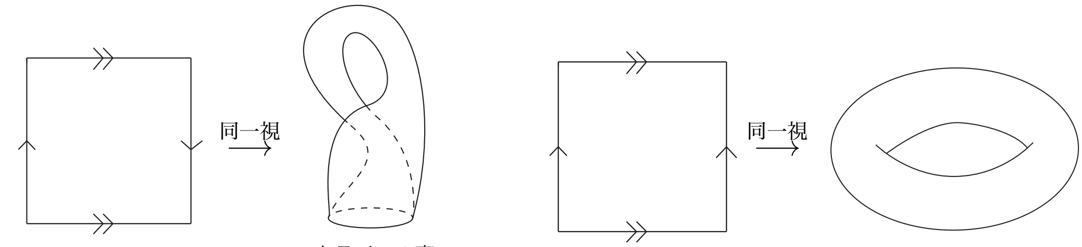
クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の決定とそれらの関係性

橋本　誠吾　　(表現論研究室)

§1. はじめに

我々は, 日常生活の中で様々な模様を目にしている. その中でも, 紋様と呼ばれる一つの絵柄を何枚も貼り合わされて作られる模様は衣服やカーテンなどの柄によく用いられている. 紋様の面白いところは, 基本となる絵柄が同じであっても様々な紋様が考えられるところである. では, 2 つの紋様が同じものかどうかを区別するにはどうすればよいだろうか. 基本となる絵柄が同じ紋様を数学的に区別する一つの方法は被覆空間の考え方を用いることである. ここで, 被覆空間とは, ある位相空間 X に対し, 任意の場所からその近くだけを見ると X と同じものであるが, 空間全体を見ると X とは異なる空間であるようなものをいう（詳しい定義は §3 で述べる）. 紋様と同じく, X が何枚も貼り合わされてできる空間のことだとイメージすればよい. 本論文では基本紋様がクラインの壺によって与えられるものについて, その被覆空間としてどのようなものが現れるかを調べる. 特に, 二重被覆と四重被覆をリストアップし, それらの間の関係を決定する.



クラインの壺の展開図　クラインの壺　トーラスの展開図　トーラス

クラインの壺は正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の対辺をそれぞれ同一視することで得られる図形である. 同じく正方形の対辺を同一視して得られる図形にトーラスがあるが, トーラスとクラインの壺では一組の対辺の同一視の仕方が異なっている. この論文では被覆空間としてクラインの壺とトーラスを扱いたいので, これらを $\mathbb{R}^2$ の商空間として定義する.

Definition 1.1 (クラインの壺とトーラス)
・クラインの壺 : $\mathbb{R}^2$ に次のような同値関係 “$\sim_K$” を導入する.

$$(s,t)\sim_K (s',t') \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}m,n\in\mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ (s',t')=(s+m,(-1)^m t+n)$$

この時, $Kb := \mathbb{R}^2/{\sim_K}$ を**クラインの壺**という. Kb は $[0,1]\times[0,1]$ において上図の矢印のように対辺を同一視して得られる商空間に同相である.
・トーラス : $\mathbb{R}^2$ に次のような同値関係 “$\sim_T$” を導入する.

$$(s,t)\sim_T (s',t') \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}m,n\in\mathbb{Z}\ \text{ s.t. }\ (s',t')=(s+m,t+n)$$

この時, $T := \mathbb{R}^2/{\sim_T}$ を**トーラス**という. T は $[0,1]\times[0,1]$ において上図の矢印のように対辺を同一視して得られる商空間に同相である.
以後, T の元を $[(s,t)]_T$, Kb の元を $[(s,t)]_K$ のように記述する.

§2. クラインの壺の基本群

本題であるクラインの壺の被覆空間を求めるためにはクラインの壺の基本群を計算しなければならない. このセクションでは, 基本群の基本事項を述べ, それを計算するために有用な定理を説明し, クラインの壺の基本群を計算する.

Definition 2.1 (ホモトープ)
X, Y を位相空間とし, $f, g : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする. 任意の $x \in X$ に対し, $F(0, x) = f(x)$ かつ $F(1, x) = g(x)$ となる連続写像 $F : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$ が存在するとき, f と g は**ホモトープ**であるといい, $f \simeq g$ と表す. この F を f と g の間の**ホモトピー**という. 関係 "$\simeq$" は同値関係である.

Definition 2.2 (道, 端点を固定したホモトープ)
X を位相空間とする. $[0, 1]$ から X への連続写像を X 内の**道**という. また, $f(0) = f(1) =: x_0$ のとき f を x_0 を基点とする X 内の**閉道**という.
f, g を $f(1) = g(0)$ となる X 内の道としたとき, 道の積 $f * g$ を次のように定める :

$$(f * g)(t) := \begin{cases} f(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ g(2t - 1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1). \end{cases}$$

f, g を X 内の道とする. 任意の $t \in [0, 1]$ に対し, f と g の間のホモトピー F が $F(t, 0) = f(0)$, $F(t, 1) = f(1)$ を満たすとき, f と g は**端点を固定してホモトープ**であるといい, $f \simeq_{\mathrm{rel}} g$ と表す. 関係 "$\simeq_{\mathrm{rel}}$" は同値関係である.

Definition 2.3 (基本群)
X を位相空間とし, $x_0 \in X$ を固定する. f を x_0 を基点とする X 内の閉道とする.
このとき, $[f] := \{\ g \mid g$ は x_0 を基点とする閉道, $f \simeq_{\mathrm{rel}} g\}$ を f の**ホモトピー類**という.
$\pi_1(X, x_0) := \{\ [f] \mid f$ は x_0 を基点とする閉道 $\}$ とし, $\pi_1(X, x_0)$ に演算を $[f][g] := [f * g]$ によって導入する. $\pi_1(X, x_0)$ はこの演算によって群を成す. $\pi_1(X, x_0)$ を X の**基本群**という. 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の単位元は x_0 への定値道 e_{x_0} のホモトピー類 $[e_{x_0}]$ である. また, $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ の逆元は, $\overline{f}(t) = f(1 - t)$ $(t \in [0, 1])$ によって定められる f を逆にたどる道 $\overline{f}$ のホモトピー類 $[\overline{f}]$ である. $\pi_1(X, x_0)$ が単位元のみからなる群であるとき, **自明な基本群**であるといい, $\{1\}$ と表す.

