ディラックのストリングゲームを解く

渡邉 雄斗　　(表現論研究室)

§1. 序論

組みひもとは上と下の板に同じ本数の釘を打ち, これらをひもでつなぎ絡ませて作られる図形のことをいう. 例えば, ブランコなどは組みひもとみなすことができる. ここで, 全方向ブランコ (タイヤに 3 本の鎖を支柱から吊り下げる構造をもつブランコでタイヤブランコともよばれる) について考える. この全方向ブランコの鎖が図 1.1 のように絡まっていたとする. このとき, タイヤを鎖に通すなどして, 元のまっすぐな状態に戻すのがディラックのストリングゲームである. もう少し細かいルールはあるが, それは §3 で説明する.

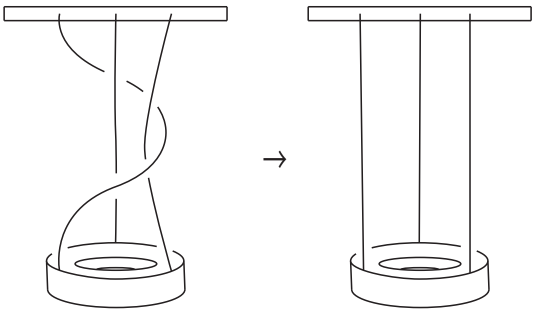


図 1.1

この論文は参考文献 [1] と [3] に基づいて書かれている. §2 では, 組みひもの数学的な定義を述べ, その性質や群論的考察を行う. §3 では, [1] に基づいてディラックのストリングゲームを説明し, その特徴を調べる. 最後の §4 では, 具体的に 3 本のひもからなる組みひもを与えて (詳しくは §4 を参照), ディラックのストリングゲームが解けるかどうかを考察する. ディラックのストリングゲームが解けるかどうかは群を用いた判定方法が知られている. [3] に基づいてその方法を述べ, その結果を用いて, 実際に与えた組みひもについてディラックのストリングゲームを解く.

§2. 組みひも

① 組ひもの定義

定義 2.1 n 次の組みひもとは, 立方体の中にある互いに交わらない n 本の曲線であって, 底面に平行などの平面で切っても常に各曲線とちょうど一点で交わるものをよぶ. 上面の点と下面の点は固定したままで, 間のひもを動かすことによって移りあえるような組みひもは同じとみなす.

例えば, 次の図 2.1 は 4 次の組みひもを表している.

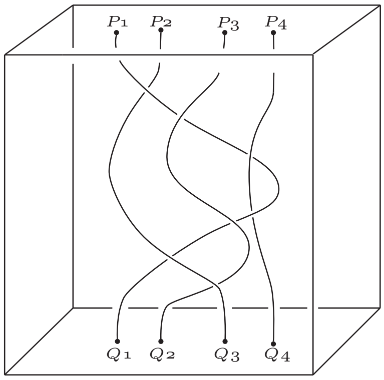


図 2.1

ディラックのストリングゲームで扱う組みひもは, 上面の i 番目の点から出発したひもが下面の i 番目の点に到達するものである. このような組みひもを**純組みひも**とよぶ.

3 次元空間にある組みひもを図示するには, 正面から光をあてたときにうつる影を描いて, 図 2.2 のように表現するのが便利である. その際, どちらのひもが上側にあるのかをわかるようにするため, 交差点で下にあるひもを切って表現する. 組みひもをこのように表現したものを組みひもの**射影図**とよぶ.

隣り合う 2 本のひもの絡み方については, 交差の仕方が, 右側からきたひもが上になるか, 左側からきたひもが上になるかによって 2 通りの場合が考えられる. 図 2.3 のように表される i 番目のひもと $(i+1)$ 番目のひもを入れ替えることに対応する 2 通りのひもをそれぞれ σ_i, σ_i^{-1} という記号で表す.

