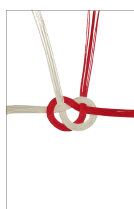


# 淡路結びのジョーンズ多項式

辻野 早紀 (表現論研究室)

私は、特別研究で、『組みひもの数理』[1]を読んでリンクの不変量について勉強してきた。この論文はそのまとめである。



リンクとは、いくつかの紐が互いに交わることなく絡みあっているものをいう。(ただし数学でリンクを扱うときには紐の端と端をつなげて輪の形にする(詳しくは§1を参照)。)祝儀の際に用いられる飾りで、贈答品の包み紙などにかける飾り紐に使われている淡路結び(左図)はリンクの一例である。

連続変形でうつりあうリンク同士は同じものとみなすのだが、見かけだけでは、同じか異なるかの判定が難しい。その問題を解決するために不変量(連続変形では変わらない量)を導入する。不変量を用いることで見た目では分からない紐の変化を解決することができる。リンクの有用な不変量としてジョーンズ多項式が知られている。ジョーンズ多項式はスケイン関係式をもっており、それを用いることによりどんなジョーンズ多項式も計算することができる(§3を参照)。この論文では、ジョーンズ多項式の定義と性質を述べ、淡路結びのジョーンズ多項式を計算する。

## §1. 状態和によるリンクの不変量の構成

数学において結び目は、3次元空間内の自己交差を持たない閉曲線のことを意味する。リンクとは、3次元空間にいくつかの結び目が互いに交わることなく絡みあっているものである。連続変形でうつりあうリンク同士は同じものとみなす。リンクは見かけだけでは、同じか異なるかの判定が難しい。そのため、不変量(連続変形では変わらない量)を導入して、同じリンクかどうかを調べる。

リンクを2次元平面に射影して平面上の曲線として表現する。この図を射影図とよぶ。射影図ではリンクの絡み方が分からないので、各交差点に上下の情報をつけた図を考える。この図をリンクダイアグラムという。

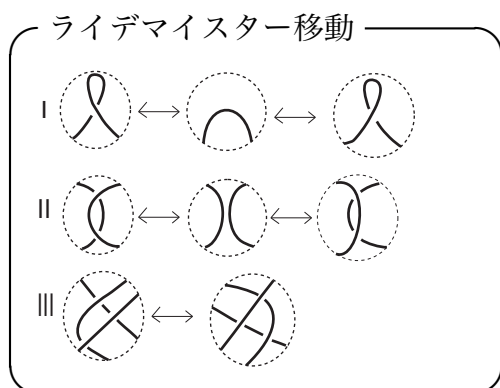


射影図



リンクダイアグラム

リンクのダイアグラムに対する、下のような3種類の局所的な(全体の中の限られた部分の)変形をそれぞれライデマイスター移動I,II,IIIという。



リンク  $L_1$  と  $L_2$  のリンクダイアグラムを  $D_1$  と  $D_2$  とする。 $D_1$  から  $D_2$  がライデマイスター移動I,II,IIIを有限回施すことにより得られたら、 $L_1$  と  $L_2$  が同じリンクであることが分かる。本当は逆も成り立つ。すなわち、次の定理が成り立つ。

**定理 1.1**(ライデマイスター)

2つのリンクが同じであることはそれらのリンクダイアグラムがライデマイスター移動 I,II,III を繰り返し施すことによって得られることと同値である。

リンクの不変量を導くためにリンクダイアグラムの交差点を解消することを考える。

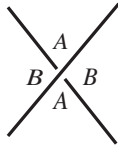


図 1.1

交差点のまわりの4つの領域にダイアグラムの上の辺を下の辺と重なるまで反時計に回した際に上のリンクが通った領域に文字  $A$ , それ以外に文字  $B$  を割りふる。

このとき, リンクダイアグラムの交差点のつなぎ替えには次の2通りのパターンが考えられる。図 1.2a のつなぎ替え方を  $A$  マーカーに沿って切るといい, 図 1.2b のつなぎ替え方を  $B$  マーカーに沿って切るといい。

