射影空間の基本群とその応用

澁谷美布 (表現論研究室)

閉曲面には 2 次元球面 $\mathbf{S}^2$ やトーラス $\mathbf{T}^2$, 射影平面 $\mathbf{P}^2$ などがある。$\mathbf{S}^2$ と $\mathbf{T}^2$ を連続的な変形でうつりあうものは等しいという位相幾何学的な視点でみたとき、$\mathbf{S}^2$ には空洞がないが $\mathbf{T}^2$ には空洞があるという明白な違いがある。しかし $\mathbf{P}^2$ は明確な形がわからないため、$\mathbf{S}^2$ や $\mathbf{T}^2$ との違いがわかりにくい。

閉曲面の違いを見る道具には様々な位相不変量をがあり、その一つに基本群というものがある。基本群は位相空間上の閉道という目で見えるものを用いて定義される群である。

この論文では射影平面の n 次元版である射影空間 $\mathbf{P}^n$ の位相幾何学的性質を調べるために基本群を計算し、n 次元球面 $\mathbf{S}^n$ との違いを調べる。ここで、n 次元射影空間とは $\mathbf{R}^{n+1}$ において同じ比率の点を同じものと考えることにより得られる空間であり、n 次元多様体の構造を持つ。この空間は n 次元球面 $\mathbf{S}^n$ の対蹠点を同一視した商空間としてとらえることができる。

最後に応用として $\mathbf{P}^2$ 上の自己連続写像に関する不動点の存在を示す。ここで連続写像 $f: X \to X$ の不動点とは $f(x) = x$ となるような点 $x \in X$ のことである。不動点の存在に関して、ブラウアーの不動点定理がよく知られている。この定理は $\mathbf{D}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ 上の任意の自己連続写像 $f : \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n$ が不動点をもつという定理であり、中間値の定理の一般化になっている。この定理はホモロジー群を用いて証明されるが、$n = 2$ のとき $\partial\mathbf{D}^2 = \mathbf{S}^1$ と $\mathbf{D}^2$ の基本群の違いを見ることにより証明することができ、この論文ではブラウアーの不動点定理の証明を真似することにより任意の自己連続写像 $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ が不動点を持つことを示す。

1 射影空間

この節では射影空間 $\mathbf{P}^n$ の定義と位相的性質を調べ、$\mathbf{P}^n$ に距離が導入されることを示す。

1.1 射影空間の定義と基本的な性質

定義 1.1

n 次元球面 $\mathbf{S}^n$ 上の二点 x,y に対して、関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x = -y$$

と定めるとこれは同値関係である。商集合 $\mathbf{S}^n/\sim$ にこの同値関係による自然な射影 $\pi : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n/\sim$ によって商位相を定める。このとき商空間 $\mathbf{P}^n = \mathbf{S}^n/\sim$ を n 次元**実射影空間**という。

補題 1.2 $\mathbf{P}^n$ はコンパクトハウスドルフ空間である。

(証明) 商写像 π は連続であり、$\mathbf{P}^n$ は連続写像によるコンパクト空間 $\mathbf{S}^n$ の像であるのでコンパクトである。
次に $\mathbf{P}^n$ がハウスドルフ空間であることを示す。任意の異なる $[x],[y] \in \mathbf{P}^n$ に対して $x \neq y$ かつ $x \neq -y$ である。ここで、$\mathbf{S}^n$ はハウスドルフ空間より、$x \in U_1, y \in V_1$ かつ $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ であるような $\mathbf{S}^n$ における開集合 U_1, V_1 が存在し、$x \in U_2, -y \in V_2$ かつ $U_2 \cap V_2 = \varnothing$ であるような $\mathbf{S}^n$ における開集合 U_2, V_2 が存在する。いま $U = U_1 \cap U_2, V = V_2 \cap (-V_1)$ とすると $U \cap V = \varnothing$ かつ $U \cap (-V) = \varnothing$ である。$\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ は $\mathbf{S}^n$ における開集合より $\pi(U)$ は $\mathbf{P}^n$ における開集合である。同様に $\pi(V)$ は $\mathbf{P}^n$ における開集合である。ここで、$\pi(U) \cap \pi(V) \neq \varnothing$ と仮定すると、$a \in \pi(U) \cap \pi(V)$ となる $a \in \mathbf{P}^n$ が存在する。つまり $a = \pi(c)$ を満たすような $c \in U$ が存在しかつ $a = \pi(d)$ を満たすような $d \in V$ が存在する。よって $\pi(c) = \pi(d)$ より $c = \pm d$ である。$c = d$ のとき $c \in U \cap V$ であり、$c = -d$ のとき $c \in U \cap (-V)$ である。これは $U \cap (-V) = \varnothing, U \cap V = \varnothing$ に矛盾する。したがって $\pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing$. よって $\pi(U), \pi(V)$ は $[x] \in \pi(U), [y] \in \pi(V)$ かつ$\pi(U) \cap \pi(V) = \varnothing$ を満たす $\mathbf{P}^n$ の開集合である。 $\square$

1.2 射影空間の距離

この節では射影空間における距離を定義する。この距離は射影空間の基本群を計算する際に用いる。

補題 1.3

$\mathbf{P}^n$ 上の任意の点 $p = \{x, -x\}, q = \{y, -y\}$ に対して、

$$d(p,q) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$$

と定義する。d は距離空間の公理を満たす。さらに次が成り立つ。
(i) 距離空間 $(\mathbf{P}^n, d)$ の直径は $\sqrt{2}$ である。
(ii) $d(p,q) = \sqrt{2}$ である時、$x \in \pi^{-1}(p), y \in \pi^{-1}(q)$ ならば $|x-y| = \sqrt{2}$.