Proposition 2.4
X を弧状連結な位相空間とする. このとき, X の基本群は基点の取り方によらない. つまり, 任意の $x, x' \in X$ に対し, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x')$ が成り立つ.

Definition 2.5 (単連結)
自明な基本群を持つ弧状連結な位相空間を**単連結**であるという.

Example 2.6
・1 点からなる空間 $\{x\}$ 内の道は定値道 e_x のみなので, $\pi_1(\{x\}, x)$ は自明な基本群である.
・$\mathbb{S}^1$ に対し, 基点 $x_0 \in \mathbb{S}^1$ を選ぶと基本群 $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ は $\mathbb{Z}$ と同型である. なぜならば, x_0 から出発してちょうど 1 周して x_0 にもどる閉道 α のホモトピー類 $[\alpha]$ が $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ の生成元を表しており, この閉道が $\mathbb{S}^1$ に何回巻きつくかでホモトピー類を分類できるからである.

Definition 2.7 (基本群に誘導される準同型)
X, Y を弧状連結な位相空間とし, $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, $x_0 \in X$ を与えると, 準同型 $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ が $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ によって well-defined に誘導される. また, f が同相写像であるとき, f_* は群の同型写像となる. つまり, 基本群は位相不変量である.

Theorem 2.8 (ファン・カンペンの定理；Van Kampen's Theorem)
X を位相空間とし, $x_0 \in X$ を X の基点とする. U, V を x_0 を含み, $U \cap V$ が弧状連結かつ $X = U \cup V$ となる X の弧状連結な開集合とする. また, $i_U : U \cup V \hookrightarrow U$, $i_V : U \cup V \hookrightarrow V$ を包含写像とし, $(i_U)_* : \pi_1(U \cup V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0)$, $(i_V)_* : \pi_1(U \cup V, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0)$ を i_U, i_V から誘導される準同型とする. このとき,

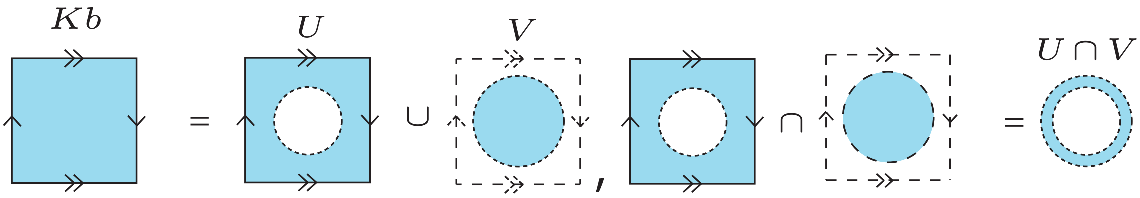
$$\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\big)/N.$$

ただし, "$*$" は群の自由積であり, N は $(i_U)_*(\alpha)\ \big((i_V)_*(\alpha)\big)^{-1}$ （α は $\pi_1(U \cup V, x_0)$ の生成元）によって生成される $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ の正規部分群である.

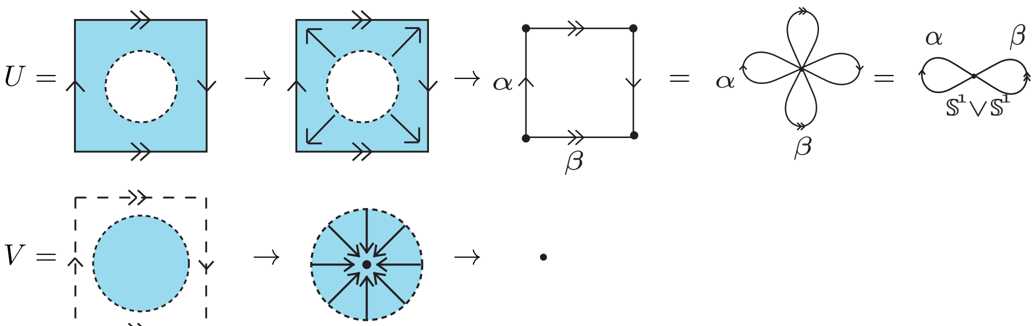
以下では, ファン・カンペンの定理を用いて, クラインの壺の基本群を計算していく.

・クラインの壺の基本群

$x_0 := [(0,0)]_K \in Kb$ とする. このとき, $\pi_1(Kb, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = e \rangle$ となる.
（証明）
Kb の開集合 U, V を下図のように取る（実線および色付きの部分）. このとき, $U \cap V$ は下図のようになり, U, V, $U \cap V$ は明らかに弧状連結である.

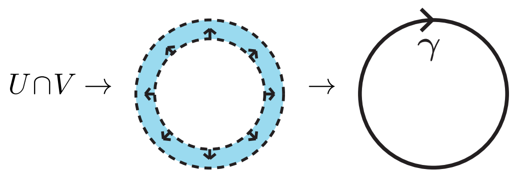


x'_0 を $U \cap V$ 内に取ると, Kb は弧状連結なので, Proposition 2.4 より $\pi_1(Kb, x_0) \cong \pi_1(Kb, x'_0)$ となる.
(1)U, V の基本群について
U, V は次のように変形レトラクトさせていくことができる. ここで, U, V, $U \cap V$ の弧状連結性より U の変形の過程で x_0 に写るような $U \cap V$ の点を x'_0 として選ぶことができる.



よって, 変形レトラクトで得られる空間と元の空間の基本群は同型なので Example 2.6, Theorem 2.8 より, $\pi_1(U, x'_0) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $\pi_1(V, x'_0) = \{1\}$ となることがわかる ($\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ は 2 つの $\mathbb{S}^1$ が 1 点のみで交わっている空間のことであり, ファン・カンペンの定理より基本群は $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$）. ただし, α, β は上図に従う.

