フリーズパターンと多角形の三角形分割

橋本　浩介　(表現論研究室)

§1. Introduction

フリーズパターンとは、あるルールに基づいて作られる数の並びのことである。フリーズパターンを生成するためのルールは一通りではない。フリーズパターンを生成するルールをある種のものに限ると、フリーズパターンは繰り返し模様になる。1970 年代、Conway と Coxeter[3] は簡単なルールで作る数の並びが特徴的な性質を持っていることを発見した。この数の並びは現在 A 型 (Conway-Coxeter 型) フリーズパターンと呼ばれている。

本論文では、A 型フリーズパターンにおいて、数の並びを模様と捉え、模様の対称性を数学的に表す Conway 記号、模様に現れる対称性のパターンを分類する Conway の魔法の定理や多角形の三角形分割から A 型フリーズパターンを作成することができることを用いて、正多角形の三角形分割の対称性と A 型フリーズパターンの対称性の関係を調べる。

§2. フリーズパターン

この章では、[2] に基づき、フリーズパターンの中でも最も簡単なルールを用いて生成される、A 型 (Conway-Coxeter 型) フリーズパターンのルールと性質について見ていく。

2.1. A 型 (Conway-Coxeter 型) フリーズパターン

A 型 (Conway-Coxeter 型) のフリーズパターンはある一定の幅をもち、その最上段、最下段に 1 を書き並べ、次のようにひし形に並べられた数 a,b,c,d が $ad = bc+1$ を満たすというルールによって生成されるフリーズパターンである。

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \qquad\qquad (ad = bc + 1)$$

このことから、a,b,c がわかると、$d = (bc + 1)/a$ により d を求めることができる。このルールを用いることにより、最上段、最下段の 1 の並びの間に、例えば、次の (1) のように左上から右下へ斜めに数を書き出したものから出発し、(2) のように数を埋めることができる。

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
\tag{1}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
\tag{2}
$$

(2) には数字が途中までしか書かれていないが、計算を左右に無限に行うことで、これは繰り返し模様になる。

A 型フリーズパターンの段数を表すことが必要な場合、最上段と最下段の 1 の並びの間にある数の並びの段数を n とすると、A 型フリーズパターンは A_n 型フリーズパターンとも言われる。例えば、上のフリーズパターンは A_4 型フリーズパターンである。

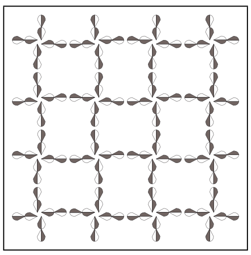
2.2. A 型フリーズパターンの性質

A 型フリーズパターンの特徴的な性質が２つある。
1 つ目は、$d(=(bc+1)/a)$ が必ず割り切れて整数になっていることである。この性質を Conway-Coxeter フリーズの**整数性**と呼ぶ。
2 つ目は、適当な数の並びから始めて計算を進めていくと、最初の数の並びと上下が逆転した数の並びが現れることである。この性質を Conway-Coxeter フリーズの**有限反復性**と呼ぶ。

§3. Conway の魔法の定理

A_n 型フリーズパターンは Conway 記号を用いて分類することができる。この章では、その Conway 記号の定義と Conway の魔法の定理を紹介する。

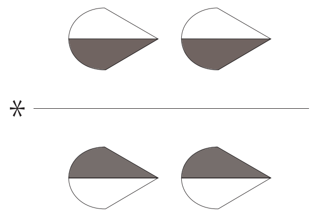
3.1. Conway 記号



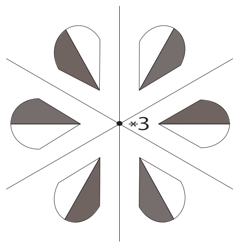
世の中には右の図のような、様々な対称を持つ模様が存在する。この模様は 5 つの対称性 (鏡映、旋回、万華鏡、すべり鏡映、平行移動) の組み合わせによって構成される。

