ホップ代数の積分を用いて定義される３次元多様体の不変量 (概説)

和久井 道久 (関西大学)

November 14, 2007
at Waseda University

Contents

体 k 上の**ホップ代数**とは、k 上の代数 A であって、

- 余積 $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ (代数準同型)
- 余単位射 $\varepsilon : A \longrightarrow k$ (代数準同型)
- 対合 $S : A \longrightarrow A$ (反代数準同型)

が指定されているものをいう。

<u>例 1</u>　群 G の群環 $A = kG$ に対して、

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1} \quad (g \in G)$$

と定めると、$(A, \Delta, \varepsilon, S)$ はホップ代数になる。

<u>例 2</u>　リー環 L の普遍包絡代数 $A = U(L)$ に対して、

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x \quad (x \in L)$$

と定めると、$(A, \Delta, \varepsilon, S)$ はホップ代数になる。

★ 有限次元左 A-加群全体のなす圏 **$\mathsf{Rep}(A)$ は左剛的モノイダル圏**をなす。

- $V, W \in \mathsf{Rep}(A)$ に対して、$V \otimes W \in \mathsf{Rep}(A)$

$$a \cdot v \otimes w = \sum a^{(1)} v \otimes a^{(2)} w$$

- $k \in \mathsf{Rep}(A)$

$$a \cdot x = \varepsilon(a) x$$

- $V \in \mathsf{Rep}(A)$ に対して、$V^* \in \mathsf{Rep}(A)$

$$(a \cdot f)(v) = f(S(a)v) \quad (f \in V^*,\ v \in V).$$

♦ $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ (左 A-加群として)

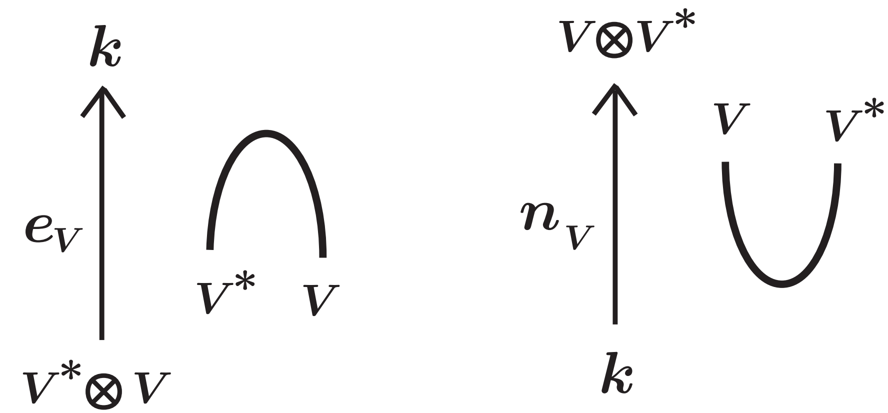
♦ $k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$ (左 A-加群として)

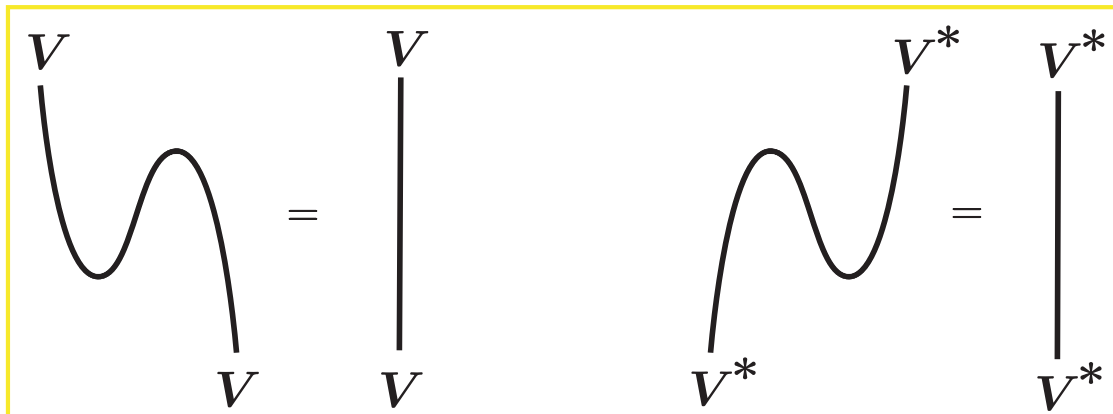
♦ $e_V : V^* \otimes V \longrightarrow k, \quad e_V(f \otimes v) = f(v)$

$n_V : k \longrightarrow V \otimes V^*, \quad n_V(1) = \sum v_i \otimes v_i^*$

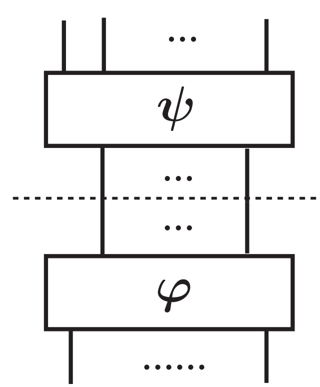
(但し、$\{v_i\}, \{v_i^*\}$ は互いに双対的な基底) は左 A-加群準同型である。

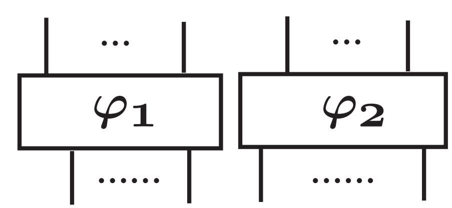
e_V, n_V は右のようなダイアグラムで表現できる。
すると、下図の等式が成立する (left ridigity)。





但し、上の各等式の右辺は恒等写像を、左辺は次の規則 (★) に従って合成して得られる写像を表わしている。

(★) $\psi\circ\varphi =$ 

$\varphi_1\otimes\varphi_2 =$ 

一般に、$V, W \in \mathsf{Rep}(A)$ に対して、

$$V \otimes W \not\cong W \otimes V$$

であるが、可逆元 $R = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ であって、

(QT1) $\Delta^{\mathrm{cop}}(a) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}$ $(a \in A)$

を満たすものが存在すれば、左 A-加群の間の自然な同型

$$c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$
$$c_{V,W}(v \otimes w) = \sum_{i \in I} b_i w \otimes a_i v$$

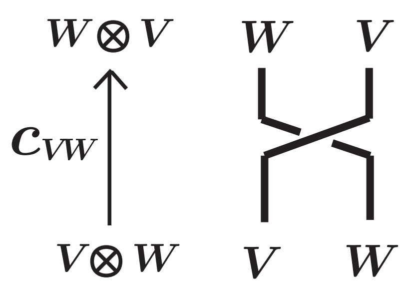
が定義される。

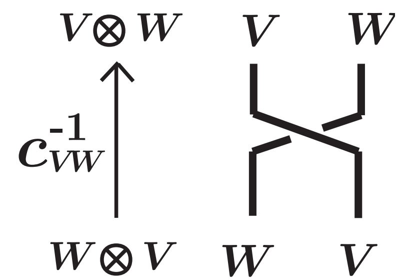
(QT1) に加えて次の２条件も成り立つとき、R を A の**普遍 R 行列**といい、(A, R) を**準三角ホップ代数**という (**Drinfeld**)。

(QT2) $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}$

(QT3) $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$

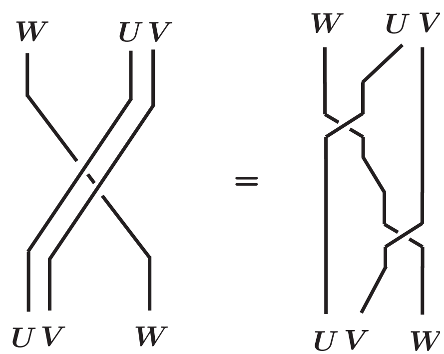
★ 準三角ホップ代数 (A, R) の表現圏 $\mathrm{Rep}(A)$ は左剛的組み紐モノイダル圏である：$c_{V,W}$, $c^{-1}_{V,W}$ をダイアグラム



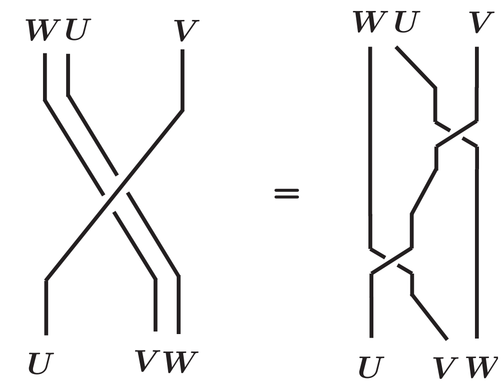


で表わすと、

(QT2) $\Rightarrow$



(QT3) $\Rightarrow$

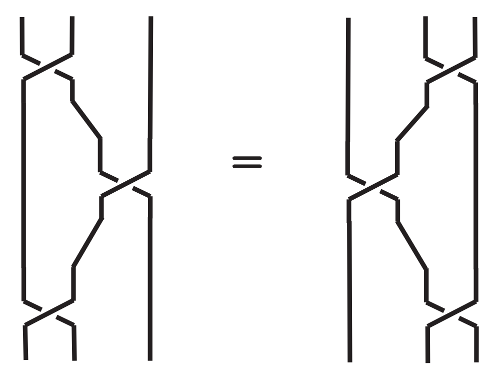


★ (QT1)+(QT2)