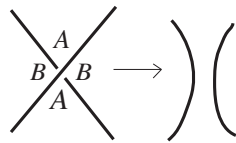


図 1.2a

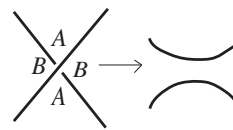


図 1.2b

これらの操作を各交差点で行うとリンクダイアグラムは平面上のいくつかの交わらない単純閉曲線になる。

リンクダイアグラム  $D$  の交差点の個数を  $n$  とする。このとき各交差点ごとに2通りの切り方があるので,  $2^n$  個のパターンが得られる。このパターンの1つ1つを,  $D$  の**状態**という。

$S$  をリンクダイアグラム  $D$  の1つの状態とする。

各交差点に指定されたすべての文字  $A, B$  の積をとったものを  $\langle D|S \rangle$  と表す。

$|S|$  を状態  $S$  のパターンに含まれる閉曲線の個数とする。

**例 1.2** 三葉結び目のダイアグラム  $D =$   の場合, ステイトは  $2^3 = 8$  通りであり, それらは次図で与えられる。



$$\langle D|S \rangle = A^3$$

$$|S| = 2$$



$$\langle D|S \rangle = A^2B$$

$$|S| = 1$$



$$\langle D|S \rangle = A^2B$$

$$|S| = 1$$



$$\langle D|S \rangle = AB^2$$

$$|S| = 2$$



$$\langle D|S \rangle = A^2B$$

$$|S| = 1$$



$$\langle D|S \rangle = AB^2$$

$$|S| = 2$$



$$\langle D|S \rangle = AB^2$$

$$|S| = 2$$



$$\langle D|S \rangle = B^3$$

$$|S| = 3$$

統計和の定義

リンクダイアグラム  $D$  に対して,  $A, B, d$  を変数とする多項式を次で定める。

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle d^{|S|}$$

$\langle D \rangle$  を統計和と呼ぶ。ここで, 和は  $D$  のすべての状態についてとる。

注意:  $\langle D \rangle$  は, ステートを決めるごとに局所的に決まる切り方すべての積をとり, さらにすべての状態についての和をとることにより定義されている。このような量は一般に統計和と呼ばれる。

$D$  が三葉結び目のリンクダイアグラムの場合, 例 1.2 より  $\langle D \rangle$  は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= A^3 d^2 + A^2 B d + A^2 B d + AB^2 d^2 + A^2 B d + AB^2 d^2 + AB^2 d^2 + B^3 d^3 \\ &= A^3 d^2 + 3A^2 B d + 3AB^2 d^2 + B^3 d^3. \end{aligned}$$

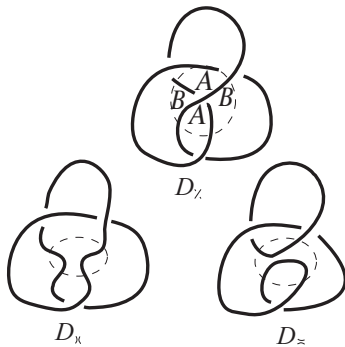


図 1.3

ダイアグラム  $D$  の 1 つの交差点  $p$  に着目して, この交差点を図 1.3 のようにマーカー  $A, B$  に沿って切って得られるダイアグラムを考える。はじめのダイアグラム  $D$  を  $D_x, A, B$  に沿って切って得られるダイアグラムをそれぞれ  $D_y, D_x$  で表す。

統計和  $\langle D \rangle$  は次の性質を持つ。

補題 1.3

- (1)  $\langle D_x \rangle = A \langle D_y \rangle + B \langle D_x \rangle$ . . . . . (1.1)
- (2)  $\langle \bigcirc \rangle = d$ .
- (3)  $\langle D \rangle = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle$  (ただし  $D$  が完全に 2 つのダイアグラム  $D_1, D_2$  に分離しているとき).

