

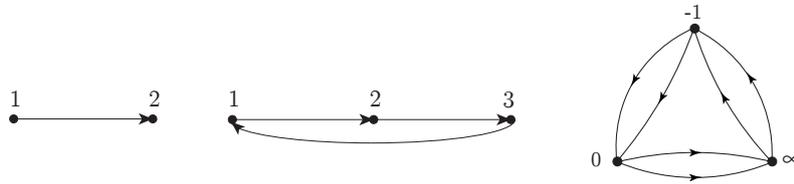
アフィン A 型 quiver に関連する maximal green sequence と分配級数

21M-6001 大家 光貴 (表現論研究室)

2023 年 3 月 23 日

序文

quiver とは、簡単に述べると有向グラフのことであり、その表現論は P. Gabriel [G] によって確立された。例えば、以下の図で与えられる quiver がある。左から A_2 型 quiver、アフィン A_2 型 quiver、Markov quiver と呼ぶ。ただし、 A_2 型、アフィン A_2 型 quiver の矢の向きはこの形に限らない。



アフィン A_2 型 quiver は、 A_2 型 quiver に頂点を 1 つ付け加え A_2 型 quiver の両端の頂点とつなげる事によって出来た quiver である。Markov quiver はアフィン A_2 型 quiver の拡張と考える事ができる。

Markov quiver は Markov 方程式

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z})$$

に関係している。Markov 方程式は 1879 年に A. Markov [M] によって考察されたディオファントス方程式の 1 つである。この Markov 方程式に対しては「Markov の一意性予想」と呼ばれる未解決予想がある。この予想に対してのアプローチが M. Aigner [A] や A. N. Chávez [C] によって考察されている。

一方、quiver から出発して、クラスター代数と呼ばれる代数が定義される。クラスター代数は 2002 年に A. Fomin と S. Zelevinsky [FZ1] によって発見された可換代数であり、組み合わせ論、可積分系、三角形分割などと非常に相性が良く、現代でも活発に研究されている。

クラスター代数は、seed と呼ばれる quiver とクラスターという変数の塊の組と、mutation という操作により定義される。mutation を行うことでクラスターと quiver が変化する。

クラスター代数において、有限回の mutation で quiver とクラスターが元に戻ることは非常に重要で、mutation によって得られるクラスター変数はローラン性をもつことが知られている。

mutation からなる列を mutation sequence と呼び、特別な mutation sequence として maximal green sequence や reddening mutation sequence などがある。maximal green sequence は 2011 年に B. Keller [K1] によって、quantum dilogarithm identities と弦理論やゲージ理論にドナルドソン・トーマス不変量を精密に研究するために導入された。ドナルドソン・トーマス不変量とは 1996 年に S. Donaldson と R. Thomas [DT] によって導入されたもので、3次元カラビ・ヤウ多様体上の接続層のモジュライ空間の仮想数え上げにより定義されるもので、3次元カラビ・ヤウ多様体に対する不変量である。

quiver に対する mutation により、元の quiver が他の quiver と同型になった際には mutation 同値と呼ばれる。この定義のもとでは、頂点の番号付けが違っただけで形が同じものに関しては mutation 同値でない。この mutation 同値の拡張と考えることができる、quiver 同士の頂点の番号付けが異なるが、形が同じものを含めて考えることができる mutation loop と呼ばれるものがある。quiver の mutation loop はドナルドソン・トーマス理論に加え、低次元トポロジー、表現論、量子物理などの多くの分野に現れる。

2015 年に A. Kato と Y. Terashima [KT1, KT2] は mutation loop を用いて分配級数を定義した。分配級数は q を変数として定義される級数である。分配級数は元々は物理学における分配関数のようなものを quiver に対する mutation のもとで得られないかという動機の下で考えられた。ここで、分配関数とは、統計熱力学などで用いられる関数で、ボルツマン分布の分母に現れる。ボルツマン分布とはあるエネルギー状態をとる分子数の分布のことである。つまり、分配関数とは分子全体を見渡した時に、どの程度の温度範囲に分布が広がっているかの目安を与える関数である。分配級数においては、係数が物理的な不変量に対応することが知られている。実際にこの分配級数は組み合わせドナルドソン・トーマス不変量との間に密接な関係がある [KT2]。組み合わせドナルドソン・トーマス不変量は 2013 年に B. Keller [K2, K3] によって導入された。

組み合わせドナルドソン・トーマス不変量と関係する分配級数を調べる上で reddening mutation sequence が重要である。A. Kato と Y. Terashima [KT1, KT2] は A_2 型、アフィン A_2 型、octahedral quiver などの分配級数を求めている。しかし quiver の頂点が増えたり、quiver 内に cycle があると reddening mutation sequence を見つけることは非常に困難である。そこで、reddening mutation sequence の一部である maximal green sequence

に限定して考える。

この論文では cycle をもつ quiver、特にアフィン A 型 quiver の maximal green sequence の取得方法や、その maximal green sequence から定まる分配級数に付随する行列の形について研究する。それらの結果は、E. Cormier, P. Dillery, J. Resh, K. Serhiyenko, J. Whelan による 3-cycle procedure [CDRSW, Theorem 5.12] の部分的適用と、B. Keller [K4] の「Quiver mutation in JavaScript and Java」を用いた実験により求める。その結果、cycle をもたないアフィン A 型 quiver に関する分配級数の分子の q の指数の 2 次形式にアフィン A 型カルタン行列が現れることを発見することができる。また、 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver や、 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver の $1 \rightarrow 2$ に 1 本矢を付け加えた quiver に関する分配級数の分子の q の指数の 2 次形式に、部分行列として A 型カルタン行列が現れることも発見することができる。

この論文は次のように構成されている。第 1 章では、quiver の定義や例 (§1.1) と三角形分割とある事実について説明する (§1.2)。さらに、seed と mutation の定義や例を述べ (§1.3)、クラスター代数の定義と、クラスター代数の基本的な定理を紹介する (§1.4)。第 2 章では、A. Markov [M] によって考察された Markov 方程式や、Markov 方程式に関する未解決の一意性予想、A. N. Chávez [C] による Markov quiver から定まる exchange matrix に関しての考察を説明し (§2.1)、ある三角形 quiver に関しての exchange matrix やクラスター変数に対して、2 つの頂点で mutation を繰り返した下での変化を考察する (§2.2)。第 3 章では、quiver と mutation sequence と境界条件によって定義される mutation loop を説明し (§3.1)、quiver に頂点を付け加えて得られた framed quiver (§3.2) や green and red mutation (§3.3) の定義と例を説明する。第 4 章では、先行研究の A. Kato と Y. Terashima [KT1, KT2] によって定義された分配級数を説明し (§4.1)、分配級数と組み合わせドナルドソン・トーマス不変量との関係を説明する (§4.2)。最後に第 5 章では、主結果である A 型、アフィン A 型 quiver に関する maximal green sequence の取得方法と、分配級数に付随するカルタン行列を含む行列の予想と、予想の部分的な証明を述べる。まず、E. Cormier, P. Dillery, J. Resh, K. Serhiyenko, J. Whelan [CDRSW] の結果を用いて、 A 型 quiver と三角形分割で表すことができる 3-cycle をもつ quiver に対して maximal green sequence を求め (§5.1)、cycle をもたないアフィン A 型 quiver の maximal green sequence の 1 つと、分配級数を求める (§5.2)。 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver の maximal green sequence の 1 つの取得方法を示し、一般的な取得方法の予想を述べる。分配級数の分子の q の指数の 2 次形式に A 型カルタン行列を含む行列が現れることが予想され、 $n = 3, 4, 5, 6$ のときに

この予想を証明する (§5.3)。さらに、 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver の $1 \rightarrow 2$ に 1 本矢を付け加えた quiver に対する maximal green sequence の 1 つを求める。この maximal green sequence から定まる分配級数に付随する行列において §5.3 の予想と類似の結果が予想がされ、 $n = 3, 4, 5$ のときにこの予想が正しいことを証明する (§5.4)。最後に先のセクションで扱った quiver が $n = 4$ のときのある変換の下で関連のある異なる maximal green sequence やそれらから得られる分配級数の分子の q の 2 次形式から得られる行列が持つ性質について述べる (§5.5)。

この論文では \mathbb{N} は自然数全体からなる集合を表し、 0 を含むものとする。

この論文は関西大学大学院理工学研究科に受理された 2023 年 3 月期の修士論文である。提出後に気がついた軽微な修正が施されている。

目次

第1章 quiver とクラスター代数	6
§1.1 quiver の定義と例	6
§1.2 quiver と曲面の三角形分割	7
§1.3 seed と mutation	9
§1.4 クラスター代数の定義	12
第2章 底グラフが三角形の quiver の exchange matrix	13
§2.1 Markov quiver	13
§2.2 ある三角形 quiver	20
第3章 mutation sequence	25
§3.1 mutation loop	25
§3.2 framed quiver	26
§3.3 green and red	28
第4章 分配級数	30
§4.1 分配級数の定義	30
§4.2 分配級数と組み合わせドナルドソン・トーマス不変量 との関係	33
第5章 A 型 quiver に関連する maximal green sequence と分配級数	35
§5.1 A 型 quiver の maximal green sequence と分配級数	35
§5.2 アフィン A 型 quiver に関連する maximal green sequence と分配級数	41
§5.3 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver に関する maximal green sequence と分配級数	43
§5.4 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver のある拡張に関する maximal green sequence と分配級数	56
§5.5 アフィン A_4 型 quiver のある拡張に関する分配級数から 得られた行列に関する考察	65

第1章 quiver とクラスター代数

この章では Gabriel [Ga] によって導入された quiver と Fomin と Zelevinsky [FZ1, FZ2, FZ3, FZ4] によって導入されたクラスター代数の定義と基本的な性質を [IJ] に従って述べる。

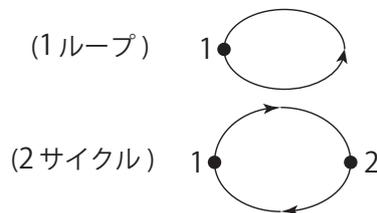
quiver は簡単に述べると有向グラフのことで、クラスター代数は、quiver に付随して定まる可換代数の一種で、ルート系や、可積分系、曲面の分割などの研究に幅広く使われている。

§1.1 quiver の定義と例

定義 1.1. 有限個の頂点と辺を持つグラフであって、各辺に向きがついたもの (これを矢と呼ぶ) を **quiver** といい、 Q で表す。 Q_0 を頂点の集合、 Q_1 を矢の集合とすると、 Q は

$$Q := (Q_0, Q_1)$$

により与えられる。ただし、1 ループ ($i \rightarrow i (i \in Q_0)$) と 2 サイクル ($i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_1 (i_1, i_2 \in Q_0)$) は考えないものとする。

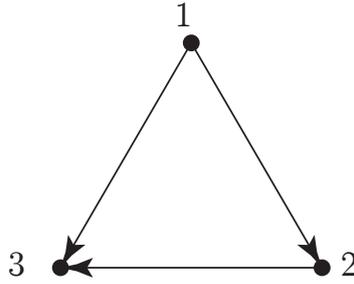


頂点 $i \in Q_0$ に少なくとも 1 つの矢が接続していて i に接続するすべての矢が i を始点とする場合、頂点 i を **source** と呼び、頂点 $i \in Q_0$ に少なくとも 1 つの矢が接続していて i に接続するすべての矢が i を終点とする場合、頂点 i を **sink** と呼ぶ。頂点 i から頂点 j への矢の本数を重みと呼び s_{ij} で表す。さらに、quiver から矢の向きを取り除いたグラフを **底グラフ** と呼ぶ。

例 1.2.

$$Q = (Q_0, Q_1) = (\{1, 2, 3\}, \{1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3\})$$

この quiver を図で表すと以下のようなになる。



定義 1.3. quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ に対して、quiver $Q' = (Q'_0, Q'_1)$ が

$$Q'_0 \subseteq Q_0, \quad Q'_1 \subseteq Q_1$$

を満たす場合、 Q' を Q の **subquiver** と呼ぶ。さらに、始点と終点が Q'_0 に含まれる任意の $\alpha \in Q_1$ に対して $\alpha \in Q'_1$ となるとき、 Q' を Q の **full subquiver** と呼ぶ。

§1.2 quiver と曲面の三角形分割

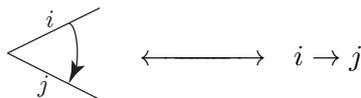
この節では quiver と曲面の三角形分割との関係を説明する。

定義 1.4 (点付き曲面). Σ を向き付けられた曲面、 $\mathcal{P} = \{P_k\}_{1 \leq k \leq m}$ を Σ 上の点の集合とする。 Σ には境界 $\partial\Sigma$ があってもよいが、 $\partial\Sigma \neq \emptyset$ の場合、境界の各連結成分は P_k のうち少なくとも 1 点を含むものとする。組 (Σ, \mathcal{P}) を **点付き曲面** と呼ぶ。

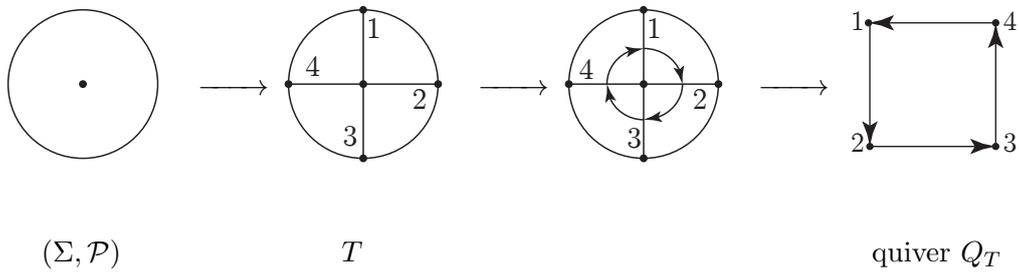
定義 1.5. 点付き曲面 (Σ, \mathcal{P}) の **三角形分割** とは、頂点が \mathcal{P} の元からなる Σ の位相的な三角形 (辺と頂点がそれぞれ 3 個であるもの) への分割のことを言う。

定義 1.6. (Σ, \mathcal{P}) の三角形分割 T から quiver Q_T を次の規則で定める。

- (1) $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ の辺を Q_T の頂点に対応させる。
- (2) 辺 i, j が T の頂点を共有し、かつ辺 i から j が時計回りの向きであるとき、頂点 i から j に向けて矢印を付ける。

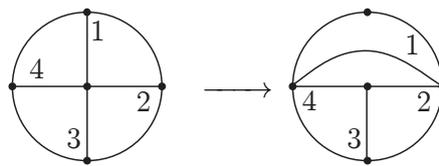


例 1.7. 左下の点付き曲面 (Σ, \mathcal{P}) の三角形分割 T を quiver で表すと、右下の quiver になる。

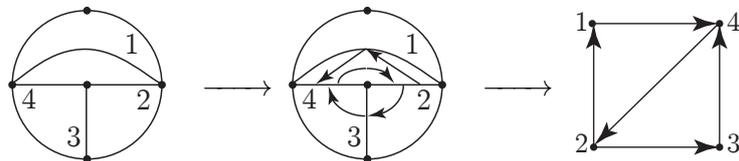


定義 1.8. 三角形分割を行われた点付き曲面において、対角線が2本以上のびている頂点に対して、内部辺の midpoint を反時計回りに各頂点のまわりで、矢印をつけて結ぶ。このような操作を **flip** と呼ぶ。flip は quiver の mutation に対応している。

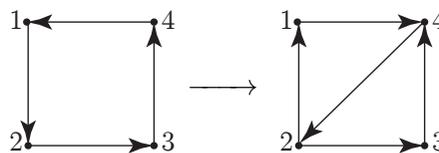
例 1.9. 例 1.7 の quiver と三角形分割 T に注目してみる。T を辺 1 で flip すると、



となり、これを quiver で表すと



となる。また元の quiver に 1 で mutation すると以下ようになる。



このように、辺 1 での flip と頂点 1 での mutation は対応している。

ここで1つの事実を紹介する。

事実 1.10. 六角形の三角形分割に flip を施す事によって得られる三角形分割は、頂点を三角形分割とし、flip を辺とする **associahedron** (5 角形が 6 個、4 角形が 3 個からなる 9 面体) を生成する。