$\Longrightarrow$ 組み紐関係式

(Yang-Baxter 方程式)

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$



補題 1 (**Drinfeld, Radford**) 体 k 上の準三角ホップ代数 $(A, R = \sum a_i \otimes b_i)$ について次が成立する。

(1) 対合 S は全単射である。

(2) $R^{-1} = (S \otimes \mathrm{id})(R)$

(3) $R = (S \otimes S)(R)$

(4) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(R) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(R)$

(5) $u = \sum S(b_i)a_i \in A$ とおくと、u は可逆であり、

(i) $S^2(a) = uau^{-1} \quad (a \in A)$

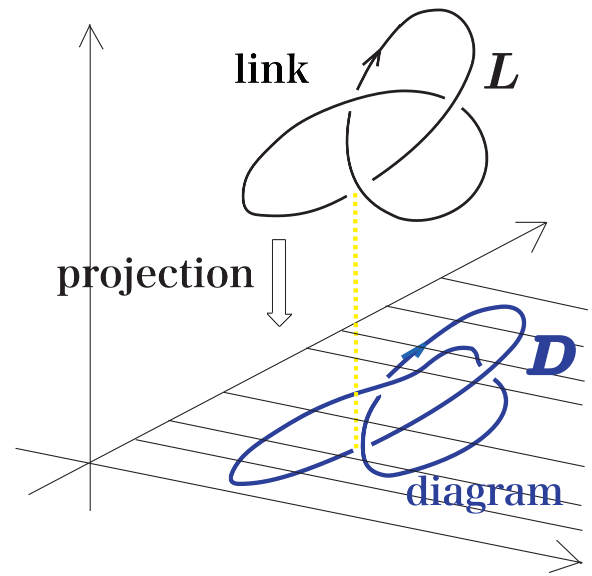
(ii) $u^{-1} = \sum S^{-1}(b_i)S(a_i)$

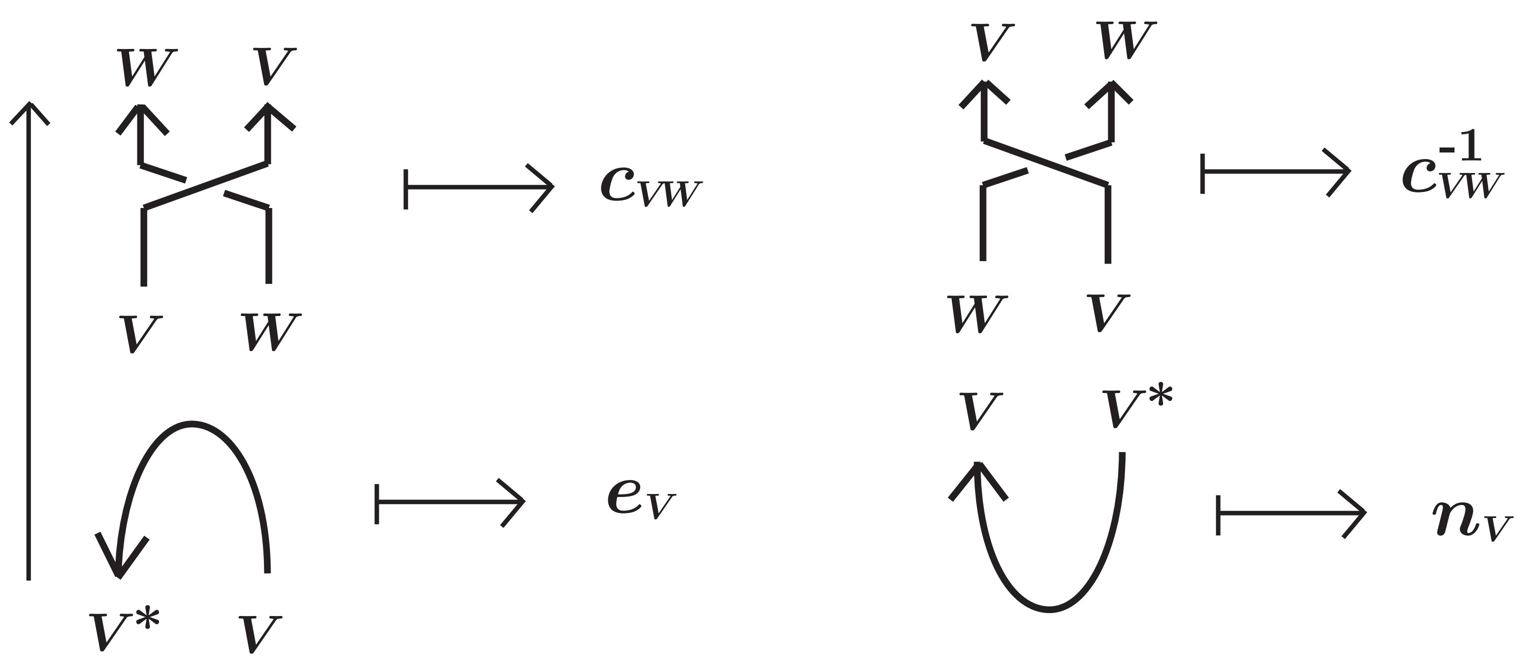
(iii) $\Delta(u) = (u \otimes u)(R_{21}R)^{-1} = (R_{21}R)^{-1}(u \otimes u)$

u を (A, R) の **Drinfeld 元**と呼ぶ。

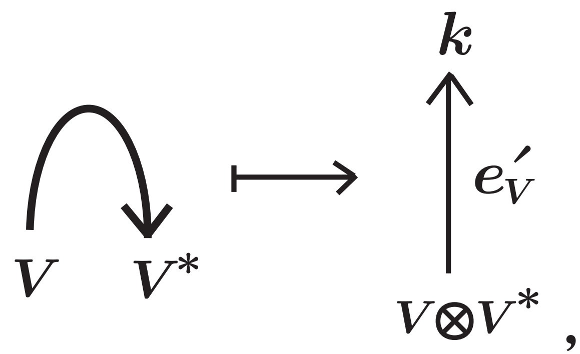
Reshetikhin-Turaev による絡み目不変量の構成方法

① 向きづけられた絡み目 L に対して
ダイアグラム D をとる。
② D はある高さ関数に関して一般の
位置にあるようにとる。
③ D の各成分に A の表現を指定する。
④ D を水平線で区切り、
左 A-加群準同型を対応させる。
⑤ 最後に、準同型の合成をとる。

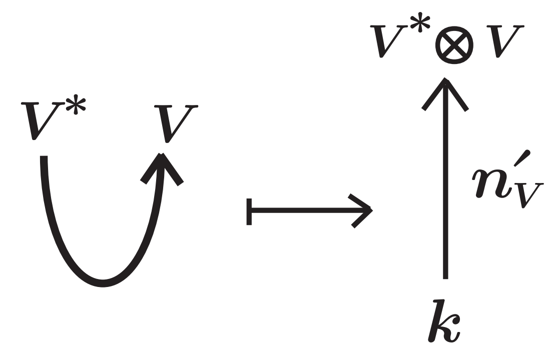




問



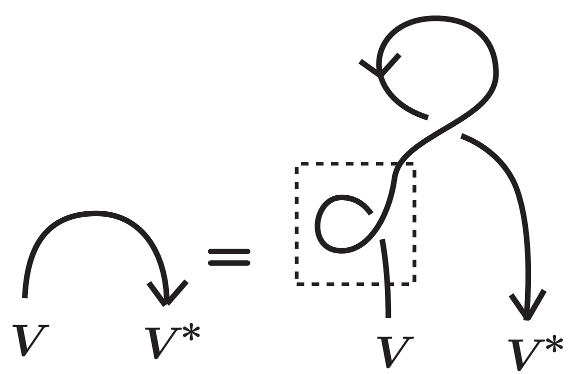
,

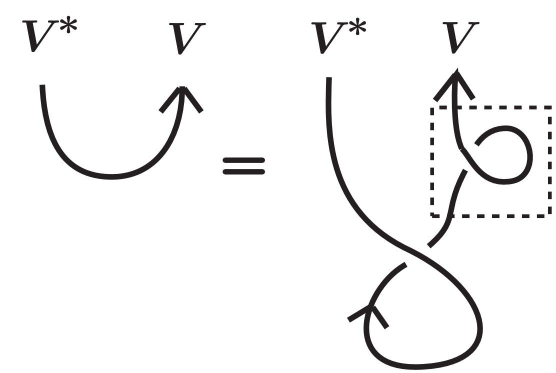


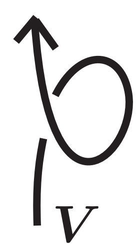
をどう定義すればよいか？一般に、

$$
\begin{array}{ccccccc}
k & \longrightarrow & V^* \otimes V, & & V \otimes V^* & \longrightarrow & k \\
\Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
1 & \longmapsto & \sum v_i^* \otimes v_i & & x \otimes f & \longmapsto & f(x)
\end{array}
$$