(証明) (1) ダイアグラム  $D$  のすべての状態の集合を  $\mathcal{S}(D)$  とし, 交差点  $p$  で  $A$  に沿って切って得られる  $D$  の状態の集合を  $\alpha$ ,  $B$  に沿って切って得られる  $D$  の状態の集合を  $\beta$  とする。このとき  $\mathcal{S}(D) = \alpha \cup \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  となる。よって

$$\begin{aligned} \langle D_x \rangle &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_x)} \langle D_x|S \rangle d^{|S|} = \sum_{S \in \alpha} \langle D_x|S \rangle d^{|S|} + \sum_{S \in \beta} \langle D_x|S \rangle d^{|S|} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_y)} A \langle D_y|S \rangle d^{|S|} + \sum_{S \in \mathcal{S}(D_x)} B \langle D_x|S \rangle d^{|S|} = A \langle D_y \rangle + B \langle D_x \rangle. \end{aligned}$$

- (2) 自明な結び目に対応した 1 つの円からなるダイアグラムについては状態は 1 つだけなので  $\langle \bigcirc \rangle = d$  となる。
- (3)  $D$  の状態を与えることと  $D_1, D_2$  の状態の組を与えることは同値なので

$\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(D_1) \times \mathcal{S}(D_2)$  となる。 $D$  の状態  $S$  に対応する  $D_1, D_2$  の状態をそれぞれ  $S_1, S_2$  とすると  $\langle D|S \rangle = \langle D_1|S_1 \rangle \langle D_2|S_2 \rangle$  となるので,

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \sum_S \langle D|S \rangle d^{|S|} = \sum_S (\langle D_1|S_1 \rangle d^{|S_1|} \times \langle D_2|S_2 \rangle d^{|S_2|}) \\ &= \sum_{S_1 \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D_1|S_1 \rangle d^{|S_1|} \times \sum_{S_2 \in \mathcal{S}(D_2)} \langle D_2|S_2 \rangle d^{|S_2|} = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

統計和  $\langle D \rangle$  からリンクの不変量を導くためにライデマイスター移動 I, II, III を施したときの変化をみる。

[ライデマイスター移動 II で不変になるための条件を調べる]

ライデマイスター移動 II を施す前後の統計和をそれぞれ  $\langle \textcircled{\cap} \rangle, \langle \cap \rangle$  で表すことにする。(一部分しか描いていないが  $\langle \cap \rangle$  の中には、リンクダイアグラムが入っている。) 関係式 (1.1) を用いて計算すると

$$\langle \textcircled{\cap} \rangle = A \langle \cup \rangle + B \langle \textcircled{\cup} \rangle = A(A \langle \cap \rangle + B \langle \cap \rangle) + B \langle \textcircled{\cup} \rangle$$

となる。ここで

$$\langle \textcircled{\cup} \rangle = A \langle \textcircled{\cap} \rangle + B \langle \cap \rangle = A \langle \cap \rangle \langle \textcircled{\cap} \rangle + B \langle \cap \rangle = (Ad + B) \langle \cap \rangle \quad \dots\dots (1.2)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \langle \textcircled{\cap} \rangle &= A(A \langle \cap \rangle + B \langle \cap \rangle) + B(Ad + B) \langle \cap \rangle \\ &= (A^2 + ABd + B^2) \langle \cap \rangle + AB \langle \cap \rangle \end{aligned}$$

が得られる。従って、 $A, B, d$  の間に関係式

$$AB = 1, A^2 + B^2 + ABd = 0$$

があれば、ライデマイスター移動 II で不変であることがわかる。そこで、以下

$$B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2} \quad \dots\dots (1.3)$$

とおいて、 $\langle D \rangle$  を  $A$  の関数とみなすことにする。

[次にライデマイスター移動 I で不変になるための条件を調べる]

(1.3) より  $Ad + B = A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$  である。これを (1.2) に代入すると

$$\langle \textcircled{\cap} \rangle = -A^3 \langle \cap \rangle \quad \dots\dots (1.4)$$

