

Wirtinger 表示による結び目群の計算と対称群への表現

内田 樹 (表現論研究室)

§1. 序論

一般に, 日常における“結び目”と言え, ひもが絡んでいる部分のみのことを指すが, 数学において結び目とは, 3次元空間に埋め込まれた円周で, 自分自身と交わらないものごとを指す. 例えば, 絡んだ状態の輪ゴムを連想するとよい. 日常における“結び目”から数学における“結び目”を作り出すには, 図 1.1 のようにひもの端点をつなげればよい.

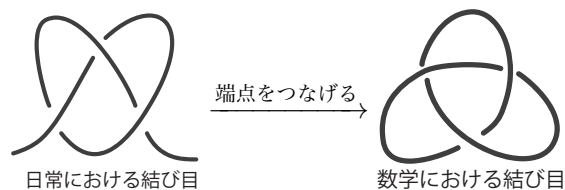


図 1.1

2つの結び目を用意したとき, 一方を切らずに連続的に変形してもう一方に重ね合わせる事ができるならば, その2つの結び目は同値であるという. 結び目理論では同値である結び目は同じものとみなすが, 見かけだけでは同値かどうかを判断することは難しい. そこで通常は結び目の同値性を調べることでできる量, すなわち結び目不変量を導入し, その不変量を通して結び目の研究を行う. 結び目不変量については, 既に様々なものが知られている. その中でも基本群は最も基本的な位相不変量の1つである. しかし, 結び目そのものの基本群はすべて \mathbb{Z} と同型なので意味がなく, 補空間をとることで意味のある不変量となる. 本論文では結び目の補空間の基本群 (結び目群) の計算方法として知られる Wirtinger 表示について述べ, その表示を用いて最小交点数が6以下の結び目に対して結び目群から対称群への表現の個数を求める. その値を比較することにより結び目を区別することができるかどうかを考察する.

§2. 結び目

この節では本論文の中心となる結び目の定義, 同値な結び目の定義など, 結び目に関する基本的な概念を説明する.

Definition

- 3次元球面 S^3 の中に位置する, 自分自身と交わらない滑らかな閉じた曲線のことを**結び目**という (例: 図 2.1). また, 結び目を2次元平面に描いたものを結び目の**射影図**といい, 特に, 線分の重なりが高々2重点であるような射影図を**正則射影図**という. 以下, 結び目を正則射影図で表示する. 同値な結び目の正則射影図の中で交点数が最小になるものの交点数を結び目の**最小交点数**という.
- K を結び目とする.
 $S^3 - K$ を**結び目補空間**という.

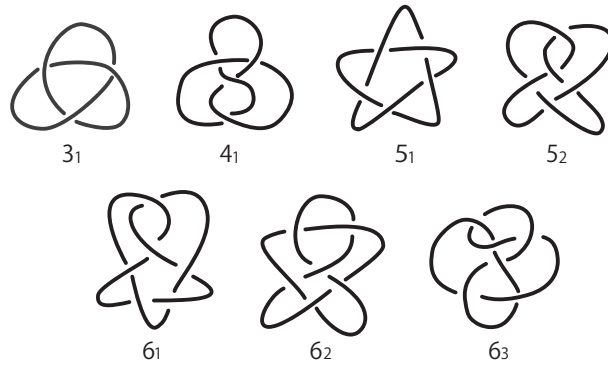


図 2.1 最小交点数 6 以下の結び目

どのような 2 つの結び目を同じものとみなすかを述べるために、イソトピーという概念を導入する。

Definition

$h : S^3 \rightarrow S^3, h' : S^3 \rightarrow S^3$ を同相写像とする。

次の 2 つを満たす h から h' への連続写像 $H : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ が存在するとき、 H を **イソトピー** といい、 h は h' に **イソトープ** であるという。