この事実は、クラスター代数の中ではよく知られたものである。また、この2つの9面体を展開して貼り合わせると、正12面体ができる。これは、正12面体のハミルトン経路の答えになる。

この事実に似た結果が§2.2で与えられる。その結果においてはクラスター変数を考えずに、底グラフが三角形のある quiver に対する mutation のみを用いる。

§1.3 seed と mutation

ここでは seed や quiver の mutation に関して述べる。さらに quiver を行列に読み替えて、Fomin と Zelevinsky [FZ4] によって定義された exchange matrix を紹介する。

定義 1.11. quiver の頂点集合でラベル付けされた変数の組 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を **クラスター**、それぞれの x_i を **クラスター変数** という。これらは可換かつ代数的に独立な変数とする。quiver とクラスターの組 (Q, \mathbf{x}) を **seed (種)** と呼ぶ。

定義 1.12. (mutation) seed (Q, \mathbf{x}) の $k \in Q_0$ における **mutation** $\mu_k(Q, \mathbf{x}) = (Q', \mathbf{x}')$ を次のように定める。

- $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ の定め方

$$x'_i = \begin{cases} \frac{1}{x_k} (\prod_{j \rightarrow k} x_j^{s_{jk}} + \prod_{j \leftarrow k} x_j^{s_{kj}}) & (i = k) \\ x_i & (i \neq k) \end{cases}$$
 ここで $\prod_{j \rightarrow k}$ は j から k に向かう辺があるような頂点 j についての積、 $\prod_{j \leftarrow k}$ は k から j に向かう辺があるような頂点 j についての積をあらわす。そのような頂点が無いときは積を 1 とする。

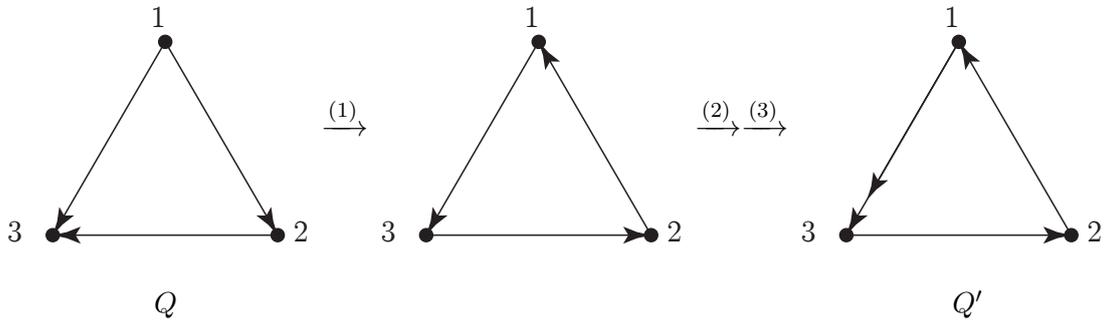
- Q' の定め方
 - (1) まず k に出入りする矢の向きを全部逆にする (重み s_{ij} はそのままにする)
 - (2) (1) のあとで、 k に入って出る矢のペア $j \rightarrow k \rightarrow i$ があるごとに矢 $i \rightarrow j$ を加え、 $s_{k,j}s_{i,k}$ をその重みとする。
 - (3) (2) の結果をそれ以外の矢と合わせる。

定義 1.13. quiver Q, Q' が **mutation 同値** であるとは、 $i_1, \dots, i_M \in Q_0$ が存在して、

$$\mu_{i_M} \cdots \mu_{i_1}(Q) = Q'$$

となることを言う。

例 1.14. 次のような quiver Q を考える。この quiver に対して頂点 2 で mutation を行うと (1)(2)(3) の手順で quiver Q' が得られる。



またクラスター変数は次のようになる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix}$$

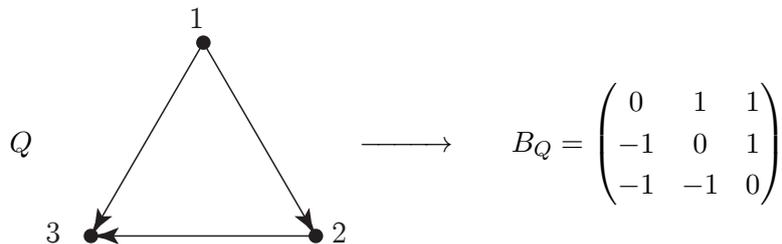
quiver Q を表すのに反対称行列を用いることもできる。 Q に関する $n \times n$ 行列 $B_Q = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ を次のように定める。ただし、

$$b_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & (i \neq j, i \xrightarrow{s_{ij}} j) \\ -s_{ij} & (i \neq j, i \xleftarrow{s_{ji}} j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

このとき mutation $\mu_k(B_Q) = (b'_{ij})$ を次のように定める。

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = k \text{ or } j = k) \\ b_{ij} + \frac{1}{2}(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & (i, j \neq k) \end{cases}$$

例 1.15. 例 1.2 の quiver Q を行列に翻訳すると以下のようなになる。



この行列に頂点 2 での mutation を施すと以下を得る。

$$B_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} B_{Q'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

initial quiver Q_0 に関する行列 B_{Q_0} に 3 次単位行列を付け加えた 6×3 行列を **initial exchange matrix** といひ \tilde{B}_{Q_0} で表す。 \tilde{B}_{Q_0} に対しても、 B_Q と同様に mutation が定義

される。initial exchange matrix に mutation を行った行列を **exchange matrix** と呼び \tilde{B} で表す。以下 exchange matrix の mutation に必要な計算式を導入する。

定義 1.16. x を整数として、以下を定義する。

$$[x]_+ = \max(x, 0)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

定義 1.17. quiver Q の exchange matrix \tilde{B} とクラスター $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ の組 (\tilde{B}, \mathbf{x}) を seed と呼ぶ。

seed (\tilde{B}, \mathbf{x}) の mutation を次のように定義する。

定義 1.18. (\tilde{B}, \mathbf{x}) を seed、 k を整数 ($1 \leq k \leq n$) とする。 k での mutation $\mu_k(\tilde{B}, \mathbf{x}) = (\tilde{B}', \mathbf{x}')$ を以下で定義する。

- $\tilde{B}' = (b'_{ij})$ の成分は以下のように与えられる。

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = k \text{ or } j = k) \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+ & (\text{その他}) \end{cases}$$

- クラスター $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ は以下のように与えられる。

$$x'_i = \begin{cases} \frac{1}{x_k} (\prod_{j=1}^n x_j^{[b_{jk}]_+} + \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{jk}]_+}) & (i = k) \\ x_i & (i \neq k) \end{cases}$$

注意 1.19. μ_k は対合である。つまり、

$$\mu_k \mu_k(\tilde{B}, x) = (\tilde{B}, x).$$

例 1.20. 例 1.2 の行列の initial exchange matrix を 2 で mutation すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§1.4 クラスター代数の定義

ここでは、クラスター代数の定義と、基本的な定理を紹介する。

定義 1.21. quiver Q とクラスター $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ のなす $\text{seed}(Q, \mathbf{x})$ に対して、mutation をあらゆる仕方で有限回施して得られる $\text{seed}(Q'', \mathbf{x}'')$ たちをすべて考え、これら x''_k たちで生成される $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ の \mathbb{Z} 部分代数を $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ とする。つまり $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ は x''_k たちをすべて含み、かつ

$$p_1, p_2 \in \mathcal{A}(Q, \mathbf{x}), c_1, c_2 \in \mathbb{Z} \implies c_1 p_1 + c_2 p_2 \in \mathcal{A}(Q, \mathbf{x}), c_1 p_1 p_2 \in \mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$$

が成り立つような最小の集合である。この $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ を (Q, \mathbf{x}) から定まる**クラスター代数**とよぶ。

例 1.22. $Q = 1 \longrightarrow 2$ の場合に、mutation によって得られる seed を求めてみる。

$$1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{\mu_1} 1 \longleftarrow 2 \xrightarrow{\mu_2} 1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{\mu_1} 1 \longleftarrow 2 \xrightarrow{\mu_2} 1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{\mu_1} 1 \longleftarrow 2$$

この際、クラスター変数は以下のようにになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

そして、 $\sigma_{12} : x_1 \leftrightarrow x_2$ という入れ替え操作を行うことで

$$\sigma_{12} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1 = \text{id}$$

となり元に戻る。上の mutation で表れる相異なるクラスター変数は

$$x_1, x_2, x'_1 = \frac{1+x_2}{x_1}, x'_2 = \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, x''_1 = \frac{1+x_1}{x_2}$$

の全部で5個で

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \mathbb{Z} \left[x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right]$$

となることがわかる。

クラスター代数に対して次の結果が基本的である。

定理 1.23 (Fomin and Zelevinsky [FZ1, FZ2]).

1. すべてのクラスター変数 x''_i は x_1, \dots, x_n の Laurent 多項式である。すなわち

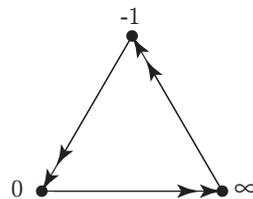
$$x''_i \in \mathbb{Q}[x_k^{\pm 1}; k \in Q_0]$$

2. mutation によって得られる相異なるクラスター変数が有限個であることは、 Q は ADE 型 quiver に mutation 同値であることの必要十分条件である。

第2章 底グラフが三角形の quiver の exchange matrix

Chávez [C] は Farey triple と Markov quiver に関する exchange matrix の関係について研究した。この章では、底グラフが三角形の quiver の exchange matrix に関する性質を述べ、Chávez [C] の結果を紹介する。さらに、ある三角形 quiver に対する mutation によって得られた多面体や、mutation によって得られるクラスター変数の性質を述べる。

§2.1 Markov quiver



上の quiver は Markov 方程式

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z})$$

に密接に関係していることから、**Markov quiver** と呼ばれる。Markov 方程式の正の整数解は Markov 数と呼ばれ、正の整数解の 3 組は Markov 3 組と呼ばれる。Markov 3 組を 1 つ見つけると、解と係数の関係から他の解を見つけることができる。Markov 方程式の最小の解のみからなる 3 組は $[1, 1, 1]$ である。これを最小の Markov 3 組として、解を 2 つ固定すると、 $[1, 2, 1]$ が得られる。さらに、1, 2 を固定することで $[1, 5, 2]$ を得る。このような操作を繰り返す事で次のような **Markov tree** T_M を得る。

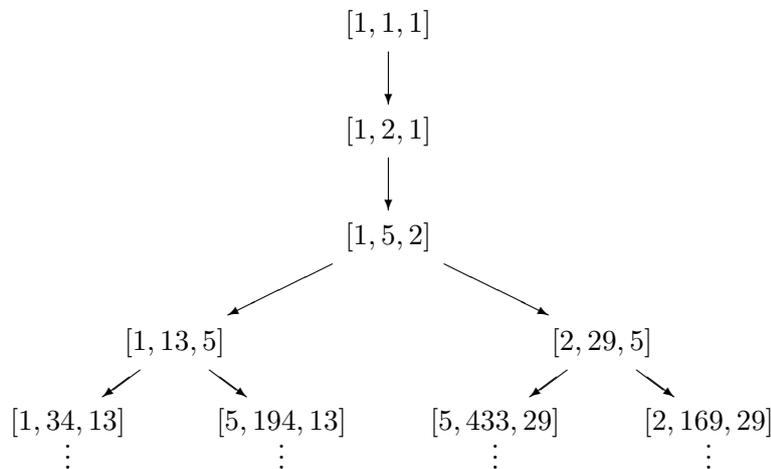
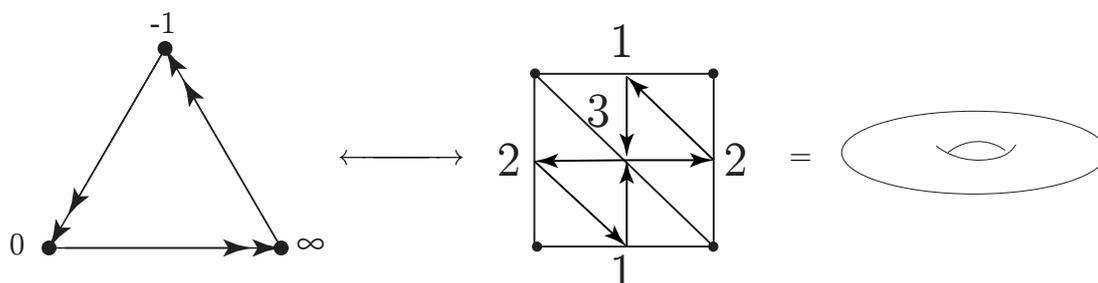


図: Markov tree T_M

Markov quiver は次図のようにトーラスの三角形分割と対応している。ただし、正方形の対辺を同一視しており、頂点 $0, -1, \infty$ が辺 $1, 2, 3$ に対応している。



Markov 数に関しては「Markov の一意性予想」と呼ばれる未解決の予想がある [M]。

予想 2.1 (Markov の一意性予想).

すべての Markov 数は、Markov 3 組内の最大数として 1 度だけ現れる。

Chávez [C] は「Markov の一意性予想」の解決のために Markov quiver について研究した。

注意 2.2. Gyoda [G] により Markov 方程式の類似として

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 12xyz \quad (x, y, z \in \mathbb{Z})$$

が考察された。この方程式は Markov 方程式と部分的に同じ解をもち、Markov 方程式と同様にツリーを形成する。この方程式に関連する quiver はオービフォルドの三角形分割に対応している。さらに Gyoda と Matsushita [GM] により Markov 方程式の一般化として

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1xy + k_2yz + k_3zx = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

が研究されている。

このセクションでは Markov quiver と有理数との関係を述べ、さらに Markov quiver の mutation から定まる exchange matrix 間の関係を述べる。

有理数に関して次の表記を用いる。ここで \mathbb{Q}_∞ は有理数全体に ∞ を含めた集合を表す。

表記 1. $q \in \mathbb{Q}_\infty$ に対して、 $d(q), r(q)$ は次の 3 条件を満たす整数を表す。

- $q = \frac{d(q)}{r(q)}$
- $\gcd(d(q), r(q)) = 1$

- $r(q) \geq 0$

この $d(q), r(q)$ は一意に決定される。特に $0 = \frac{0}{1}, \infty = \frac{1}{0}$ である。

ここで $[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ という 3 つ組を考える。この 3 つ組は **Farey triple** となっている。Farey triple の定義は次の通りである。

定義 2.3. $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ に対して

$$\Delta(q, q') = \left| \det \begin{pmatrix} d(q) & d(q') \\ r(q) & r(q') \end{pmatrix} \right|$$

と定める。 $\Delta(q, q') = 1$ の場合、 q と q' を **Farey neighbor** と呼ぶ。さらにどの 2 つの組み合わせも Farey neighbor となっている $q, q', q'' \in \mathbb{Q}_\infty$ の 3 つ組 $[q, q', q'']$ を **Farey triple** と呼ぶ。Farey neighbor の定義より、Farey triple $[q, q', q'']$ において、 $\frac{\text{偶数}}{\text{奇数}}, \frac{\text{奇数}}{\text{奇数}}, \frac{\text{奇数}}{\text{偶数}}$ が 1 つずつ現れる。

定義 2.4. $q, q' \in \mathbb{Q}_\infty$ を Farey neighbor とする。

- q と q' の Farey 和 $q \oplus q'$ を以下で定義する。

$$q \oplus q' = \frac{d(q)+d(q')}{r(q)+r(q')}$$

- q と q' の Farey 差 $q \ominus q'$ を以下で定義する。

$$q \ominus q' = \frac{d(q)-d(q')}{r(q)-r(q')}$$

Chávez [C] により Farey triple に対して mutation が定義された。

定義 2.5 (Chávez [C]). $[q_0, q_{-1}, q_\infty]$ を Farey triple, $k \in \{0, -1, \infty\}$ とする。ただし

$[q_0, q_{-1}, q_\infty] = [\frac{\text{偶数}}{\text{奇数}}, \frac{\text{奇数}}{\text{奇数}}, \frac{\text{奇数}}{\text{偶数}}]$ の形を満たしているものとする。