(2)$U \cap V$ の基本群について
$U \cap V$ は右図のように $\mathbb{S}^1$ に変形レトラクトできる. よって Example 2.6 より, $\pi_1(U \cap V, x'_0) = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$. ここで, $(i_U)_*(\gamma) = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}$, $\big((i_V)_*(\gamma)\big)^{-1} = [e_{x'_0}]$ より, $(i_U)_*(\gamma)\big((i_V)_*(\gamma)\big)^{-1} = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}$. よ



ってファン・カンペンの定理より, $\pi_1(Kb, x_0) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = e \rangle$ となる. ただし, Kb の基本群の生成元である α, β は $\alpha'(t) = [(0,t)]_K$, $\beta'(t) = [(t,0)]_K$ $(t \in [0,1])$ により定められる Kb 内の道 α', β' のホモトピー類である. □

§3. 被覆空間の基本事項

このセクションでは, 被覆空間の定義とそれらの同値性および, 被覆空間の分類定理について述べる.

Definition 3.1 (被覆空間)
X, $\widetilde{X}$ を位相空間とし, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ を連続写像とする. 次の条件が満たされる X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が存在するとき, 組 $(\widetilde{X}, p)$ を X の**被覆空間**という.

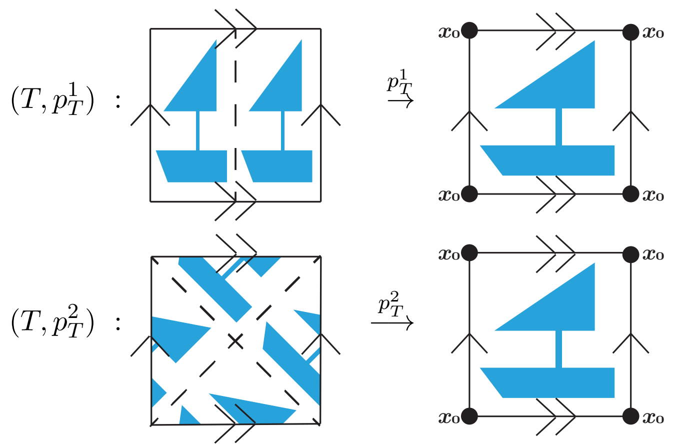
$$\text{任意の } \alpha \in \Lambda \text{ に対し，} p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\beta \in \Lambda'} V_\beta \text{ かつ,}$$
$$\text{任意の } \beta \in \Lambda' \text{ に対し，} p|_{V_\beta} : V_\beta \longrightarrow U_\alpha \text{ が同相写像である.}$$

p を**被覆写像**といい, 上の条件を満たす U_α を p に関する**均等被覆近傍**という. また, 任意の $x \in X$ に対し $\sharp\big(p^{-1}(x)\big) = n$ であるとき, 被覆空間 $(\widetilde{X}, p)$ は $\boldsymbol{n}$ **重被覆**であるという。

Remark 3.2
連結でない被覆空間は連結な被覆空間の disjoint 和で表されるため, 被覆空間を考える際には連結な被覆空間のみを考えれば十分である. また, 被覆空間においては単に空間だけではなく被覆写像を考えることが重要になる. 例えば,

$$p_T^1 : T \longrightarrow T,\ p_T^1\big([(s,t)]_T\big) = [(2s,t)]_T,$$
$$p_T^2 : T \longrightarrow T,\ p_T^2\big([(s,t)]_T\big) = [(s-t, s+t)]_T$$

とすると, $(T, p_T^1), (T, p_T^2)$ は下図のようなトーラス T から T への二重被覆となっている.

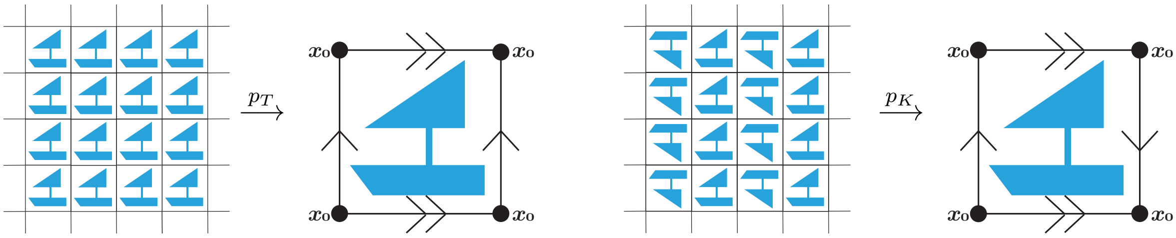


したがって, たとえ $\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ が同相であっても, 被覆空間 $(\widetilde{X}, p_1)$ と $(\widetilde{Y}, p_2)$ が同じものであるとみなすには不十分である. そこで二つの被覆空間が同じであることを正確に定義する.

Definition 3.3 (同型な被覆空間)
X を位相空間とし, $(\widetilde{X}, p_1)$,$(\widetilde{Y}, p_2)$ を X の被覆空間とする. $p_1 = p_2 \circ f$ を満たす同相写像 $f : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ が存在するとき, $(\widetilde{X}, p_1)$ と $(\widetilde{Y}, p_2)$ は**被覆同型**であるといい, $(\widetilde{X}, p_1) \approx (\widetilde{Y}, p_2)$ と表す. このような f を**被覆同型写像**といい, $[(\widetilde{X}, p)]_\approx := \{\ (\widetilde{Y}, p') \mid (\widetilde{X}, p) \approx (\widetilde{Y}, p')\}$ を $(\widetilde{X}, p)$ の**被覆同型類**という.

Definition 3.4 (普遍被覆)
X を位相空間とし, $(\widetilde{X},p)$ を X の被覆空間とする. $\widetilde{X}$ が単連結であるとき, $(\widetilde{X},p)$ を X の**普遍被覆**という. X が連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結であるとき, X の普遍被覆が存在し, X の任意の被覆空間は普遍被覆から導かれることが知られている.（参考文献 [1] の Section 1.3 を参照）

Example 3.5
トーラス T に対して $p_T:\mathbb{R}^2\longrightarrow T$ を自然な射影とすると, $(\mathbb{R}^2,p_T)$ は T の普遍被覆である. また, クラインの壺 Kb に対して $p_K:\mathbb{R}^2\longrightarrow Kb$ を自然な射影とすると, $(\mathbb{R}^2,p_K)$ は Kb の普遍被覆である.



