の否定命題は

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall\, N \in \mathbb{N}, \ \ \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N, \ |a_n - \alpha| \geq \varepsilon$$

であることがわかる (通常、$\exists$ と s.t. が 2 度現れることを避けるため、2 度目の方は "$n > N$, $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ for some $n \in \mathbb{N}$"のように表現されることが多い)。これは、

ある正の実数 ε に対しては、どんな自然数 N を与えても、
$n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ を満たす自然数 n が存在する

という意味の命題である。

[**課題 4**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列、α を実数とし、次の命題 ($*4$) を考える。

($*4$) $$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N \ \Longrightarrow \ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

(1) 命題 ($*4$) を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

(2) 命題 ($*4$) の否定命題を書きなさい (論理記号を使ってよい)。

(3) 命題 ($*4$) の否定命題を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、文章で書きなさい。

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとは、それがある実数 α に収束するということである。したがって、実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないとは、どのような実数 α にも収束しないということである。

[**課題 5**] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする。

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないとは、どういう条件が満たされるときか？論理記号を使って表現しなさい。

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束しないとは、どういう条件が満たされるときか？その条件を $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを使わずに、「〜しない」「〜ではない」という否定的な言葉を使わずに、文章で書きなさい。