(証明) まず d が $\mathbf{P}^n$ 上の距離であることを示す。他は簡単なので三角不等式だけ確かめる。任意の $p = \{x, -x\}, q = \{y, -y\}, r = \{z, -z\}$ に対して $d(p,r) = \min\{|x-z|, |x+z|\}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
|x-z| = |x+y-y-z| &\leq |x+y| + |y+z|, & (1)\\
|x-z| = |x-y+y-z| &\leq |x-y| + |y-z|, & (2)\\
|x+z| = |x-y+y+z| &\leq |x-y| + |y+z|, & (3)\\
|x+z| = |x+y-y+z| &\leq |x+y| + |y-z|. & (4)
\end{aligned}$$

(1) $\sim$ (4) より $\min\{|x-z|, |x+z|\} \leq \min\{|x-y|, |x+y|\} + \min\{|y-z|, |y+z|\}$.
よって d は三角不等式を満たす。
次に (i) を示す。$2d(p,q)^2 \leq |x-y|^2 + |x+y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) = 4$. よって $d(p,q) \leq \sqrt{2}$.
次に (ii) を示す。$d(p,q) = \min\{|x-y|, |x+y|\} = \sqrt{2}$ であると仮定すると、
$|x-y| = \sqrt{2}$ のとき自明である。$|x+y| = \sqrt{2}$ のとき、$|x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 = |x+y|^2 = 2$ より $\langle x, y\rangle = 0$. よって $|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2\langle x, y\rangle + |y|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. $\square$

命題 1.4 　商空間 $\mathbf{P}^n$ と $(\mathbf{P}^n, d)$ は同相である。

(証明) 自然な射影 $\pi : \mathbf{S}^n \to (\mathbf{P}^n, d)$ は任意の $x, y \in \mathbf{S}^n$ に対して、$d(\pi(x), \pi(y)) = \min\{|x-y|, |x+y|\} \leq |x-y|$ が満たされるので連続である。このとき、商の普遍性より $id_{\mathbf{P}^n} : \mathbf{P}^n \to (\mathbf{P}^n, d)$ は連続である。よって補題 1.2 より $\mathbf{P}^n$ はコンパクト空間であり $(\mathbf{P}^n, d)$ はハウスドルフ空間であって π は全単射連続写像より π は同相写像である。つまり商空間 $\mathbf{P}^n$ と $(\mathbf{P}^n, d)$ は同相である。 □

2　道と基本群

ここでは基本群の定義とその基本的性質を述べる。

2.1　基本群

位相空間 X について $J = [s_0, s_1]$ から X への連続写像を X 内の**道**という。また $a(s_0)$ を**始点**、$a(s_1)$ を**終点**, この二つをまとめて**端点**という。$a(s_0) = a(s_1) = x_0$ のとき a を x_0 を基点とする**閉道**といい、また $x_0 \in X$ への定値写像を $e_{x_0} : J \to X$ と表し、x_0 における定値道という。
位相空間 X 内の二つの道 $a, b : J \to X,\ a(s_1) = b(s_0)$ について積 $a \cdot b : J \to X$ を次のように定める:

$$(a \cdot b)(s) = \begin{cases} a(2s - s_0) & (s \in [s_0, \frac{s_0+s_1}{2}]), \\ b(2s - s_1) & (s \in [\frac{s_0+s_1}{2}, s_1]). \end{cases}$$

少し連続的に動かしたものは同じと考えたいので道のホモトピーを導入する。

定義 2.1 (道のホモトピー)
位相空間 X 内の道 $a, b : J \to X$ について下記の (1),(2) を満たすような連続写像 $F : J \times [0, 1] \to X$ が存在するとき a と b は**端点を固定してホモトピック**であるといい $a \simeq b$ と表す。
また F を a と b の間の**ホモトピー**という。
　(1) 任意の $s \in J$ に対して $F(s, 0) = a(s), F(s, 1) = b(s)$.
　(2) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $F(s_0, t) = a(s_0), F(s_1, t) = b(s_1)$.

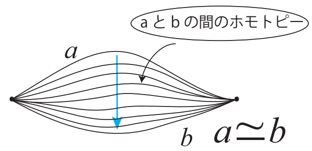


図 1: 道のホモトピー

定義 2.2 (基本群)

位相空間 X について a を $x_0 \in X$ を基点とする X 内の閉道とする。このとき、

$$[a] := \{a' | a' \text{ は } x_0 \text{ を基点とする閉道}, a \simeq a'\}$$

を a の**ホモトピー類**という。基点が x_0 である閉道のホモトピー類の集合上の演算を $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ と定めるとこの集合はこの演算に関して群となる。この群を X の x_0 を基点とする**基本群**といい、$\pi_1(X, x_0)$ とかく。基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の単位