Definition 3.6 (道の持ち上げ)
X を位相空間とし, $(\widetilde{X},p)$ を X の被覆空間とする. $f:X$ 内の道に対し, $\widetilde{f}:[0,1]\longrightarrow\widetilde{X}$ が $p\circ\widetilde{f}=f$ を満たすとき, $\widetilde{f}$ を f の $\widetilde{X}$ への**持ち上げ**という. $x_0\in X$ を任意に取り, f を x_0 を始点とする X 内の道とすると, 各 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ に対し, $\widetilde{x}_0$ を始点とする f の $\widetilde{X}$ への持ち上げ $\widetilde{f}_{\widetilde{x}_0}$ が一意的に存在することが分かる.

X 上の n 重被覆の被覆同型類は $\pi_1(X,x_0)$ から対称群への推移的な反準同型写像の同値類により決定される. そこでその定義を述べる. 以後, n 次対称群を S_n と表す.

Definition 3.7 (群の同値な反準同型写像と推移的な反準同型写像)
G を群とし, ϕ,ϕ' を G から S_n への写像とする. 任意の $g_1,g_2\in G$ に対し, $\phi(g_1g_2)=\phi(g_2)\phi(g_1)$ となるとき, ϕ を**反準同型写像**という. 2 つの反準同型写像 ϕ と ϕ' が**同値**であるとは, $\phi'=\sigma^{-1}\phi\sigma$ となる $\sigma\in S_n$ が存在するときをいう. また, 任意の $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対し $\phi(g)(i)=j$ となる $g\in G$ が存在するとき, ϕ は**推移的**であるという.

Definition 3.8 (特性準同型)
X を弧状連結な位相空間とし, $(\widetilde{X},p)$ を X の n 重被覆とする. $x_0\in X$ を一つ固定する. $p^{-1}(x_0)=\{\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_n\}$ とし, 添字の通りに順序を入れる. $\chi(p):\pi_1(X,x_0)\longrightarrow S_n$ を

$$\chi(p)([f])=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1(f) & i_2(f) & \cdots & i_n(f)\end{pmatrix}$$

によって定める（ただし, $i_j(f)\in\{1,2,\cdots,n\}$ は, $\widetilde{f}_{\widetilde{x}_j}=\widetilde{x}_{i_j(f)}$ により定義される）. このとき, $\chi(p)$ は群の反準同型写像である. $\chi(p)$ を p の**特性準同型**という.

以上のことを用いて被覆空間の分類定理を述べる.

Theorem 3.9 (被覆空間の分類定理)
X を弧状連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結な位相空間とする.
$CV:=\{\ [(\widetilde{X},p)]_{\approx}\mid(\widetilde{X},p)$ は X の連結な被覆空間 $\}$,
$CG:=\{\ [H]\mid H$ は $\pi_1(X,x_0)$ の部分群 $\}$ （$[H]$ は H の共役類）とする.
(1) 全単射 $h:CV\longrightarrow CG,\ h([(\widetilde{X},p)]_{\approx})=\big[p_*\big(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\big)\big]$ が well-defined に定まる.
また, $CV_n:=\{\ [(\widetilde{X},p)]_{\approx}\in CV\mid(\widetilde{X},p)$ は X の n 重被覆 $\}$,
$AH_n:=\{\ [\phi]\mid\phi$ は $\pi_1(X,x_0)$ から S_n への推移的な反準同型 $\}$ （$[\phi]$ は ϕ の同値類）とする. (2) 全単射 $f:CV_n\longrightarrow AH_n,\ f([\widetilde{X},p]_{\approx})=[\chi(p)]$ が well-defined に定まる.

(証明のアイデア)
(1) については参考文献 [1] の Section 1.3 を参照. (2) を証明するためには, f の well-defined 性, 全射性, 単射性を示せば良い. ここで次の二つの事実が成り立っている. 一つは X の連結かつ局所弧状連結な n 重被覆 $(\widetilde{X}_1, p_1)$ と $(\widetilde{X}_2, p_2)$ が被覆同型であることの必要十分条件が $\chi(p_1)$ と $\chi(p_2)$ が同値であるという事実. もう一つは $\pi_1(X, x_0)$ から S_n への反準同型 ϕ が推移的であることの必要十分条件が $\chi(p) = \phi$ となる X の連結な被覆空間 $(\widetilde{X}, p)$ が存在することであるという事実である. この二つの事実を用いることで (2) を証明することができる. (詳細は参考文献 [2] の第 IX 章の (9.5) 及びその関連項目を参照)

§4. クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の決定

クラインの壺は連結な二次元多様体なので, 連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結である. したがって Theorem 3.9 を用いてクラインの壺の n 重被覆を求めることができる. このセクションでは, 被覆空間の分類定理の (2) を用いて, クラインの壺の二重被覆, 四重被覆を決定する. まずはおおよその流れを説明する.

① クラインの壺の基本群を求める : クラインの壺の基本群は§2 で求めた通り, $\pi_1(Kb, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = e \rangle$ である. ただし, $x_0 := [(0,0)]_K$ であり, α, β は $\alpha'(t) = [(0,t)]_K, \beta'(t) = [(t,0)]_K$ で表される Kb 内の道 α', β' のホモトピー類である.
② 推移的な反準同型 $\phi : \pi_1(Kb, x_0) \longrightarrow S_n$ の同値類 $[\phi]$ を求める : α, β は $\pi_1(Kb, x_0)$ の生成元なので, ϕ は $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$ により一意的に定まる. また, 関係子 $\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = e$ より $\phi(\alpha)\phi(\beta)\phi(\alpha)\big(\phi(\beta)\big)^{-1}$ は恒等置換 e とならなければならない. この条件を満たす反準同型 ϕ の同値類を $C\big(\phi(\alpha), \phi(\beta)\big) := \{\tau \in S_n | {}^{\exists}\sigma \in S_n \text{ s.t. } \tau = \sigma^{-1}\phi\sigma\}$ と記述することとする. そのなかで推移的なものを選び出す.
③ $\chi(p) = \phi$ となる Kb の n 重被覆 $(\widetilde{X}, p)$ を求める : $\chi(p)(\alpha) = \phi(\alpha)$, $\chi(p)(\beta) = \phi(\beta)$ となれば, $\chi(p) = \phi$ が分かる.