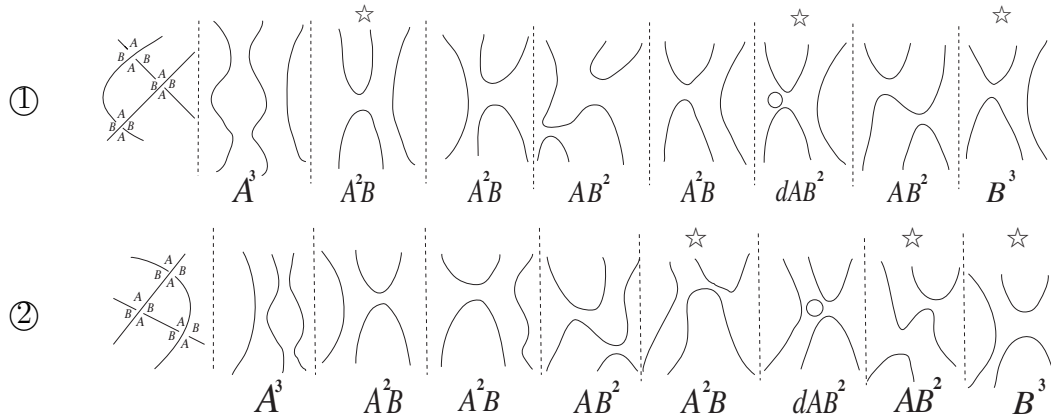
が得られる。同じように計算すると

$$\langle \textcircled{\cup} \rangle = A^{-3} \langle \cap \rangle \quad \dots\dots (1.5)$$

となる。

[次にライデマイスター移動 III で不変になるための条件を調べる]

ライデマイスター移動 III を施す前後の統計和をそれぞれ  $\langle \langle \text{---} \rangle \rangle$ ,  $\langle \langle \text{---} \rangle \rangle$  で表すことにする。次の図はこれらを計算した結果を示している。図の下に書かれている 8 つの式は 3 つの交差点で切り開いたときに現れる係数を表している。



①と②で共通のパターン以外のもの (☆) をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned}
 (\langle \langle \text{---} \rangle \rangle \text{ の } \star \text{ の部分の項の和}) &= dAB^2 + A^2B + B^3 \\
 &= B(dAB + A^2 + B^2) \\
 &= A^{-1}(-A^2 - A^{-2}AA^{-1} + A^2A^2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\langle \langle \text{---} \rangle \rangle \text{ の } \star \text{ の部分の項の和}) &= AB + dAB^2 + B^3 \\
 &= B(A^2 + dAB + B^2) \\
 &= A^{-1}(A^2 + (-A^2 - A^{-2}) + A^{-2}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

よって, 統計和  $\langle D \rangle$  はライデマイスター移動 III のもとで不変である。

以上より (1.3) を前提条件として, 統計和  $\langle D \rangle$  ライデマイスター移動 II, III で不変であり, ライデマイスター移動 I は不変でないことが分かった。□

### まとめ

$B = A^{-1}$ ,  $d = -A^2 - A^{-2}$  を前提として,  $\langle D \rangle$  は,

- ・ライデマイスター移動 I で不変でない。詳しくは次のようになる。

$$\langle \langle \text{---} \rangle \rangle = -A^3 \langle \langle \text{---} \rangle \rangle, \quad \langle \langle \text{---} \rangle \rangle = -A^{-3} \langle \langle \text{---} \rangle \rangle.$$

- ・ライデマイスター移動 II, III で不変である。

$$\langle \langle \text{---} \rangle \rangle = \langle \langle \text{---} \rangle \rangle = \langle \langle \text{---} \rangle \rangle, \quad \langle \langle \text{---} \rangle \rangle = \langle \langle \text{---} \rangle \rangle$$

## §2. カウフマンのブラケット多項式からジョーンズ多項式へ

§1 で導いた統計和  $\langle D \rangle$  に (1.3) を代入したものをカウフマンのブラケット多項式という。カウフマンのブラケット多項式から向きのついたリンクの不変量であるジョーンズ多項式が導かれる。ジョーンズ多項式の関係式を使うことによってどんなリンクのジョーンズ多項式も計算することができる。以下そのことを説明する。

カウフマンのブラケット多項式の定義

統計和  $\langle D \rangle$  に  $B = A^{-1}$ ,  $d = -A^2 - A^{-2}$  を代入して得られる, 負ベキも出てくる  $A$  だけの多項式

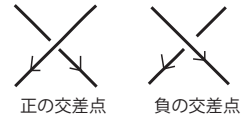
$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle (A^2 - A^{-2})^{|S|}$$

をカウフマンのブラケット多項式という。

向きをついたリンクの不変量を導くためにライズを用いる。

定義

リンクダイアグラム  $D$  の正の交差点とは, 上の辺を下の辺と重なるまで反時計に回した際に同じ向きとなる交差点であり, 負の交差点とは, 逆向きとなる交差点である。