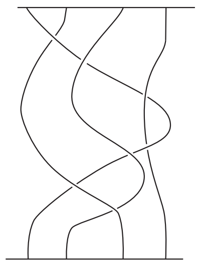


図 2.2

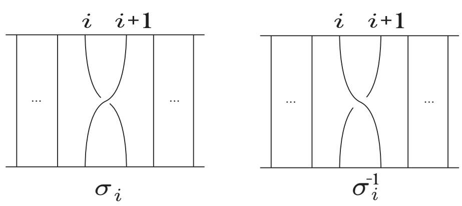


図 2.3

② 組みひも群

n 次の組みひ全体は群をなす. このことを示すために, 群の定義を思い出しておこう.

定義 2.2 空でない集合 G とその上の二項演算 $\mu : G \times G \to G$ の組 (G,μ) が群であるとは, 次の 3 つを満たすときをいう. ただし, $g, h \in G$ に対し, $\mu(g,h) = gh$ とする.

(結合法則) 任意の G の元 g, h, k に対して, $g(hk) = (gh)k$ を満たす.

(単位元の存在) 「任意の G の元 g に対して $ge{=}eg{=}g$ を満たす」ような元 e が G のなかに存在する（存在すれば一意である）. これを G の**単位元**という。

(逆元の存在) 任意の G の元 g に対して, $gx{=}xg{=}e$ となるような G の元 x が存在する（存在すれば一意である）. これを g の G における**逆元**といい, g^{-1} と書く.

2 つの組みひも x, y について, その合成 (積) を, 図 2.4 のように, これらをつなぎあわせることにより定める. できあがった組みひもを xy と表すことにする.

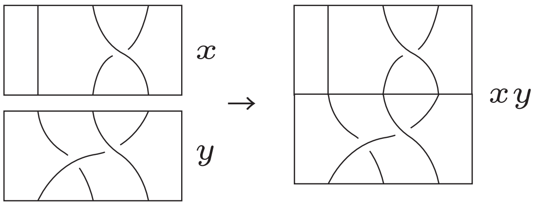


図 2.4

n 次の組みひもは基本的な構成要素

(2.1) $$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$$

(2.2) $$\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, ..., \sigma_{n-1}^{-1}$$

の積で表すことができる．例えば, 図 2.5 の組みひもについてはこれを上から順に読んで, 積の記号を用いることにより, $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ のように表すことができる．このように, 3 本のひもからなる組みひもは, 必ず

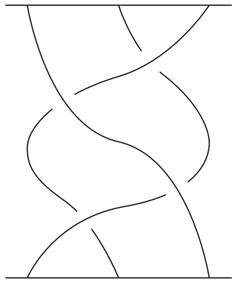


図 2.5

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_1^{-1}, \quad \sigma_2^{-1}$$

の 4 通りの組みひものいずれかを選んで, 上から順につなぎあわせていくことにより構成できる．

定理 2.3 n 次の組みひも全体を B_n とおく．B_n は上で述べた積に関して群をなし, **組みひも群** (ブレイド群) と呼ばれる．

(証明)　一般の場合も同様なので, $n = 3$ の場合を示す．

[i]　組みひもどうしの積は結合法則 $(xy)z = x(yz)$ が成り立つことを示す．
これは, 図 2.6 よりわかる．

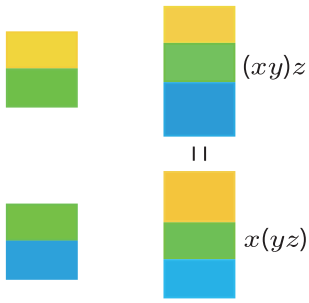


図 2.6

[ii]　単位元の存在

図 2.7 のような, まっすぐなひもからなる組みひもを考え, これを e で表す．　このとき, どのような 3 次の組みひも x に対しても, xe, ex は組みひもとして x と同じである. つまり, $xe = ex = x$ が成り立つ. すなわち, e は B_3 の単位元となる．

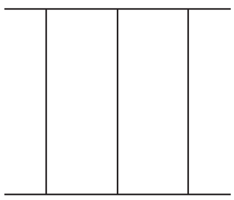


図 2.7

[iii]　逆元の存在

組みひも x からその逆元を構成するには, まず x を基本的な組みひも (2.1), (2.2) の積で表し, これを後ろから並べて, さらに交差の上下を逆にすればよい. こうしてできる組みひも y は x の逆元である．