$[q_0, q_{-1}, q_\infty]$ の k での mutation を以下で定義する。

$$\mu_k [q_0, q_{-1}, q_\infty] = \begin{cases} [q_{-1} \oplus q_\infty, q_{-1}, q_\infty] & (q_0 = q_{-1} \ominus q_\infty) \\ [q_{-1} \ominus q_\infty, q_{-1}, q_\infty] & (q_0 = q_{-1} \oplus q_\infty) \\ [q_0, q_0 \oplus q_\infty, q_\infty] & (q_{-1} = q_0 \ominus q_\infty) \\ [q_0, q_0 \ominus q_\infty, q_\infty] & (q_{-1} = q_0 \oplus q_\infty) \\ [q_0, q_{-1}, q_0 \oplus q_{-1}] & (q_\infty = q_0 \ominus q_{-1}) \\ [q_0, q_{-1}, q_0 \ominus q_{-1}] & (q_\infty = q_0 \oplus q_{-1}) \end{cases}$$

定義 2.5 より $\mu_0[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}] = [\frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ を得る。さらに $[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ と $[\frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ を矢で結び、矢の上に 0 をおく。このように操作を繰り返すことで Farey triple 全体から mutation の操作で関連付けられたツリー T_3 が得られる。

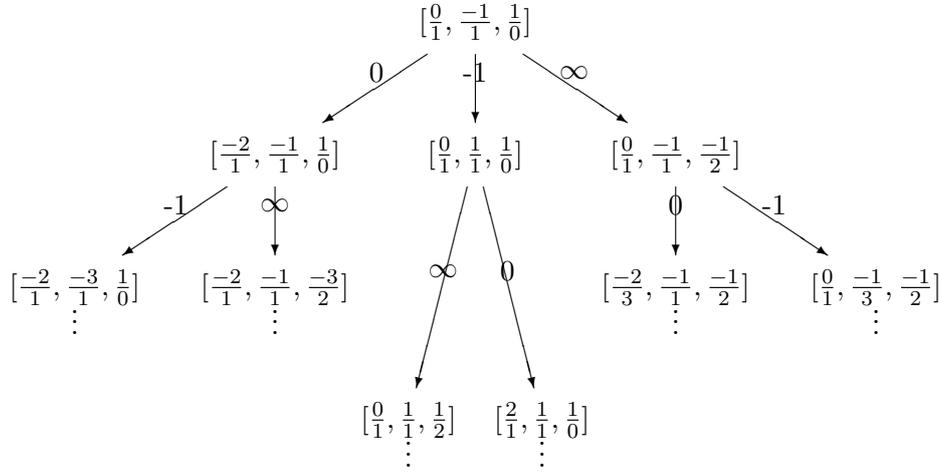


図: ツリー T_3

この T_3 のうち、左に現れる $[\frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ を頂点とする部分ツリーを T_3^0 、真ん中に現れる $[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}]$ を頂点とする部分ツリーを T_3^{-1} 、右に現れる $[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}]$ を頂点とする部分ツリーを T_3^∞ と書く。

3つのツリー $T_3^{-1}, T_3^\infty, T_3^0$ はグラフとして同型である。その同型写像は次の補題により与えられる。

補題 2.6 (Chávez [C]).

(1) グラフ同型 $\phi: T_3^{-1} \rightarrow T_3^\infty$ が

- ・ $\phi[q_0, q_{-1}, q_\infty] = [\frac{-r(q_\infty)}{r(q_\infty)+d(q_\infty)}, \frac{-r(q_0)}{r(q_0)+d(q_0)}, \frac{-r(q_{-1})}{r(q_{-1})+d(q_{-1})}]$
- ・ 辺のラベルに関して $0, -1, \infty \mapsto -1, \infty, 0$

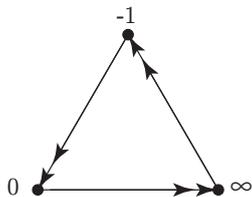
によって定義される。特に $\phi([\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}]) = [\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}]$ である。

(2) グラフ同型 $\psi: T_3^{-1} \rightarrow T_3^0$ が

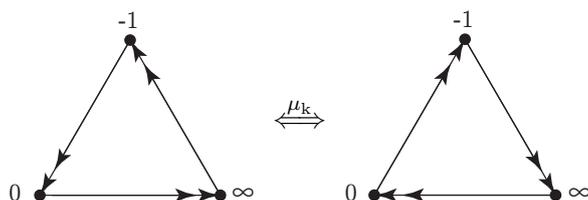
- ・ $\psi[q_0, q_{-1}, q_\infty] = [\frac{-(r(q_{-1})+d(q_{-1}))}{d(q_{-1})}, \frac{-(r(q_\infty)+d(q_\infty))}{d(q_\infty)}, \frac{-(r(q_0)+d(q_0))}{d(q_0)}]$
- ・ 辺のラベルに関して $0, -1, \infty \mapsto \infty, 0, -1$

によって定義される。特に $\psi([\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}]) = [\frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ である。

ここからは Markov quiver と Farey triple を関連付けて exchange matrix について考える。



この quiver にどの頂点で mutation しても次の右図のような矢の向きが入れ替わった quiver が得られる。



以上の quiver を左から Q^+ , Q^- とし、この quiver から定まる行列をそれぞれ B^+ , B^- とすると以下ようになる。

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^- = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、この行列は行と列を $0, -1, \infty$ として考えている。

すると initial exchange matrix \tilde{B}_0 は以下ようになる。ただし、 $[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}] = [0, -1, \infty]$ と読むことで、Markov quiver B^+ と関連付けられ、 \tilde{B}_0 は $[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ に割り当てる。

$$\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さらに $a_i \in \{0, -1, \infty\}$ をもつ任意の Farey triple $\mu_{a_n} \cdots \mu_{a_1} [\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{0}]$ に exchange matrix $\mu_{a_n} \cdots \mu_{a_1}(\tilde{B}_0)$ を帰納的に割り当てる。

この initial matrix に mutation を施すと、上 3×3 小行列は $B^+ \xleftrightarrow{\mu_k} B^-$ と行き来する。一方、次の例に示すように下 3×3 小行列の部分は上 3×3 小行列のようにはいかない。このことから Markov quiver の exchange matrix を考える上で、下 3×3 小行列の形を考えることに集中することができる。

$$(1) \begin{pmatrix} a+1 & -c+1 & c-a-1 \\ a+b+1 & -c-d+1 & c+d-a-b-1 \\ b+1 & -d+1 & d-a-1 \end{pmatrix} \quad (q_0 < q_\infty < q_{-1})$$

$$(2) \begin{pmatrix} -a+1 & c+1 & a-c-1 \\ -a-b+1 & c+d+1 & a+b-c-d-1 \\ -b+1 & d+1 & b-d-1 \end{pmatrix} \quad (q_{-1} < q_\infty < q_0)$$

$$(3) \begin{pmatrix} a+1 & e-a-1 & -e+1 \\ a+b+1 & e+f-a-b-1 & -e-f+1 \\ b+1 & f-b-1 & -f+1 \end{pmatrix} \quad (q_0 < q_{-1} < q_\infty)$$

$$(4) \begin{pmatrix} -a+1 & a-e-1 & e+1 \\ -a-b+1 & a+b-e-f-1 & e+f+1 \\ -b+1 & b-f-1 & f+1 \end{pmatrix} \quad (q_\infty < q_{-1} < q_0)$$

$$(5) \begin{pmatrix} e-c-1 & c+1 & -e+1 \\ e+f-c-d-1 & c+d+1 & e-f+1 \\ f-d-1 & -d+1 & -f+1 \end{pmatrix} \quad (q_{-1} < q_0 < q_\infty)$$

$$(6) \begin{pmatrix} c-e-1 & -c+1 & e+1 \\ c+d-e-f-1 & -c-d+1 & e+f+1 \\ d-f-1 & -d+1 & f+1 \end{pmatrix} \quad (q_\infty < q_0 < q_{-1})$$

命題 2.9 (Chávez [C]). Farey triple $[q_0, q_{-1}, q_\infty]$ に紐づけられた exchange matrix を M とし次のように表す。

$$[q_0, q_{-1}, q_\infty] \rightarrow M$$

さらに M を Farey triple $[q_0, q_{-1}, q_\infty] \in T_3^{-1}$ に関連づけられた exchange matrix とすると以下が成り立つ。

$$\phi[q_0, q_{-1}, q_\infty] \rightarrow (123) \bullet M$$

$$\psi[q_0, q_{-1}, q_\infty] \rightarrow (132) \bullet M$$

ただし、 $(123) \bullet M$ の上 3×3 行列と下 3×3 行列に $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ と成分を変換したものを表し、 $(132) \bullet M$ は $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ と成分を変換したものを表す。

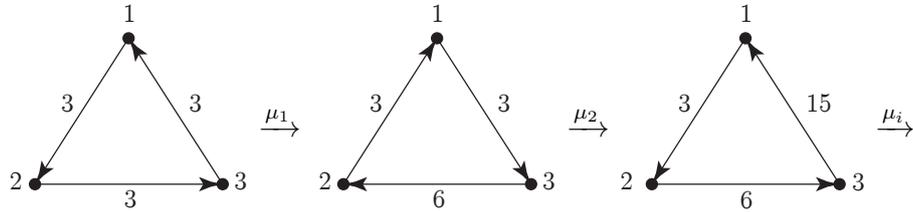
さらに、Markov quiver の exchange matrix を用いて、Markov の一意性予想を言い換える事ができる。

予想 2.10. Markov quiver の mutation から得られる exchange matrix はすべて異なる。

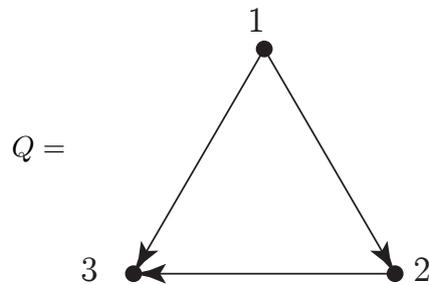
注意 2.11. Markov quiver の exchange matrix は命題 2.9 により、ツリー T_3^{-1} の exchange matrix で T_3^∞, T_3^0 の exchange matrix を表すことができるため、先の予想を考える上で思考量を $\frac{1}{3}$ にする事ができる。

§2.2 ある三角形 quiver

§2.1 の Markov quiver から発展してすべての矢の数を 3 つにした三角形 quiver を見てみる。これに mutation を施すと、次のようになる。



このように、mutation によって得られる quiver の矢の本数は増えるばかりで、減る気配がない。そこで逆に矢の本数を 1 本にした次のような quiver Q を考えてみる。



この quiver において mutation を施すことで、事実 1.10 と同じような associahedron が得られる。

補題 2.12. 上の quiver Q に mutation を施していくと、quiver を頂点とし、mutation を辺とする 3 個の 8 角形と、2 つの 3 角形からなる Figure 1 の 5 面体 が得られる。ただし、 $a := Q$ と書く。

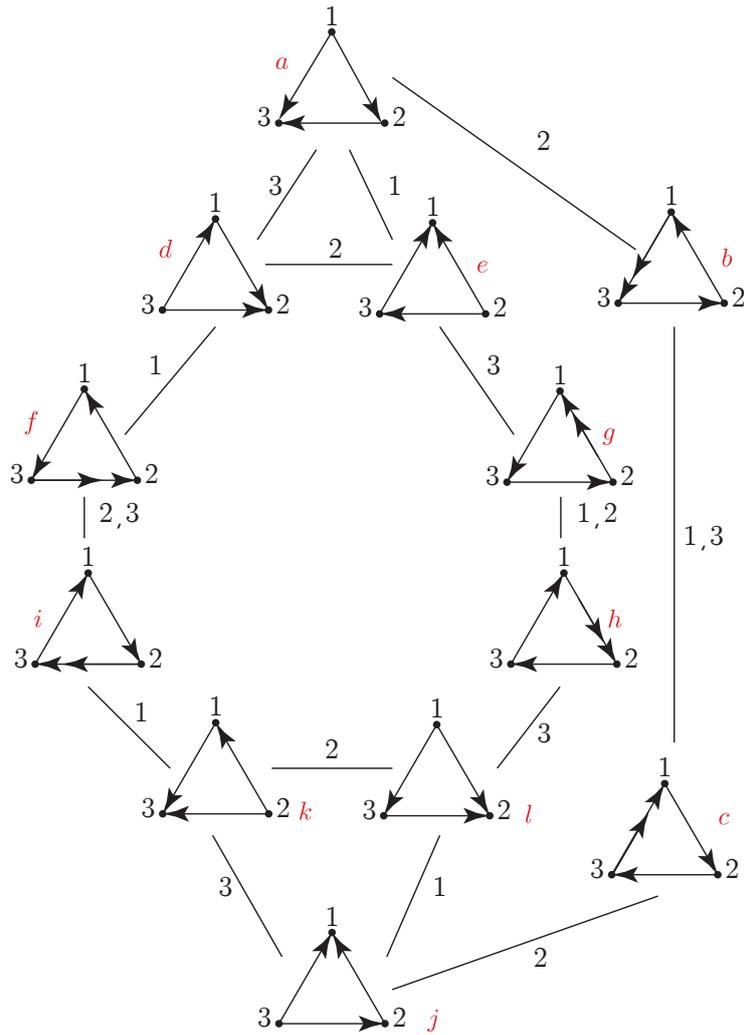


Figure1 5面体

(証明)

Keller [K4] の「Quiver mutation in JavaScript and Java」を用いて mutation を行うことで確かめることもできるが、比較的簡易なので mutation の定義に従って手計算によって求めることができる。 □

Markov quiver と同様に、この quiver Q の mutation に対応する exchange matrix を求める。

例 2.13. quiver $Q = a$ に以下の順序で mutation を施す。

$$a \xrightarrow{1} e \xrightarrow{2} d \xrightarrow{1} f \xrightarrow{2} i \xrightarrow{1} k \xrightarrow{2} l \xrightarrow{1} j \xrightarrow{2} c \xrightarrow{1} b \xrightarrow{2} a \quad (2.1)$$

このとき exchange matrix は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \\
& \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

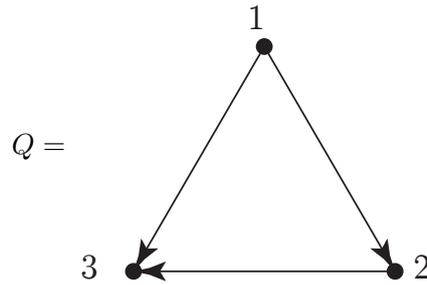
またクラスター変数 x_1, x_2, x_3 は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ \frac{x_2x_3^2+x_3+x_1}{x_1x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ \frac{x_2x_3^2+x_3+x_1}{x_1x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \\
& \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3^2+x_3+x_1}{x_1x_2} \\ \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \\
& \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3^2+x_3+x_1}{x_1x_2} \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このように exchange matrix は元の a の形に戻るが、Markov quiver と同様の命題 2.8 の様に表すことが出来ない。

一方、quiver a に関するクラスター変数は (2.1) の mutation によって、元の変数に戻る。同様にして 1,3 や 2,3 (合計 10 回で最短ルート) の繰り返し mutation に関してクラスター変数に対して同様の結果が得られる。

命題 2.14. 次の quiver $Q = a$ に対する seed (Q, \mathbf{x}) に対して



1, 2 や 1, 3 や 2, 3 のそれぞれ 5 回の mutation によってクラスター変数が構成される。

(証明)

(1) 1, 2 の繰り返しの場合

例 2.12 より quiver は mutation 5 回目の quiver に σ_{12} を施すことで元の形に戻り、クラスター変数も同様である。また 2, 1 の繰り返しのクラスター変数は先の mutation を逆から見て 5 回目で得られる。

(2) 1, 3 の繰り返し

Figure1 より quiver は mutation 5 回目の quiver に σ_{13} を施すことで元の形に戻りもとに戻る。またクラスター変数は

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} \frac{x_2x_3+1}{x_1} \\ x_2 \\ \frac{x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2+1}{x_3} \\ x_2 \\ \frac{x_1x_2+x_2x_3}{x_1x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \\
 & \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2+1}{x_3} \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ \frac{x_2x_3+1}{x_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2+x_2x_3+1}{x_1x_3} \\ x_2 \\ \frac{x_2x_3+1}{x_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \\
 & \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2+x_2x_3+1}{x_1x_3} \\ x_2 \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となり、mutation 5 回目のクラスター変数に対して σ_{13} を施すことで元のクラスター変数に戻る。3, 1 の繰り返しに関しても先と同様である。(2) 2, 3 の繰り返しの場合