$w(D) = \#(\text{正の交差点}) - \#(\text{負の交差点})$  を  $D$  のライズという。

$C(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$  とおく。

補題 2.1

$C(D)$  は向きをついたリンクの不変量を定める。

(証明)

(1) ライデマイスター移動 I で不変であることを示す。

$D'$  を  $D$  からライデマイスター移動 I を施して得られるリンクダイアグラムとする。

① の場合  $C(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-(1+w(D'))} \langle D \rangle$  となる。

ここで (1.4) を代入すると,

$$\begin{aligned} C(D) &= (-A^3)^{-(1+w(D'))} (-A^3 \langle \cap \rangle) = (-A^3)^{-(1+w(D'))} (-A^3 \langle D' \rangle) \\ &= (-A)^{-(3+3w(D'))} (-A^3 \langle D' \rangle) = (-A)^{-3w(D')} \langle D' \rangle = (-A^3)^{-w(D')} \langle D' \rangle = C(D') \end{aligned}$$

② の場合も同様にして  $C(D) = C(D')$  となることが示される。

(2) ライデマイスター移動 II で不変であることを示す。

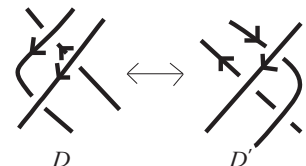
$D'$  を  $D$  からライデマイスター移動 II を施して得られるリンクダイアグラムとする。

① の場合  $C(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-(1-1+w(D'))} \langle \langle \rangle \rangle$   
 $= (-A^3)^{-w(D')} \langle \rangle \langle \rangle = (-A^3)^{-w(D')} \langle D' \rangle = C(D')$

② の場合も同様にして  $C(D) = C(D')$  となることが示される。

(3) ライデマイスター移動 III で不変であることを示す。

$D'$  を  $D$  からライデマイスター移動 III を施して得られるリンクダイアグラムとする。  $D, D'$  が右図の場合を考える (他の向きのつけ方も同様にして  $C(D) = C(D')$  が示せる)。



$T$  を描かれていない部分とすると,  $w(D') = 1 - 2 + w(T) = w(D)$  だから,

$$\begin{aligned} C(D) &= (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-w(D)} \langle \text{図} \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(D')} \langle \text{図} \rangle = (-A^3)^{-w(D')} \langle D' \rangle = C(D'). \end{aligned}$$

以上より  $C(D)$  は向きのついたリンクの不変量であることが示された。□

### ジョーンズ多項式の定義

$L$  を向きのついたリンク,  $D$  をそのダイアグラムとする。  $C(D)$  を  $d = -A^2 - A^{-2}$  で割って

$$V_L = \frac{1}{d} (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

とおく。  $V_L$  をリンク  $L$  の **ジョーンズ多項式** という。ジョーンズ多項式は, 向きのついたリンクの不変量である。

以下,

$$\sqrt{t} = A^{-2}$$

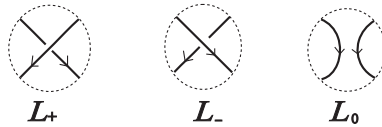
と置き換えて, ジョーンズ多項式を  $t$  の関数とみる。ジョーンズ多項式は次の性質を満たす。

### 定理 2.2 (ジョーンズ多項式の性質)

- (1) 自明な結び目を  $\bigcirc$  で表すと  $V_{\bigcirc} = 1$  である。
- (2) 次の **スケイン関係式** が成り立つ。

$$\frac{1}{t} V_{L_+} - t V_{L_-} = \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}$$

ただし,  $L_+, L_-, L_0$  は, ある図式の1つの“交点”の部分だけが次で置き換えられていて, 残りの部分は等しいリンクを表す。



- (3)  $L$  が完全に2つのリンク  $L_1, L_2$  に分離しているとき  $V_L = \left( -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_1} V_{L_2}$ .

(証明)

(1)  $D = \bigcirc$  のとき,  $C(D) = A^2 - A^{-2}$ , よって,  $V_{\bigcirc} = 1$ .