この節では、右の図やフリーズパターンに現れる対称性を数学的に分類するために、それぞれの対称性について Conway 記号というものを定義する。

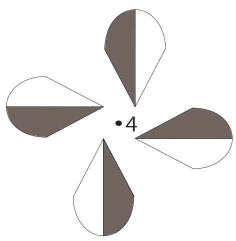
定義 3.1.1(鏡映)　右の図のように、ある 1 本の直線によって模様が上下あるいは左右対称になっているとき、その模様を**鏡映対称**といい、その直線を**鏡映線**という。鏡映対称を Conway 記号では $*$ で表す。



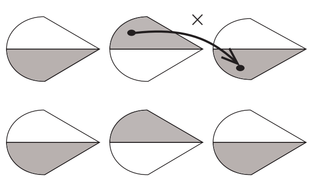
定義 3.1.2(万華鏡)　右の図のように、2 本以上の鏡映線が交差する模様を**万華鏡対称**といい、その交点を**万華鏡点**という。一般に、$n(\geqq 2)$ 本の鏡映線を持ち、n より大きな本数の交点を持たないとき、n 位の万華鏡対称といい、Conway 記号では $*\mathbf{n}$ と表す。右の模様は最大 3 本の鏡映線があるため、3 位の万華鏡対称であり、Conway 記号は $*\mathbf{3}$ である。鏡映線が無限に存在する場合 (n=∞) は、Conway 記号では $*\infty$ と表す。万華鏡点が 2 つ以上ある場合 (a 位の万華鏡、b 位の万華鏡、c 位の万華鏡、$\cdots$) は $*\mathbf{abc}\cdots$ と表す (ただし、$a \geqq b \geqq c \geqq \cdots$ とする)。



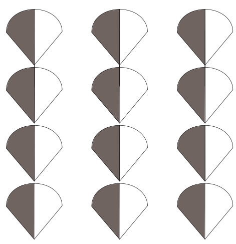
定義 3.1.3(旋回)　鏡映線が存在せず、模様を一定の角度回転させると元の模様に戻るような対称性のことを**旋回**といい、回転の中心を**旋回点**という。例えば、右の模様には、$90°$,$180°$,$270°$,$360°$ の 4 つの回転対称があるので、4 位の旋回である、という。一般に、n 個の回転対称を持ち、n より大きな個数の回転対称性を持たないとき、n 位の旋回であるといい、Conway 記号では $\mathbf{n}$ と表す。(右の図の Conway 記号は $\mathbf{4}$ である。) 旋回が 1 位の場合は $360°$ 回転 (恒等対称) であるため、旋回ではないものとする。旋回が無限にある場合 (n=∞) は、Conway 記号で ∞ と表す。旋回点が 2 つ以上ある場合 (a 位の旋回、b 位の旋回、c 位の旋回、$\cdots$) は $\mathbf{abc}\cdots$ と表す (ただし、$a \geqq b \geqq c \geqq \cdots$ とする)。



定義 3.1.4(すべり鏡映)　模様を一定の方向に平行移動させ、平行移動した方向と垂直な軸に対して折り返しをする対称性を**すべり鏡映**という。(注意:すべり鏡映によって移りあう点が鏡映線と交わらずに結べる場合のみすべり鏡映という。) すべり鏡映は Conway 記号で **×** と表す。



定義 3.1.5(平行移動)　鏡映、旋回、万華鏡、すべり鏡映の対称性がなく、2 つの方向へ平行に移動させるだけの対称性を**平行移動**という。平行移動の Conway 記号は $\mathbf{o}$ である。



3.2. Conway の魔法の定理

前節では、5 つの対称性を定義した。この節では、フリーズパターンなどの繰り返し模様の場合に現れる対称性の組み合わせのパターンを知るために、Conway の魔法の定理を紹介する。詳細は [1] を参照してほしい。

定理 3.1. Conway の魔法の定理 (帯模様の繰り返し模様の場合)