では, Kb の二重被覆, 四重被覆を実際に求めていく.

・二重被覆

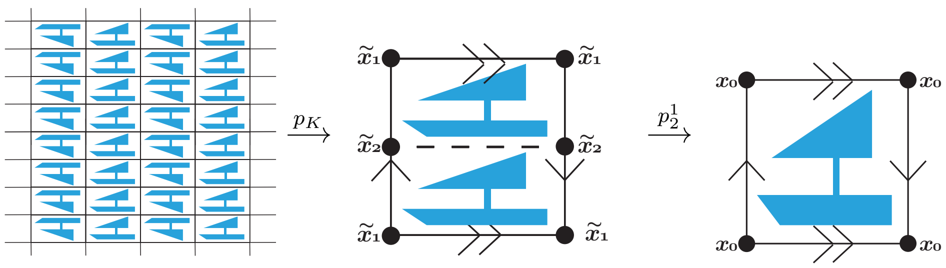
S_2 は可換なので, 反準同型 $\phi : \pi_1(Kb, x_0) \longrightarrow S_2$ の同値類 $[\phi]$ の元は ϕ そのもののみであり, $C(e,e)$, $C\big((1\ 2), e\big)$, $C\big(e, (1\ 2)\big)$, $C\big((1\ 2), (1\ 2)\big)$ の 4 通りが条件を満たす. そのうち, $C(e,e)$ を除く 3 通りが推移的である. よって Kb の二重被覆は同型なものを除いて 3 個存在し, それらは

$$c_1 = C\big((1\ 2), e\big)\ ,\ c_2 = C\big(e, (1\ 2)\big)\ ,\ c_3 = C\big((1\ 2), (1\ 2)\big)$$

に対応している. 各 c_i に対応する被覆空間は次のようになる.
・$c_1 = C\big((1\ 2), e\big)$ に対応する被覆空間 : $p_2^1 : Kb \longrightarrow Kb$ を

$$p_2^1\big([(s,t)]_K\big) = [(s, 2t)]_K$$

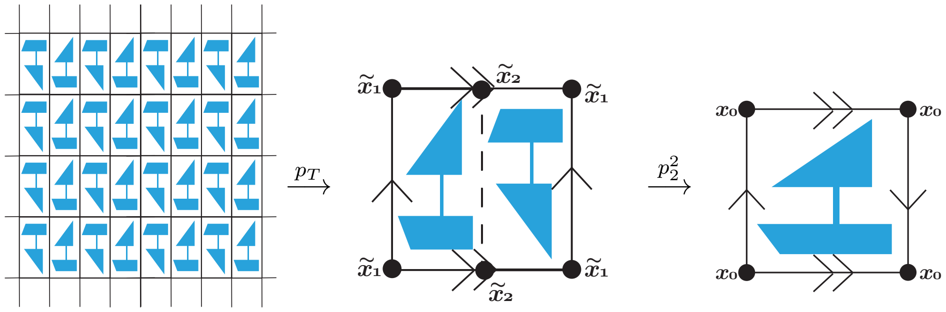
によって定めると, (Kb, p_2^1) は c_1 に対応する二重被覆である.



・$c_2 = C\big(e, (1\ 2)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_2^2 : T \longrightarrow Kb$ を

$$p_2^2\big([(s,t)]_T\big) = [(2s,t)]_K$$

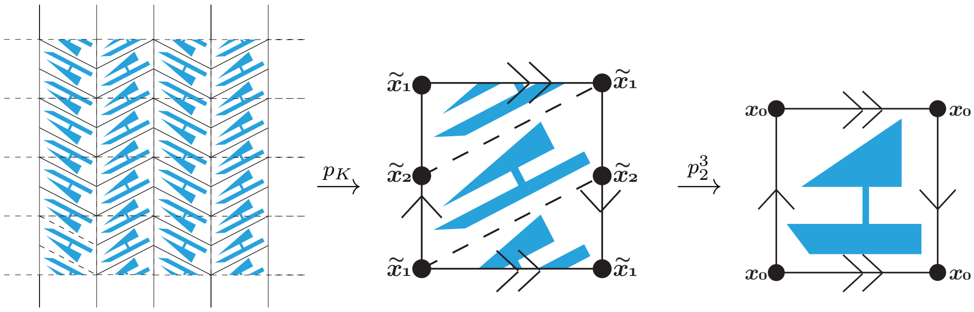
によって定めると, (T, p_2^2) は c_2 に対応する二重被覆である.



・$c_3 = C\big((1\ 2), (1\ 2)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_2^3 : Kb \longrightarrow Kb$ を

$$\begin{aligned} p_2^3\big([(s,t)]_K\big) &= \Big[\Big(s, 2t + (-1)^{[s]+1}(s-[s]) + \frac{1}{2}(-1)^{[s]} - \frac{1}{2}\Big)\Big]_K \\ &= \Big[\Big(s, 2t + (-1)^{[s]+1}s\Big)\Big]_K \end{aligned}$$

によって定めると, (Kb, p_2^3) は c_3 に対応する二重被覆である（ただし, $[s]$ は s をこえない最大の整数のことである）.



・四重被覆

②で述べた条件を満たす反準同型 $\phi : \pi_1(Kb, x_0) \longrightarrow S_4$ の同値類は 16 通り存在する. そのうち推移的なものは以下の 4 通りである.