(2)  $w(\searrow) = w(\nearrow) + 1$ ,  $w(\swarrow) = w(\nwarrow) - 1$  であるから

$$\begin{aligned} -A^4 V_{L_+} + A^{-4} V_{L_-} &= -A^4 \left( \frac{1}{d} (-A^3)^{-w(\searrow)} \langle \searrow \rangle \right) + A^{-4} \left( \frac{1}{d} (-A^3)^{-w(\swarrow)} \langle \swarrow \rangle \right) \\ &= \frac{1}{d} (-A^4 (A^{-3})^{-w(\searrow)} \langle \searrow \rangle) + A^{-4} (A^3)^{-w(\swarrow)} \langle \swarrow \rangle \\ &= \frac{1}{d} (-A^4 (-A^3)^{-(w(\nearrow)+1)} \langle \searrow \rangle) + A^{-4} (-A^3)^{-(w(\nwarrow)-1)} \langle \swarrow \rangle \\ &= \frac{1}{d} (A (-A^3)^{-w(\nearrow)} \langle \searrow \rangle) - (A^{-1} (-A^3)^{-w(\nwarrow)} \langle \swarrow \rangle) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{d}(-A^3)^{-w(\gamma)}(A\langle \gamma \rangle - A^{-1}\langle \gamma \rangle) \quad \dots\dots (2.1)$$

補題 1.3(1) より,  $\langle \gamma \rangle = A\langle \rangle + A^{-1}\langle \rangle$ ,  $\langle \gamma \rangle = A^{-1}\langle \rangle + A\langle \rangle$  なので,

$$A\langle \gamma \rangle + A^{-1}\langle \gamma \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle \rangle$$

が得られる。これを用いて

$$(2.1) = \frac{1}{d}(-A^3)^{-w(\gamma)}((A^2 - A^{-2})\langle \rangle) = (A^2 - A^{-2})V_{L_0}$$

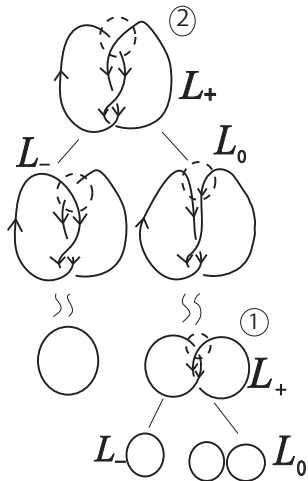
よって  $-A^4V_{L_+} + A^{-4}V_{L_-} = (A^2 - A^{-2})V_{L_0}$  が得られる。 $\sqrt{t} = A^{-2}$  を代入すると, ジョーンズ多項式のスケイン関係式になる。

(3) 補題 1.3 の (3) とジョーンズ多項式の定義より成り立つ。 □

### §3. スケイン関係式による淡路結びのジョーンズ多項式の計算

定理 2.2(3) より  $n$  個の絡んでいない自明な結び目からなるリンクのジョーンズ多項式は  $(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^{n-1}$  で与えられる。この結果とスケイン関係式を用いたジョーンズ多項式の計算例を 3 つ紹介する。

#### 例 3.1 右手系三葉結び目



三葉結び目 (例 1.2) と樹系図の一番上に描かれているリンクは同じであることが分かるので, 左図を使って計算する。

樹系図の①のリンクを  $L_+$  と書くとスケイン関係式と  $V_{L_-} = -t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}, V_{L_0} = 1$  より  $\frac{1}{t}V_{L_+} - t(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$  となる。これを計算すると,  $V_{L_+} = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$  となる。

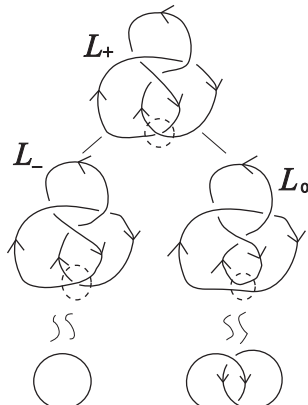
樹系図の②のリンクを  $L_+$  と書くとスケイン関係式と  $V_{L_-} = 1, V_{L_0} = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$  より

$$\frac{1}{t}V_{L_+} - t = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}).$$