帯模様の繰り返し模様のパターンは次の 7 種類に限られる。

$$*\infty\infty\ ,\ \infty\infty\ ,\ *\mathbf{22}\infty\ ,\ \infty *\ ,\ \mathbf{2}*\infty\ ,\ \mathbf{22}\infty\ ,\ \infty\times$$

ただし、帯模様の対称性は、球面の赤道上に帯模様を貼り付けて調べるため、帯模様において、$*\infty$ は縦線での鏡映対称、∞ は横方向への平行移動を表している。

3.3. フリーズパターンの繰り返し模様の Conway 記号

定理 3.1 より、繰り返し模様のパターンは 7 種類である。第 2.2 節より、A 型フリーズパターンには有限反復性があり、これは、横方向への平行移動と横軸での鏡映を表し、それは繰り返し模様において、横軸の鏡映、2 位の旋回と縦軸の鏡映、すべり鏡映、のいずれかが存在することと同じである。このことから、次のことがわかる。

定理 3.2.

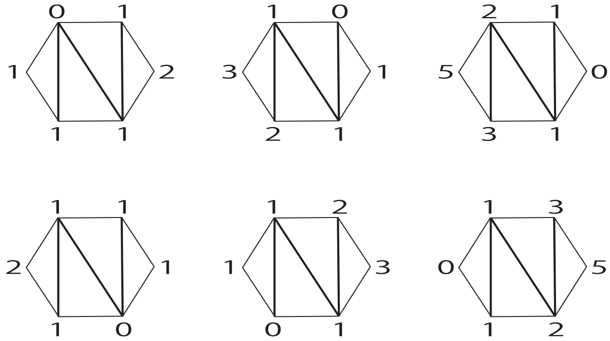
A 型フリーズパターンの繰り返し模様としての対称性は次の 4 種類に限られる。

$$*\mathbf{22}\infty\ ,\ \infty *\ ,\ \mathbf{2}*\infty\ ,\ \infty\times$$

§4. A_n 型フリーズパターンと三角形分割

この章では、三角形分割した $(n+3)$ 角形に、あるルールを用いることで A_n 型フリーズパターンを作成する方法を紹介する。

分かりやすくするために、$n=3$ の場合について考える。次の図は三角形分割された六角形の頂点に、あるルールによって数字を割り振ったものである。



数字の割り振り方は次の通りである。

1. 六角形の頂点を 1 つ選び、その頂点に数 0 を割り振る。
2. 0 を割り振った頂点と線分で結ばれている頂点に数 1 を割り振る。
3. 三角形の頂点のうち、2 つにすでに数 a,b が割り振られているならば、残りの頂点に $a+b$ を割り振る。
4. 一つの六角形の頂点全てに数が割り振られたら、出発点の 0 を時計回りに 1 つずらして、同じことを繰り返す。

これらのルールによって、すべての六角形の頂点に上の図のように数字を割り振り終えたら、次のように A_3 型フリーズパターンを作ることができる。数字が最初に割り振られた六角形において、頂点の数字を 0 から時計回りにとり出して、0 以外の数字を左上から右下へ斜めに書き下す。一つの六角形の数字を全て書き下したら、出発点の 0 の位置を時計回りに 1 つずらした六角形について同じように時計回りに書き下す。これを繰り返すと次のようになる。

1		1		1		1		1		1		1				
	2		1		3		2		1		3		2			
		1		2		5		1		2		5		1		
			1		3		2		1		3		2		1	
				1		1		1		1		1		1		1

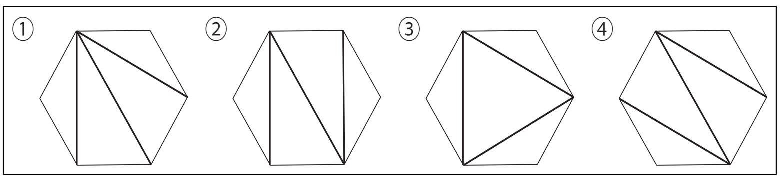
このような方法で作られたフリーズパターンをよく見ると、A_3 型フリーズパターンになっていることがわかる。この方法で任意に三角形分割された $(n+3)$ 角形から A_n 型フリーズパターンを作ることができる。