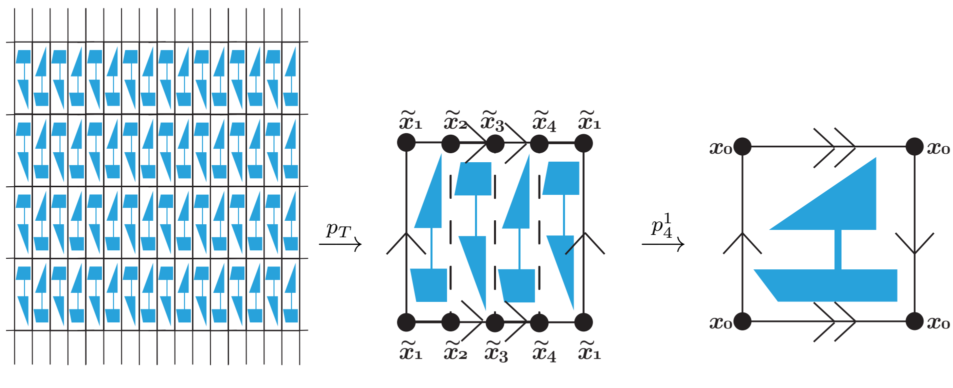
$$c_4 = C\big(e, (1\ 2\ 3\ 4)\big)\ ,\ c_5 = C\big((1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\big)\ ,$$
$$c_6 = C\big((1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\big)\ ,\ c_7 = C\big((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\big)$$

よって Kb の四重被覆は同型なものを除いて 4 個存在し, 各 c_i に対応する被覆空間は次のようになる.

・$c_4 = C\big(e, (1\ 2\ 3\ 4)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_4^1 : T \longrightarrow Kb$ を

$$p_4^1\big([(s,t)]_T\big) = [(4s,t)]_K$$

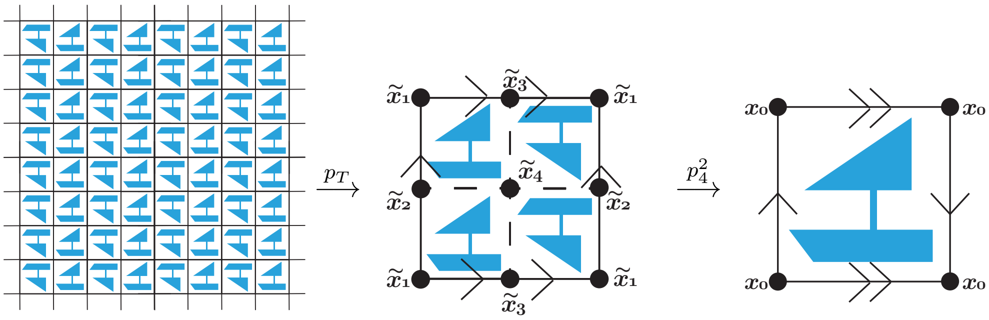
によって定めると, (T, p_4^1) は c_4 に対応する四重被覆である.



・$c_5 = C\big((1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_4^2 : T \longrightarrow Kb$ を

$$p_4^2\big([(s,t)]_T\big) = [(2s, 2t)]_K$$

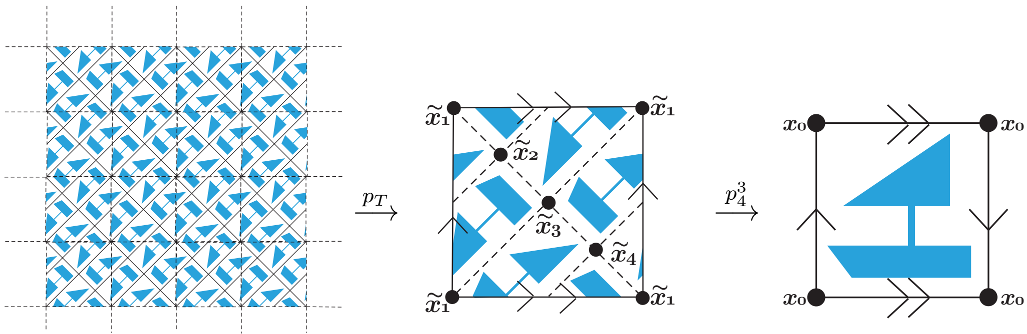
によって定めると, (T, p_4^2) は c_5 に対応する四重被覆である.



・$c_6 = C\big((1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_4^3 : T \longrightarrow Kb$ を

$$p_4^3\big([(s,t)]_T\big) = [(2s-2t, s+t)]_K$$

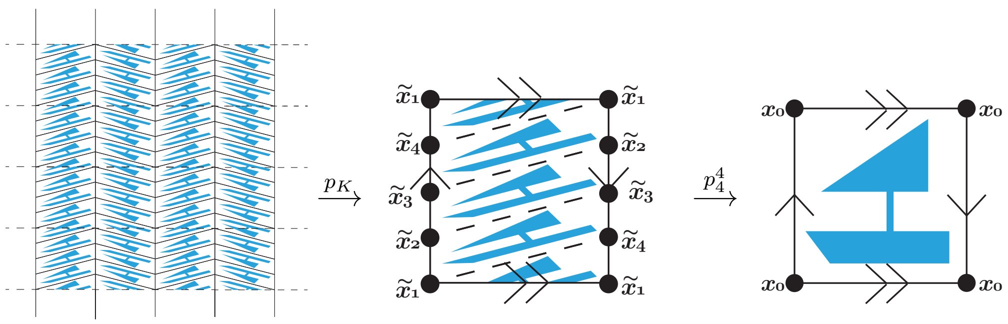
によって定めると, (T, p_4^3) は c_6 に対応する四重被覆である.



・$c_7 = C\big((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\big)$ に対応する被覆空間 : $p_4^4 : Kb \longrightarrow Kb$ を

$$\begin{aligned} p_4^4\big([(s,t)]_K\big) =& \Big[\big(s, 4t + (-1)^{[s]+1}(s-[s]) + \frac{1}{2}(-1)^{[s]} - \frac{1}{2}\big)\Big]_K \\ =& \Big[\big(s, 4t + (-1)^{[s]+1}s\big)\Big]_K \end{aligned}$$

によって定めると, (Kb, p_4^4) は c_7 に対応する四重被覆である.