これを計算すると,  $V_{L_+} = -t^4 + t^3 + t$  となる。

よって, 右手系三葉結び目のジョーンズ多項式は,  $-t^4 + t^3 + t$  である。

#### 例 3.2 8 の字結び目 (次の樹系図の一番上に描かれたいるリンク).

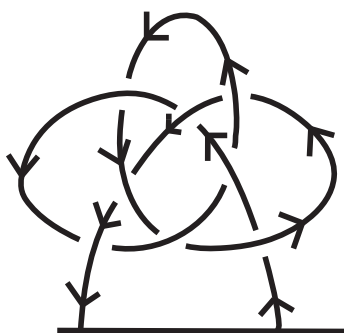


この名は, アラビア数字の 8 の形に似ていることからその名がついた。スケイン関係式と  $V_{L_-} = 1, V_{L_0} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}$  (例 3.1 の途中の計算) より  $\frac{1}{t}V_{L_+} - t = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}})$  となる。

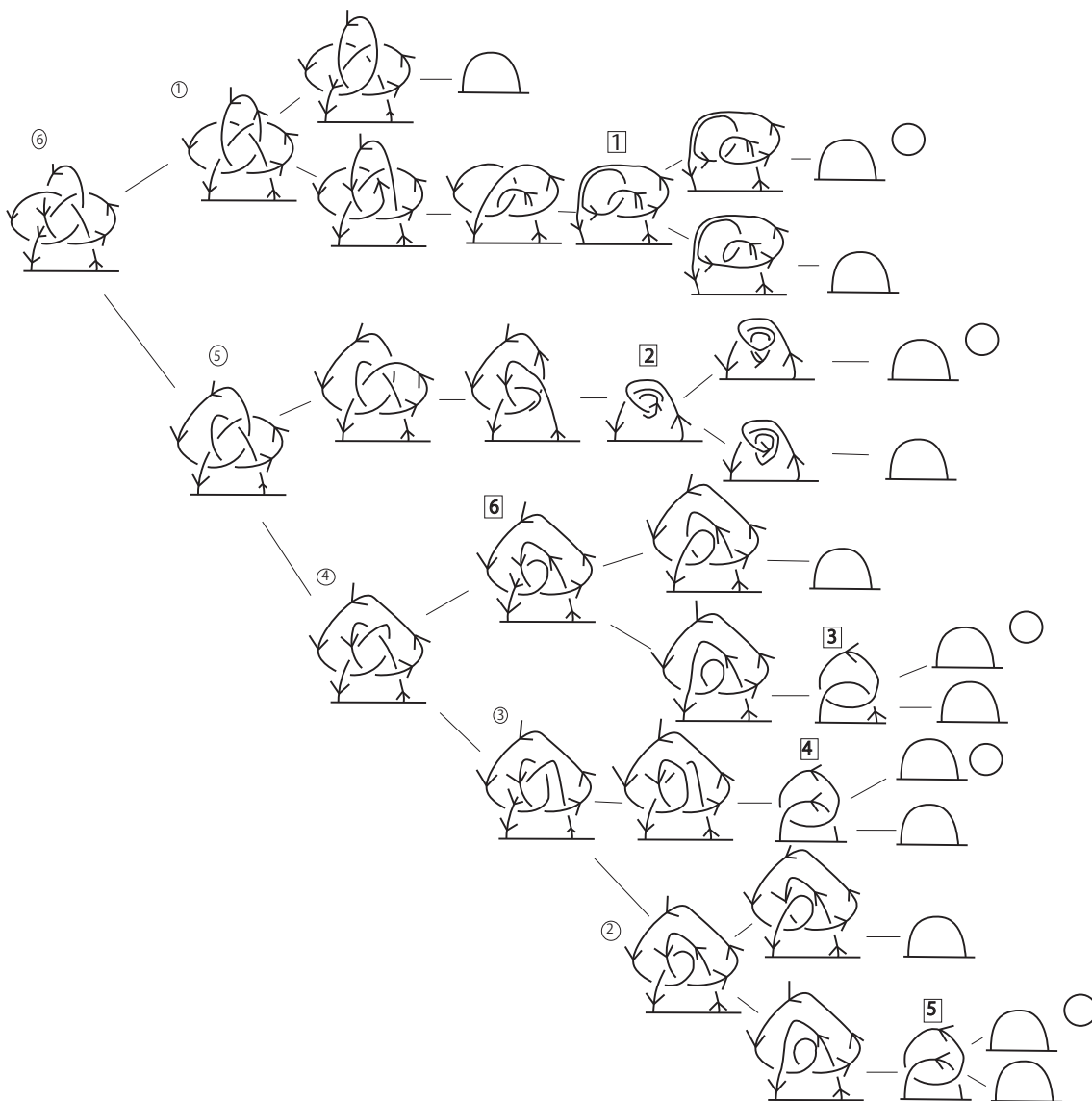
これより, 8 の字結び目のジョーンズ多項式は,  $t^{-2} - t^{-1} + 1 + t^2 - t$  と分かる。