は左 A-加群準同型にならない。





n'_V, e'_V を定義する $\Longleftrightarrow$  に対応する準同型 θ_V を定義する

$\theta_V : V \longrightarrow V$ が $v \in A$ の左作用によって与えられているならば、$v \in A$ は可逆であって、次を満たしているべきである：

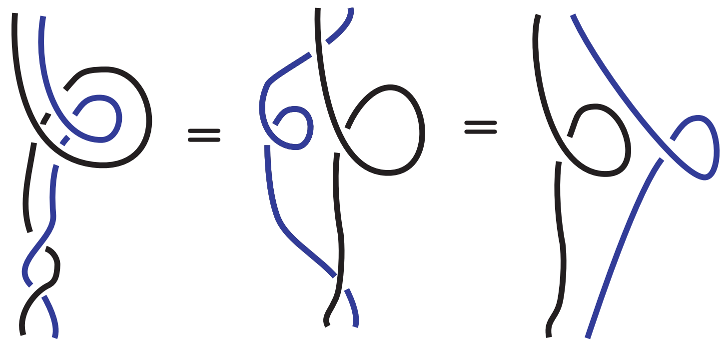
(Ribbon1) $\quad v \in Z(A) \quad (Z(A)$ は A の中心)

(Ribbon2) $\quad \Delta(v) = (v \otimes v)(R_{21}R)^{-1}$

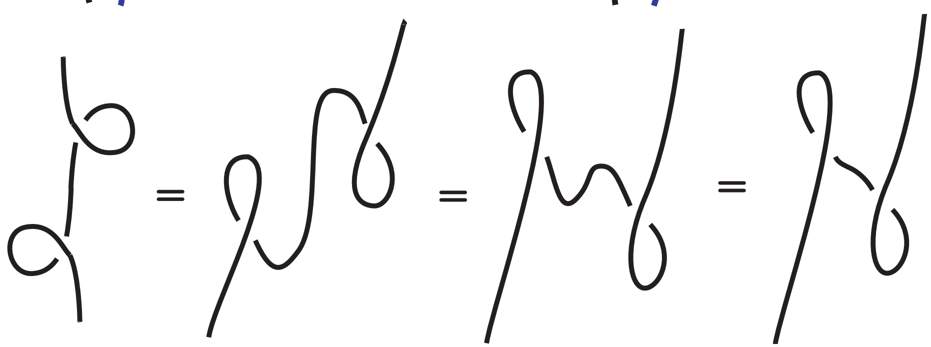
(Ribbon3) $\quad v^2 = S(u)u \quad (u$ は Drinfeld 元)

このような v を準三角ホップ代数 (A, R) のリボン元という。

(Ribbon2) の背景



(Ribbon3) の背景



補題 2 $v \in A$ が (A, R) のリボン元ならば、

(1) $\varepsilon(v) = 1$

(2) $uv^{-1} \in G(A)$ (*i.e.* $\Delta(uv^{-1}) = uv^{-1} \otimes uv^{-1}$)

(3) $S(v) = v$

(証明)

(1) $\Delta(v) = (v \otimes v)(R_{21}R)^{-1}$ の両辺に $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ を作用させて、

$$v = \varepsilon(v)v. \qquad \therefore \varepsilon(v) = \varepsilon(v)^2.$$

v は可逆なので、$\varepsilon(v) = 1$.

(2) 補題 1 (5)(iii) と (Ribbon2) よりしたがう。

(3) $v^2 = S(u)u$ より $uv^{-1} = S(u^{-1})v$.

(2) により $S(uv^{-1}) = vu^{-1}$ である。

一方、$S^2(u) = u$ より、

$$S(S(u^{-1})v) = S(v)S^2(u^{-1}) = S(v)u^{-1}.$$

故に、$vu^{-1} = S(v)u^{-1}$ となり、$v = S(v)$. □

命題 3 (A, R) が体 k 上の有限次元準三角ホップ代数のとき、
$v \in A$ がリボン元
$\iff$ 次の3条件を満たす $g \in G(A)$ が存在する

(i) $v = g^{-1}u$

(ii) $S(u) = g^{-2}u$

(iii) $g^{-1}u \in Z(A)$

(証明)

「$\Longrightarrow$」は補題2から従う。「$\Longleftarrow$」を示す。u は任意の $a \in G(A)$ と可換 ($\because$ $S(a) = a^{-1}$, $S^2(a) = uau^{-1}$ より、$a = S^2(a) = uau^{-1}$).

$$\therefore \; v^2 = g^{-1}ug^{-1}u = g^{-2}uu = S(u)u.$$

また、

$$\begin{aligned}\Delta(v) &= \Delta(g^{-1})\Delta(u) \\ &= (g^{-1} \otimes g^{-1})(u \otimes u)(R_{21}R)^{-1} \quad (\because \text{補題 1(5)(iii)}) \\ &= (v \otimes v)(R_{21}R)^{-1}. \end{aligned}$$

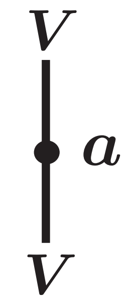
$\square$

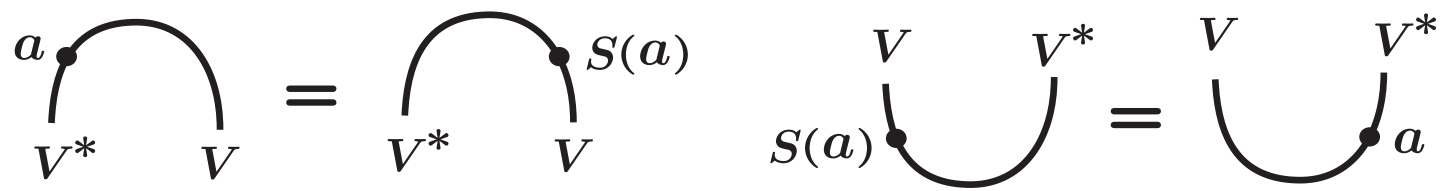
表現を使わずに枠付き絡み目の不変量を構成するためのアイデア

$a \in A$ の左作用

$$\rho(a) : V \longrightarrow V$$

を右のようなグラフで表現すると、

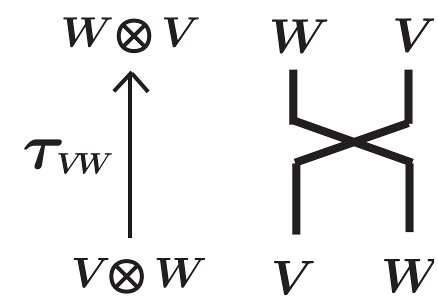
$\rho(a) =$ 

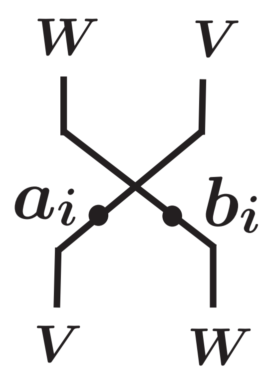


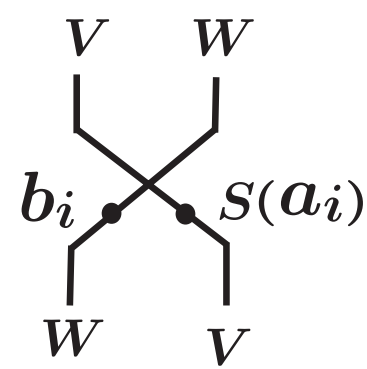
線形写像 $\tau_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$,