Figure1 より quiver はもとに戻る。mutation 5 回目の quiver に σ_{23} を施すことで元の形に戻る。またクラスター変数は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \\ \frac{x_1+x_1^2x_2+x_3}{x_2x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \\ \frac{x_1+x_1^2x_2+x_3}{x_2x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \\ x_2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_1^2x_2+x_3}{x_2x_3} \\ \frac{x_1+x_3}{x_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \\ &\begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1+x_1^2x_2+x_3}{x_2x_3} \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_1x_2+1}{x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、mutation 5 回目のクラスター変数に σ_{23} を施すことで元のクラスター変数に戻る。繰り返し 3, 2 でも同様である。 □

第3章 mutation sequence

この章では、分配級数を定義するために必要な mutation loop について説明し、さらに mutation loop を1つに限定することができる、frame という概念を導入する。そのうえで Keller [K1] によって定義された maximal green sequence について紹介する。この maximal green sequence は quantum dilogarithm identities と弦理論やゲージ理論に現れる refined Donaldson-Thomas 不変量のために導入された。

§3.1 mutation loop

第1章で quiver Q, Q' が同型であるとき、quiver Q と Q' を mutation 同値であると定義した。この定義のもとでは、頂点の番号付けが違っただけで形が同じものに関しては mutation 同値でない。ここでは、quiver Q と Q' の頂点の番号付けが異なるが、形が同じものを含めて考えることができる mutation loop と呼ばれる概念を導入する。

定義 3.1. quiver Q の頂点の有限列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ は **mutation sequence** と呼ばれる。

$$Q(t) := \mu_{m_t}(Q(t-1)) \quad (1 \leq t \leq T)$$

と置くことにより \mathbf{m} は quiver の時間発展を誘導する:

$$Q(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} Q(1) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_t}} Q(t) \xrightarrow{\mu_{m_{t+1}}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} Q(T)$$

このとき $Q(0)$ と $Q(T)$ は特に **initial quiver**, **final quiver** と呼ばれる。

以下の表記を用いる。

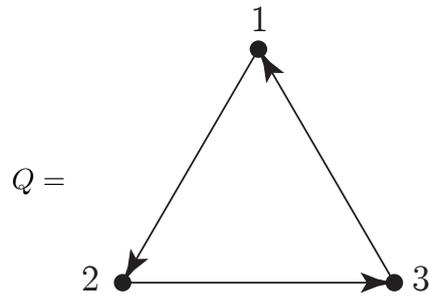
$$\mu_{\mathbf{m}}(Q(T)) = \mu_{m_T}(\dots \mu_{m_2}(\mu_{m_1}(Q(0))) \dots)$$

initial quiver と final quiver が同型の場合、以下が定義される。

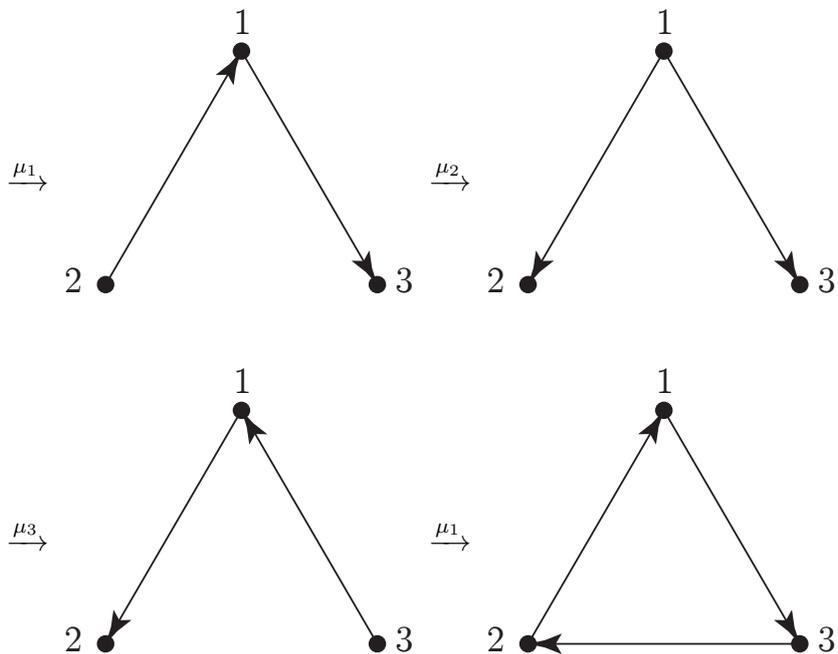
定義 3.2. $Q(0)$ と $Q(T)$ は有向グラフとして同型と仮定する。このとき、同型 $\psi: Q(T) \rightarrow Q(0)$ は、頂点集合の全単射を導き、mutation sequence \mathbf{m} の**境界条件**と呼ばれる。 ψ は $\{1, \dots, n\}$ の順列、つまり $\psi \in S_n$ (ここで、 S_n は対称群) を定める。

三つ組 $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \psi)$ は Q の **mutation loop** と呼ばれる。

例 3.3. 次の quiver を考える。



これに $\mathbf{m} = (1, 2, 3, 1)$ で mutation すると



境界条件は1つの頂点を固定しその他の頂点を入れ替えて $\psi = (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)$ の3つが考えられる。よって、mutation loop は $\gamma = (Q; (1, 2, 3, 1), (1\ 2)), (Q; (1, 2, 3, 1), (1\ 3)), (Q; (1, 2, 3, 1), (2\ 3))$ の3つがある。しかし、次の framed quiver を導入することで、境界条件を1つにすることができる。

§3.2 framed quiver

この節では、Brüstle, Dupont, Pérotin [BDP] により導入された framed quiver の定義と例を述べる。

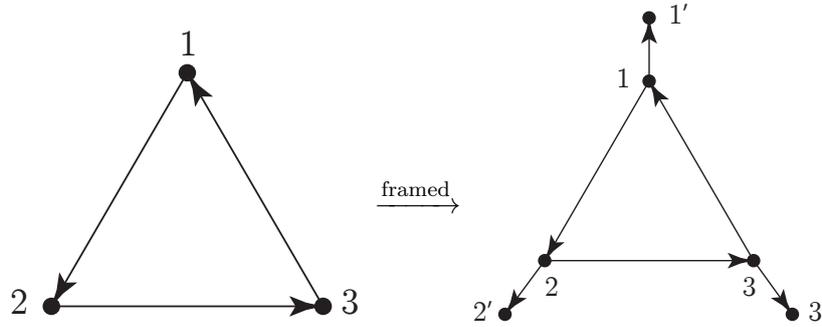
定義 3.4. quiver Q に対して、framed quiver \hat{Q} とは、各頂点 $i \in Q_0$ に対して、新しい vertex i' と新しい矢 $i \rightarrow i'$ を加える事によって得られた quiver の事である。 i' を frozen

vertex と呼び、それらの集合を F で表す。すなわち、

$$(\widehat{Q})_0 = Q_0 \cup F, \quad F := \{i' | i \in Q_0\},$$

$$(\widehat{Q})_1 = Q_1 \cup \{i \rightarrow i' | i \in Q_0\}.$$

例 3.5. 左の quiver を framed quiver にすると右のようになる。



Q に対して、 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ を mutation sequence とする。

$$\widehat{Q}(0) = \widehat{Q}, \quad \widehat{Q}(t) = \mu_{m_t}(\widehat{Q}(t-1)) \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

と置くことにより、以下の framed quiver の sequence が構成できる。

$$\widehat{Q}(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} \widehat{Q}(1) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_t}} \widehat{Q}(t) \xrightarrow{\mu_{m_{t+1}}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} \widehat{Q}(T)$$

注意 3.6. $m_t \in Q_0$ なので、frozen vertices $F = \{1', 2', \dots, n'\}$ の各点では決して mutation しない。

定義 3.7. $\widehat{B}(t)$ を $\widehat{Q}(t)$ に対応する反対称行列とする。 $Q(t)$ の頂点 v の c-vector は以下のように定義される。

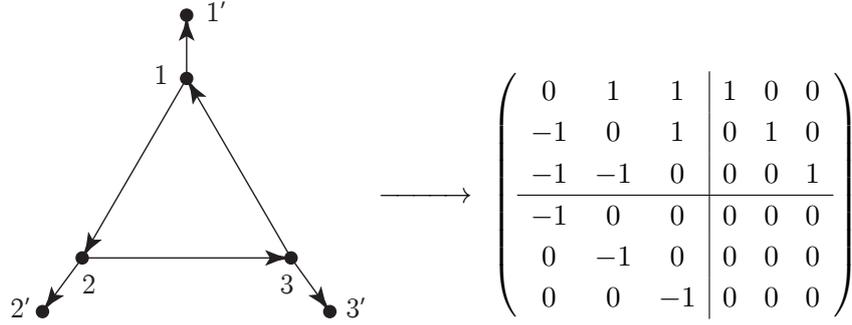
$$c_v(t) := (\widehat{B}(t)_{vi})_{i=1}^n$$

$\widehat{B}(0)$ の定義より、 $c_i(0) = \mathbf{e}_i$ ($\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbb{Z}^n の標準基底) である。ただし、 \mathbf{e}_i は行ベクトルである。

$\widehat{B}(t)$ は次のように表される。

$$\widehat{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) & C(t) \\ -C(t)^t & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

例 3.8. 例 3.5 の framed quiver \widehat{Q} の、反対称行列 \widehat{B} は右の行列である。



定理 3.9 (Fomin, Zelevinsky [FZ4]). 各 c-vector は零ベクトルではなく、 \mathbb{N}^n or $(-\mathbb{N})^n$ 上にある。

§3.3 green and red

quiver に frame を付けたことにより、元の quiver Q の頂点に新たに情報が加えられる。framed quiver の元の頂点に対して、frozen vertices が sink か source かによって green (resp. red) と名前を付け、その頂点に関する mutation や mutation sequence に対しても同様に green (resp. red) を紐づける。

定義 3.10. $c_v(t) \in \mathbb{N}^n$ (resp. $-c_v(t) \in \mathbb{N}^n$) であるとき、 $Q(t)$ の頂点 v は **green** (resp. **red**) と呼ばれる。

$c_v(0) = \mathbf{e}_v$ より initial quiver $\widehat{Q}(0)$ のどの頂点も green である。

定義 3.11. framed quiver \widehat{Q} に mutation sequence $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ で mutation したと仮定する。 $\widehat{Q}(t-1)$ ($t = 1, 2, \dots, T$) 上の mutation vertex m_t が green (resp. red) ならば、mutation

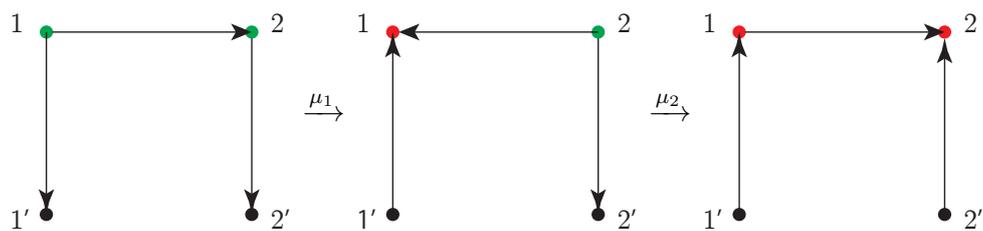
$$\mu_{m_t} : \widehat{Q}(t-1) \rightarrow \widehat{Q}(t)$$

を **green** (resp. **red**) **mutation** と言う。さらに μ_{m_t} の符号が以下で定義される。

$$\varepsilon_t = \begin{cases} +1 & (\mu_{m_t} \text{ が green のとき}) \\ -1 & (\mu_{m_t} \text{ が red のとき}) \end{cases}$$

定義 3.12. mutation sequence $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ において、任意の頂点 m_t ($1 \leq t \leq T$) が green ならば、 \mathbf{m} は **green sequence** と呼ばれ、さらに final quiver $Q(T)$ の頂点がすべて red なら \mathbf{m} を **maximal green sequence** と呼ぶ。以降 maximal green sequence を MGS とも表記する。

例 3.13. quiver $1 \rightarrow 2$ において $\mathbf{m} = (1, 2)$ で mutation すると



よって \mathbf{m} は maximal green sequence である。

定義 3.14. quiver Q に mutation sequence $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ を作用させたもとで、final quiver $Q(T)$ のすべての頂点が red のとき、mutation sequence \mathbf{m} は **reddening** であるといい、その際の mutation loop を **reddening mutation loop** と呼ぶ。

注意 3.15. maximal green sequence はすべて reddening である。

第4章 分配級数

この章では、分配級数について述べる。分配関数は、統計熱力学などで用いられる関数で、ボルツマン分布の分母に現れる。ボルツマン分布とはあるエネルギー状態をとる分子数の分布のことである。つまり、分配関数とは分子全体を見渡した時に、どの程度の温度範囲に分布が広がっているかの目安になる量を与えるものである。分配級数における、係数は物理的な不変量に対応することが知られている。Kato と Terashima [KT1, KT2] は quiver の muatuin sequence の組み合わせデータのみを用いて、物理における分配関数のような重要な量を取り出せないかという動機のもとで分配級数を導入した。

§4.1 分配級数の定義

Q を頂点 $1, 2, \dots, n$ をもつ quiver, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ を Q の mutation sequence とする。mutation sequence の分配級数は s 変数 $\{s_i\}$, k 変数 $\{k_t\}$, 及び k^\vee 変数 $\{k_t^\vee\}$ を用いて定義される。これらの変数は次のように定義される。

定義 4.1 (Kato and Terashima [KT1, Section 3.1]). s 変数 $\{s_i\}$, k 変数 $\{k_t\}$, 及び k^\vee 変数 $\{k_t^\vee\}$ の族を次のルールで導入する。

- initial s 変数 s_v を initial quiver Q の各頂点 v に割り当てる。
- 頂点 v で mutation するたびに v に関連付けられた「新しい」 s 変数を追加する。同じ頂点に付けられた s 変数を区別するために、 s_v, s'_v, s''_v, \dots と書く。
- k_t と k_t^\vee を m_t での mutation に次のように関連づける。

s 変数 $\{s_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) を備えた quiver $Q(t-1)$ が頂点 $v = m_t$ で mutation し $Q(t)$ が得られたと仮定する。そのとき k, s 変数は以下を満たす必要がある。

$$k_t = \begin{cases} s_v + s'_v - \sum_{a \rightarrow v} s_a & (\mu_v \text{ が green, つまり } \varepsilon_t = 1 \text{ のとき}) \\ \sum_{v \rightarrow b} s_b - (s_v + s'_v) & (\mu_v \text{ が red, つまり } \varepsilon_t = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで、 s'_v は mutation した頂点 v に付け加えた新しい s 変数であり、和は $Q(t-1)$ のすべての矢になる。

同様に k^\vee, s 変数は以下を満たす。

$$k_t^\vee = \begin{cases} s_v + s'_v - \sum_{v \rightarrow b} s_b & (\mu_v \text{ が green, つまり } \varepsilon_t = 1 \text{ のとき}) \\ \sum_{a \rightarrow v} s_a - (s_v + s'_v) & (\mu_v \text{ が red, つまり } \varepsilon_t = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4.2)$$

- 2つの頂点が境界条件によって同一視される場合, 対応する s 変数も同一視される。

注意 4.2. s 変数、 k 変数、 k^\vee 変数は独立ではない。実際

$$k_t^\vee - k_t = \sum_{a \rightarrow v} s_a - \sum_{v \rightarrow b} s_b \quad (4.3)$$

が各 mutation で成り立つ。

定義 4.3. 頂点 $v = m_t$ での mutation $\mu_{m_t} : Q(t-1) \rightarrow Q(t)$ の重み $W(m_t)$ を以下で定義する。

$$W(m_t) := \frac{q^{\frac{1}{2}\varepsilon_t k_t k_t^\vee}}{(q^{\varepsilon_t})_{k_t}} = \begin{cases} \frac{q^{\frac{1}{2}k_t k_t^\vee}}{(q)_{k_t}} & (\mu_v \text{ が green, つまり } \varepsilon_t = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{q^{-\frac{1}{2}k_t k_t^\vee}}{(q^{-1})_{k_t}} & (\mu_v \text{ が red, つまり } \varepsilon_t = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、 ε_t は μ_{m_t} の符号であり、 $k \in \mathbb{N}$ に対して $(q)_k := \prod_{i=1}^k (1 - q^i)$ である。

mutation μ_{m_t} の \mathbb{N}^n -grading を $k_t \alpha_t$ で定める。ただし、

$$\alpha_t := \varepsilon_t c_{m_t}(t-1) \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$$