例えば, 上の図 2.5 に示した組みひも x を考える. x は,

$$x = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$$

と表すことができた. この x について, $xy = e$ を満たす y を求める. 組みひも x を後ろから読んで, それぞれ交差の上下を逆にしたものを並べて,

$$y = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}$$

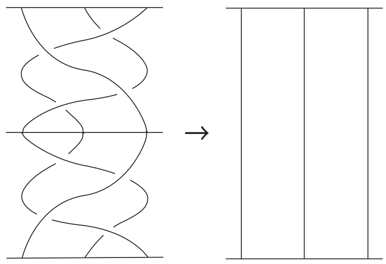


図 2.8

とおく. このとき, 積 xy を考えると図 2.8 のようになり, ひもを動かして真ん中の方から打ち消し合うことができて, これは単位元 e と同じ組みひもになる.

[i],[ii],[iii] より, n 次の組みひも全体 B_n は積に関して群をなすことが示された.

(証明終)

③ 組みひも関係式

図 2.9 の 2 つの組ひもは上面と下面は固定したままで, 間のひもを動かすことによって移りあえるので等しい. したがって, 図 2.9 の組みひもを式で表示すると

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

となる.

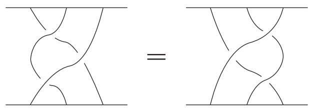


図 2.9

4 次の組みひもの場合, 図 2.10 の 2 つの組みひもは同じと考えられる. これを式で表すと

$$\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$$

となる.

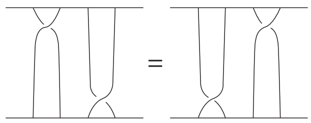


図 2.10

一般に n 本のひもからなる組みひもについて次の 2 通りの関係式

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, ..., n-2)$$
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (|i-j| > 1)$$

が成り立つことがわかる. これらを, **組みひも関係式**と呼ぶ.

④ ライデマイスター移動

連続変形で移り合う組みひもどうしは同じ組みひもとみなした. この連続変形は射影図に対する 2 種類の移動として捉えることができる. 組みひもの射影図に対して次の図 2.11 の 2 つの移動 (A, B は組みひもの 1 部を描いており, 描かれている部分以外は変形前と変形後とで同じである) を施しても同じ組みひもになる. これらの移動を**ライデマイスター移動**とよぶ.

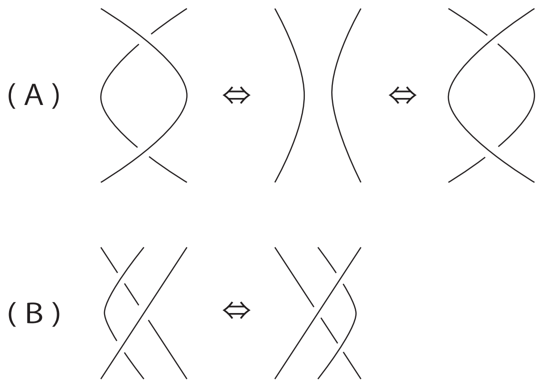


図 2.11

この 2 つのライデマイスター移動を式で表すと

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = e = \sigma_i^{-1}\sigma_i$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

となり, 移動 (A) は逆元の式, 移動 (B) は組みひも関係式を表すことがわかる.

§3. ディラックのストリングゲーム

① ディラックのストリングゲームの説明

まず, 3 本のひもの片方の端を固定し, もう片方の端に図 3.1 のようにカードを取り付ける. このカードには, 表裏の区別がわかるように色を付けておく. ここでは, 表面を白 (図では水玉模様), 裏面を黒 (図では斜線) としておく.

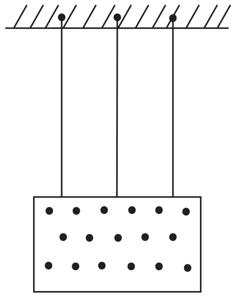


図 3.1

カードをひもの間をくぐらせたり回転させたりすると, 様々な純組みひもを作ることができる. 逆に, 図 3.2 の左側の組みひものようにカードが取りつけられた絡んだ組みひもを用意する. これをほどいて, もとのまっすぐな 3 本のひもにもどすことができるかどうかを考える. ただし, その際にゲームの規則として, カードを裏返すことは許さず, 図 3.2 のようにカードは表のままにして, あるひもを引っ張ってカードの下をくぐらせる操作だけを許すことにする. このゲームのことを**ディラックのストリングゲーム**という.