$$\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$$

を右図のようなグラフで表わすと、

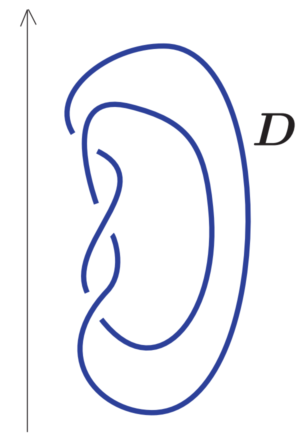


$c_{VW} = \sum$ 

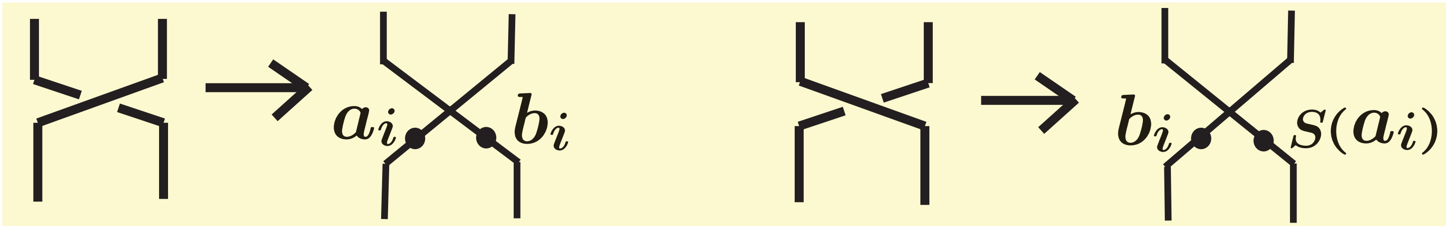
$c^{-1}_{VW} = \sum$ 

ビーズスライド

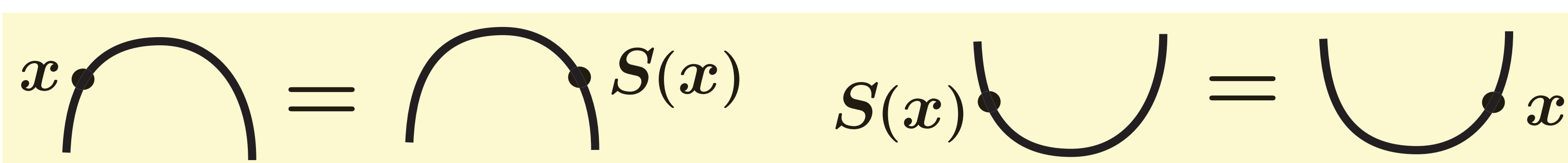
- 枠付き絡み目 L のダイアグラム $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ をある高さ関数に関して一般の位置にあるようにとる。



- $R = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$ と書き、各交差点を次の規則で置き換える。



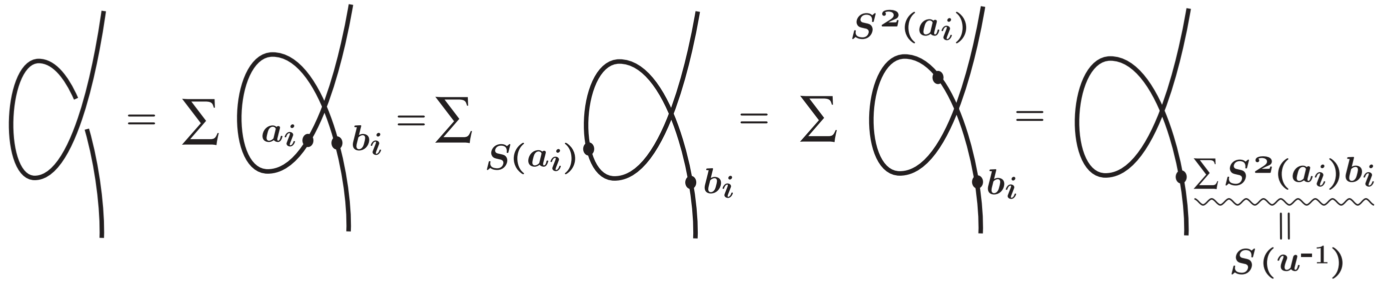
- 次のルールに従ってビーズをスライドさせて、各成分上のある１点に寄せ集める。

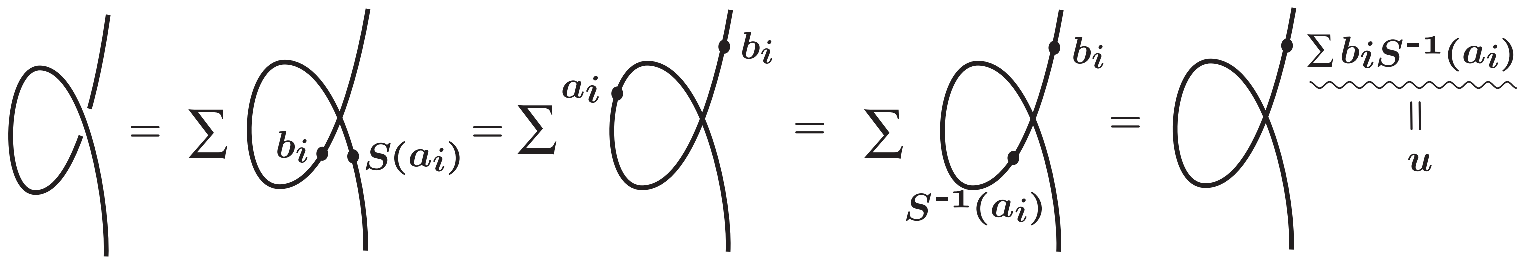


- A 上のある関数 χ で値をとる。

問 この方法で枠付き絡み目の不変量を得るには、χ はどのような条件を満たしていればよいか？

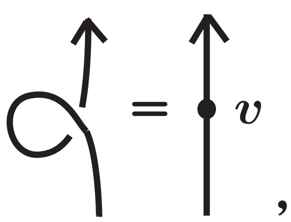
ビーズスライドによる正のカール、負のカールの値

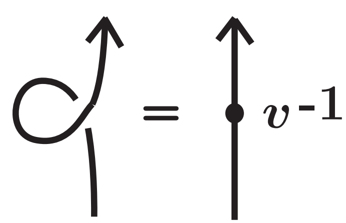




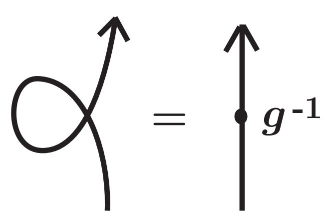
ここで、$vu^{-1} = g^{-1}$,

$$v^{-1}S(u) = S(v^{-1})S(u) = S(uv^{-1}) = S(g) = g^{-1}$$

であるが、



であって欲しいから、



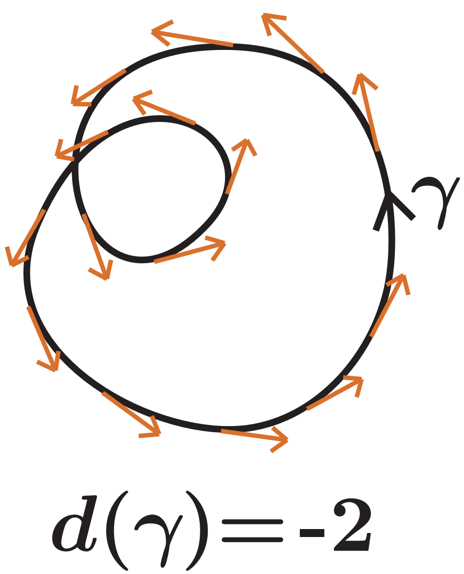
と考えると辻褄があう。

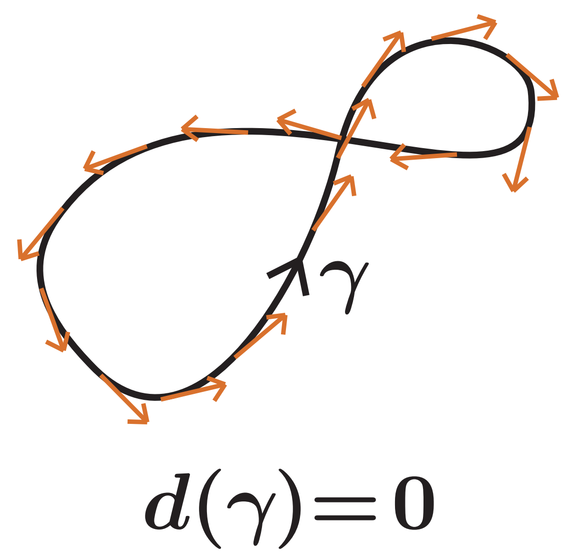
Whitney degree

はめ込み $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ に対して、整数 $d(\gamma)$ を

$$d(\gamma) = \left(\begin{array}{l} \gamma(1) \text{ から出発して } \gamma(S^1) \text{ 上を一周して再び} \\ \gamma(1) \text{ に戻ってくる間に、} \gamma \text{ の接ベクトルが} \\ \text{単位円周上を正味何周するかを表わす回数} \end{array} \right)$$

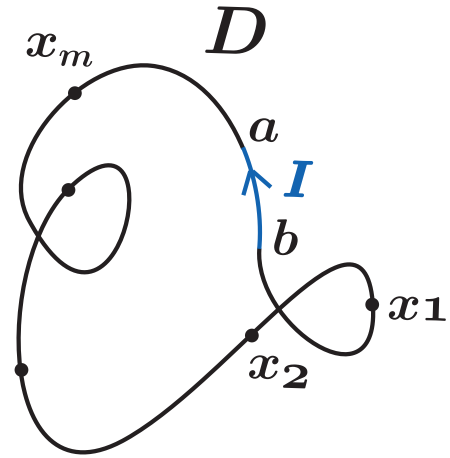
により定義する。但し、時計周りに 1 周を $+1$, 反時計周りに 1 周を -1 と数える。$d(\gamma)$ を γ の **Whitney degree** と呼ぶ。