元は x_0 への定値道 e_{x_0} のホモトピー類 $\varepsilon_{x_0} = [e_{x_0}]$ である。また $[a] \in \pi_1(X, x_0)$ の逆元は, $a(s) = a(s_1 - s_0 - s)(s \in [s_0, s_1])$ によって定められる a^{-1} を逆にたどる道 a のホモトピー類 $[a^{-1}]$ である。$\pi_1(X, x_0)$ が単位元のみからなる群 $\{\varepsilon_{x_0}\}$ であるとき**自明な基本群**であるという。

2.2 誘導準同型写像

連続写像は基本群の間の準同型を誘導し、合成をとる操作と可換である。

補題 2.3

(1) 位相空間 X, Y について、それぞれの基点を $x_0 \in X, y_0 \in Y$ とする。連続写像 $f : X \to Y$ で $f(x_0) = y_0$ となるものは、準同型写像 $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $f_\sharp([a]) = [f \circ a]$ を誘導する。
(2) 位相空間 X, Y, Z について、それぞれの基点を $x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z$ とする。連続写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ で $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$ となるものは準同型写像 $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), g_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ について $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ を満たす。

この補題を用いて次を示すことができる。

命題 2.4

道連結な位相空間 X, Y 同相ならば任意の $x_0 \in X, y_0 \in Y$ に対して $\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(Y, y_0)$ は同型である。したがって基本群は位相不変量である。特に道連結な空間に対しては基本群は基点の取り方によらない。

(証明) 仮定より同相写像 $f : X \to Y$ が存在する。このとき補題 2.3 より $f_\sharp \circ f_\sharp^{-1} = (f \circ f^{-1})_\sharp = id_{\pi_1(Y, f(x_0))}$,$f_\sharp^{-1} \circ f_\sharp = (f^{-1} \circ f)_\sharp = id_{\pi_1(X, x_0)}$ となるので $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は全単射であり、よって同型写像である。c を $f(x_0)$ から y_0 への Y 内の道とする。このとき $\gamma : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$ を各 $[a] \in \pi_1(Y, f(x_0))$ に対して、$\gamma([a]) = [c]^{-1} \cdot [a] \cdot [c]$ と定めるとこれは同型写像である。 □

2.3 単連結

位相空間 X が道連結であり、任意の基点 $x_0 \in X$ に対して $\pi_1(X, x_0) = \{\varepsilon_{x_0}\}$ であるとき**単連結**であるという。これはどのような閉道をとっても定値道に連続的に変形していけるような空間を意味している。例えば図 2 における左側の空間 X において任意の閉道は一点にホモトピックであるので単連結である。一方右側 Y の空間では図のような閉道は一点とホモトピックでない。したがって単連結でない。

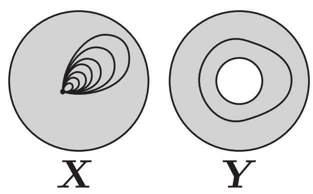


図 2: 単連結

例 2.5

(1)$\mathbf{R}^n$ 上の任意の閉道は定値道とホモトピックである、したがって $\mathbf{R}^n$ は単連結である。
(2)$\mathbf{S}^n$ は $n \geq 2$ のとき単連結である。
証明の概略は次の通りである。全射であるような閉道 $a : [s_0, s_1] \to \mathbf{S}^n$ が存在しない (この部分の証明は難しい) ことから $a([s_0, s_1]) \subset \mathbf{S}^n - \{$ 一点 $\} \cong \mathbf{R}^n$ とみなせる。よって (1) を用いて a は定値道にホモトピックであることがわかり、$\mathbf{S}^n$ の単連結性を示すことができる。

3　P^n の基本群

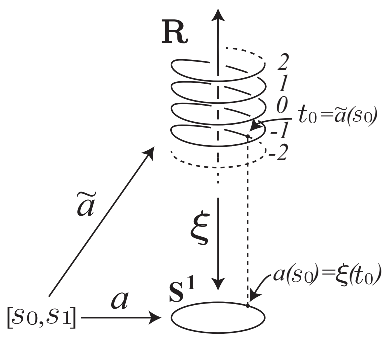
まずは $n = 1$ の場合を考える。$\mathbf{P}^1$ は $\mathbf{S}^1$ に同相である。このことから $\mathbf{P}^1$ の基本群は $\mathbf{S}^1$ の基本群と同型であることがわかる。

3.1　S^1 の基本群

$\mathbf{S}^1$ の基本群は整数全体のなす加法群 $\mathbf{Z}$ である。

定理 3.1　　$\pi_1(S^1, *) \cong \mathbf{Z}$.

この定理の証明の概略は以下の通りである。$\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ を $\xi(t) = e^{it} (t \in \mathbf{R})$ により定義される連続な全射とする。このとき各閉道 $a : [s_0, s_1] \to \mathbf{S}^1$ に対して道 $\tilde{a} : [s_0, s_1] \to \mathbf{R}$ であって $a = \xi \circ \tilde{a}$ を満たすものが存在する。$\tilde{a}$ を a のもちあげという。このもちあげを用いて閉道 a の次数を $n(a) = \frac{\tilde{a}(s_1) - \tilde{a}(s_0)}{2\pi}$ により定義すると、$\xi(\tilde{a}(s_1)) = a(s_1) = a(s_0) = \xi(\tilde{a}(s_0))$ より $n(a) \in \mathbf{Z}$ となる。この対応 $a \mapsto n(a)$ は群 $\pi_1(S^1, *)$ と $\mathbf{Z}$ の間に同型写像を誘導することがわかる。