- 任意の $x \in S^3$ に対し、 $H(x, 0) = h(x), H(x, 1) = h'(x)$.
- 任意の $s \in [0, 1]$ に対し、写像 $h_s : S^3 \rightarrow S^3$ を

$$h_s(x) = H(x, s) \quad (\forall x \in S^3)$$

により定めると、 h_s は同相写像。

イソトピーを用いて、与えられた 2 つの結び目の同値性を定義する。

Definition

K, K' を結び目とする。

K と K' が **同値である** とは、恒等写像 $id_{S^3} : S^3 \rightarrow S^3$ にイソトープであり、 $h(K) = K'$ を満たすような同相写像 $h : S^3 \rightarrow S^3$ が存在するときのことをいう。

結び目 K, K' が同値であるならば、 h を結び目補空間に制限することで同相写像 $h|_{S^3 - K} : S^3 - K \rightarrow S^3 - K'$ が得られる。

したがって

$$K \text{ と } K' \text{ が同値} \Rightarrow S^3 - K \approx S^3 - K'$$

が成立する。ここで、 \approx は同相を表す記号である。

以上より、2 つの結び目を区別するためには、結び目補空間に着目すればよいことがわかる。本論文では結び目補空間の基本群に着目する。次節からその準備を始めていく。

§3. 基本群の定義と Van Kampen's Theorem

結び目群は結び目補空間の基本群として定義される。この節では基本群の定義を述べ、Van Kampen's Theorem について説明する。Van Kampen's Theorem は基本群を計算する際に用いられる有用な定理である。

まずは基本群を定義していく。

Definition

X を位相空間とする. 連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow X$ を X 内の道 (path) という.
特に, $f(0) = f(1)$ のとき, 道 f を閉道 (loop) といい, $f(0)(= f(1))$ を f の基点という.

Definition

X を位相空間とし, $x_0 \in X$ をとる. 関係 \sim_{rel} を次のように定める.
 x_0 を基点とする X 内の loop f, g に対して $f \sim_{rel} g$ であるとは, 任意の $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ に対し,

$$H(s, 0) = f(s), H(s, 1) = g(s), H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

を満たす連続写像 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在するときのことをいう. H を f から g への **ホモトピー** という. 関係 \sim_{rel} は $P(X, x_0) := \{ f \mid f \text{ は } x_0 \text{ を基点とする } X \text{ 内の loop} \}$ 上の同値関係である.

$$\pi_1(X, x_0) := P(X, x_0) / \sim_{rel}$$

とおくと, $\pi_1(X, x_0)$ は道の積により群をなす. 単位元は任意の $t \in [0, 1]$ に対し $f(t) = x_0$ となる道 f (定値道) のホモトピー類, loop f に対して逆元は f を逆からたどるような loop のホモトピー類である. この群を x_0 を基点とする X の**基本群**という. 基本群の典型的な例を2つ挙げる.

例) • $X = \{x_0\}$ (1点集合) とすると, $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$. ここで $\{1\}$ は自明な群を表す.

- $x_0 \in S^1$ に対し, $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

このとき, \mathbb{Z} の生成元は S^1 を1周する loop のホモトピー類に対応している.

基本群を計算する際には変形レトラクトという操作を適宜行い, 空間を“つぶしてから”計算する. ここで変形レトラクトの定義を述べる.

Definition

X を位相空間, $R \subset X$ とする. 次の2つを満たす連続写像 $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在するとき, R を X の**変形レトラクト**という.

- 任意の $x \in X$ に対し, $H(x, 0) = x, H(x, 1) \in R$.
- 任意の $t \in [0, 1]$ と任意の $x \in R$ に対し, $H(x, t) = x$.

変形レトラクトによって基本群は変化しないため, 変形レトラクトを行って基本群を計算することができる.

次に, 本論文で用いる特別な場合の Van Kampen's Theorem を述べる. 一般の Van Kampen's Theorem は参考文献 [4] を見てもらいたい. 証明は参考文献 [3] を参照してほしい.