§5. A_n 型フリーズパターンの Conway 記号の決定

この章では、第 4 章で紹介した方法で正六角形、正七角形、正八角形の三角形分割から A_3,A_4,A_5 型フリーズパターンを作り、それぞれのフリーズパターンの Conway 記号を調べる。

5.1. 三角形分割による A_n 型フリーズパターンの作成と Conway 記号 ($n=3,4,5$ の場合)

5.1.1. 正六角形の三角形分割は回転で移りあうものを同一視すると、次の 4 種類である。



それぞれに対応するフリーズパターンと Conway 記号は以下の通りになる。

①

1		1		1		1		1		1		1				
	2		2		2		1		4		1		2			
		3		3		1		3		3		1		3		
			4		1		2		2		2		1		4	
				1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$2 * \infty$

(4 を通る縦軸が鏡映線であり、2 段目の 1 が 2 位の旋回点になっているため。)

②

1		1		1		1		1		1		1				
	2		1		3		2		1		3		2			
		1		2		5		1		2		5		1		
			1		3		2		1		3		2		1	
				1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty *$

(2 段目を通る軸が鏡映線になっているため。)

③

1		1		1		1		1		1		1				
	3		1		3		1		3		1		3			
		2		2		2		2		2		2		2		
			3		1		3		1		3		1		3	
				1		1		1		1		1		1		1

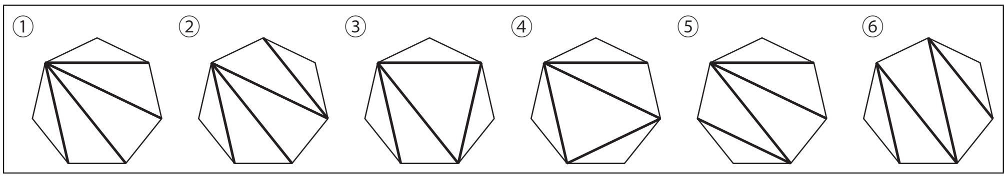
Conway 記号：$2 * \infty$

④

1		1		1		1		1		1		1				
	1		2		3		1		2		3		1			
		1		5		2		1		5		2		1		
			2		3		1		2		3		1		2	
				1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty *$

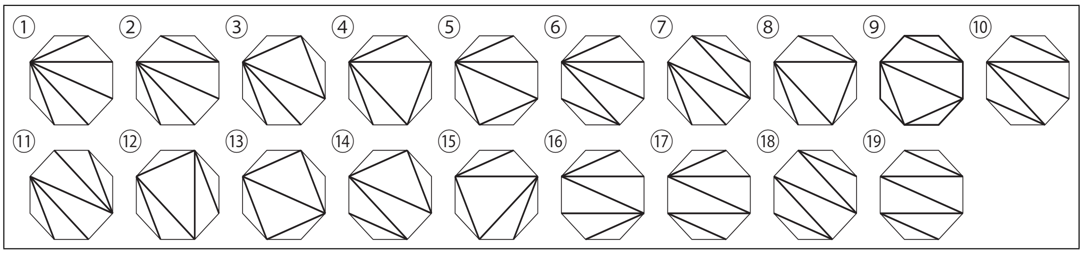
5.1.2. 正七角形の三角形分割は回転で移りあうものを同一視すると、次の 6 種類である。



それぞれに対応するフリーズパターンと Conway 記号は最後に別記する。

5.1.3. 正八角形の三角形分割は回転で移りあうものを同一視すると、次の 19 種類である。この 19 種類は、5 本の線が一点に集まっている①から、線を 1 本動かし