3.2　$\mathbf{P}^1 \approx \mathbf{S}^1$

命題 3.2　　一次元射影空間 $\mathbf{P}^1$ は $\mathbf{S}^1$ と同相である。

(証明)$\mathbf{S}^1$ をノルムが 1 である複素数の集合とみなす。このとき、$f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ を $f(z) = z^2$ と定める。
①(f は連続)$z \in \mathbf{S}^1$ を $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$ と表す。このとき $f(x+yi) = (x^2 - y^2) + 2ixy$ つまり $\mathbf{S}^1$ を $\mathbf{R}^2$ の部分空間とみなすと元の対応規則は、$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ と書くことができるので f は連続である。いま、任意の $z \in \mathbf{S}^1$ に対して、$f(z) = f(-z)$ なので商の普遍性より連続写像 $\bar{f} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{S}^1$ が誘導される。
②($\bar{f}$ は全射) 任意の $y = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbf{S}^1$ に対して、$\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \in \mathbf{S}^1$ をとると、$f(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}) = \cos\theta + i\sin\theta = y$ である。よって $\bar{f}$ は全射である。
③($\bar{f}$ は単射)$[z_1], [z_2] \in \mathbf{P}^1$ に対して $\bar{f}([z_1]) = \bar{f}([z_2])$ と仮定する。このとき、${z_2}^2 = \bar{f}([z_2]) = \bar{f}([z_1]) = {z_1}^2$ より $z_1 = \pm z_2$. よって $[z_1] = [z_2]$. これより $\bar{f}$ は単射である。
したがって $\bar{f}$ は全単射連続写像であり $\mathbf{P}^1$ はコンパクト空間、$\mathbf{S}^n$ はハウスドルフ空間より $\bar{f}$ は同相写像である。つまり、射影空間 $\mathbf{P}^1$ は $\mathbf{S}^1$ と同相である。 $\square$

3.3　$\mathbf{P}^n$ の基本群

命題 3.1, 3.2 より $\mathbf{P}^1$ の基本群は $\pi_1(\mathbf{P}^1, *) \cong \pi_1(\mathbf{S}^1, *) = \mathbf{Z}$ であることがわかる。ここでは $n \geq 2$ に対して $\mathbf{P}^n$ の基本群を計算する。そのために、商写像 $\pi : \mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ が $\mathbf{S}^1$ の基本群を計算するときに扱った $\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, $\xi(t) = e^{it}$ と同じ特徴 (詳細は後述の命題 3.5 を参照) をもつことを利用する。以下の議論は [1,p.53 – 57] に基づく。

補題 3.3

> $\pi : \mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ は局所同相写像である。ここで π が**局所同相写像**であるとは任意の点 $x \in \mathbf{S}^n$ に対して、x を含む開集合 V が存在し、$\pi(V)$ が $\mathbf{P}^n$ において開でありかつ $\pi|_V : V \to \pi(V)$ が同相写像であることをいう。

(証明) 任意の点 $x \in \mathbf{S}^n$ に対して、$x \in V$ かつ $V \cap (-V) = \varnothing$ となるような開集合 $V \subset \mathbf{S}^n$ をとる。このとき、$\pi(V)$ は補題 1.2 の証明と同様にして $\mathbf{P}^n$ の開集合であり、$\pi|_V : V \to \pi(V)$ は同相写像であることがわかる。 □

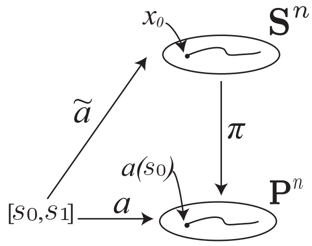
系 3.4

> 任意の点 $p \in \mathbf{P}^n$ は次の条件を満たす開近傍 V をもち、その逆像 $\pi^{-1}(V)$ は二つの開集合 $\tilde{V}, -\tilde{V}$ の和集合であり、$\pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ と $\pi|_{(-\tilde{V})} : -\tilde{V} \to V$ は同相写像である。上記のような近傍 V を点 p の ***distinguished* 近傍**という。

(証明) 任意の点 $p = [x] \in \mathbf{P}^n$ をとる。$\mathbf{S}^n$ はハウスドルフ空間より、$x, -x \in \mathbf{S}^n$ に対して $x \in \tilde{V}, -x \in -\tilde{V}$ かつ $\tilde{V} \cap (-\tilde{V}) = \varnothing$ であるような $\mathbf{S}^n$ 上の開集合 $\tilde{V}$ をとることができる。このとき $\pi(\tilde{V}) = \pi(-\tilde{V}) = V$ とすると、補題 3.3 より $\pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ と $\pi|_{(-\tilde{V})} : -\tilde{V} \to V$ は同相写像であり、$\pi^{-1}(V) = V \cup (-V)$ を満たす。 □

$\mathbf{S}^1$ の基本群を計算するときに用いた連続な全射 $\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, $\xi(t) = e^{it}$ に関するもちあげが $\pi : \mathbf{S}^n \to \mathbf{P}^n$ に対しても存在する。