Theorem 1-1 (Van Kampen's Theorem 1)

X, Y を弧状連結な位相空間とする. $X \cap Y$ が弧状連結であるとする. $x_0 \in X \cap Y$ を基点とする. このとき,

$$\pi_1(X \cap Y, x_0) \cong \{1\} \Rightarrow \pi_1(X \cup Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, x_0).$$

ここで, $*$ は群の自由積を表す.

Theorem 1-2 (Van Kampen's Theorem 2)

X を弧状連結な位相空間とする. 2次元円板 D^2 を ∂D^2 に沿って X に貼り付けて得られる位相空間 $X \cup D^2$ を考える. $x_0 \in X \cup D^2$ を基点とする. $X \cap D^2 = S^1$ の基本群の生成元によって生成される $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群を S とおくと,

$$\pi_1(X \cup D^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/S.$$

Theorem 1-1 を用いた基本群の計算例を与える.

Example

図 3.1 のような n 個の S^1 の 1 点和を S^1 のブーケといい,

$$\overbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}^n \text{ と表す.}$$

共通部分 x_0 を基点とする. 1 点の基本群は自明なので,

Van Kampen's Theorem 1-1 より,

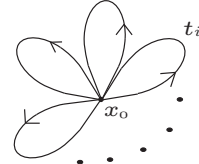


図 3.1

$$\begin{aligned} \pi_1(\overbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}^n, x_0) &\cong \overbrace{\pi_1(S^1, x_0) * \dots * \pi_1(S^1, x_0)}^n \\ &\cong \langle t_1, \dots, t_n \rangle \end{aligned}$$

ここで, t_1, \dots, t_n は各 S^1 の基本群の生成元である (図 3.1).

§4. 結び目群の Wirtinger 表示

この節では, 参考文献 [2] に従い, 前節で述べた Van Kampen's Theorem を用いて結び目群の Wirtinger 表示を導く.

Definition

- K を結び目とする. $p_0 \in S^3 - K$ を基点とする. $\pi_1(S^3 - K, p_0)$ を K の**結び目群**という.
- S^1 のブーケ $S^1 \vee \dots \vee S^1$ が S^3 内のある平面上にあるとき, そのブーケは**標準的な位置にある**という.

Lemma 1

n 個の S^1 のブーケ $S^1 \vee \dots \vee S^1$ が標準的な位置にあるとき, $\pi_1(S^3 - S^1 \vee \dots \vee S^1, p_0)$ は階数 n の自由群と同型である.

(証明)

$$S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\},$$

$$D_+^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_4 \geq 0\}, \quad D_-^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_4 \leq 0\} \text{ とおくと,}$$

$$S^3 = D_+^3 \cup D_-^3, \quad D_+^3 \cap D_-^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \approx S^2$$

となる.

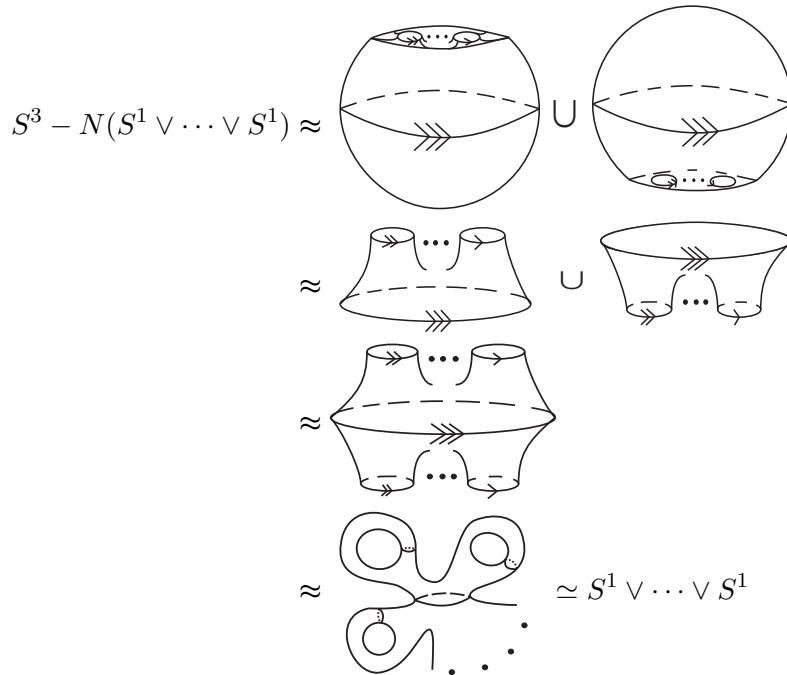
また, D_+^3, D_-^3 は 3次元円板 D^3 と同相なので, S^3 は 2つの D^3 をその表面に沿って貼り合わせた空間とみなすことができる.