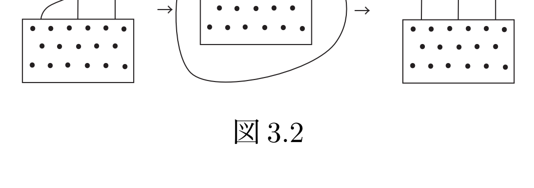


図 3.2

② ねじれ数

ここで, ディラックのストリングゲームを解くのに役立つねじれ数について説明する.

ひものねじれ方が図 3.3 の左のようになっているときを正の交差, ひものねじれ方が図 3.3 の右ようになっているときを負の交差と呼ぶ. このとき, 組みひもに含まれる正の交差の個数から負の交差の個数を引いたものを**ねじれ数**と呼ぶ.

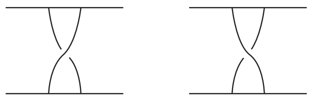


図 3.3

③ ディラックのストリングゲームの基本操作

ディラックのストリングゲームを解く上で基本となる操作がある. ここでは, 3 本のひもからなるときに説明する. この場合は, 次の図 3.4 の 8 つの操作が基本操作になる. 図の組みひもは操作後の組みひもを表している.

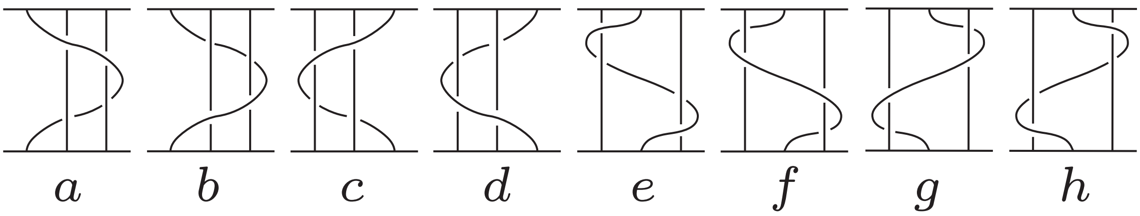


図 3.4

・(1+), (1–)：1 本目のひもを引っ張ってカードの下をそれぞれ裏, 表からくぐらせる操作のこと (図 3.4a, b). このとき, ねじれ数はそれぞれ+4, –4 となる.

・(3+), (3–)：3 本目のひもを引っ張ってカードの下をそれぞれ裏, 表からくぐらせる操作のこと (図 3.4c, d). このとき, ねじれ数はそれぞれ+4, –4 となる.

・(2L+), (2L–)：2 本目のひもを引っ張ってカードの下を左へそれぞれ裏, 表からくぐらせる操作のこと (図 3.4e, f). このとき, ねじれ数はそれぞれ+4, –4 となる.

・(2R+), (2R–)：2 本目のひもを引っ張ってカードの下を右へそれぞれ裏, 表からくぐらせる操作のこと (図 3.4g, h). このとき, ねじれ数はそれぞれ+4, –4 となる.

実際に, この基本操作を使ってカードを 720 度回転させた組みひもを解いてみると, 下の図 3.5 のようになる. この方法では 5 回のステップで解くことができる.

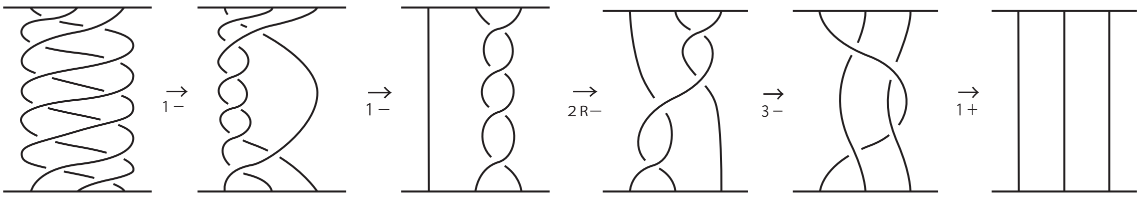


図 3.5

[注意]　『ディラックのストリングゲームによって解けるかどうかという問題』は,『それを球面組みひもとみなしたとき自明かどうかという問題』に言い替えることができる. ここで**球面組みひも**とは, 立方体のかわりに, 立方体の上面と下面を球面とした図 3.6 のような組みひものことをいう.