は mutation が適用される頂点の (符号補正された) c-vector である。

線形関係 (定義 4.1(2)) を解いて s 変数を k 変数で表すことができる場合、mutation loop は**非縮退**と呼ばれる [KT1, Section 3.1]。このとき、 $k_t, k_t^\vee, W(m_t)$ の式を用いてすべての mutation の重み $\{W(m_t)\}$ を $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_t)$ の関数として表すことができる。

以下 mutation loop γ は非縮退と仮定する。このとき分配級数はつぎのように定義される。

定義 4.4 (Kato and Terashima [KT1, Section 3.1]). $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \psi)$ に関連付けられた (\mathbb{N}^n -grading の) **分配級数**を以下で定義する。

$$Z(\gamma) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T} \left(\prod_{t=1}^T W(m_t) \right) y^{\sum_{t=1}^T k_t \alpha_t}$$

ここで、 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_T)$ である。さらに、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_n$ に対して

$$y^\alpha = q^{-\frac{1}{2} \sum_{i < j} B_{ij} \alpha_i \alpha_j} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$$

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} = q^{+\frac{1}{2} \sum_{i < j} B_{ij} \alpha_i \alpha_j} y^\alpha$$

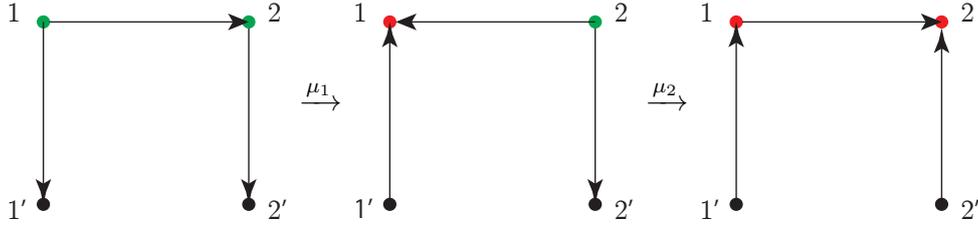
である。

注意 4.5 (Kato and Terashima [KT2, Remark 3.1]). 固定された $\beta \in \mathbb{N}^n$ に対して、

$$\beta = \sum_{t=1}^T k_t \alpha_t$$

を満たす $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_T) \in \mathbb{N}^T$ は有限個である。

例 4.6. 先の例 3.13 で考える。



より、

$$\gamma = (Q; \mathbf{m}, \psi) = (Q; (1, 2), \text{id})$$

である。

このとき k, k^\vee 変数は

$$\begin{aligned} k_1 &= s_1 + s'_1 - \sum_{a \rightarrow 1} s_a = s_1 + s'_1, & k_2 &= s_2 + s'_2 \\ k_1^\vee &= s_1 + s'_1 - \sum_{1 \rightarrow b} s_b = s_1 + s'_1 - s_2, & k_2^\vee &= s_2 + s'_2 - s_1 \end{aligned}$$

となる。 $\psi = \text{id}$ より、 $s_1 = s'_1, s_2 = s'_2$ なので、 $s_1 = \frac{1}{2}k_1, s_2 = \frac{1}{2}k_2$ となり、

$$k_1^\vee = k_1 - \frac{1}{2}k_2, \quad k_2^\vee = k_2 - \frac{1}{2}k_1$$

よって、

$$\begin{aligned} Z(\gamma) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \left(\prod_{t=1}^2 W(m_t) \right) y^{\sum_{t=1}^2 k_t \alpha_t} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \frac{q^{\frac{1}{2}(k_1 k_1^\vee + k_2 k_2^\vee)}}{(q)_{k_1} (q)_{k_2}} y^{\sum_{t=1}^2 k_t \alpha_t} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \frac{q^{\frac{1}{2}(k_1^2 - \frac{1}{2}k_1 k_2 + k_2^2 - \frac{1}{2}k_1 k_2)}}{(q)_{k_1} (q)_{k_2}} y^{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2} \frac{q^{\frac{1}{2}(k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)}}{(q)_{k_1} (q)_{k_2}} y^{(k_1, k_2)} \end{aligned}$$

ここで分子の q の指数は 2 次形式であり、以下の行列で表すことができる。

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

§4.2 分配級数と組み合わせドナルドソン・トーマス不変量との関係

Kato と Terashima [KT2, Theorem 6.1] の論文で分配級数は組み合わせドナルドソン・トーマス不変量と関係があることが示されている。ドナルドソン・トーマス不変量 (以下 DT 不変量と略記する) は、1998 年に S.Donaldson と R.Thomas [DT] によって導入され、組み合わせドナルドソン・トーマス不変量 (以下組み合わせ DT 不変量と略記する) は 2013 年に B.Keller [K2, K3] によって導入された。この節では組み合わせ DT 不変量の定義を簡単に説明する。

DT 不変量は Kirillov [Ki] によって定義された quantum dilogarithm と密接に関係がある。Kato と Terashima [KT2, Theorem 6.1] は quantum dilogarithm に基づいて quantum dilogarithms series を新たに定義した。

定義 4.7 (Kato and Terashima [KT2, Section 5]). quantum dilogarithms series を以下で定義する。

$$\mathbb{E}(y; q) := 1 + \frac{q^{1/2}}{q-1}y + \cdots + \frac{q^{n^2/2}}{(q^n-1)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})}y^n + \cdots$$

これは次のようにも表される。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n/2}}{(q)^n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-\frac{1}{2}n^2}}{(q^{-1})^n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + q^{n+\frac{1}{2}}y} \\ &= \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^k}{k(q^{-k/2}) - q^{k/2}} \right) \end{aligned}$$

各 mutation μ_{m_t} に quantum dilogarithms $\mathbb{E}(y^{\alpha_t}; q^{\varepsilon_t})$ を関連付ける。 ε_{m_t} は $\mu_{m_t} : Q(t-1) \rightarrow Q(t)$ の符号で、 $\alpha_t = \varepsilon_{m_t} c_{m_t}(t-1) \in \mathbb{N}^n$ は符号補正された c-vector である。

定義 4.8 (Kato and Terashima [KT2, Section 6]). Q を quiver、 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)$ を reddening mutation sequence とする。このとき組み合わせ DT 不変量が以下で定義される。

$$\mathbb{E}(Q, \mathbf{m}) := \mathbb{E}(y^{\alpha_1}, q^{\varepsilon_1}) \mathbb{E}(y^{\alpha_2}, q^{\varepsilon_2}) \cdots \mathbb{E}(y^{\alpha_T}, q^{\varepsilon_T}) \in \widehat{\mathbb{A}}_Q$$

ここで、 \mathbb{A}_Q は

$$\mathbb{A}_Q = R \langle y^\alpha, a \in \mathbb{N}^n \mid y^\alpha y^\beta = q^{\frac{1}{2}\langle \alpha, \beta \rangle} y^{\alpha+\beta} \rangle$$

で表される R 上の非可換結合代数で、 $\widehat{\mathbb{A}}_Q$ は \mathbb{N}^n -grading に関する完備化である。代数 $\widehat{\mathbb{A}}_Q$ と歪対称形式 \langle, \rangle は常に最初の quiver $Q = Q(0)$ に対して定義される。

さらに、組み合わせ DT 不変量と分配級数の間で次の関係が成り立つ。

定理 4.9 (Kato and Terashima [KT2, Theorem 6.1]). $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \psi)$ を、reddening mutation loop とする。このとき、分配級数 $Z(\gamma)$ と組み合わせドナルドソン・トーマス不変量 $\mathbb{E}(Q; \mathbf{m})$ の間に次の関係式が成り立つ。

$$Z(\gamma) = \overline{\mathbb{E}(Q; \mathbf{m})}$$

ここで、 $\overline{} : \mathbb{A}_Q \rightarrow \mathbb{A}_Q$ は以下で定義される \mathbb{Q} 代数反自己同型である。

$$y^\alpha \rightarrow y^\alpha, \quad q \rightarrow q^{-1}$$

本来ドナルドソン・トーマス不変量は、3次元カラビ・ヤウ多様体に対する不変量で、そのカラビ・ヤウ多様体上の安定な接続層を数え上げる不変量である。

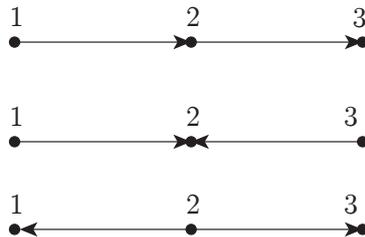
第5章 A型 quiver に関連する maximal green sequence と分配級数

この研究以前に Kato と Terashima [KT1, KT2] によって、 A_2 型、アフィン A_2 型、octahedral quiver などの分配級数が調べられている。

この章では論文の主結果である A 型やアフィン A 型の quiver に対して1つの MGS の取得方法や一般的な MGS の取得方法に関する予想、分配級数の分子に現れる q の指数部分の2次形式を表す対称行列の形に関する予想を述べる。その結果、 A 型やアフィン A 型の quiver の分配級数から得られる行列はアフィン A 型カルタン行列が現れたり、部分行列として A 型カルタン行列が現れることがわかる。

§5.1 A型 quiver の maximal green sequence と分配級数

頂点と矢が横一直線に並ぶような quiver のことを **A型 quiver** といい、頂点の個数が n 個の場合は A_n 型 quiver と呼ぶ。例えば以下の3つの quiver はいずれも A_3 型である。



A 型 quiver の MGS を求めるために、次の補題が有効である。

補題 5.1 (Cormier, Dillery, Resh, Serhiyenko, Whelan [CDRSW]). $Q = (Q_0, Q_1)$ を非環状 quiver(サイクルを持たない quiver) とする。このとき Q の source の頂点の列 (i_1, i_2, \dots, i_n) は MGS $\mathbf{m} = (i_1, \dots, i_n)$ を生成する。ここで n は quiver Q の頂点の数である。

例 5.2. 補題 5.1 を適用すると、

(i)



の MGS として $\mathbf{m} = (1, 2, 3)$ が見つかる。

(ii)



の MGS として $\mathbf{m} = (1, 3, 2), (3, 1, 2)$ が見つかる。

(iii)



の MGS として $\mathbf{m} = (2, 1, 3), (2, 3, 1)$ が見つかる。このように MGS は一意的に決まらない。

三角形分割で表す事ができる 3-cycle 構造を持つ quiver についての MGS の取得方法は [CDRSW] で示されている。その結果を述べるために補題を準備する。

補題 5.3 (Cormier, Dillery, Resh, Serhiyenko, Whelan [CDRSW, Lemma 2.14]). 次の条件が成り立つような、ある quiver Q に対して、 $Q' \in \text{Mut}(\widehat{Q})$ とする。ただし、 $\text{Mut}(\widehat{Q})$ は \widehat{Q} の mutation 同値類である。

- (1) C は Q の full subquiver であり、 \widehat{C} は \widehat{Q} の full subquiver である。
- (2) Q' は単一の矢 $i \rightarrow j$ で接続された full subquiver \widehat{C} および D で構成される。ここで、 $i \in C_0, j \in D_0$ (ここで、 C_0 は C の頂点集合、 D_0 は D の頂点集合とする)。

μ_c を C の maximal green sequence とすると、以下が成り立つ。

1. C のすべての頂点は $\mu_c(Q')$ 上で red である。
2. $\mu_c(Q')$ は単一の矢 $i \rightarrow x$ で接続された 2 つの full subquiver $\mu_c(\widehat{C})$ と D で構成される。ここで、 x は C_0 の一意の頂点であり、矢 $i' \rightarrow x$ は frozen vertex i' から始まるものである。

定義 5.4. 2 つの異なる 3-cycle に属する頂点を **共有頂点**、1 つの 3-cycle にのみ属する頂点を **非共有頂点** と呼ぶ。さらに、非共有頂点 l から共有頂点への矢が存在する頂点を **leader**、非共有頂点 f からリーダーへの矢が存在する頂点を **follower** と呼ぶ。

定義 5.5. R を単一の 3-cycle からなる Q の full subquiver とする。それを Q の最内領域と呼ぶ。 R の唯一の 3-cycle を T で表す。

定義 5.5 を満たす Q に対して、 $T \cap R_1 = \emptyset$ を満たすような Q の full subquiver R_1 を、 Q の **leader** と **follower** を含むすべての 3-cycle を含む和集合として定義する。それを Q の最外領域と呼ぶ。 R_1 のサイクルを $T_{1_1}, T_{1_2}, \dots, T_{1_n}$ と記す。ここで 2 番目の紐づけは任意である。サイクル T_{1_i} について、leader L_{1_i} と follower F_{1_i} にラベル付けする。

full subquiver R_2 をサイクル $T_{2_1}, T_{2_2}, \dots, T_{2_m}$ と

$$Q_2 := Q \setminus \{v \in R_1 \mid v \text{ は } R_1 \text{ の leader または follower}\}$$

の leader および follower の和集合として定義する。ここで、 $T \cap R_2 = \emptyset$ という制限が追加される。つまり R_2 を Q_2 の最外領域である。サイクル T_{2_i} に対して、leader L_{2_i} と follower F_{2_i} にラベルを付ける。 R_2 を Q の領域 2 と呼ぶ。

full subquiver R_i をサイクル T_{i_1}, \dots, T_{i_r} と

$$Q_i := Q_{i-1} \setminus \{v \in R_{i-1} \mid v \text{ は } R_{i-1} \text{ の leader または follower}\}$$

の leader および follower の和集合と定義する。ここで $T_m \cap R_i = \emptyset$ という制限が追加される。サイクル T_{i_j} に対して、 L_{i_j} と F_{i_j} にラベルを付ける。 Q の領域 i を R_i と呼ぶ。すべての $R_i \in Q$ に対して、 $m \geq i$ となる領域を R_m とする。構成方法により、 $T \cap R_m \neq \emptyset$ であることに注意。

次の定理により maximal green sequence を取得することができる。

定理 5.6 (3-cycle procedure). [Cormier, Dillery, Resh, Serhiyenko, Whelan [CDRSW, Theorem 5.12]] 次の手順は補題 5.3 を満たす 3-cycle が繋がった quiver Q の maximal green sequence を生成する。

- 1 R_1, R_2, \dots, R_m の構成方法にそって、 R_1, R_2, \dots, R_m を確立する。 R_m の頂点に $V_{m_1}, V_{m_2}, V_{m_3}$ のラベルをつける。この時点から \hat{Q} を考える。
- 2 すべての L_{1_i} で mutation する。この mutation sequence を μ_{L_1} と呼ぶ。
- 3 領域 R_i から R_{i+1} ($1 \leq i \leq m'$) に連続的に移動し、すべての領域 R_i のすべての頂点 R_i のすべての leader L_{ij} ($1 \leq j \leq n$) で mutation する。この R_i の mutation sequence を μ_{L_i} と呼ぶ。
- 4 任意の頂点から開始し、 R_m の頂点を mutation し、最初に mutation された頂点で再び mutation されるまで、 R_m の回りを環状に移動する。この mutation sequence を $\underline{\mu_{m'}}$ と書く。
- 5 すべての $T_{m'_j}$ に対して、 $F_{m'_j}$ で mutation し、次に $L_{m'_j}$ で mutation する。この mutation sequence を $\underline{\mu_{m'}}$ と書く。

6 領域 R_i から領域 R_{i+1} ($1 \leq i \leq m'$) に連続的に移動し、サイクル $T_{ij} \in R_i$ ごとに F_{ij} で mutation し、次に L_{ij} で mutation する。 $\underline{\mu}_i$ を R_i の mutation sequence と呼ぶ。

結果として得られる

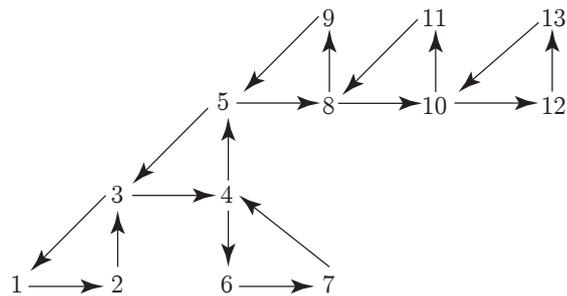
$$\mu_Q := \underline{\mu}_1 \underline{\mu}_2 \cdots \underline{\mu}_{m'-1} \underline{\mu}_{m'} \mu_{L_{m'-1}} \cdots \mu_{L_2} \mu_{L_1}$$