Lemma 1 のブーケは $D_+^3 \cap D_-^3$ 上に存在するとしてよい. $S^1 \vee \dots \vee S^1$ の S^3 における開近傍を $N(S^1 \vee \dots \vee S^1)$ とおくと, $S^3 - S^1 \vee \dots \vee S^1$ は $S^3 - N(S^1 \vee \dots \vee S^1)$ に変形レトラクトできるため,

$$\pi_1(S^3 - S^1 \vee \dots \vee S^1, p_0) \cong \pi_1(S^3 - N(S^1 \vee \dots \vee S^1), p_0)$$

となる.

ここで, $S^3 - N(S^1 \vee \dots \vee S^1)$ を同相により変形していくと次のようになる.



したがって, 各 S^1 の基本群の生成元をそれぞれ t_i ($i = 1, \dots, n$) とすると,

$$\pi_1(S^3 - S^1 \vee \dots \vee S^1, p_0) \cong \pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1, p_0) \cong \langle t_1, \dots, t_n \rangle$$

となる. \square

Remark

Lemma 1 における t_i は図 4.1 のように与えられる.

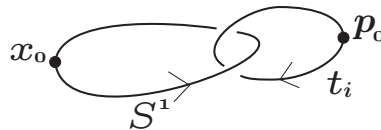


図 4.1

Definition

K を結び目とする.

- 2 重点の下を出て別の 2 重点の下に潜るまでの間の弧を**部分弧**という.
- $p_0 \in S^3 - K$ とし, C を K の部分弧とする. K に向きを与えたとき, 図 4.2 に描かれているような閉道 t を C に対応する**メリディアン**という.

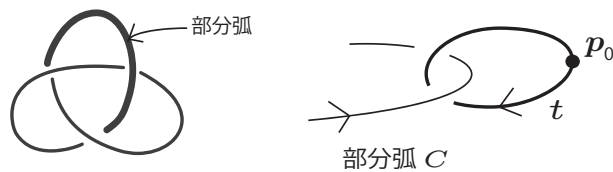


図 4.2

結び目の各 2 重点に $\pi_1(S^3 - K, p_0)$ の関係子が対応する. このことを説明する.
 K を結び目とし, $p_0 \in S^3 - K$ をとる. K に向きを与える. C_i を結び目 K の部分弧, t_i を C_i に対応するメリディアンとする. 各 2 重点 c_k に対し, 向きの付け方により次図の 2 通りが考えられる.

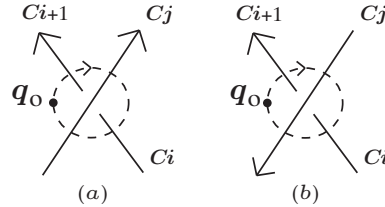


図 4.3

図 4.3 の点線のように, 2 重点 c_k を中心として部分弧 C_i, C_{i+1}, C_j の下に位置する円周を描き, この円周上に点 q_0 をとる. このとき r_k を

$$(a) \text{ のとき } r_k = t_{i+1}^{-1} t_j^{-1} t_i t_j$$

$$(b) \text{ のとき } r_k = t_{i+1}^{-1} t_j t_i t_j^{-1}$$

と定めると, r_k は p_0 から q_0 へ行き, 図 4.3 の点線をたどり, q_0 から p_0 へ戻る閉道に対応している. この r_k を 2 重点 c_k に対応する関係子という.