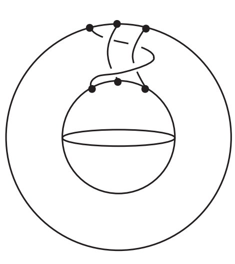


図 3.6

④ ニューマンの結果

ニューマンは 1942 年にカードを回転させて作った組みひもについて, ディラックのストリングゲームが解けるかどうかの判定条件を与えた [2]. ニューマンの結果は n 次の組みひもについて示しているが, ここでは $n=3$ の場合を述べる.

補題 3.1 (ニューマンの結果)　3 次の組みひもで, 偶数回の回転に対応するものはディラックのストリングゲームの操作で解くことができるが, 奇数回の回転の組みひもはこの操作で解くことはできない.(ただし, 360 度回転を 1 回転と数えることにする.)

(証明)

[i]　3 本の組みひもの場合, 奇数回の回転の組みひもは解けないことを証明する.

ねじれ数に注目する. ③で説明したように, 3 本の組みひもにおけるディラックのストリングゲームでは, ねじれ数の変化は 4 増えるか, 4 減るかである. 1 回転の組みひもでは, ねじれ数は 6, または－6 となるためディラックのストリングゲームの操作ではねじれ数を 0 にすることができないので, ディラックのストリングゲームの操作で解けないことがわかる. 3 回転の組みひもでは, ねじれ数は 18 となり, 同様にディラックのストリングゲームの操作では解けないことがわかる. 一般に,$(2n-1)$ 回転の組みひもでは, ねじれ数が $(12n-6)$ となるためディラックのストリングゲームの操作では解けないことがわかる.

[ii]　3 本の組みひもの場合, 偶数回の回転の組みひもは解けることを証明する.

この証明にはベルトトリックを使う. そこでベルトトリックについて説明する.

ベルトトリック

図 3.7a のように幅のある細いベルトを用意する. 今までと同じように, 表面は白, 裏面は黒色に色分けされてて, ベルトの端には, 表裏の区別のできるカードをつり下げておく. カードを左向きに 360 度回転して, 図 3.7b の状況を考える. これから出発して, 図 3.7c のようにベルトを動かしてカードの下をくぐらせる. ただし, このときカードを裏返すことなく表面が見える状態でくぐらせる. 結果として, 図 3.7d の状況が得られる. これも, やはり 360 度ひねられたベルトであるが, ねじれの向きが反対になっている. このことは, カードの下をくぐらせる操作で, ベルトのねじれが 720 度変わったことを意味する.

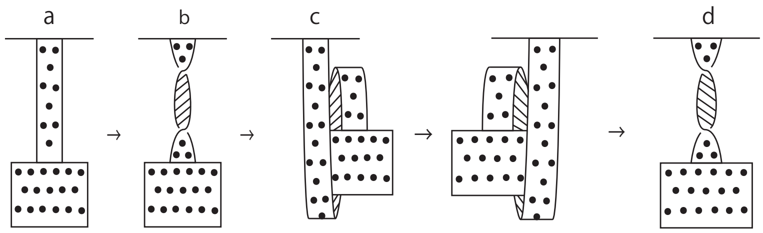


図 3.7

ベルトがカードの下を 1 回くぐる操作によって, ねじれが 720 度変わるということは, 図 3.8 のように 2 回ねじったベルトから出発して, カードをくぐらせると, ねじれのないまっすぐなベルトが得られることを意味する.