は、 Q の maximal green sequence である。

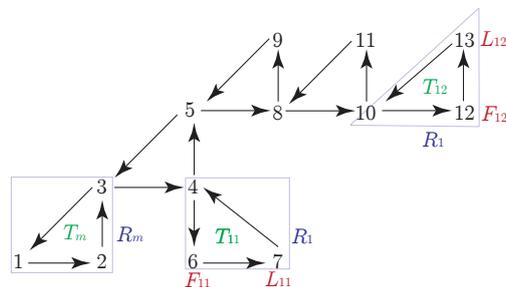
この作り方で得られる MGS は非縮退である。詳しく述べると次の定理が成り立つ。

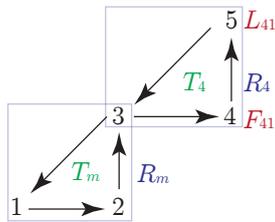
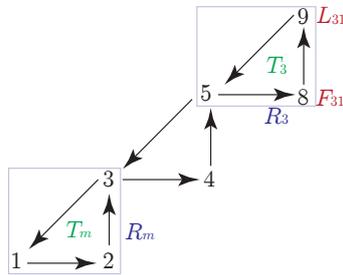
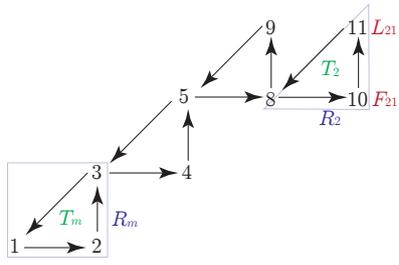
定理 5.7 (Cormier, Dillery, Resh, Serhiyenko, Whelan [CDRSW, Theorem 1.1]). 三角形分割で表すことのできる quiver の maximal green sequence の最小の長さは、 $n + t$ となる。ただし、 n は quiver の頂点の数、 t は 3-cycle の数である。

例 5.8 (cf.[CDRSW, Example 5.15.]). 以下の quiver に対しての maximal green sequence を定理 5.6 に従って求める。

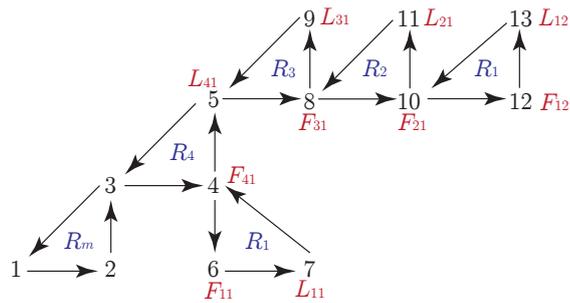


まず R, R_1, \dots の構成方法にしたがって quiver の頂点に名前をつけると



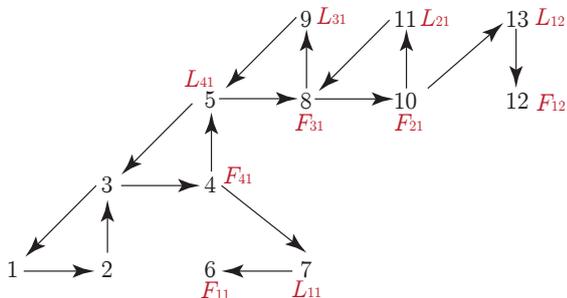


となり、以下のように頂点に記号を割り振る。

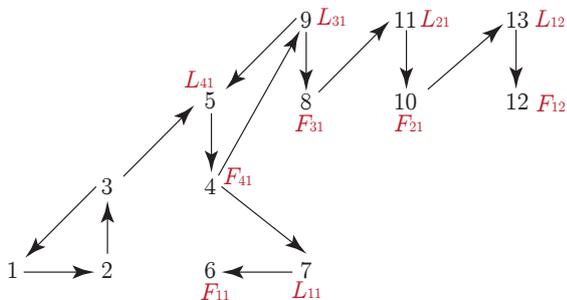


これに、定理 5.6 にしたがって mutation を施していく。

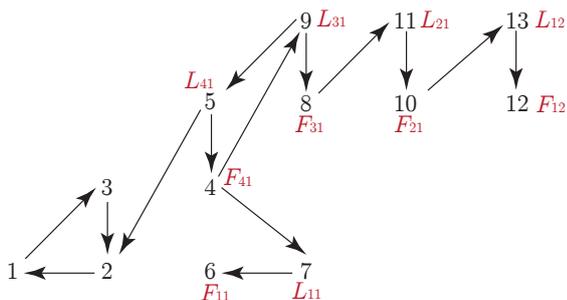
1. まず、すべての L_{1i} ($i = 1, 2$) で mutation する。(μ_7, μ_{13})



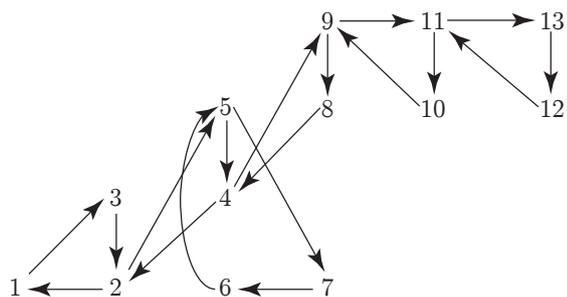
2. R_l から R_{l+1} ($l = 1, 2, 3$) へ移動し、 L で mutation する。(μ_{11}, μ_9, μ_5)



3. 頂点 123 からなる三角形に対して mutation する。($\mu_3, \mu_2, \mu_1, \mu_3$)



4. R_4 から環状に mutation していく。($\mu_4, \mu_5, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_6, \mu_7$)



この quiver はすべての頂点が red(\cdot : 補題 5.3) になっているので、

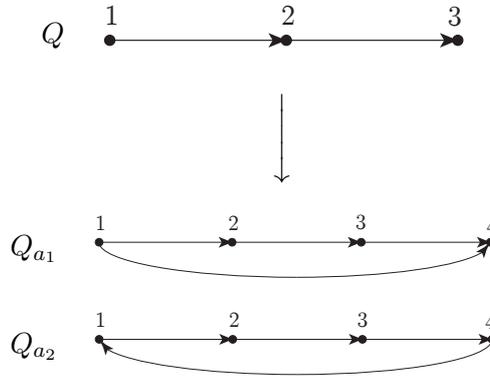
$$\mathbf{m} = (7, 13, 11, 9, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 5, 8, 910, 11, 12, 13, 6, 7)$$

は maximal green sequence で、長さは $19 = 13 + 6$ になっている。

§5.2 アフィン A 型 quiver に関連する MGS と分配級数

A_n 型 quiver に頂点を $n+1$ を加え、頂点 $1, n$ と頂点 $n+1$ を 1 本の矢でつなげた quiver をアフィン A_n 型 quiver と呼ぶ。アフィンの仕方は付け加える 1 本の矢の向きにより 2 つある。

例 5.9. 次の A_3 型 quiver Q をアフィン化すると、2 つの quiver Q_{a_1}, Q_{a_2} が得られる。



Kato と Terashima [KT2] ではサイクルのあるアフィン A_3 型 quiver などの MGS と分配級数を求めている。この論文ではこの 2 つの quiver を一般化した quiver の MGS や分配級数を求める。ここでの結果は Keller [K4] によって開発された「Quiver mutation in JavaScript and Java」を利用して得られたものである。

定理 5.10. アフィン A_n 型 quiver



に関して、mutation sequence $\mathbf{m} = (1, 2, \dots, n-1, n)$ は MGS であり、 $\psi = \text{id}$ である。

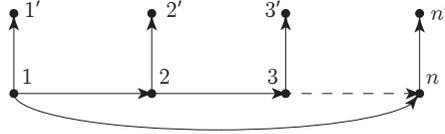
その分配級数は

$$Z(\gamma) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} \frac{q^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n k_i^2 - \sum_{l=1}^{n-1} k_l k_{l+1} - k_n k_1)}}{(q)_{k_1} \cdots (q)_{k_n}} y^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$$

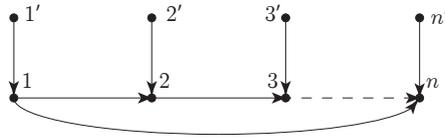
により与えられる。

(証明)

まず、mutation sequence が MGS であることを調べる。与えられた quiver に frame をつけると以下ようになる。

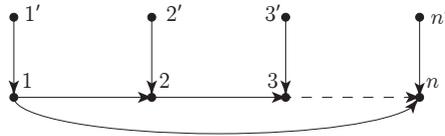


頂点 1 が source となっているので、1 で mutation する。すると頂点 2 が source となり、次に 3, 4, 5, ... と帰納的に行うことで、次の quiver を得る。



すべての頂点が $\text{red}(i' \rightarrow i)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) となっているので、mutation sequence $\mathbf{m} = (1, 2, \dots, n-1, n)$ は MGS である。

MGS $\mathbf{m} = (1, 2, \dots, n-1, n)$ によって得られた quiver は次のようになる。



よって境界条件は $\psi = \text{id}$ である。 $\gamma = (Q, \mathbf{m}, \psi)$ は mutation loop である。

次に $Z(\gamma)$ を計算する。 s 変数は

$$s_1, s_2, \dots, s_n, s'_1, s'_2, \dots, s'_n$$

であり、境界条件より以下が成り立つ。

$$s_1 = s'_1, s_2 = s'_2, \dots, s_n = s'_n$$

また k 変数は、(これらは quiver から定まるので)

$$k_1 = s_1 + s'_1 = 2s_1 \iff s_1 = \frac{1}{2}k_1$$

$$k_2 = s_2 + s'_2 = 2s_2 \iff s_2 = \frac{1}{2}k_2$$

⋮

$$k_n = s_n + s'_n = 2s_n \iff s_n = \frac{1}{2}k_n$$

k^\vee 変数は、

$$\begin{aligned} k_1^\vee &= s_1 + s'_1 - s_2 - s_n = k_1 - \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_n \\ k_2^\vee &= s_2 + s'_2 - s_3 - s'_1 = k_2 - \frac{1}{2}k_3 - \frac{1}{2}k_1 \\ &\vdots \\ k_n^\vee &= s_n + s'_n - s'_1 - s'_{n-1} = k_n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_{n-1} \end{aligned}$$

よって $Z(\gamma)$ の分子の q の指数部分は、

$$\frac{1}{2}(k_1^2 + \cdots + k_n^2 - k_1k_2 - k_2k_3 - \cdots - k_{n-1}k_n - k_nk_1)$$

また y の指数に関しては、

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, 0, \cdots, 0) + k_2(0, 1, 0, \cdots, 0) + \cdots + k_n(0, 0, 0, \cdots, 1) \\ = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \end{aligned}$$

よって、

$$Z(\gamma) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} \frac{q^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n k_i^2 - \sum_{l=1}^{n-1} k_l k_{l+1} - k_n k_1)}}{(q)_{k_1} \cdots (q)_{k_n}} y^{(k_1, k_2, \cdots, k_n)}$$

が成り立つ。 □

注意 5.11. 分子の q の指数は 2 次式であり、以下の n 次正方行列で表すことができる。

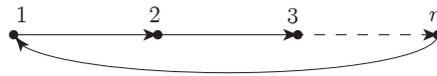
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

これはアフィン A_{n-1} 型カルタン行列である。

§5.3 n -cycle をもつアフィン A 型 quiver に関する MGS と分配級数

定理 5.10 では、cycle の無い quiver の MGS を調べたが、ここでは cycle のあるアフィン A 型 quiver に関する MGS に関して調べる。

定理 5.12. $n \geq 3$ とする。 n -cycle をもつアフィン A_n 型 quiver



において、mutation sequence

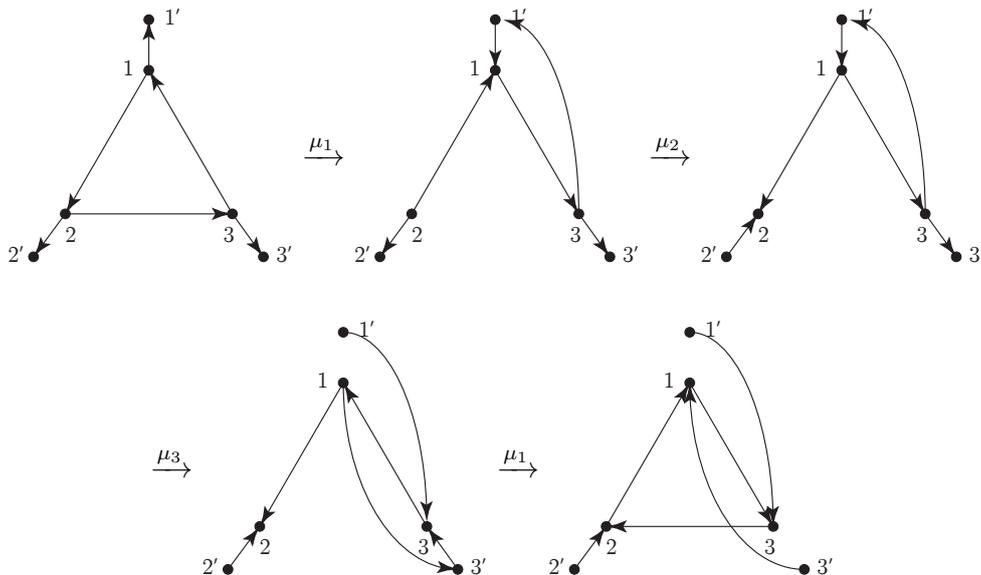
$$\mathbf{m} = (1, 2, \dots, n, n-2, n-3, \dots, 1)$$

は MGS であり*、この \mathbf{m} の境界条件は以下ようになる。

$$\psi = (1 \ n \ n-2 \ n-3 \ \dots \ 2)$$

(証明)

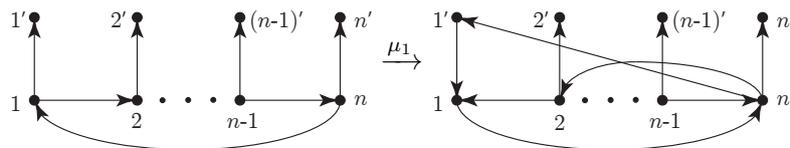
(1) $n = 3$ のとき



$\mathbf{m} = (1231)$ は maximal green sequence で $\psi = (1 \ 3)$ である。

(2) n 角形の場合

(i) まず 1 で mutation すると、これは明らかに green である。



(ii) 次に $2, \dots, n-2$ までの mutation において

*論文を提出後、井上玲先生からこの MGS は Bucher [B, Lemma 4.2] により得られていることを教わった。

表 1: それぞれの quiver における、頂点の本数

Q_0	$Q(2)$	$Q(3)$	$Q(4)$	\dots	$Q(n-3)$
1	2	2	2	\dots	2
2	4	3	3	\dots	3
3	4	4	3	\dots	3
4	3	4	4	\dots	3
5	3	3	4	\dots	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$n-2$	3	3	3	\dots	4
$n-1$	3	3	3	\dots	3
n	6	7	8	\dots	$n+1$
k	2	3	4	\dots	$n-3$

$k \in \{2, \dots, n-3\}$ で、 $Q(k)$ での頂点における矢の本数は

頂点 1 2 本

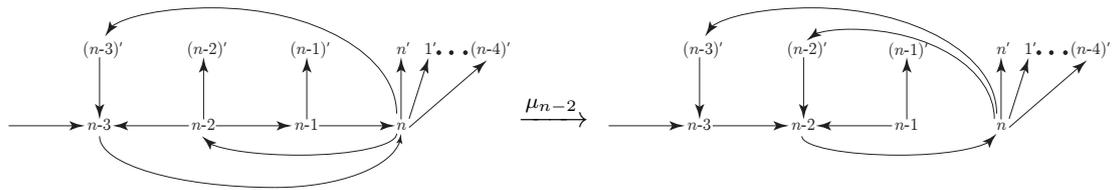
頂点 $k, k+1$ 4 本

頂点 n $k+4$ 本

その他の頂点 3 本

(iii) 次に $n-2$ での mutation を考える。

まず $n-3$ で mutation 後は左下図で $n-2$ で mutation すると右下図のようになる。(図は一部を抜粋して描いている。)