それでは, 結び目群の Wirtinger 表示について述べる.

Theorem 2

K を結び目とする. $i = 1, \dots, n$ に対し, t_i を部分弧 C_i に対応するメリディアンとする. $k = 1, \dots, n$ に対し, r_k を 2 重点 c_k に対応する関係子とする. このとき,

$$\pi_1(S^3 - K, p_0) \cong \langle t_1, \dots, t_n \mid r_1 = e, \dots, r_n = e \rangle.$$

この群の表示を結び目群の **Wirtinger 表示** という.

(証明)

各 2 重点において下に位置する点を q_1, \dots, q_n とし, これらの点によって分割することで得られる n 個の部分弧を C_1, \dots, C_n とする.

図 4.4 のように $S^3 - K$ 内の線分 I_1, \dots, I_n と

点 $a_0 \in S^3 - K$ を定め,

$$K^* = K \cup \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right) \cup \{a_0\}$$

とおく. K^* について次が成立する.

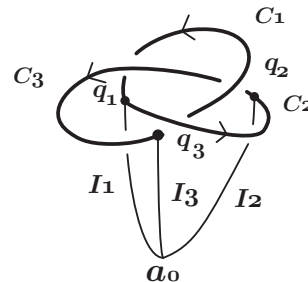


図 4.4 ($n = 3$ のとき)

Lemma 2

$$\pi_1(S^3 - K^*, p_0) \cong \langle t_1, \dots, t_n \rangle.$$

ただし, t_1, \dots, t_n はそれぞれ C_1, \dots, C_n に対応するメリディアンである.

(証明)

各 I_i を図 4.5 のように三角形 T_i に変形した図形を $K^{*'}$ とする. すなわち,

$$K^{*'} = K \cup \left(\bigcup_{i=1}^n T_i \right) \cup \{a_0\}$$

とする. $S^3 - K^*$ は $S^3 - K^{*'}$ に変形レトラクトできるので,

$$\pi_1(S^3 - K^*, p_0) \cong \pi_1(S^3 - K^{*'}, p_0).$$

一方, 図 4.5 は次のように変形することができる.

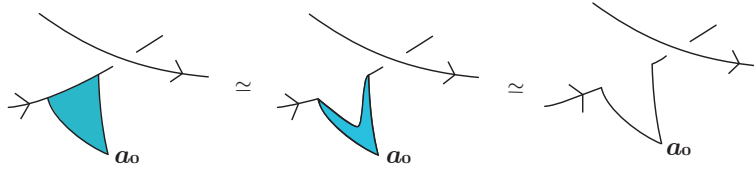
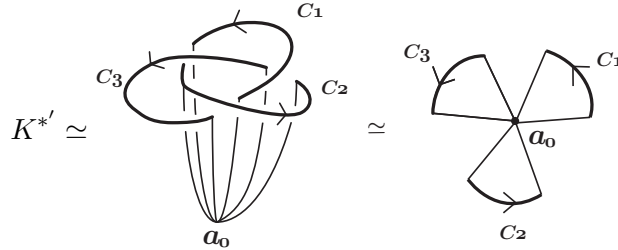


図 4.5

したがって全体で見ると,



よって, $K^{*'}$ は n 個の S^1 のブーケに変形レトラクトできる. よって Lemma 1 より,

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - K^*, p_0) &\cong \pi_1(S^3 - K^{*'}, p_0) \\ &\cong \pi_1(S^3 - S^1 \vee \cdots \vee S^1, p_0) \\ &\cong \langle t_1, \dots, t_n \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

再び Theorem 2 の証明に戻る. 図 4.6 において, 2次元円板 D_i^2 を ∂D_i^2 に沿って $S^3 - K^*$ に貼り付けることで $S^3 - K$ が得られる.