たパターンを考え、次に 2 本動かしたパターンというように順番に考えていくことで、求めることができる。



それぞれに対応するフリーズパターンと Conway 記号は最後に別記する。

5.2. 三角形分割とフリーズパターンの対称性の関係

前節で、正六角形、正七角形、正八角形の三角形分割全てのパターンのフリーズパターンと Conway 記号をみた。それぞれの三角形分割の対称性と Conway 記号の関係を比べることによって、少なくとも A_3,A_4,A_5 型フリーズパターンの対称性について次のことが成り立つことがわかる。

定理 5.1

A_n 型フリーズパターン ($n = 3, 4, 5$) の対称性について次が成り立つ。
正 $(n + 3)$ 角形の三角形分割について、

(a) 鏡映が存在する　(b) 180° 回転が元の図形と一致する

(1) (a) のみが成り立つとき、フリーズパターンの Conway 記号は $2 * \infty$

(2) (b) のみが成り立つとき、フリーズパターンの Conway 記号は $\infty *$

(3) (a),(b) のどちらも成り立つとき、フリーズパターンの Conway 記号は $*22\infty$

(4) (a),(b) のどちらも成り立たないとき、フリーズパターンの Conway 記号は $\infty\times$

上の定理は n=3,4,5 の場合のみであるが、 一般の n についても上の定理と同じことが予想される。それを調べることは今後の課題である。

参考文献

[1] 筱田健一,『対称性と数学』技術評論社 , 2016.
[2] 黒木玄,『フリーズパターン-数の繰り返し模様の不思議』, http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf.
[3] J.H.Conway and H.S.M.Coxeter,“Triangulated polygons and frieze patterns” Math. Gaz. 57 (1973), 87-94 , 175-183.

七角形の三角形分割に対応するフリーズパターンと Conway 記号

①

1		1		1		1		1		1		1		1					
	2		2		2		2		1		5		1		2				
		3		3		3		1		4		4		1		3			
			4		4		1		3		3		3		1		4		
				5		1		2		2		2		2		1		5	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$2 * \infty$

②

1		1		1		1		1		1		1		1					
	1		3		2		2		1		4		2		1				
		2		5		3		1		3		7		1		2			
			3		7		1		2		5		3		1		3		
				4		2		1		3		2		2		1		4	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty\times$

③

1		1		1		1		1		1		1		1					
	3		1		3		2		1		4		1		3				
		2		2		5		1		3		3		2		2			
			3		3		2		2		2		5		1		3		
				4		1		3		1		3		2		1		4	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty\times$

④

1		1		1		1		1		1		1		1					
	2		3		1		3		1		4		1		2				
		5		2		2		2		3		3		1		5			
			3		3		1		5		2		2		2		3		
				4		1		2		3		1		3		1		4	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty\times$

⑤

1		1		1		1		1		1		1		1					
	2		2		3		1		2		4		1		2				
		3		5		2		1		7		3		1		3			
			7		3		1		3		5		2		1		7		
				4		1		2		2		3		1		2		4	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$\infty\times$

⑥

1		1		1		1		1		1		1		1					
	1		2		3		2		1		3		3		1				
		1		5		5		1		2		8		2		1			
			2		8		2		1		5		5		1		2		
				3		3		1		2		3		2		1		3	
					1		1		1		1		1		1		1		1

Conway 記号：$2 * \infty$

八角形の三角形分割に対応するフリーズパターンと Conway 記号 (1)

①

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 1 6 1 2
3 3 3 3 1 5 5 1 3
4 4 4 1 4 4 4 1 4
5 5 1 3 3 3 3 1 5
6 1 2 2 2 2 2 1 6
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：$2 * \infty$

②

1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 2 2 2 1 5 2 1 3
5 3 3 1 4 9 1 2 5
7 4 1 3 7 4 1 3 7
9 1 2 5 3 3 1 4 9
2 1 3 2 2 2 1 5 2
1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

③

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 1 5 1 3 1 3 2
3 1 4 4 2 2 2 5 3
1 3 3 7 1 3 3 7 1
2 2 5 3 1 4 4 2 2
1 3 2 2 1 5 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