以上より、 $n-2$ での mutation 後の $Q(n-2)$ の頂点における矢の本数は以下のようになる。

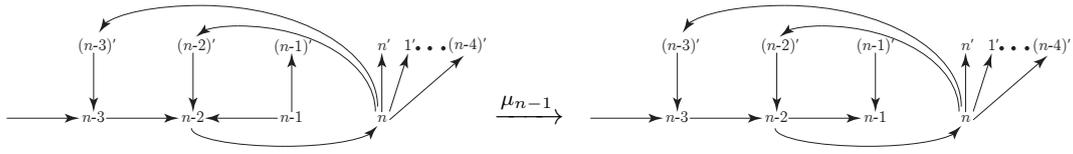
頂点 $1, n-1$ 2 本

頂点 $n-2$ 4 本

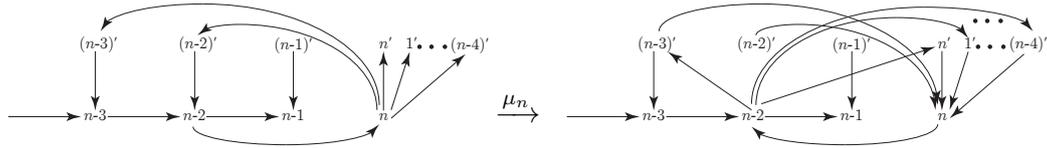
頂点 2 n 本

その他の頂点 3 本

(iv) 次に $n - 1$ で mutation すると右下図のようになる。



(v) さらに n で mutation すると右下図のようになり、



$Q(n)$ の頂点においての矢の本数は、

頂点 $1, n - 1$ 2本

頂点 $n - 2$ $n + 1$ 本

頂点 n n 本

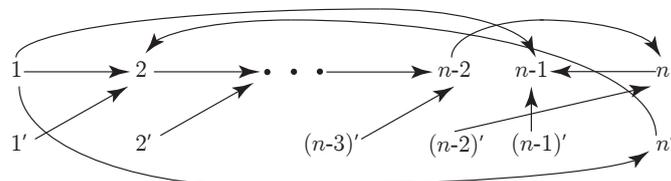
その他の頂点 3本

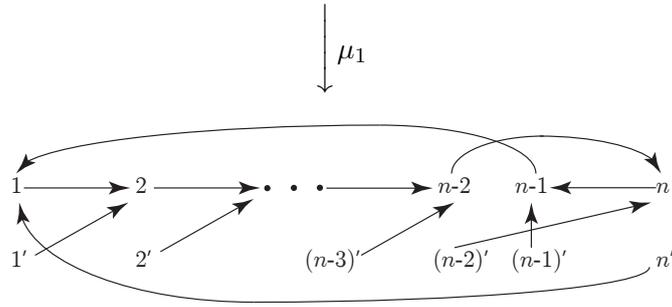
(vi) そして、 $n - 2, n - 3, \dots, 2$ での mutation を考える。

表 2: それぞれの quiver においての、頂点の本数

Q_0	$Q(n)$	$Q(n + 1)$	$Q(n + 2)$	\dots	$Q(2n - 4)$	$Q(2n - 3)$
1	2	2	2	\dots	2	3
2	3	3	3	\dots	5	5
3	3	3	3	\dots	6	5
4	3	3	3	\dots	3	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
$n - 3$	3	n	n	\dots	3	3
$n - 2$	$n + 1$	$n + 1$	3	\dots	3	3
$n - 1$	2	4	4	\dots	4	4
n	n	3	3	\dots	3	3

(vii) 最後に 1 で mutation すると、





よって $\mathbf{m} = (1 \ 2 \ \cdots \ n \ n-2 \ n-3 \ \cdots \ 1)$ は MGS で、境界条件は、

$$\psi = (1 \ n \ n-2 \ n-3 \ \cdots \ 2)$$

となる。 □

定理 5.12 の分配級数を定理 5.10 のように表したかったが、一般の場合において s 変数を k 変数で表すための計算が技術的に困難だった。しかしながら、分配級数の分子の q の 2 次形式を表す行列について、次の予想が得られた。後の命題 5.14 で示すように、 $n = 6$ まではこの予想は正しい。

予想 5.13. 定理 5.12 における分配級数の分子の指数の 2 次形式は以下の $(2n - 2)$ 次正方形行列で表される。

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^t & D \end{array} \right)$$

ここで、

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

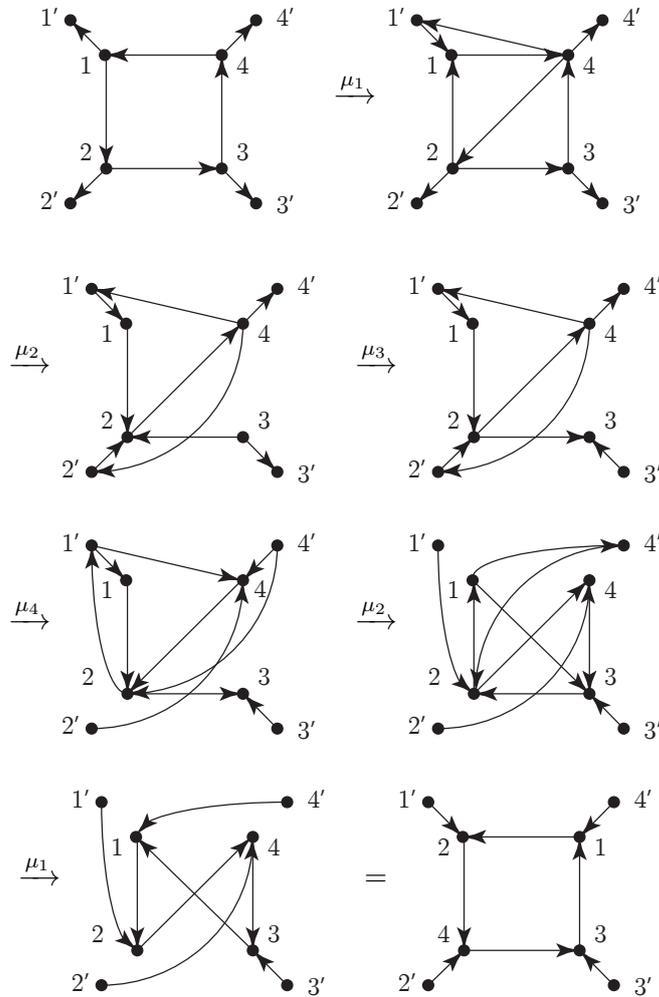
ただし、行列 B, C, D は $n-1$ 正方形行列で、 C^t は C の転置である。さらに、行列 B は A_{n-1} 型カルタン行列である。

命題 5.14. $n = 3, 4, 5, 6$ のとき予想 5.13 は成り立つ。

(証明)

$n = 4$ で、分配級数の分子の q の指数の 2 次形式を確認すると、

$\mathbf{m} = (123421)$ で



よって、 s 変数は、

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s'_1 s'_2, s'_3, s'_4, s''_1, s''_2$$

境界条件は、

$$\psi = (142)$$

なので、 s 変数は、

$$s''_1 = s_4, s''_2 = s_1, s'_3 = s_3, s'_4 = s_2$$

k 変数は、

$$k_1 = s_1 + s'_1 - s_4$$

$$k_2 = s_2 + s'_2 - s_4$$

$$k_3 = s_3 + s'_3 = 2s_3$$

$$k_4 = s_4 + s'_4 - s'_2 = s_4 + s_2 - s'_2$$

$$k_5 = s'_2 + s''_2 - s'_1 - s'_4 = s'_2 + s_1 - s'_1 - s_2$$

$$k_6 = s_1 + s''_1 - s''_2 = s'_1 + s_4 - s_1$$

よって、

$$s_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_4 + k_5)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(k_2 + k_4)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}k_3$$

$$s_4 = \frac{1}{2}(k_4 + k_5 + k_6)$$

$$s'_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_6)$$

$$s'_2 = \frac{1}{2}(k_2 + k_5 + k_6)$$

k^\vee 変数は、

$$k_1^\vee = s_1 + s'_1 - s_2 = k_1 + \frac{1}{2}(k_5 + k_6) - \frac{1}{2}k_2$$

$$k_2^\vee = s_2 + s'_2 - s'_1 - s_3 = k_2 + \frac{1}{2}(k_4 + k_5) - \frac{1}{2}(k_1 + k_3)$$

$$k_3^\vee = s_3 + s'_3 - s'_2 = k_3 - \frac{1}{2}(k_2 + k_5 + k_6)$$

$$k_4^\vee = s_4 + s'_4 = k_4 + \frac{1}{2}(k_2 + k_5 + k_6)$$

$$k_5^\vee = s'_2 + s''_2 - s'_3 = k_5 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2k_4 + k_6) - \frac{1}{2}k_3$$

$$k_6^\vee = s'_1 + s''_1 - s_2 = k_6 + \frac{1}{2}(k_1 + k_4 + k_5) - \frac{1}{2}k_3$$

よって

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(k_1k_1^\vee + k_2k_2^\vee + k_3k_3^\vee + k_4k_4^\vee + k_5k_5^\vee + k_6k_6^\vee) \\
&= \frac{1}{2}(k_1^2 + \frac{1}{2}(k_1k_5 + k_1k_6) - \frac{1}{2}k_1k_2 \\
&\quad + k_2^2 + \frac{1}{2}(k_2k_4 + k_2k_5) - \frac{1}{2}(k_1k_2 + k_2k_3) \\
&\quad + k_3^2 - \frac{1}{2}(k_2k_3 + k_3k_5 + k_3k_6) \\
&\quad + k_4^2 + \frac{1}{2}(k_2k_4 + k_4k_5 + k_4k_6) \\
&\quad + k_5^2 + \frac{1}{2}(k_1k_5 + k_2k_5 + k_4k_5 + k_5k_6) - \frac{1}{2}k_3k_5 \\
&\quad + k_6^2 + \frac{1}{2}(k_1k_6 + k_4k_6 + k_5k_6) - \frac{1}{2}k_3k_6) \\
&= \frac{1}{2}(k_1^2 + \cdots + k_6^2 - k_1k_2 + k_1k_5 + k_1k_6 \\
&\quad - k_2k_3 + k_2k_4 + k_2k_5 - k_3k_5 - k_3k_6 \\
&\quad + k_4k_5 + k_4k_6 + k_5k_6)
\end{aligned}$$

よって分配級数の分子の q の指数の 2 次形式は

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

同様にして $n = 3$ での分配級数の分子の q の指数の 2 次形式は

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$n = 6$ では、

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

となる。

□

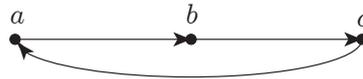
定理 5.12 では、頂点 $1, 2, \dots$ と順に mutation を行ったが、それ以外の順序でも n -cycle 構造をもつ quiver の MGS が求められないかを考え、複数の実験の結果、次の予想が得られた。実際、定理 5.12 は予想 5.15 の手順で得られる。

予想 5.15.



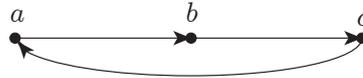
という quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ に関して、以下の手順で長さは $2n - 2$ の maximal green sequence を得る。長さ $2n - 2$ は、この quiver における最小の長さである。

1. $n - 3$ 回目の mutation で quiver 内に



という 3-cycle 構造を作る。 $(a, b, c \in Q_0$ で、すべて green vertex)

- 2.



に対して 3-cycle procedure を行う。

3. $n + 2$ 回目以降は green vertex で green mutation を行う。

この maximal green sequence の長さは $2n - 2$ であり、この quiver における最小の長さである。つまり非縮退である。

命題 5.16. 予想 5.15 において、 $n = 4, 5$ のとき最小の MGS の長さ $2n - 2$ が成り立つ。

(証明) green sequence の長さを l で現わす。

$n = 4$ のとき green sequence は以下である。

表 3: $n = 4$ のときの green sequence

$l=4$	5	6
1234	2	1
1242	1	3
	3	1
		2
1243	2	1
1323	4	3
1324	1	3
	3	1
1341	2	1
1342	1	3
	3	1
1412	3	4
1413	2	4
	4	1
		2
1421	3	4
1423	1	4
	4	1
1431	2	4
	4	1
		2
1432	1	4
	4	1
1434	1	2
	2	1
		4

この図は、 $l = 4$ のときの green sequence の一覧表であり、 $l = 5$ のときは $l = 4$ の値と $l = 5$ の値を組み合わせたものが green sequence、 $l = 6$ も同様にして読む。

$l = 4, 5$ のときどれも maximi green sequence でない。

$n = 5$ のときも同様にして最小性を調べることができる。

表 4: $n = 5$ のときの green sequence

$l=5$	6	7	8	$l=5$	6	7	8	$l=5$	6	7	8	$l=5$	6	7	8		
12345	3	2	1		4	1	5	13234	5	2	3		4	3	5		
12353	2	1	4			5	1	13235	2	3	4			5	1		
		4	1				2			4	2				3		
			3	12534	2	1	5				3	13514	2	3	5		
	4	2	1			5	1		4	2	3			5	1		
			3				2	13243	5	2	3				3		
			3		5	2	1	13245	2	1	3		5	1	2		
			2							3	1			2	1		
12354	3	2	1	12542	1	3	5			3	2	3			5		
12434	5	4	2			5	2	13252	1	3	2		13521	3	4	3	
12435	2	1	4				3			4	2			4	3	5	
		4	1		3	1	5				3				5	1	
		4	2			5	1				3					3	
12452	1	3	2				2		3	1	4					3	
		3	1			5	1			4	1		13523	1	4	3	
			2				3				3			4	1	3	
			4				2		4	1	2				3	1	
12453	2	1	4				3				3					5	
		4	1				1			2	1		13524	1	3	5	
		4	2				2				3				5	1	
12521	3	4	5				5			3	1					3	
	4	3	5	12543	2	1	5				2			3	1	5	
		5	2			5	1		13253	2	3	1			5	1	
			3				2				4				5	1	
12523	1	4	5		5	2	1				4	2			3	1	
	4	1	5	12545	2	1	3				3			13541	2	3	5
		5	1			3	1				3				5	1	
			2				2		13254	2	1	3				3	
12524	1	3	5		3	2	1				3	1			5	1	
		5	2				5				3	2	3		2	1	
			3				2		13424	3	5	4				5	
	3	1	5				5			5	3	4		13542	1	3	5
		5	1				2				5	1				5	1
			2				3				3						3
		5	1				2		13425	1	4	3			3	1	5
			3				3			4	1	3				5	1
			3				2				3	1				5	1
			3				1		13451	2	1	4				3	1
			2				5		13452	1	4	3		13545	1	2	1
			3				2			4	1	3			2	1	5
			2				5				3	1				5	1
12532	1	4	5				2		13512	3	4	3					3

$l=5$	6	7	8	
14234	5	4	2	
14235	2	1	4	
		4	1	
		4	2	1
14252	1	3	2	
	3	1	2	
		2	1	
			4	
14253	2	1	4	
		4	1	
		4	2	1
14323	4	5	4	
		5	3	1
			4	
			4	3
14324	3	4	5	
		5	3	
			4	
		5	1	3
		3	1	
			4	
14325	1	3	4	
		4	3	
		3	1	4
		4	1	
		4	1	3
		3	1	
			4	
14342	3	4	5	
		5	3	
			4	
		5	1	3
		3	1	
			4	
14345	1	2	1	
		2	1	3
		3	1	
			4	
14351	2	1	3	
			4	
		4	1	
		4	2	1

$l=5$	6	7	8	
14352	1	3	4	
		4	3	
		3	1	4
		4	1	
		4	1	3
		3	1	
			4	
14354	1	2	1	
		2	1	3
			3	1
			4	
14512	3	5	1	
14513	2	5	1	
		5	1	2
			4	
			2	1
			5	
14521	3	5	1	
14523	1	5	1	
		5	1	4
			4	1
14531	2	5	1	
		5	1	2
			4	
			2	1
			5	
14532	1	5	1	
		5	1	4
			4	1
14535	1	2	1	
			4	
			4	2
		2	1	4
			5	
		4	1	
			5	
		5	1	
			4	
		4	1	2
			2	1
			5	