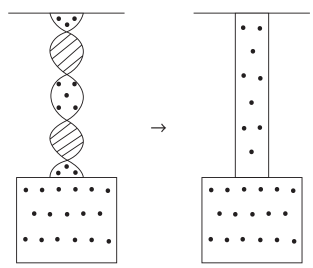


図 3.8

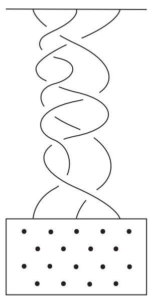
ここで, 補題 3.1 の証明 [ii] に戻る. ベルトの上に, 3 本の縦線を引く. ベルトをねじった図 3.8 はこの平行線をひもとする組みひもとみなすことができる. したがって, カードの下をくぐらせる操作は, 720 度回転に対応する組みひもに対し, これは 3 本のひもを同時にカードの下をくぐらせることに他ならない. このようにすると, 1 回のステップでまっすぐな 3 本のひもに戻すことができる.

これで補題 3.1 の証明が完成した. (証明終)

§4. ディラックのストリングゲームを解く

この章では, ディラックのストリングゲームを群論を用いて次の問題を解く.

問題 次の組みひも r は, ディラックのストリングゲームによって解けるか.

$r =$ 

この問題を解くため [3] に基づいて一般的な準備をしておく.

3 本のひもからなる組みひも全体 B_3 は σ_1, σ_2 によって生成されることを思い出そう. 3 本からなる純組みひも全体を P_3 と表すと

$$P_3 = \langle a_{12}, a_{13}, a_{23} \rangle$$

となることがわかる. ただし, a_{12}, a_{13}, a_{23} は次で与えられる B_3 の元である.

$$a_{12} := \sigma_1^2, \quad a_{13} := \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1, \quad a_{23} := \sigma_2^2.$$

補題 4.1 ディラックのストリングゲームの基本操作は次の r_1 (1+), r_2 (2L+), r_3 (3+) の 3 つを組み合わせて書くことができる.

$$r_1 = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1, \quad r_2 = \sigma_1^2\sigma_2^2, \quad r_3 = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2.$$

(証明)

(1+)(2L+)(3+) 以外の 5 つの操作が r_1, r_2, r_3 の積で表されることを示せばよい.

(1–) : $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-1} = (\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)^{-1} = r_1^{-1}$

(3–) : $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1} = (\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)^{-1} = r_3^{-1}$

(2R–) : $\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2} = (\sigma_1^2\sigma_2^2)^{-1} = r_2^{-1}$

(2R+) : $\sigma_2^2\sigma_1^2 = r_3r_2r_3^{-1}$

(この等式は図 4.1 のように変形できることからわかる)

(2L–) : $\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2} = (\sigma_2^2\sigma_1^2)^{-1} = r_3r_2^{-1}r_3^{-1}$ (証明終)

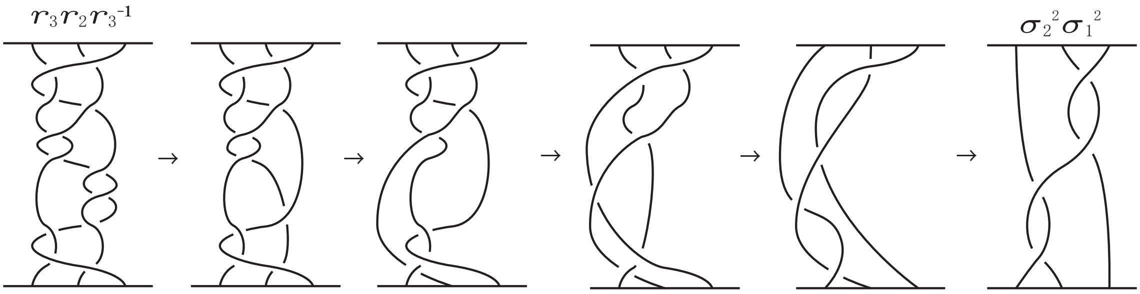


図 4.1

補題 4.1 より, ディラックのストリングゲームによって解くことができる組みひも全体を R とすると, R は次のように表される;

$$R = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle.$$

ディラックのストリングゲームが解けるということは, その組みひも r が $r \in R$ となることである. R は定義より P_3 の部分群であるが, さらに次が成り立つ.