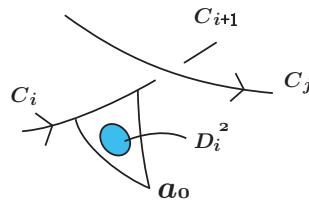


図 4.6

Van Kampen's Theorem 2 より, $\pi_1(S^3 - K, p_0)$ は $\pi_1(S^3 - K^*, p_0)$ に

$$[\partial D_i^2] = e$$

という関係を入れた群となる. ここで, $[\partial D_i^2]$ は $\pi_1(\partial D_i^2, p_0) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を表す.

図 4.6 を上から見ると, 各 ∂D_i^2 は図 4.3 の (a) または (b) における点線のように見える. したがって, 各 2 重点に対応する関係子を r_k とすると, Theorem 2 の直前の議論により

$$\pi_1(S^3 - K, p_0) \cong \langle t_1, \dots, t_n \mid r_1 = e, \dots, r_n = e \rangle. \quad \square$$

Wirtinger 表示を用いた計算例を与える.

Example

3_1 の結び目群の Wirtinger 表示を求める.

図 4.7 のように各部分弧に対応するメリディアンを定める.

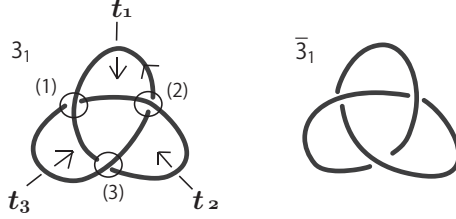


図 4.7

2 重点 (i) ($i = 1, 2, 3$) に対応する関係子を r_i とすると,

$$r_1 = t_3^{-1}t_1t_2t_1^{-1}, \quad r_2 = t_1^{-1}t_2t_3t_2^{-1}, \quad r_3 = t_2^{-1}t_3t_1t_3^{-1}$$

したがって, Theorem 2 より

$$\pi_1(S^3 - 3_1, p_0) \cong \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1t_2 = t_3t_1, t_3t_1 = t_2t_3, t_1t_2 = t_2t_3 \rangle$$

ここで, $r_1 = e$ より $t_3 = t_1t_2t_1^{-1}$ なので,

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - 3_1, p_0) &\cong \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_1t_2 = t_3t_1, t_3t_1 = t_2t_3, t_1t_2 = t_2t_3 \rangle \\ &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2t_1 = t_2t_1t_2 \rangle \end{aligned}$$

同様に, 3_1 の鏡像 $\overline{3_1}$ の結び目群の Wirtinger 表示が以下のように求まる.

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - \overline{3_1}, p_0) &\cong \langle t_1, t_2, t_3 \mid t_2t_1 = t_3t_2, t_1t_3 = t_2t_1, t_1t_3 = t_3t_2 \rangle \\ &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2t_1 = t_2t_1t_2 \rangle \end{aligned}$$

これより 3_1 と $\overline{3_1}$ の結び目群が同型であることがわかるため, 結び目群の Wirtinger 表示では 3_1 と $\overline{3_1}$ が同値かどうかの判別ができない. しかし, ジョーンズ多項式という結び目不変量を用いることでこれらが同値でないことがわかる. 詳しい計算方法は本論文の主旨から逸れるため, ここではその結果だけ述べておく. ジョーンズ多項式の計算方法については参考文献 [1] を参照してほしい.

結び目 K のジョーンズ多項式を $V_K(t)$ とおくと,

$$V_{3_1}(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1},$$

$$V_{\overline{3_1}}(t) = -t^4 + t^3 + t.$$

$V_{3_1}(t) \neq V_{\overline{3_1}}(t)$ であるため, 3_1 と $\overline{3_1}$ は同値ではないことが分かる.