④

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 3 2 1 5 1
1 5 2 2 5 1 4 4 1
2 3 3 3 2 3 3 3 2
1 4 4 1 5 2 2 5 1
1 5 1 2 3 1 3 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：$2 * \infty$

⑤

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 3 1 3 1 5 1 2 2
5 2 2 2 4 4 1 3 5
3 3 1 7 3 3 1 7 3
4 1 3 5 2 2 2 4 4
1 2 2 3 1 3 1 5 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

⑥

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 5 1 2 2 2 3 1
1 9 4 1 3 3 5 2 1
4 7 3 1 4 7 3 1 4
3 5 2 1 9 4 1 3 3
2 3 1 2 5 1 2 2 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

⑦

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 1 4 3 1 2 3 2
3 1 3 11 2 1 5 5 3
1 2 8 7 1 2 8 7 1
1 5 5 3 1 3 11 2 1
2 3 2 2 1 4 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

⑧

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 4 2 1 4 1 3 2 1
3 7 1 3 3 2 5 1 3
5 3 2 2 5 3 2 2 5
2 5 1 3 7 1 3 3 2
3 2 1 4 2 1 4 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

⑨

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 3 3 1 3 1 4 2
1 2 8 2 2 2 3 7 1
1 5 5 3 1 5 5 3 1
2 3 7 1 2 8 2 2 2
1 4 2 1 3 3 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ✕

⑩

1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 2 4 2 1 3 2 3
2 1 7 7 1 2 5 5 2
1 3 12 3 1 3 12 3 1
2 5 5 2 1 7 7 1 2
3 2 3 1 2 4 2 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：$2 * \infty$

八角形の三角形分割に対応するフリーズパターンと Conway 記号 (2)

⑪

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 4 2 2 1 4 2 2
1 3 7 3 1 3 7 3 1
2 5 10 1 2 5 10 1 2
3 7 3 1 3 7 3 1 3
4 2 2 1 4 2 2 1 4
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞∗

⑫

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 4 1 4 1 2 3 2
1 3 3 3 3 1 5 5 1
2 2 8 2 2 2 8 2 2
1 5 5 1 3 3 3 3 1
2 3 2 1 4 1 4 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：2 ∗ ∞

⑬

1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 4 1 3 1 4 1 3 1
3 3 2 2 3 3 2 2 3
2 5 1 5 2 5 1 5 2
3 2 2 3 3 2 2 3 3
1 3 1 4 1 3 1 4 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∗22∞

⑭

1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 2 4 1 3 1 3 3
2 1 7 3 2 2 2 8 2
1 3 5 5 1 3 5 5 1
2 2 8 2 1 7 3 2 2
1 3 3 1 2 4 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ×

⑮

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 4 1 2 3 1 4 1 2
7 3 1 5 2 3 3 1 7
5 2 2 3 5 2 2 3 5
3 3 1 7 3 1 5 2 3
4 1 2 4 1 2 3 1 4
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ×

⑯

1 1 1 1 1 1 1 1 1
4 1 2 2 4 1 2 2 4
3 1 3 7 3 1 3 7 3
2 1 10 5 2 1 10 5 2
1 3 7 3 1 3 7 3 1
2 2 4 1 2 2 4 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞∗

⑰

1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 2 1 3 4 1 2 2 3
5 1 2 11 3 1 3 5 5
2 1 7 8 2 1 7 8 2
1 3 5 5 1 2 11 3 1
2 2 3 2 1 3 4 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞ ×

⑱

1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 2 3 3 1 2 3 3
2 1 5 8 2 1 5 8 2
1 2 13 5 1 2 13 5 1
1 5 8 2 1 5 8 2 1
2 3 3 1 2 3 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞∗

⑲

1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 3 3 2 1 3 3 2
1 2 8 5 1 2 8 5 1
1 5 13 2 1 5 13 2 1
2 8 5 1 2 8 5 1 2
3 3 2 1 3 3 2 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1

Conway 記号：∞∗