命題 3.5　道 $a : J(= [s_0, s_1]) \to \mathbf{P}^n$ と $\pi(x_0) = a(s_0)$ であるような点 $x_0 \in \mathbf{S}^n$ を考える。このとき、$\tilde{a}(s_0) = x_0, a = \pi \circ \tilde{a}$ を満たす道 $\tilde{a} : J \to \mathbf{S}^n$ が一意的に存在する。$\tilde{a}$ を a の**持ち上げ**という。



(証明)
① $a(s_0) \in \mathbf{P}^n$ の *distinguished* 近傍 V について、$a(J) \subset V \subset \mathbf{P}^n$ である場合を考える。系 3.4 より $\pi^{-1}(V) = \tilde{V} \cup (-\tilde{V})$ である。ここで $x_0 \in \tilde{V}$ をとる。$h = \pi|_{\tilde{V}}$ とすると、系 3.4 より $h : \tilde{V} \to V$ は同相写像である。$\tilde{a} = h^{-1} \circ a : J \to \tilde{V}$ と定めるとこれが求める $\tilde{a}$ である。$\tilde{a}$ の一意性は次のように示される。$\tilde{a}$ とは別に $\hat{a}(s_0) = x_0, a = \pi \circ \hat{a}$ を満たす道 $\hat{a} : J \to \mathbf{S}^n$ が存在すると仮定すると、$\hat{a}(s_0) = x_0 = \tilde{a}(s_0)$ より $\hat{a}(s_0) \in \tilde{V}$ であり、$\hat{a}$ は $\tilde{V}$ 上の道である。したがって $\pi|_{\tilde{V}} \circ \tilde{a} = \pi \circ \hat{a} = \pi|_{\tilde{V}} \circ \hat{a}$ より $\pi|_{\tilde{V}} \circ \tilde{a} = \pi|_{\tilde{V}} \circ \hat{a}$ なので両辺に $(\pi|_{\tilde{V}})^{-1}$ を合成することによって $\tilde{a} = \hat{a}$. したがって $\tilde{a}$ は一意的である。
②いま、区間 J を共通の端点 s_* をもつ 2 つの閉区間の和集合 $J_1 \cup J_2 = J$ に分割する。

$a_1 = a|_{J_1}$ と $a_2 = a|_{J_2}$ について命題 3.5 が成り立つと仮定する。この二つの道のもちあげ $\tilde{a_1}, \tilde{a_2}$ を用いて $\tilde{a}$ を次のように定める。

$$\tilde{a}(s) = \begin{cases} \tilde{a_1}(s) & (s \in [s_0, s_*]) \\ \tilde{a_2}(s) & (s \in [s_*, s_1]) \end{cases}$$

この $\tilde{a}$ は a のもちあげである。
$\tilde{a}$ の一意性を示す。任意の $s \in J$ に対して、$a(s) = \pi \circ \hat{a}(s)$ かつ $\hat{a}(s_0) = x_0$ を満たすような連続写像 $\hat{a} : J \to \mathbf{S}^n$ が存在すると仮定する。このとき、

(i) $\pi \circ \hat{s}|_{J_1}(s) = a|_{J_1}(s) = a_1(s), \hat{a}|_{J_1}(s_0) = x_0 = \tilde{a_1}(s)$. 従って、 $\tilde{a}|_{J_1} = \tilde{a_1}$.

(ii) $\pi \circ \hat{s}|_{J_2}(s) = a|_{J_2}(s) = a_2(s), \hat{a}|_{J_2}(s_*) = \hat{a}(s_*) = \hat{a}|_{J_1}(s_*) = \tilde{a_1}(s_*) = \tilde{a_2}(s_*)$.

よって、$\hat{a}|_{J_2} = \tilde{a_2}$. 従って $(i), (ii)$ より、$\hat{a} = \tilde{a}$. よって $\tilde{a}$ は一意的である。
これで命題 3.5 が a_1 と a_2 をつなげた a に対しても成り立つことがわかった。
③一般の場合のもちあげの存在と一意性は次のように示される。各点 p に対して *distinguished* 近傍 V_p をとると $\{V_p\}_{p \in \mathbf{P}^n}$ は $\mathbf{P}^n$ の開被覆になる。$\mathbf{P}^n$ はコンパクト距離空間より $\{V_p\}_{p \in \mathbf{P}^n}$ に関するルベーグ数が存在する。このルベーグ数を用いて区間 J の分割 $J = J_1 \cup \cdots \cup J_k$ をとると、各 $i \in \{1, \cdots, k\}$ について $a(J_i)$ はある *distinguished* 近傍に含まれる。この近傍を V_i とおくと、①より各 $a_i = a|_{V_i}$ に対して $\tilde{a_i} = h^{-1} \circ a_i : J_i \to \tilde{V_i}$ と定めることができ、②より $\tilde{a_i}$ 繋げることによって命題 3.5 を満たすような $\tilde{a}$ を定めることができる。また、このような $\tilde{a}$ は一意的であることがわかる。よって一般の場合にも命題 3.5 が成り立つ。 □

定理 3.6 $n \geq 2$ のとき実射影空間 $\mathbf{P}^n$ の基本群は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と同型である。

この定理は $\mathbf{S}^n (n \geq 2)$ が単連結であることを用いて以下の命題から導かれる。

命題 3.7

$n \geq 2$ のとき、$x_0 \in \mathbf{S}^n, p_0 = \pi(x_0) \in \mathbf{P}^n$ をとる。基点が p_0 である閉道 $a, b : I = [0, 1] \to \mathbf{P}^n$ に対して $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \mathbf{S}^n$ を始点 x_0 での持ち上げとする。$\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$ であることと $a \simeq b$ であることは同値である。