Whitney degree は γ の正則イソトピー不変量である。

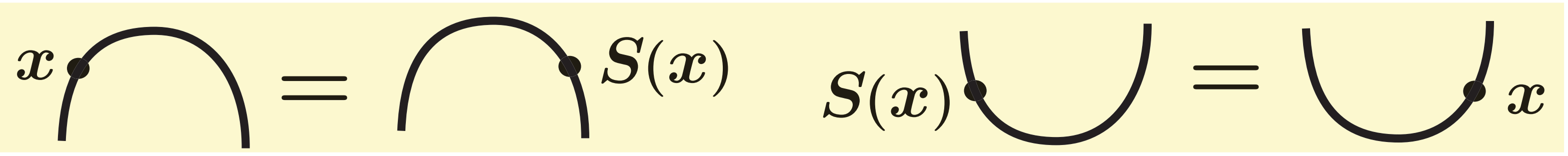
A の元で装飾されたはめ込みの不変量



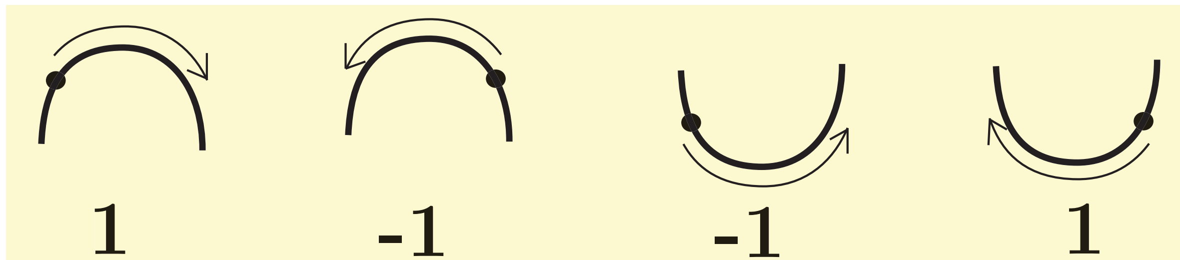
D を、A の元とともに有限個のビーズが配置された、$\mathbb{R}^2$ にはめ込まれた円周 S^1 であって、ある高さ関数に関して一般の位置にあるものとする (ビーズは極大点、極小点、交差点を除く部分に配置)。

弧 $I \subset D$ を、極大点、極小点、交差点およびビーズが含まれないようにとる。

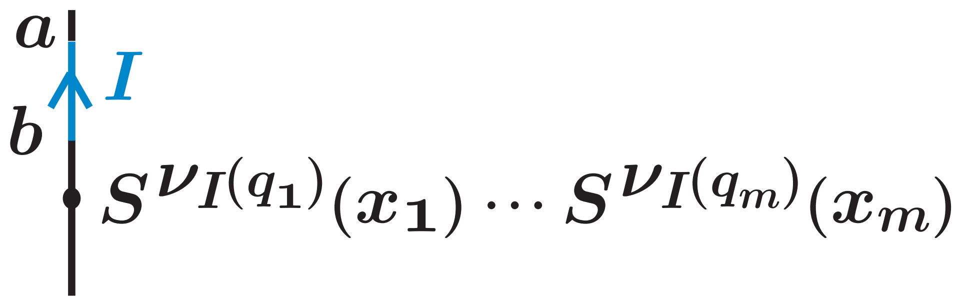
ビーズが置かれている D 上の点を、($D - I$ の中で見たときに) b に近い方から、順に $q_1, \cdots, q_m$ とし、各点 q_j 上に置かれている A の元を x_j とする。各ビーズを、$D - I$ の中をスライドさせながら、点 b まで次の規則で移動させる。



ビーズ q_j を点 b まで移動させるとき、極小点と極大点を通過する回数を、次の規則で数えたものを $\nu_I(q_j)$ とおく。



すべてのビーズを b に寄せ集めると、次のようになる：



b から a へ I に沿って矢印をつけることにより、D に向きを入れたとき、そのはめ込みの Whitney degree を d として、

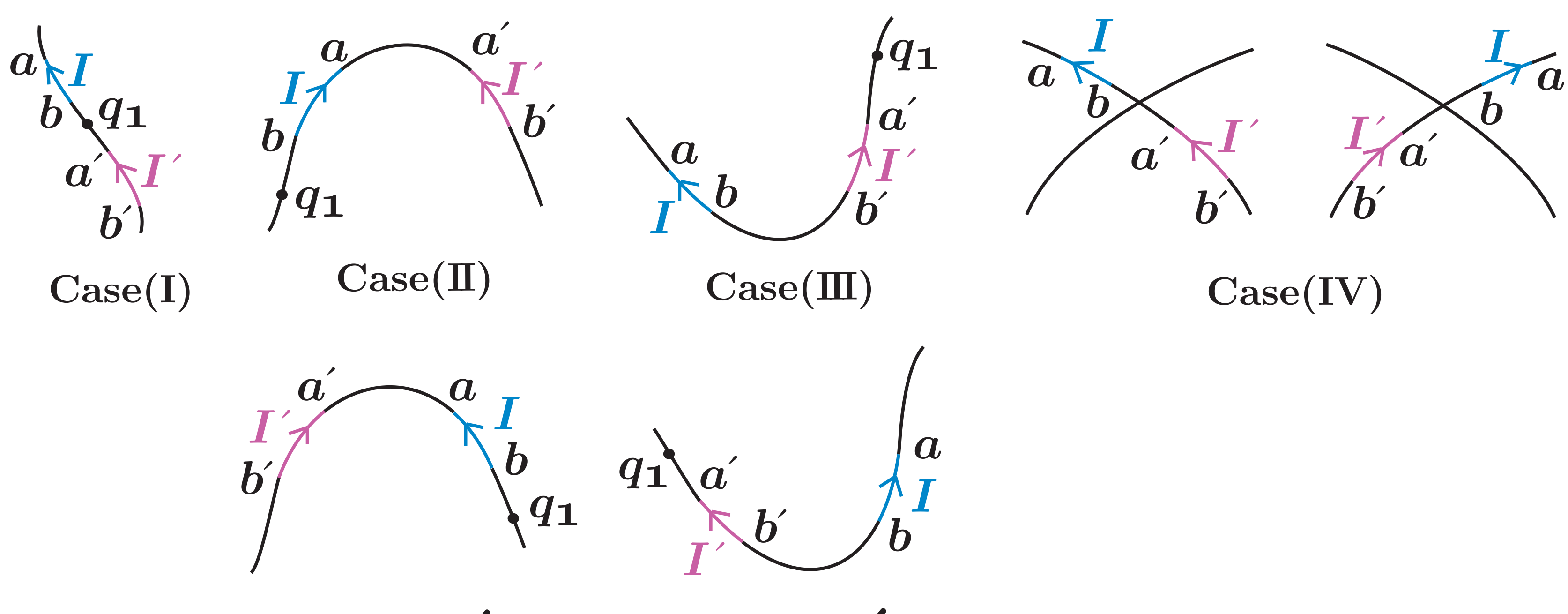
$$\boxed{F(D,I)=\sum\chi(S^{\nu_I(q_1)}(x_1)\cdots S^{\nu_I(q_m)}(x_m)g^d)}$$

と定める。

I の選び方によらないための条件

I' を I と同じ条件を満たす D の弧とする。I' と I が「連続しているとき」に、$F(D,I)=F(D,I')$ となるための条件を求めればよい。

I' と I が「連続する」状況としては次の４つの場合が考えられる。



Case(I)　Case(II)　Case(III)　Case(IV)

Case(II)′　Case(III)′

★ Case(IV) の下では、明らかに、$F(D,I)=F(D,I')$.