例 3.3 淡路結び



今までは、輪の形の結び目を考えてきたが、ここでは、端点がある“結び”を考える。その端点は、“地面”に固定されているとみなす。左の形をした“結び” $T$ についても、スケイン関係式を繰り返し用いることで、ジョーンズ多項式が計算できる。この場合、計算していくと  $\cup$  の形のものが残るが、その“係数”が  $T$  のジョーンズ多項式となる。ここでは1本からなる淡路結び (左図で与えられる結び) のジョーンズ多項式を計算する。これは次の樹系図を用いて計算することができる。



[1] スケイン関係式と  $V_{L_+} = -t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}, V_{L_0} = 1$  より  $\frac{1}{t}(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) - tV_{L_-} = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$  となる。これを計算すると、 $V_{L_-} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}$  となる。

[2] は [1] と同じ。

[3], [4], [5] は、例 3.1 の途中式より  $V_{L_+} = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}$  となる。

⑥  $V_{L_+} = 1, V_{L_0} = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}$  より

$$\frac{1}{t} - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}).$$

これを計算すると,  $V_{L_-} = 1 + t^2 - t^{-1} - t + t^{-2}$  となる。

①  $V_{L_+} = 1, V_{L_0} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}$  より

$$\frac{1}{t} - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}).$$

これを計算すると,  $V_{L_-} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$  となる。

②は⑥と同じ。

③  $V_{L_+} = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}, V_{L_0} = 1 + t^2 - t^{-1} - t + t^{-2}$  より

$$\frac{1}{t}(-t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}) - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(1 + t^2 - t^{-1} - t + t^{-2}).$$

これを計算すると,  $V_{L_-} = -2t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{7}{2}}$  となる。

④  $V_{L_+} = 1 + t^2 - t^{-1} - t + t^{-2}, V_{L_0} = -2t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{7}{2}}$  より

$$\frac{1}{t}(1 + t^2 - t^{-1} - t + t^{-2}) - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-2t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{7}{2}}).$$

これを計算すると,  $V_{L_-} = 2t^{-1} + t - 2t^{-2} - 1 + 2t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5}$  となる。

⑤  $V_{L_-} = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}, V_{L_0} = 2t^{-1} + t - 2t^{-2} - 1 + 2t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5}$  より

$$\frac{1}{t}V_{L_+} - t(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(2t^{-1} + t - 2t^{-2} - 1 + 2t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5}).$$

これを計算すると,  $V_{L_+} = 3t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}} + 4t^{-\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{-\frac{5}{2}} + 3t^{-\frac{7}{2}} - t^{-\frac{9}{2}}$  となる。

⑥  $V_{L_-} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}, V_{L_0} = 3t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}} + 4t^{-\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{-\frac{5}{2}} + 3t^{-\frac{7}{2}} - t^{-\frac{9}{2}}$  より

$$\frac{1}{t}V_{L_+} - t(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(3t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}} + 4t^{-\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{-\frac{5}{2}} + 3t^{-\frac{7}{2}} - t^{-\frac{9}{2}}).$$

これを計算すると,

$$V_{L_+} = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 7t + 9 - 7t^{-1} + 6t^{-2} - 4t^{-3} + t^{-4} \text{ となる。}$$

以上より,

淡路結びのジョーンズ多項式は

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 7t + 9 - 7t^{-1} + 6t^{-2} - 4t^{-3} + t^{-4}$$

である。

注意：淡路結びの両端を閉じたものは結び目表(『数学辞典 第4版』p.1699)の $8_{18}$ と同じである。

## 参考文献

[1] 河野俊丈『組みひもの数理』遊星社, 1993年。