次に 4_1 の結び目群の Wirtinger 表示を求める. 3_1 と同様に,

$$\pi_1(S^3 - 4_1, p_0) \cong \langle t_1, t_2, t_3, t_4 \mid t_1t_3 = t_4t_1, t_3t_1 = t_2t_3, t_4t_2 = t_2t_1, t_2t_4 = t_4t_3 \rangle$$

$t_4t_2 = t_2t_1$ より

$$t_4 = t_2t_1t_2^{-1}$$

$t_1t_3 = t_4t_1$ に代入すると,

$$\begin{aligned} t_1t_3 &= t_2t_1t_2^{-1}t_1 \\ t_3 &= t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1}t_1 \end{aligned}$$

$t_3t_1 = t_2t_3$ に代入すると,

$$\begin{aligned} t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1}t_1^2 &= t_2t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1}t_1 \\ t_2t_1t_2^{-1}t_1 &= t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1} \end{aligned}$$

また, $t_2t_4 = t_4t_3$ に代入すると,

$$\begin{aligned} t_2^2t_1t_2^{-1} &= t_2t_1t_2^{-1}t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1}t_1 \\ t_2t_1t_2^{-1}t_1 &= t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1} \end{aligned}$$

したがって

$$\pi_1(S^3 - 4_1, p_0) \cong \langle t_1, t_2 \mid t_2t_1t_2^{-1}t_1 = t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1} \rangle$$

同様に, 図 2.1 の他 5 つの結び目の結び目群の Wirtinger 表示が 2 元生成であることがわかる. Wirtinger 表示を 2 元生成で表したものを以下に記しておく.

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - 3_1, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2t_1 = t_2t_1t_2 \rangle \\ \pi_1(S^3 - 4_1, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_2t_1t_2^{-1}t_1 = t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1t_2^{-1} \rangle \\ \pi_1(S^3 - 5_1, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2t_1t_2t_1 = t_2t_1t_2t_1t_2 \rangle \\ \pi_1(S^3 - 5_2, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_2t_1t_2^{-1}t_1t_2t_1^{-1}t_2 = t_1t_2^{-1}t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1 \rangle \\ \pi_1(S^3 - 6_1, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2^{-1}t_1t_2^{-1}t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1^{-1} = t_2^{-1}t_1t_2^{-1}t_1t_2t_1^{-1}t_2t_1^{-1}t_2 \rangle \\ \pi_1(S^3 - 6_2, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_1t_2^{-1}t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2t_1t_2t_1^{-1} = t_2^{-1}t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2t_1t_2t_1^{-1}t_2^{-1}t_1^{-1}t_2t_1t_2 \rangle \\ \pi_1(S^3 - 6_3, p_0) &\cong \langle t_1, t_2 \mid t_2t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2t_1t_2^{-1}t_1^{-1}t_2t_1t_2t_1^{-1}t_2^{-1}t_1^{-1} = t_1^{-1}t_2^{-1}t_1t_2t_1t_2^{-1}t_1^{-1}t_2t_1t_2t_1^{-1}t_2^{-1} \rangle \end{aligned}$$

§5. 結び目群から対称群への表現

§4 で, 図 2.1 における 7 つの結び目について結び目群の Wirtinger 表示を計算した. しかし, この形のままでお互いが同型かどうかを判定するのは難しい. そのようなときによく行われる手法として群への表現を調べる方法が挙げられる. 本論文では対称群への表現を考える. 例えば, 3_1 の結び目群の Wirtinger 表示を G とし, 準同型写像 $\varphi: G \rightarrow S_3$ を