Case(I) の下で不変となるための条件

$$F(D,I) = \sum \chi(x_1 S^{\nu_I(q_2)}(x_2)\cdots S^{\nu_I(q_m)}(x_m)g^d),$$
$$F(D,I') = \sum \chi(S^{\nu_I(q_2)}(x_2)\cdots S^{\nu_I(q_m)}(x_m)S^{\nu_{I'}(q_1)}(x_1)g^d)$$

極大点、極小点を通過するときの Whitney degree の変化

0.5　　-0.5　　-0.5　　0.5

bead slide の下での S の exponentの変化

S　　S^{-1}　　S^{-1}　　S

より、$\nu_{I'}(q_1) = 2d$ である。

$$\begin{aligned}\chi(xS^{2d}(x_1)g^d) &= \chi(xu^d x_1 u^{-d} g^d) \qquad (\because S^2(a) = uau^{-1}) \\ &= \chi(xu^d x_1 v^{-d}) = \chi(xv^{-d}u^d x_1) \\ &= \chi(xg^d x_1)\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{(Case(I) で不変)} \iff \forall a,b \in A,\ \chi(ab) = \chi(ba)}$

Case(II) の下で不変となるための条件

$$F(D,I) = \sum \chi(S^{\nu_I(q_1)}(x_1)\cdots S^{\nu_I(q_m)}(x_m)g^d),$$

$$F(D,I') = \sum \chi(S^{\nu_{I'}(q_m)}(x_m)\cdots S^{\nu_{I'}(q_1)}(x_1)g^{-d})$$

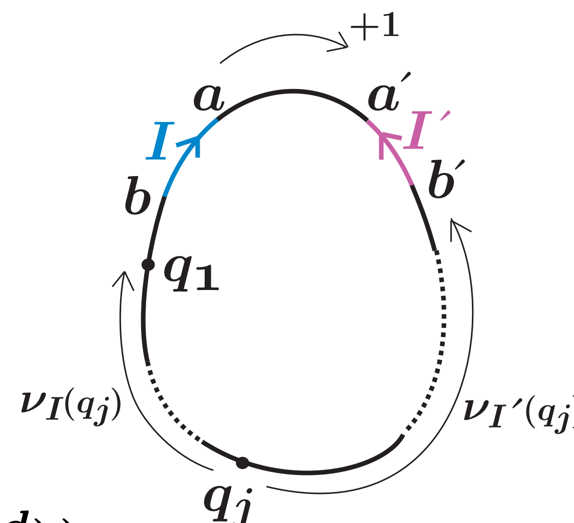
となる。ここで、$j = 1, \cdots, m$ に対して

$$\nu_I(q_j) - \nu_{I'}(q_j) + 1 = 2d$$

であるから、

$$S^{\nu_{I'}(q_m)}(x_m)\cdots S^{\nu_{I'}(q_1)}(x_1)$$

$$= S^{-2d+1}\big(S^{\nu_I(q_1)}(x_1)\cdots S^{\nu_I(q_m)}(x_m)\big).$$



$$\begin{aligned}\chi(S^{-2d+1}(x)g^{-d}) &= \chi(S(u^{-d}xu^d)S(g^d)) \\ &= \chi(S(g^d u^{-d}xu^d)) = \chi(S(v^{-d}xu^d)) \\ &= \chi(S(xg^d))\end{aligned}$$

より、

$\therefore$ $\boxed{\text{(Case(II) で不変)} \iff \forall a \in A,\ \chi(S(a)) = \chi(a)}$

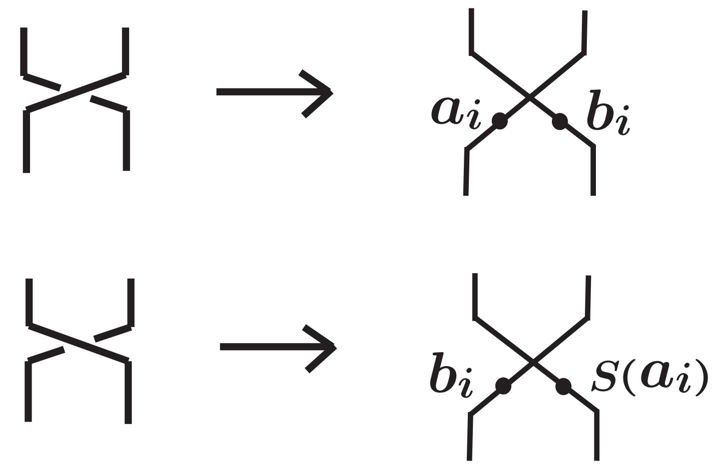
枠付き絡み目の HKR 不変量

$$\mathsf{Cocom}(A^*) = \{\ p \in A^* \mid p(ab) = p(ba)\ \},$$

$$\mathsf{Cocom}_S(A^*) = \{\ p \in \mathsf{Cocom}(A^*) \mid p \circ S = p\ \}$$

とおき、$\chi \in \mathsf{Cocom}_S(A^*)$ とする。

枠付き絡み目 L のダイアグラム $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ をある高さ関数に関して一般の位置にあるようにとり、各交差点を右のように置き換えて、ビーズで装飾された



D_j $(j = 1, \cdots, m)$ のはめ込みを作る。但し、$R = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$. このとき、各 D_j 上に弧 I_j を取り、

$$\boxed{\mathsf{TR}(D) = \sum_{i_{\mathsf{P}_1}, \cdots, i_{\mathsf{P}_k} \in I} \prod_{j=1}^{n} F((D_j, i_{\mathsf{P}_1}, \cdots, i_{\mathsf{P}_k}); I_j)}$$

は L の位相不変量となる (Hennings, Kauffman-Radford)。但し、$\mathsf{P}_1, \cdots, \mathsf{P}_k$ は D の交差点の全体を表わす。

ホップ代数の積分

体 k 上の有限次元ホップ代数 A の線形部分空間

$$\mathcal{L}_A = \{\ \Lambda \in A \mid a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda \ \ \text{for all } a \in A\ \}$$

$$\mathcal{R}_A = \{\ \Lambda \in A \mid \Lambda a = \varepsilon(a)\Lambda \ \ \text{for all } a \in A\ \}$$

の元をそれぞれ A の左積分、右積分という。$\mathcal{L}_A = \mathcal{R}_A$ となるとき、A はユニモジュラーであると呼ばれる。

Fact $\dim \mathcal{L}_A = \dim \mathcal{R}_A = 1.$ [Larson and Sweedler]

例 $A = kG$ (G は有限群) の場合、$\Lambda = \sum_{g\in G} g$ は左積分、かつ、右積分である。よって、A はユニモジュラーである。

定義により、

$$\lambda \text{ が } A^* \text{ の左積分} \iff p\lambda = p(1)\lambda \ \ \text{for all } p \in A^*$$

$$\lambda \text{ が } A^* \text{ の右積分} \iff \lambda p = p(1)\lambda \ \ \text{for all } p \in A^*$$

補題 4 $\lambda \in A^*$ について、

$$\lambda \text{ が } A^* \text{ の右積分} \iff \forall a \in A,\ \sum \lambda(a^{(1)})a^{(2)} = \lambda(a)1$$

(証明)

任意の $p \in A^*$ と任意の $a \in A$ に対して

$$(\lambda p)(a) = \sum \lambda(a^{(1)})p(a^{(2)}) = p(\sum \lambda(a^{(1)})a^{(2)}),$$

$$(p(1)\lambda)(a) = p(1)\lambda(a) = p(\lambda(a)1)$$

より、すぐにわかる。 □

命題 5 (Radford) (A, R, v) を体 k 上の有限次元リボンホップ代数とし、$v = g^{-1}u$ $(g \in G(A))$ をそのリボン元とする。A^* の右積分 λ $(\neq 0)$ をとり、$\chi := \lambda \leftharpoonup g$ とおく：
$\chi(a) = \lambda(ga)$ $(a \in A)$. このとき、

$$\chi \in \mathrm{Cocom}_S(A^*) \iff A \text{ はユニモジュラー}$$

ユニモジュラーリボンホップ代数の例 (Gelaki)

k を標数 0 の代数閉体とし、8 次元ホップ代数

$$A = k\left\langle\, g, x, y \;\middle|\; \begin{array}{c} g^2 = 1,\ x^2 = y^2 = 0, \\ gx = -xg,\ gy = -yg,\ xy = -yx \end{array} \right\rangle$$

を考える。但し、A のホップ代数構造は次で与えられる。

$$\begin{cases} g \in G(A),\ \varepsilon(g) = 1,\ S(g) = g^{-1} \\ \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x,\ \varepsilon(x) = 0,\ S(x) = -xg^{-1} \\ \Delta(y) = y \otimes g + 1 \otimes y,\ \varepsilon(y) = 0,\ S(y) = -yg^{-1} \end{cases}$$

★ $\Lambda = (1+g)xy$ は A の左積分であり、かつ、右積分である。
したがって、A はユニモジュラーである。

★ また、

$$\lambda\left(\sum_{\alpha,i,j=0,1} a_{\alpha ij} g^\alpha x^i y^j\right) = a_{011} \quad (a_{\alpha ij} \in k)$$

は A^* の右積分である。

普遍 R 行列は、$a, b, c, d \in k$ を任意として、次で与えられる：

$$\begin{aligned} R_{abcd} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0,1} (-1)^{\alpha\beta} g^{\alpha} \otimes g^{\beta} - \frac{ad-bc}{2} \sum_{\alpha,\beta=0,1} (-1)^{\alpha\beta} g^{\alpha} xy \otimes g^{\beta} xy \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0,1} (-1)^{\alpha(\beta+1)} (g^{\alpha} \otimes g^{\beta}) \\ \times (ax \otimes x + bx \otimes y + cy \otimes x + dy \otimes y) \end{aligned}$$