(証明)
(必要性) $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$ とする。$\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ は同じ始点、終点をもつ $\mathbf{S}^n$ 上の道である。$\mathbf{S}^n$ は $n \geq 2$ のとき単連結なので $\tilde{a} \simeq \tilde{b}$. したがって、$a = \pi \circ \tilde{a} \simeq \pi \circ \tilde{b} = b$.
(十分性) $a \simeq b$ とする。仮定より $\tilde{a}(0) = x_0 = \tilde{b}(0)$ である。いま $\tilde{a}(1) = \pm x_0, \tilde{b}(1) = \pm x_0$ であるから補題 1.3① より $(\mathbf{P}^n, d)$ の直径は $\sqrt{2}$ であり、距離が $\sqrt{2}$ であるときその二点は対蹠点であるので、

$$\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1) \text{ であることと } |\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| \neq 2 \text{ であることは同値である。} \qquad (*)$$

• 最初に任意の $s \in I$ に対して $d(a(s), b(s)) \neq \sqrt{2}$ であるときを考える。いま $f : I \to \mathbf{R}$ を $f(s) = |\tilde{a}(s) - \tilde{b}(s)|$ と定めるとこれは連続である。このとき $|\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| = 2$ と仮定すると $|\tilde{a}(0) - \tilde{b}(0)| = 0$ より中間値の定理から $|\tilde{a}(s') - \tilde{b}(s')| = \sqrt{2}$ を満たすような s' が存在する。これはすべての $s \in I$ に対して $|\tilde{a}(s) - \tilde{b}(s)| \neq \sqrt{2}$ であることに矛盾する。したがって $|\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| \neq 2$. よって $(*)$ より $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$.
• 一般的な場合について考える。$a \simeq b$ より a と b の間のホモトピー $H : I \times I \to \mathbf{P}^n$

が存在する。このとき H は $I\times I$ がコンパクトより一様連続であるので、任意の正の数 ε に対して、条件「$d((s,t),(s',t'))<\delta$ を満たす任意の $(s,t),(s',t')\in I\times I$ に対して $d(H(s,t),H(s',t'))<\varepsilon$」を満たすような正の数 δ が存在する。この δ を用いてルベーグ数をとることにより、任意の $s\in I$ に対して $d(H(s,t_{i-1}),H(s,t_i))<\sqrt{2}$ を満たすような十分細かい I の分割 $I=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k(i\in\{1,2,\cdots,k\})$ をとることができる。この分割による基点 p_0 の道 $a_i:I\to\mathbf{P}^n$ を $a_i(s)=H(s,t_i)$ で定義すると, 任意の $s\in I$ に対して $d(a_{i-1}(s),a_i(s))<\sqrt{2}$ であるので $(*)$ より $\tilde{a_{i-1}}(1)=\tilde{a_i}(1)$. よって、$\tilde{a}(1)=\tilde{a_0}(1)=\cdots=\tilde{a_k}(1)=\tilde{b}(1)$. したがって $\tilde{a}(1)=\tilde{b}(1)$. □

(定理 3.6 の証明)
$x_0=(1,0,0,\cdots,0),x_1=(0,1,0,\cdots,0)\in\mathbf{S}^n$ をとる。
ここで、$\varphi:\pi_1(\mathbf{P}^n,p_0)\to\{x_0,-x_0\}$ を $\varphi([a])=\tilde{a}(1)$ と定める。このとき任意の $[a],[b]\in\pi_1(\mathbf{P}^n,p_0)$ に対して、$[a]=[b]$ とすると、命題 3.7 より $a\simeq b$ ならば $\tilde{a}(1)=\tilde{b}(1)$. したがって、$\varphi$ は矛盾なく定義されている。
また、任意の $[a],[b]\in\pi_1(\mathbf{P}^n,p_0)$ に対して $\varphi([a])=\varphi([b])$ と仮定すると $\tilde{a}(1)=\tilde{b}(1)$ であり、命題 3.7 より $[a]=[b]$. したがって φ は単射である。
一方、道 $\tilde{a}:I\to\mathbf{S}^n$ を $\tilde{a}(s)=x_0\cos\pi s+x_1\sin\pi s$, 定値道 $\tilde{e}:I\to\mathbf{S}^n$ を $\tilde{e}(s)=x_0$ と定める。$\varphi([\pi\circ\tilde{a}])=\tilde{a}(1)=-x_0,\varphi([e_{x_0}])=\tilde{e}(1)=x_0$ より φ は全射である。したがって φ は全単射であり、$\pi_1(\mathbf{P}^n,p_0)$ は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と同型である。 □

定理 3.7 と例 2.5(2) より $\mathbf{S}^n$ と $\mathbf{P}^n$ の基本群を比較して以下の系が従う。

系 3.8 $\mathbf{S}^n$ と $\mathbf{P}^n$ は $n\geq 2$ のとき同相でない。

4 $\mathbf{P}^2$ 上の自己連続写像に関する不動点定理

ここでは $\mathbf{P}^n$ において $n=2$ の場合を考える。$\mathbf{P}^2$ 上の任意の自己連続写像 $f:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ が不動点を持つことを $\mathbf{P}^2$ を $\mathbf{D}^2$ の商空間としてとらえ、$\mathbf{D}^2$ に対するブラウアーの不動点定理の証明を真似することによって示す。