これらが各 c_i に対応する二重被覆, 四重被覆となっているかを確認する必要があるが, 紙面の都合上全てのものについて記述することはできない. そこで, 写像が最も複雑である (Kb, p_4^4) についてのみを確かめる. その他のものについても同様の方法で確かめられる.

・(Kb, p_4^4) が c_7 に対応する四重被覆であることの証明
まずは (Kb, p_4^4) が Kb の四重被覆となることを示す. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(s,t) = \bigl(s, 4t + (-1)^{[s]+1}(s - [s]) + \frac{1}{2}(-1)^{[s]} - \frac{1}{2}\bigr)$$

によって定める. $\mathbb{R}^2$ 上に次のような関係 "$\sim$" を導入する.

$$(s,t) \sim (s',t') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(s,t) \sim_K f(s',t')$$

この関係 "$\sim$" は同値関係である. $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\sim$ を自然な射影とする. $\overline{f} : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow Kb$ を $\overline{f}([(s,t)]_\sim) = [f(s,t)]_K$ により定めると, 定め方より $\overline{f}$ は同相写像であり, $p_K \circ f = \overline{f} \circ q$ となっている. さらに, $q = g \circ p_K$, $p_4^4 = \overline{f} \circ g$ となる連続な全射 $g : Kb \longrightarrow \mathbb{R}^2/\sim$ が存在する (右図参照). したがって, (Kb, p_4^4) が Kb の四重被覆であることを示すためには, g が被覆写像であることを示せばよい. $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ を任意にとる.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "p_K"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p_K"] \\
Kb \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right=50, "p_4^4"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^2/\sim \arrow[r, "\sim"', "\overline{f}"'] & Kb
\end{tikzcd}$$

$\varepsilon < 0$ を $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ を満たすようにとり, $U_\varepsilon(s,t)$ を (s,t) を中心とする半径 ε の開近傍とする. このとき, $\{U_\varepsilon(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}$ は $\mathbb{R}^2$ の開被覆である. ここで, $U := \bigl(p_K \circ f\bigr)\bigl(U_\varepsilon(s,t)\bigr)$ とおく. このとき,

$$\bigl(p_K \circ f\bigr)\bigl(U_\varepsilon(s+m, (-1)^m t + \frac{n}{4})\bigr) = \bigl(p_K \circ f\bigr)\bigl(U_\varepsilon(s,t)\bigr) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

となっていることに注意すると, U は p_K に関する均等被覆近傍であり, したがって $\overline{f}^{-1}(U)$ は q に関する均等被覆近傍である. さて,

$$\widetilde{U}_1 := p_K\bigl(U_\varepsilon(s,t)\bigr),\ \widetilde{U}_2 := p_K\bigl(U_\varepsilon(s, t+\frac{1}{4})\bigr),\ \widetilde{U}_3 := p_K\bigl(U_\varepsilon(s, t+\frac{1}{2})\bigr),\ \widetilde{U}_4 := p_K\bigl(U_\varepsilon(s, t+\frac{3}{4})\bigr)$$

は $\mathbb{R}^2/\sim$ の開集合であり, $g^{-1}\bigl(\overline{f}^{-1}(U)\bigr) = p_K\Bigl(q^{-1}\bigl(\overline{f}^{-1}(U)\bigr)\Bigr) = \coprod_{i\in\{1,2,3,4\}} \widetilde{U}_i$ となる.

また, 各 $\widetilde{U}_i$ に対し右の図式が可換になる. したがって, $g|_{\widetilde{U}_i} : \widetilde{U}_i \longrightarrow \overline{f}^{-1}(U)$ は同相写像である. 同時にこのことから, 各 $[(s,t)]_\sim$ に対し, $\sharp\bigl(g^{-1}([(s,t)]_\sim)\bigr) = 4$ が分かる. (m, n に別の値を代入しても $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$, $\widetilde{U}_3$, $\widetilde{U}_4$ のいずれかに等しくなる.)

$$\begin{tikzcd}
 & U_\varepsilon(s, t+\frac{i-1}{4}) \arrow[dl, "p_K"', "\sim"] \arrow[dr, "q", "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\widetilde{U}_i \arrow[rr, "g"'] & & \overline{f}(U)
\end{tikzcd}$$

したがって, g は四重被覆写像であり, (Kb, p_4^4) が Kb の四重被覆であることが示せた. 次に $\chi(p_4^4)$ について確かめる.

$$\widetilde{x}_1 := [(0,0)]_K\ ,\ \widetilde{x}_2 := [(0, \frac{1}{4})]_K\ ,\ \widetilde{x}_3 := [(0, \frac{1}{2})]_K\ ,\ \widetilde{x}_4 := [(0, \frac{3}{4})]_K$$

とするとこれらは $(p_4^4)^{-1}([(0,0)]_K)$ の元である. このとき, $\chi(p_4^4)(\alpha) = (1\ 2\ 3\ 4)$, $\chi(p_4^4)(\beta) = (1\ 4)(2\ 3)$ を示せばよい. α', β' の $\widetilde{x}_i$ を始点とする持ち上げを $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_i}, \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_i}$ とおく. 各 $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_i}, \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_i}$ は次のような Kb 内の道である.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_1}(t) &= [(0, \frac{1}{4}t)]_K \quad , \quad \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_1}(t) = \bigl[\bigl(t, (-1)^{[t]}\frac{1}{4}t + (-1)^{[t]+1}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\bigr)\bigr]_K \\
\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_2}(t) &= [(0, \frac{1}{4}t + \frac{1}{4})]_K \quad , \quad \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_2}(t) = \bigl[\bigl(t, (-1)^{[t]}\frac{1}{4}t + (-1)^{[t]+1}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\bigr)\bigr]_K \\
\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_3}(t) &= [(0, \frac{1}{4}t + \frac{1}{2})]_K \quad , \quad \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_3}(t) = \bigl[\bigl(t, (-1)^{[t]}\frac{1}{4}t + (-1)^{[t]+1}\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\bigr)\bigr]_K \\
\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_4}(t) &= [(0, \frac{1}{4}t + \frac{3}{4})]_K \quad , \quad \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_4}(t) = \bigl[\bigl(t, (-1)^{[t]}\frac{1}{4}t + (-1)^{[t]+1}\frac{1}{4} + 1\bigr)\bigr]_K
\end{aligned}$$