補題 4.2 *R は B_3 の正規部分群である. したがって, P_3 の正規部分群である.*

(証明)

式変形には組みひも関係式 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ が繰り返し使われる. まず,

$$\sigma_1 r_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_1^{-1} = \sigma_1^2\sigma_2^2 = r_2.$$

このことから, $\sigma_1^{-1}r_2\sigma_1 = r_1$ も成り立つ.

$$\begin{aligned}\sigma_2 r_1 \sigma_2^{-1} &= \sigma_2(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_2^{-1} = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}\\ &= \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = r_1.\end{aligned}$$

このことから, $\sigma_2^{-1}r_1\sigma_2 = r_1$ も成り立つ.

$$\begin{aligned}\sigma_1 r_2 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1(\sigma_1^2\sigma_2^2)\sigma_1^{-1} = \sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_1^{-2} = \sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2^2)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\\ &= \sigma_1^2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2} = \sigma_1^2(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\\ &= \sigma_1^2(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2} = \sigma_1^2(\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\\ &= \sigma_1^2(\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2} = (\sigma_1^2\sigma_2^2)(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)(\sigma_1^2\sigma_2^2)^{-1} = r_2 r_1 r_2^{-1}.\end{aligned}$$

$$\sigma_2 r_2 \sigma_2^{-1} = \sigma_1(\sigma_1^2\sigma_2^2)\sigma_1^{-1} = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 = r_3.$$

このことから, $\sigma_2^{-1}r_3\sigma_2 = r_2$ も成り立つ.

$$\begin{aligned}\sigma_1 r_3 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_1^{-1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\\ &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1} = r_3.\end{aligned}$$

このことから, $\sigma_1^{-1}r_3\sigma_1 = r_3$ も成り立つ.

$$\sigma_2 r_3 \sigma_2^{-1} = \sigma_2(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_2^{-1} = \sigma_2^2\sigma_1^2 = r_3 r_2 r_3^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{-1}r_1\sigma_1 =& \sigma_1^{-1}(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1)\sigma_1 = \sigma_2^2\sigma_1^2 = r_3r_2r_3^{-1}. \\
\sigma_2^{-1}r_2\sigma_2 =& \sigma_2^{-1}(\sigma_1^2\sigma_2^2)\sigma_2 = \ \sigma_2^{-2}(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_2^2 = \ \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_2^2 \\
&= \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}(\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^2 = \ \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^2 \\
&= \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}(\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^2 = \ \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}(\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1)\sigma_2^2 \\
&= (\sigma_1^2\sigma_2^2)^{-1}(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)(\sigma_1^2\sigma_2^2) = r_2^{-1}r_3r_2.
\end{aligned}$$

以上より補題が証明された. (証明終)

以上の準備のもとでこの章の冒頭で与えられた問題を解く. 組みひも r が, ディラックのストリングゲームによって解けるかどうかを示すには, $r \in R$ かどうかを調べればよい.

$$\begin{aligned}
r &= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_2(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}) \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_1\sigma_2\sigma_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_1^2\sigma_2^2)r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\big((\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1})\big)\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-1})r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1r_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2r_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2r_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2r_1^{-1}r_2r_3^{-1} \\
&= r_2r_1^{-1}r_2r_3^{-1}.
\end{aligned}$$

よって, $r = r_2r_1^{-1}r_2r_3^{-1} \in R$ とわかったので, この組みひも r はディラックのストリングゲームで解けることがわかった.

[注意] 補題 4.2 より, 剰余群 P_3/R が定まる. この剰余群について

$$P_3/R \cong \mathbb{Z}_2$$

が成り立つことが知られている [3]. ただし, $\mathbb{Z}_2$ は位数 2 の巡回群を表す. このことから, ディラックのストリングゲームで解くことができない純組みひもが与えられたとしても, その純組みひもを 2 乗すると解けることがわかる.

参考文献

[1] 河野俊丈『組みひもの数理』, 遊星社, 1993 年.

[2] M.H.A.Newman“On a string problem of Dirac”, The Journal of London Mathematical Society **17**, Part3, 328-333, (1942).

[3] V.Stojanoska, O.Stoytchev“Touching the $\mathbb{Z}_2$ in three-dimensional rotations”, MATHEMATICS MAGAZINE **81**, 350-352, (2008).