定理 4.1 任意の連続写像 $f:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ は不動点をもつ。

まず $\mathbf{P}^2$ を $\mathbf{D}^2$ の商空間として定義する。

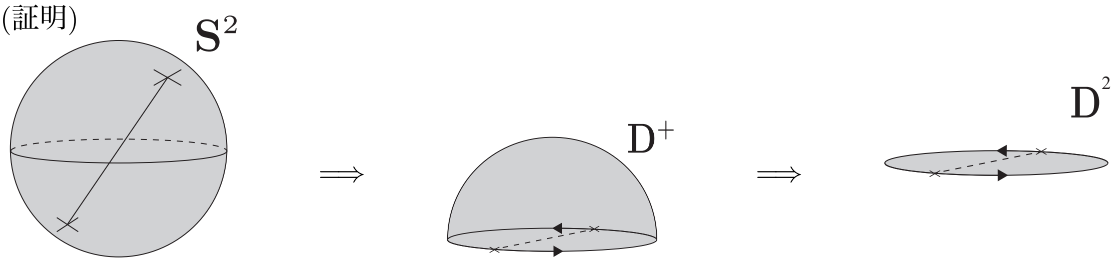
定義 4.2 閉円板 $\mathbf{D}^2$ 上の二点 x,y に対して、関係 $\sim'$ を

$$x\sim' y\Leftrightarrow\begin{cases}(1)x,y\in\partial\mathbf{D}^2\text{のとき }x=y\text{ または }x=-y.\\(2)x,y\in\mathrm{Int}\mathbf{D}^2\text{のとき }x=y.\end{cases}$$

と定めるとこれは同値関係である。商集合 $\mathbf{D}^2/{\sim'}$ にこの同値関係による自然な射影 $\pi':\mathbf{D}^2\to\mathbf{D}^2/{\sim'}$ による商位相をいれる。この商空間 $\mathbb{P}^2$ を $\mathbb{P}^2=\mathbf{D}^2/{\sim'}$ と定める。$x\in\mathbf{D}^2$ の同値類を $[x]'$ と表す。

補題 4.3 $\mathbf{P}^2$ と $\mathbb{P}^2$ は同相である。

(証明)



上図は $\mathbf{P}^2$ が $\mathbf{S}^2$ の商空間から $\mathbf{D}^2$ の商空間へ変形していく様子を表している。

$\mathbf{S}^2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ の部分集合 $\mathbf{D}^+$ を $\mathbf{D}^+=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$ と定める。このとき $f:\mathbf{D}^+\to\mathbf{D}^2$ を $f(x,y,z)=(x,y), g:\mathbf{D}^2\to\mathbf{D}^+$ を $g(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ と定めると f,g は連続写像の和差積商は連続であることと積の普遍性より連続である。$f\circ g(x,y)=f(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})=(x,y)=id_{\mathbf{D}^2}(x,y),\ g\circ f(x,y,z)=g(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})=(x,y,z)=id_{\mathbf{D}^+}(x,y,z)$ が成り立つので f は全単射であり、g は f の逆写像である。よって f は同相写像である。したがって $\mathbf{D}^2$ と $\mathbf{D}^+$ は同相である。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi|_{\mathbf{D}^+}\circ g = h\circ\pi'"] & \mathbf{D}^+ \arrow[d, "\pi|_{\mathbf{D}^+}"] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, "h"] & \mathbf{P}^2
\end{tikzcd}
$$

$h:\mathbf{D}^2/\sim'\to\mathbf{P}^2$ を $h([x]')=[g(x)]$ と定めるとこれは矛盾なく定義されている。実際 $x,y\in\mathbf{D}^2$ に対して $x\sim' y$ と仮定すると、$x,y\in\partial\mathbf{D}^2$ のとき $x=y$ または $x=-y$ であり $x,y\in\mathrm{Int}\mathbf{D}^2$ のとき $x=y$ である。$x,y\in\partial\mathbf{D}^2, x=-y$ のとき $[g(x)]=[g(-y)]=[-g(y)]=[g(y)]$. となるので、$h$ は矛盾なく定義されている。

$\pi|_{\mathbf{D}^+}\circ g$ は連続なので商の普遍性より h は連続である。さらに h は全単射である。実際、g は全射より h は全射である。また任意の $[x]',[y]'\in\mathbb{P}^2$ に対して $h([x]')=h([y]')$ と仮定すると $[g(x)]=[g(y)]$. よって $g(x)=\pm g(y)$.
①$g(x)=g(y)$ のとき g は単射より $x=y$. したがって $[x]'=[y]'$.
②$g(x)=-g(y)$ のとき $x,y\in\partial\mathbf{D}^2$ かつ $x=-y$. したがって $[x]'=[y]'$.
①,②より h は単射である。よって $(\pi'(\mathbf{D}^2)=)\mathbb{P}^2$ はコンパクト空間の連続写像による像よりコンパクト空間であり $\mathbf{P}^2$ はハウスドルフ空間であって h は全単射連続写像より h は同相写像である。したがって $\mathbb{P}^2\approx\mathbf{P}^2$ である。 □

(定理 4.1 の証明)