$R = R_{abcd}$ に対する Drinfeld 元 u は

$$u = g(1 + (c-b)xy)$$

である。$G(A) = \{1, g\}$ であるが、

① $1^{-1}u \notin Z(A),\ g^{-1}u \in Z(A)$　② $S(u) = u = g^{-2}u$

であるから、$1 = 1^{-1}u$ は (A, R) のリボン元ではないが、

$$v = g^{-1}u = 1 + (c-b)xy$$

は (A, R) のリボン元である。v^{-1} は次式で与えられる。

$$v^{-1} = 1 + (b-c)xy.$$

定理 6 (Hennings, Kauffman-Radford)
(A, R, v) を体 k 上の有限次元ユニモジュラーリボンホップ代数とし、$v = g^{-1}u$ $(g \in G(A))$ と書く。
A^* の右積分 λ $(\neq 0)$ に対して $\chi = \lambda \leftharpoondown g$ とおく。
$\lambda(v)\lambda(v^{-1}) \neq 0$ と仮定する。
向きづけられた、連結な閉 3 次元多様体 M は枠付き絡み目 L に沿って 3 次元球面 S^3 を Dehn 手術することにより得られているとし、L のダイアグラム D をとり、

$$\mathsf{INV}(M) = \Big(\lambda(v)\lambda(v^{-1})\Big)^{-\frac{c(D)}{2}} \left(\frac{\lambda(v)}{\lambda(v^{-1})}\right)^{\frac{\sigma(D)}{2}} \mathsf{TR}(D)$$

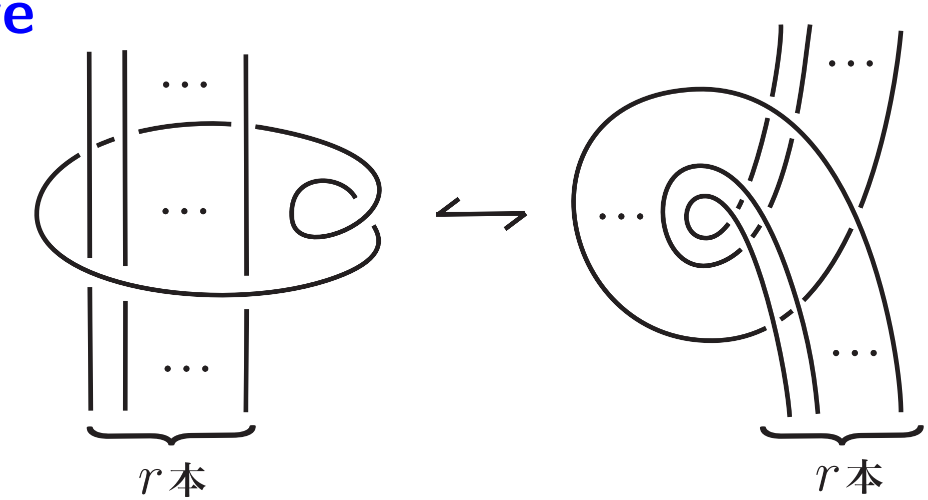
と定義する。但し、$c(D)$ は D の連結成分の個数、$\sigma(D)$ は D の絡み行列 (対角成分は L のフレーミング数) の符号である。このとき、$\mathsf{INV}(M)$ は M の位相不変量である。

Kirby moves

M, N を向きづけられた、連結な閉 3 次元多様体とし、M, N はそれぞれ枠付き絡み目 L_1, L_2 に沿って S^3 を Dehn 手術することによって得られているとする。このとき、M と N が向きを保って同相であるための必要十分条件は、L_1 と L_2 の間に、以下の変形からなる有限列が存在することである。

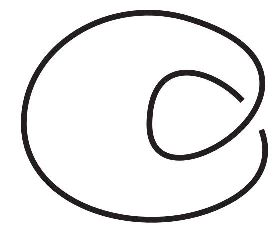
① **special Kirby (± 1)-move**

② **Kirby 1-move**



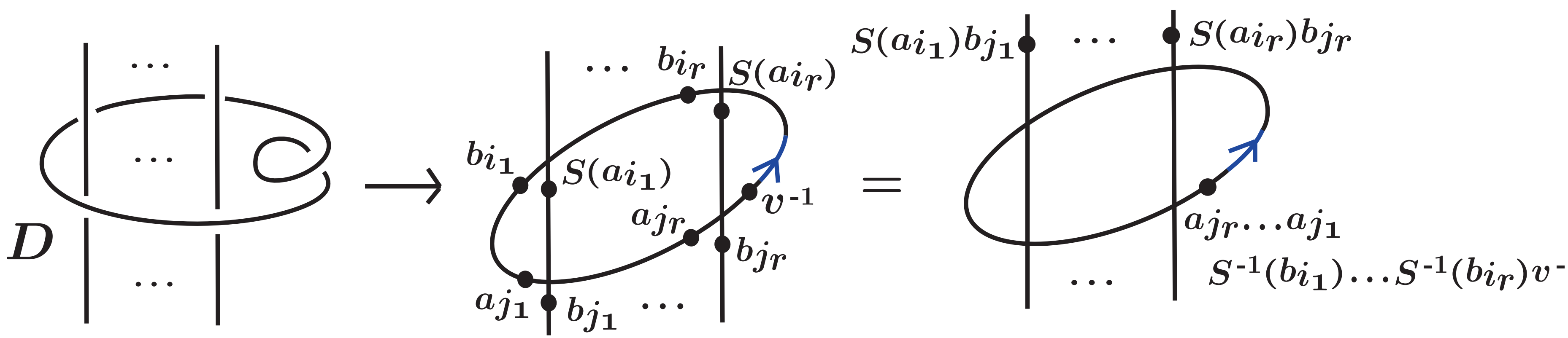
special Kirby (±1)-move での不変性

$$\begin{cases} c(D') = c(D) + 1, \\ \sigma(D') = \sigma(D) + 1, \\ \mathsf{TR}(D') = \chi(v^{-1}g^{-1}) = \chi(g^{-1}v^{-1}) = \lambda(v^{-1}) \end{cases}$$

$D' = D \sqcup$ 

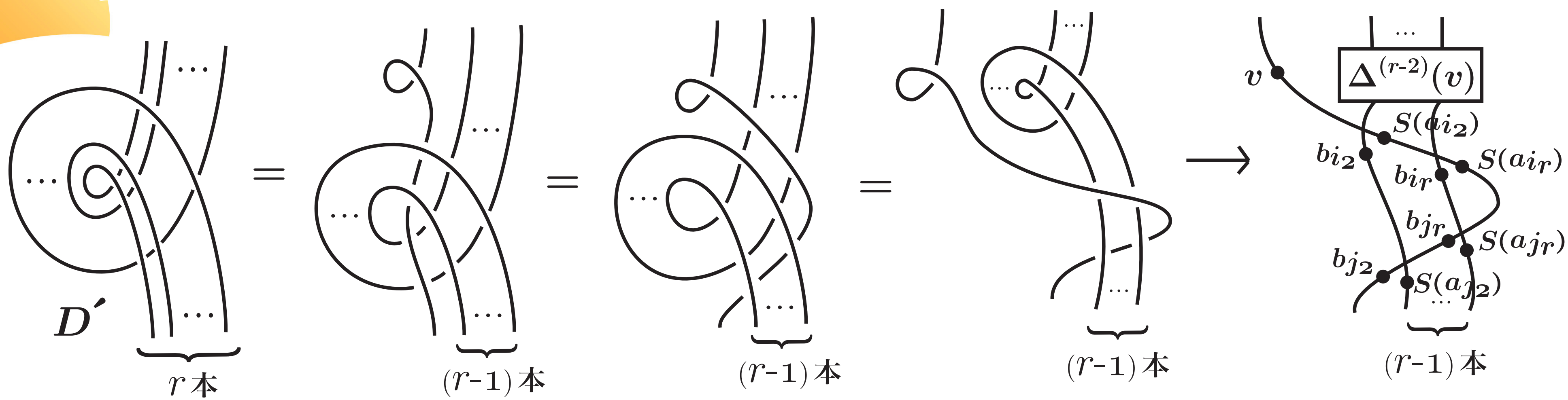
より、special Kirby $(+1)$-move の下で INV(M) の右辺は不変である。special Kirby (-1)-move についても同様。

Kirby 1-move での不変性



$$\sum \chi(a_{j_r} \cdots a_{j_1} S^{-1}(b_{i_1}) \cdots S^{-1}(b_{i_r}) v^{-1} g^{-1}) S(a_{i_1}) b_{j_1} \otimes \cdots \otimes S(a_{i_r}) b_{j_r}$$