$$\varphi(t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

により定めると, φ は well-defined であり, φ によって G が 3 次対称群 S_3 に表現される. このような表現は複数個存在する. 与えられた 2 つの群が同型であるならば, それらの群から対称群への表現の個数は等しくなるため, 各結び目群が同型かどうかを調べるときに結び目群から対称群への表現の個数を比較することが有効である. この論文では §4 で求めた結び目群の Wirtinger 表示を用いて最小交点数が 6 以下の結び目の結び目群から 3 次, 4 次, 5 次対称群 S_3, S_4, S_5 への表現の個数を求めた. その結果をまとめたものが次ページの表である. この表において, $3_1, 4_1$ については S_3, S_4 への表現の個数を比較するだけで他の結び目群と同型でないことが分かるため, S_5 への表現の個数を計算していない. この結果は計算ソフト Maple16, GAP4 を独立に用いて計算させ, 値が一致していることを確認して導きだした.

	3 ₁	4 ₁	5 ₁	5 ₂	6 ₁	6 ₂	6 ₃
S ₃	12 個	6 個	6 個	6 個	12 個	6 個	6 個
S ₄	96 個	48 個	24 個	24 個	72 個	24 個	24 個
S ₅			722 個	360 個	600 個	240 個	240 個

上の表から, 3つの対称群 S_3, S_4, S_5 への表現の個数を見ることで, 各結び目群が, 組 $(6_2, 6_3)$ を除いてそれぞれ同型でないことがわかる. したがって組 $(6_2, 6_3)$ を除く 6 交点以下の結び目はそれぞれ同値でない.

そこで, $6_2, 6_3$ の結び目群の Wirtinger 表示を詳しく調べる. $6_2, 6_3$ の結び目群をそれぞれ G_2, G_3 とおく. G_2, G_3 から対称群 S_i ($i = 3, 4, 5$) への準同型写像をそれぞれ $\varphi_{2i}, \varphi_{3i}$ とする. 写した先が可換であるものは,

$$\varphi_{2i}(t_1) = \varphi_{2i}(t_2), \varphi_{3i}(t_1) = \varphi_{3i}(t_2)$$

となるものに限るため, 像が可換群になるものの個数も等しい. なお, このときの像はどちらも巡回群となる. つまり, $6_2, 6_3$ の結び目群から対称群 S_i ($i = 3, 4, 5$) への準同型写像のうち像が可換群ならばすべて巡回群であり, そのような準同型写像の個数も等しい.

$6_2, 6_3$ の非同値性を調べるためには, S_6 への表現の個数を比較することが考えられる. しかしそれは膨大な計算量となりかなりの時間と労力がかかるため, 現実的ではない. ここで再び $6_2, 6_3$ のジョーンズ多項式を計算すると, 次のようになることが分かる.

$$V_{6_2}(t) = t - 1 + 2t^{-1} - 2t^{-2} + 2t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5}$$

$$V_{6_3}(t) = -t^3 + 2t^2 - 2t + 3 - 2t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3}$$

$V_{6_2}(t) \neq V_{6_3}(t)$ であるため, 6_2 と 6_3 は同値ではないことがわかる.

以上の計算を通して, 一般に結び目群の Wirtinger 表示を用いて結び目を区別するには計算量が膨大であることが実感でき, この膨大な計算量が, 結び目の同値問題に対して結び目群の Wirtinger 表示があまり用いられない要因なのかと思えた. しかし, 今回は対称群への表現を考えたが, 多面体群や線形群など表現の対象として考えるべき群は他にも多く存在する. 対称群以外の群への表現を考えることでどのような結果が導きだされるか, またどのような群へ表現すれば, 交点数の多い結び目に対しても同値かどうか判定しやすくなるのかが今後の課題として挙げられる.

参考文献

- [1] 今井淳 『結び目の数学』, 数学通信第 13 巻第 3 号, 2008 年度.
- [2] 松本幸夫 『トポロジー入門』, 岩波書店, 1985 年.
- [3] 松本幸夫 『4 次元のトポロジー』, 日本評論社, 2009 年.
- [4] Allen Hatcher 『Algebraic Topology』, Cambridge University Press, 2001 年.