このとき,

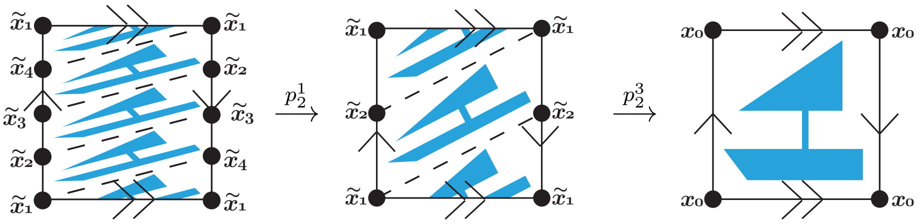
$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_1}(1) = \widetilde{x}_2 \ ,\ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_2}(1) = \widetilde{x}_3 \ ,\ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_3}(1) = \widetilde{x}_4 \ ,\ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_4}(1) = \widetilde{x}_1 \\
&\widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_1}(1) = \widetilde{x}_4 \ ,\ \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_2}(1) = \widetilde{x}_3 \ ,\ \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_3}(1) = \widetilde{x}_2 \ ,\ \widetilde{\beta}_{\widetilde{x}_4}(1) = \widetilde{x}_1
\end{aligned}$$

となっている. よって, (Kb, p_4^4) が c_7 に対応する Kb の四重被覆であることが示された. □

・クラインの壺の二重被覆と四重被覆の関係性

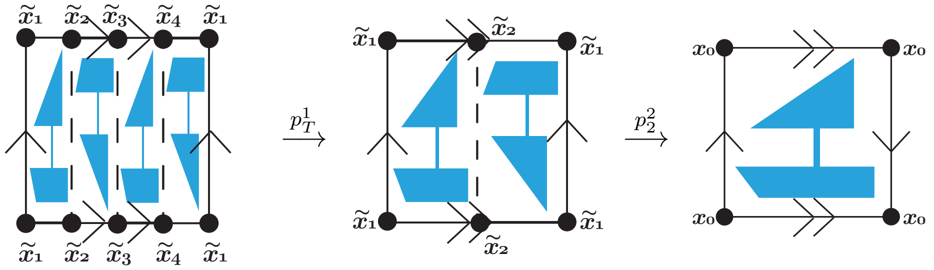
クラインの壺の四重被覆のうち (Kb, p_4^4) について見てみよう. 実は, p_4^4 は次の 2 つのクラインの壺の二重被覆写像の合成である.

$p_4^4 = p_2^3 \circ p_2^1$:

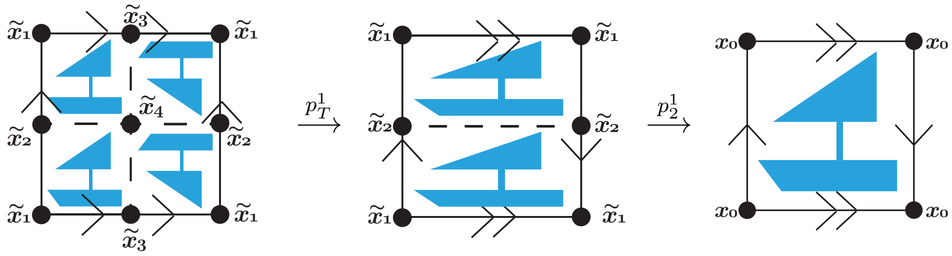


つまり, p_4^4 は二種類のクラインの壺の二重被覆を経由して得られる四重被覆である.
一方で, (T, p_4^1), (T, p_4^2), (T, p_4^3) はクラインの壺の二重被覆のみを経由して得ることができない. そこで, Remark 3.2 で記述したトーラスの二重被覆 (T, p_T^1), (T, p_T^2) を含めて考えると次のような関係性がみてとれる.

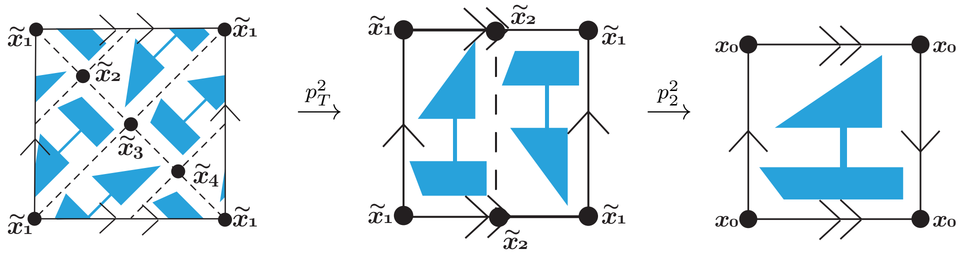
$p_4^1 = p_2^2 \circ p_T^1$:



$p_4^2 = p_2^1 \circ p_T^1$:



$p_4^3 = p_2^2 \circ p_T^2$:



このことから, (T, p_4^1), (T, p_4^2), (T, p_4^3) はトーラスの二重被覆とクラインの壺の二重被覆を経由して得られる四重被覆であることがわかる.

・まとめと今後の課題

クラインの壺の二重被覆は同型なものを除いて (Kb, p_2^1), (T, p_2^2), (Kb, p_2^3) の 3 通り存在し, 四重被覆は同型なものを除いて (T, p_4^1), (T, p_4^2), (T, p_4^3), (Kb, p_4^4) の 4 通り存在することが示された. さらにクラインの壺の四重被覆はクラインの壺及びトーラスの二重被覆を経由して得られることがわかった. このことからクラインの壺の三重被覆を調べることで, クラインの壺の六重被覆を導き出せることが予測できる. この予想を確かめることや別の空間の被覆空間を求めることは今後の課題である.

参考文献

[1] Allen Hatcher・著『Algebraic Topology』,Cambridge University Press, 2001 年.

[2] 鈴木晋一・著『数学選書 曲面の線形トポロジー 下』, 槇書店, 1987 年.