$= \lambda(v^{-1}) \Delta^{(r-1)}(v)$ **(※途中で補題 4 を使う)**



$$\sum vS(a_{i_2})\cdots S(a_{i_r})b_{j_r}\cdots b_{j_2}\otimes\Delta^{(r-2)}(v)\big(b_{i_2}S(a_{j_2})\otimes\cdots\otimes b_{i_r}S(a_{j_r})\big)$$
$$=\Delta^{(r-1)}(v)$$

よって、

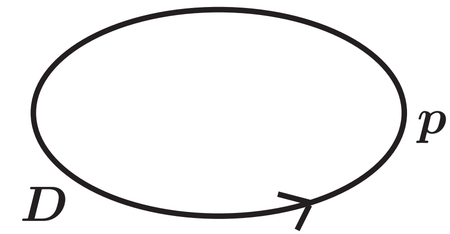
$$\mathsf{TR}(D')=\frac{1}{\lambda(v^{-1})}\mathsf{TR}(D).$$

さらに、 $\begin{cases} c(D')=c(D)-1, \\ \sigma(D')=\sigma(D)-1, \end{cases}$ であるから、

INV(M) の右辺は Kirby 1-move の下で不変である。

レンズ空間の HKR 不変量

★ レンズ空間 $L(p,1)$ は右図のダイアグラム D により表わされる枠付き絡み目に沿って S^3 を Dehn 手術することにより得られる。



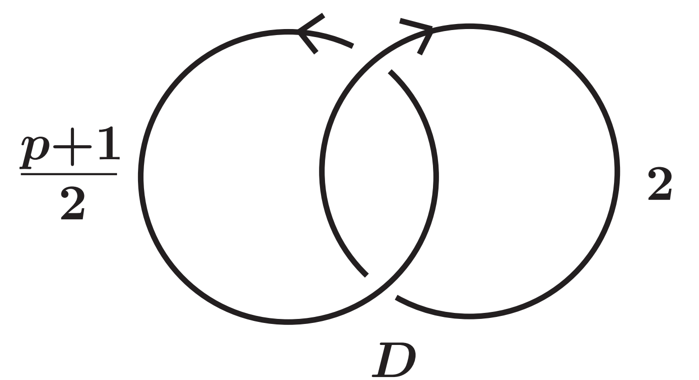
$$\mathrm{TR}(D) = \chi(v^{-p}g^{-1}) = \lambda(gv^{-p}g^{-1}) = \lambda(v^{-p}),$$

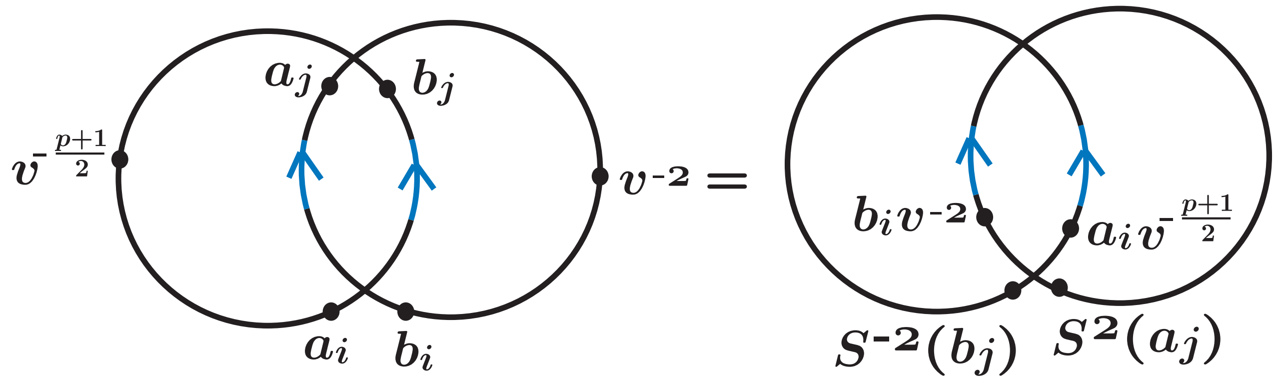
$$c(D) = 1, \qquad \sigma(D) = 1$$

より、

$$\boxed{\mathrm{INV}(L(p,1)) = \frac{\lambda(v^{-p})}{\lambda(v^{-1})}}$$

★ レンズ空間 $L(p,2)$ (p は奇数) は右図のダイアグラム D により表わされる枠付き絡み目に沿って S^3 を Dehn 手術することにより得られる。D の絡み行列は $\begin{pmatrix} \frac{p+1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ より、$\sigma(D) = 2$ である。





$$
\begin{aligned}
\mathsf{TR}(D) &= \sum \chi(a_i v^{-\frac{p+1}{2}} S^{-2}(b_j) g^{-1}) \chi(b_i v^{-2} S^2(a_j) g) \\
&= \sum \chi(g^{-1} a_i v^{-\frac{p+1}{2}} S^{-2}(b_j)) \chi(b_i v^{-2} u a_j u^{-1} g) \\
&= \sum \chi(g^{-1} a_i v^{-\frac{p+1}{2}} S^{-2}(b_j)) \chi(b_i v^{-1} g a_j v^{-1}) \\
&= \sum \chi(g^{-1} a_i v^{-\frac{p+1}{2}} S^{-2}(b_j)) \chi(g a_j b_i v^{-2}) \\
&= \sum \lambda(a_i v^{-\frac{p+1}{2}} S^{-2}(b_j)) \lambda(g^2 a_j b_i v^{-2}) \\
&= \sum \lambda(b_j a_i v^{-\frac{p+1}{2}}) \lambda(g^2 a_j b_i v^{-2})
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\mathsf{INV}(L(p,2)) = \frac{1}{\lambda(v^{-1})^2} \sum \lambda(b_j a_i v^{-\frac{p+1}{2}}) \lambda(g^2 a_j b_i v^{-2})
$$

Gelaki のユニモジュラーリボンホップ代数 (A, R_{abcd}, v) の場合

$$v = 1 + (c - b)xy, \quad v^{-1} = 1 + (b - c)xy$$

より、

$$\lambda(v) = b - c, \quad \lambda(v^{-1}) = b - c.$$

$$\therefore \quad \lambda(v)\lambda(v^{-1}) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \neq c.$$

以下、$b \neq c$ とする。

★ **INV**$(L(p,1))$ **の計算：**

$$v^{-p} = 1 + p(b - c)xy$$

より、

$$\lambda(v^{-p}) = p(b - c).$$

よって、

$$\mathbf{INV}(L(p,1)) = \frac{\lambda(v^{-p})}{\lambda(v^{-1})} = p.$$

★ **INV$(L(p,2))$ の計算：$g^2=1$ より、**

$$\mathbf{INV}(L(p,2)) = \frac{1}{\lambda(v^{-1})^2}\sum \lambda(b_j a_i v^{-\frac{p+1}{2}})\lambda(a_j b_i v^{-2}).$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_{21}R = 1\otimes 1 + (c-b)(x\otimes y - y\otimes x)(1\otimes g) \\ -(b-c)^2 xy\otimes xy \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} &\sum b_j a_i v^{-\frac{p+1}{2}} \otimes a_j b_i v^{-2} \\ =&\left(1+\frac{p+1}{2}(b-c)xy\right)\otimes\left(1+2(b-c)xy\right) \\ &+(c-b)(x\otimes y - y\otimes x)(1\otimes g) \\ &-(b-c)^2 xy\otimes xy. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{INV}(L(p,2)) = \frac{1}{(b-c)^2}\Big((p+1)(b-c)^2-(b-c)^2\Big) = p$$

(表現を使わない) 普遍不変量

リボンホップ代数を用いる

枠付き絡み目に対する

Lawrence(1988) —— 大槻知忠(1993)

$\wr\wr *$

Hennings(1989) $\overset{*}{\approx}$ Kauffman-Radford(1994, 1995)

3 次元多様体に対する

大槻知忠(1995)

↓ 特殊化 $*$

Kauffman-Radford(1994, 1995)

$\wr\wr *$

Hennings(1989)

$*$ Tian(2007)

一般化

Kauffman-Radford(1999∼)：
(oriented) quantum (co)algebra

一般化

Kerler(1997)：
Hennings TQFT $\mathcal{V}^{\mathrm{HKR}}{}_A$

テンソル圏を用いる

Luybashenko(1995), Kerler-Luybashenko(2001)：modular, abelian braided tensor category (+ some condition) $\mathcal{C}$ に対して TQFT $\mathcal{V}^{\mathrm{KL}}{}_{\mathcal{C}}$ を構成

- $\mathcal{V}^{\mathrm{KL}}{}_{\mathrm{Rep}(A)} = \mathcal{V}^{\mathrm{HKR}}{}_A$
- $\mathcal{V}^{\mathrm{KL}}{}_{\mathcal{C}} = \mathcal{V}^{\mathrm{RT}}{}_{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$ が半単純なとき)