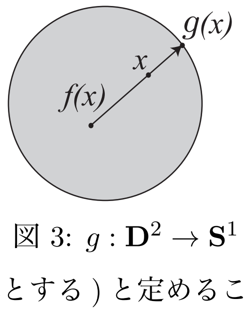


図 3: $g:\mathbf{D}^2\to\mathbf{S}^1$

補題 4.3 より $\mathbf{P}^2,\mathbb{P}^2$ 間の同相写像を経由して $\mathbb{P}^2=\mathbf{D}^2/\sim'$ とみなす。任意の $x\in\mathbf{P}^2$ について $f(x)\neq x$ を満たすような連続写像 $f:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ が存在すると仮定する。このとき $f(x)$ と x を結ぶ線分を $f(x)$ から境界 $\partial\mathbf{D}^2$ まで延長しその交点を $g(x)$ と定める。具体的には $g:\mathbf{D}^2\to\mathbf{S}^1$ を $g(x)=(1-t)x+tf(x)$ (ただし、t は $\langle(1-t)x+tf(x),(1-t)x+tf(x)\rangle=1$ の正の実数解とする) と定めることができる。t は x の連続関数として書くことができるので g は連続である。よって合成写像 $\pi\circ g:\mathbf{D}^2\to\mathbf{P}^1$ は連続写像の合成より連続である。いま、任意の $x,y\in\mathbf{D}^2$ に対して $x\sim' y$ を仮定すると、
①$x,y\in\partial\mathbf{D}^2$ のとき $x=y$ または $x=-y$ である。

●$x = y$ ならば $\pi \circ g(x) = \pi \circ g(y)$.

●$x = -y$ ならば $\pi \circ g(-y) = [g(-y)] = [-g(y)] = [g(y)] = \pi \circ g(y)$.

②$x, y \in \mathrm{Int}\mathbf{D}^2$ のとき $x = y$ であり $\pi \circ g(x) = \pi \circ g(y)$.

よって $\bar{g} : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^1$ を $\bar{g}([x]) = [g(x)]$ と定めることができる。商の普遍性より $\bar{g}$ は連続である。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}^1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{D}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi \circ g"] & \mathbf{S}^1 \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbf{P}^1 \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathbf{P}^2 \arrow[r, "\bar{g}"] & \mathbf{P}^1
\end{tikzcd}$$

包含写像 $i : \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{D}^2$ に対して、$i \circ \pi'$ は連続写像の合成より連続である。よって商の普遍性より $i \circ \pi' = \bar{i} \circ \pi$ を満たすような連続写像 $\bar{i} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^2$ が誘導される。この $\bar{i}$ に関して次が成り立つ。

$$\bar{g} \circ \bar{i}([x]) = \bar{g}([x]) = \pi \circ g(x) = \pi(x) = [x] = id_{\mathbf{P}^1}([x]).$$

ここで、三番目の等号は $x \in \mathbf{S}^1$ かつ $g \circ i = id_{\mathbf{S}^1}$ より成り立つ。よって $\bar{g} \circ \bar{i} = id_{\mathbf{P}^1}$ の両辺の誘導準同型写像をとると補題 2.3 より $\bar{g}_\sharp \circ \bar{i}_\sharp = id_{\pi_1(\mathbf{P}^1,*)}$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}^1 \arrow[d, "\bar{i}"'] \arrow[dr, "\bar{g} \circ \bar{i} = id_{\mathbf{P}^1}"] & & & \pi_1(\mathbf{P}^1,*) \arrow[d, "\bar{i}_\sharp"'] \arrow[dr, "\bar{g}_\sharp \circ \bar{i}_\sharp = id_{\pi_1(\mathbf{P}^1,*)}"] & \\
\mathbf{P}^2 \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{P}^1 \arrow[r] & & \pi_1(\mathbf{P}^2,*) \arrow[r, "\bar{g}_\sharp"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1(\mathbf{P}^1,*)
\end{tikzcd}$$

よって $\bar{i}_\sharp : \pi_1(\mathbf{P}^1,*) \to \pi_1(\mathbf{P}^2,*)$ は単射である。しかし $\pi_1(\mathbf{P}^1,*) \cong \mathbf{Z}, \pi_1(\mathbf{P}^2,*) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ より $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ への単射は存在しないので矛盾が生じる。したがって $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ は不動点をもつ。 □

注意 4.4 $n \geq 3$ のときも途中までは同様に進めることができるが、$\pi_1(\mathbf{P}^{n-1},*) \cong \pi_1(\mathbf{P}^n,*) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ となるため、最後の誘導準同型写像についての条件から矛盾が得られない。よって定理の方法は $n \geq 3$ のとき通用しない。

2 以外の n について連続写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ が不動点を持つか否かについては次のことが知られている。まず不動点をもたない連続写像 $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ が存在することは簡単にわかる。例えば $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ を $f(z) = iz$ ($z \in \mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}, i$ は虚数単位) と定めるとこの写像は不動点を持たない。$n \geq 3$ のときにはホモロジー群を用いることで n が偶数であるとき任意の連続写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ は不動点を持ち、n が奇数であるとき不動点を持たないような連続写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ が存在することがわかる [2,p.49]。

参考文献

1. E.L.Lima 著『Fundamental groups and covering spaces』, A K Peters/CRC Press, 2003/07.
2. 中岡稔著『不動点定理とその周辺』, 岩波書店,1977.