$l=5$	6	7	8	
15123	4	2	5	
15124	2	3	2	
			5	
		5	1	
			3	
	3	2	5	
15132	3	4	3	
	4	3	5	
		5	1	
			3	
15134	2	3	5	
		5	1	
			3	
		5	1	2
			2	1
			5	
15142	3	4	5	
		5	1	
			4	
		5	1	3
			3	1
			4	
15143	2	4	5	
		5	1	
			4	
		4	2	4
			5	
		5	1	
			2	
		5	1	2
			4	
		2	1	
			4	
		4	1	
			2	
			5	
15145	1	2	3	
		3	2	
			4	
		2	1	3
			3	1
			4	
		3	1	2

$l=5$	6	7	8	
			4	
		2	1	
			4	
		4	1	
			2	
			5	
15213	4	2	5	
15214	2	3	2	
			5	
		5	1	
			3	
		3	2	5
15231	4	2	5	
15234	1	2	5	
		2	1	5
			5	1
15241	2	3	2	
			5	
		5	1	
			3	
		3	2	5
15242	1	3	2	
			5	
		5	1	
			3	
		3	1	2
			5	
			2	1
			5	
		5	1	
			2	
		5	1	3
			3	1
			2	
15243	1	2	5	
		2	1	5
			5	1
15312	3	4	3	
		4	3	5
			5	1
			3	
15314	2	3	5	
		5	1	

$l=5$	6	7	8
			3
	5	1	2
		2	1
			5
15321	3	4	3
	4	3	5
		5	1
			3
15323	1	4	3
	4	1	3
		3	1
			5
15324	1	3	5
		5	1
			3
	3	1	5
		5	1
	5	1	3
		3	1
15341	2	3	5
		5	1
			3
	5	1	2
		2	1
			5
15342	1	3	5
		5	1
			3
	3	5	1
		1	5
	5	1	3
		3	1
15345	1	2	1
	2	1	5
		5	1
			3
15412	3	4	5
		5	1
			4
	5	1	3
		3	1
			4
15413	2	4	5

$l=5$	6	7	8
		5	1
			4
	4	2	4
			5
		5	1
			2
	5	1	2
			4
		2	1
			4
		4	1
			2
			5
15415	1	2	3
		3	2
			4
	2	1	3
		3	1
			4
	3	1	2
			4
		2	1
			4
		4	1
			2
			5
15421	3	4	5
		5	1
			4
	5	1	3
		3	1
			4
15423	1	4	5
		5	1
			4
	4	1	5
		5	1
		5	1
		4	1
			5
15425	1	3	4
	3	1	4
		4	1

$l=5$	6	7	8
			5
15431	2	4	5
		5	1
			4
	4	2	4
			5
		5	1
			2
	5	1	2
			4
		2	1
			4
		4	1
			2
15432	1	4	5
		5	1
			4
	4	1	5
		5	1
	5	1	4
		4	1
			5
15434	1	2	4
			5
		5	1
			2
	2	1	4
			5
		4	1
			5
		5	1
			4
	5	1	2
		2	1
			5
15435	1	2	4
		4	1
			2
	2	1	4
		4	1
			5
	4	1	2
			5

$l=5$	6	7	8
		2	1
			4
			5
		5	1
			2
15451	2	3	4
	3	2	4
		4	1
			2
15452	1	3	4
	3	1	4
		4	1
			5
15453	1	2	4
		4	1
			2
	2	1	4
		4	1
			5
	4	1	2
			5
		2	1
			4
		5	1
			2

§5.4 n -cycle をもつ A 型アフィン quiver のある拡張に関する maximal green sequence と分配級数

n -cycle 構造をもつアフィン A 型 quiver の矢 $1 \rightarrow 2$ に、さらにもう一本矢を加えた quiver の MGS の 1 つが次の定理で与えられる。

定理 5.17. $n \geq 3$ とする。quiver



において、mutation sequence

$$\mathbf{m} = (1, n, n-1, \dots, 3, 2, 4, 5, \dots, n, 1)$$

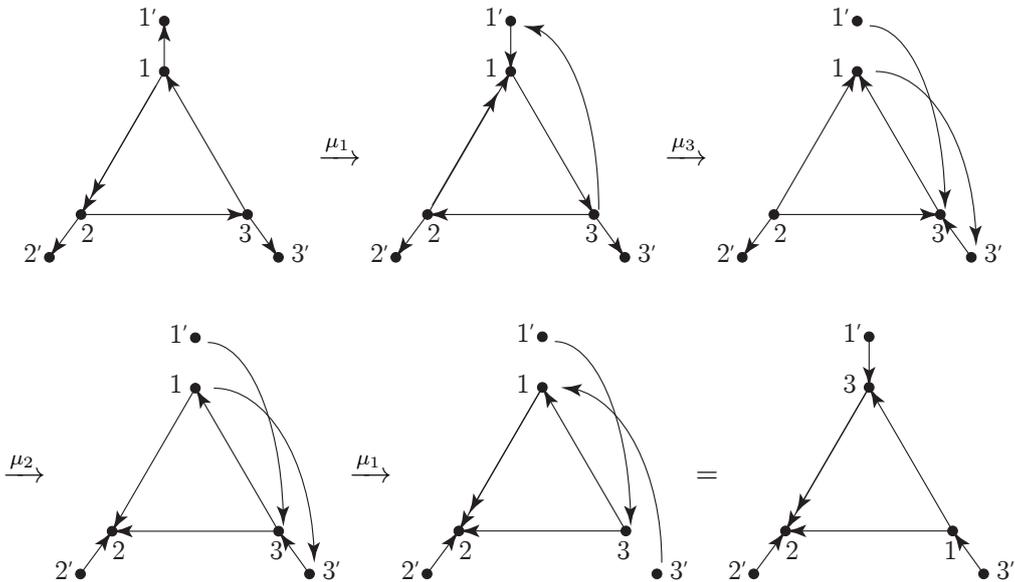
は MGS であり、この \mathbf{m} に対して境界条件は以下ようになる。

$$\psi = (1 \ n \ n-1 \ \dots \ 4 \ 3)$$

(証明)

帰納法で証明する。

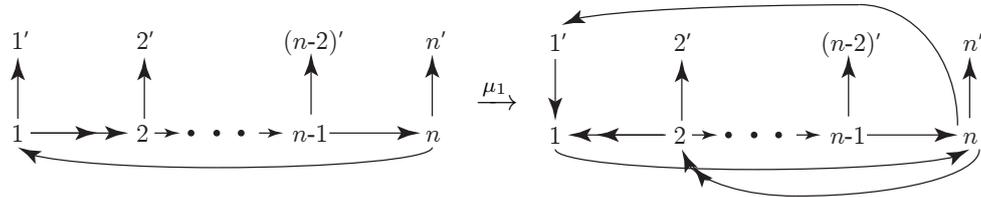
(1) $n = 3$ のとき $\mathbf{m} = (1, 3, 2, 1)$ で、mutation すると以下ようになる。



よって、 $\mathbf{m} = (1, 3, 2, 1)$ で $\psi = (1 \ 3)$

(2) n 角形で考える。

(i) まず 1 で mutation すると、これは明らかに green である。



(ii) 次に $n, n-1, \dots, 4, 3$ までの mutation において $k \in \{n, n-1, \dots, 4\}$ では

表 5: それぞれの quiver での、頂点における矢の本数

Q_0	$Q(2)$	$Q(3)$	$Q(4)$	\dots	$Q(n-2)$	$Q(n-1)$
1	2	2	2	\dots	2	2
n	6	3	3	\dots	3	3
$n-1$	7	7	3	\dots	3	3
$n-2$	3	8	8	\dots	3	3
$n-3$	3	3	9	\dots	3	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
4	3	3	3	\dots	$n-2$	3
3	3	3	3	\dots	$n-3$	$n-3$
2	5	5	5	\dots	5	3
k	n	$n-1$	$n-2$	\dots	5	4

頂点 1 2本

頂点 k $n-k+6$ 本

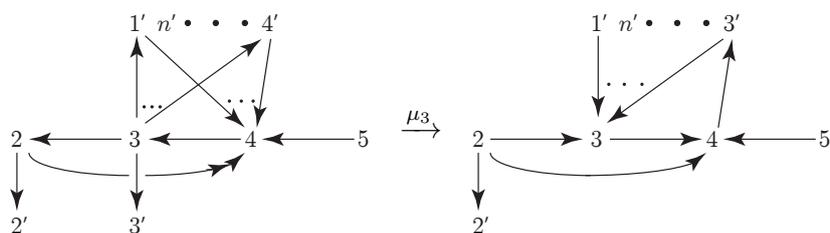
頂点 $k-1$ $n-k+7$ 本

頂点 2 5本

その他の頂点 3本

次に 3 での mutation を考える。

まず 4 で mutation 後は左下図で 3 で mutation すると右下図のようになる。(一部抜粋)



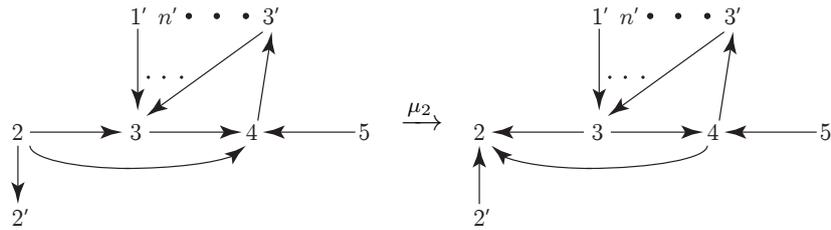
以上より、3での mutation 後の矢の本数は以下ようになる。

頂点 3 $n + 3$ 本

頂点 k $(n + 2) - (1 + 1 + (n - 4 + 1)) + 1 = 4$ 本

頂点 2 $4 - 1 = 3$ 本

(iii)2 で mutation すると、



(iv) 頂点 $4, 5, \dots, n - 1, n$ までの mutation を考える。一般に $l \in \{4, 5, \dots, n - 1\}$ では

表 6: それぞれの quiver での、頂点においての矢の本数

Q_0	$Q(n)$	$Q(n + 1)$	$Q(n + 2)$	$Q(n + 3)$	\dots	$Q(2n - 4)$
2	3	4	4	4	\dots	4
3	$n + 1$	$n + 2$	$n + 1$	n	\dots	7
4	4	4	3	3	\dots	3
5	3	4	4	3	\dots	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$n - 1$	3	3	3	3	\dots	4
n	3	3	3	3	\dots	4
1	2	2	2	2	\dots	2

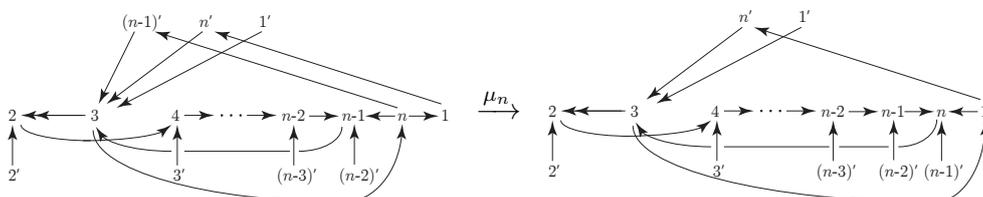
頂点 $2, l, l + 1$ 4 本

頂点 3 $n - l + 6$ 本

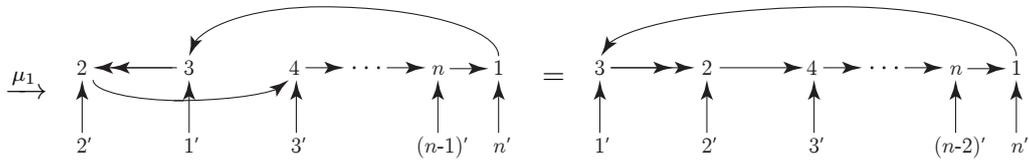
頂点 1 2 本

その他の頂点 3 本

n で mutation すると、



(v)1 で mutation すると、



よって、 $\mathbf{m} = (1 \ n \ n-1 \ \dots \ 3 \ 2 \ 4 \ 5 \ \dots \ n \ 1)$ は MGS で $\psi = (1 \ n \ n-1 \ \dots \ 4 \ 3)$ □

定理 5.17 の分配級数を定理 5.10 のように表したかったが、非常に複雑で一般化するのが難しかった。しかしながら、定理 5.12 のときと同様に、以下のように分配級数の分子の q の指数の 2 次形式を行列で表したときの形についての予想が得られた。さらに先の予想 5.13 と予想 5.18 の間にも関係がある。

予想 5.18. 定理 5.17 における分配級数の分子の q の指数の 2 次形式は $(2n-2)$ 正方行列

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{c|c} D & C' \\ \hline C'^t & B \end{array} \right)$$

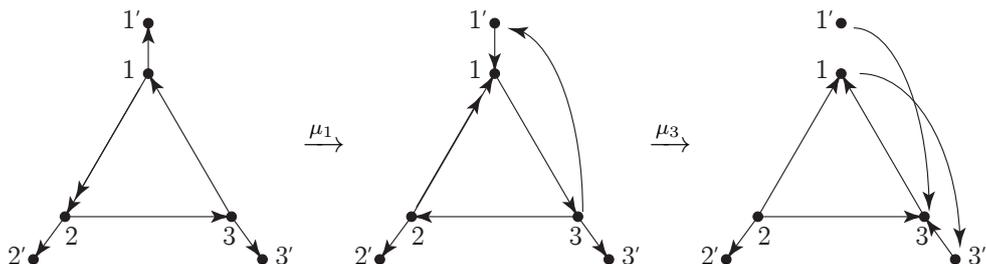
で表される。ここで、

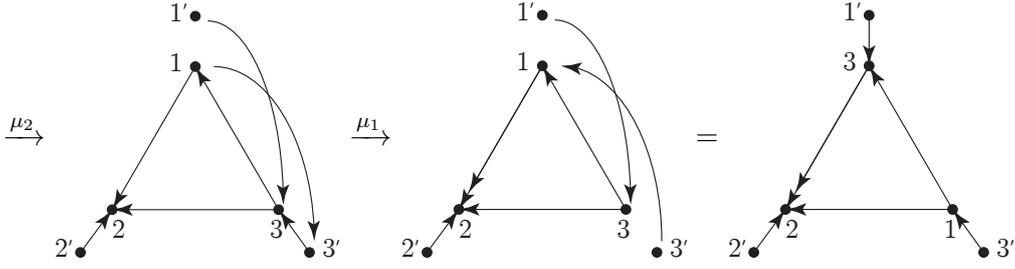
$$C' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 5.19. $n = 3, 4, 5$ のとき、予想 5.18 は成り立つ。

(証明)

$n = 3$ のとき、 $\mathbf{m} = (1 \ 3 \ 2 \ 1)$ で quiver は以下ようになる。





よって、 $\psi = (1\ 3)$ 。また、 S 変数は

$$s_1, s_2, s_3, s'_1, s'_2, s'_3, s''_1$$

で、境界条件 $\psi = (1\ 3)$ より、

$$s'_3 = s_1, s''_1 = s_3, s'_2 = s_2$$

を満たすことが要請される。

k 変数は、

$$k_1 = s_1 + s'_1 - s_3$$

$$k_2 = s_3 + s'_3 - s'_1 = s_3 + s_1 - s'_1$$

$$k_3 = s_2 + s'_2 = 2s_2$$

$$k_4 = s'_1 + s''_1 - s'_3 = s'_1 + s_3 - s_1$$

により与えられる。この連立方程式を解くと、

$$s_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad s_2 = \frac{1}{2}k_3$$

$$s_3 = \frac{1}{2}(k_2 + k_4), \quad s'_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_4)$$

さらに k^\vee 変数は、

$$k_1^\vee = s_1 + s'_1 - 2s_2 = k_1 + \frac{1}{2}(k_2 + k_4) - k_3$$

$$k_2^\vee = s_3 + s'_3 - s_2 = s_3 + s_1 - s_2 = k_2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_4) - \frac{1}{2}k_3$$

$$k_3^\vee = s_2 + s'_2 - s'_1 - s'_3 = 2s_2 - s'_1 - s_1 = k_3 - \frac{1}{2}(k_2 + k_4) - k_1$$

$$k_4^\vee = s'_1 + s''_1 - s_2 = s'_1 + s_3 - s_2 = k_4 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - \frac{1}{2}k_3$$

よって分配級数の分子の q の指数の 2 次形式は

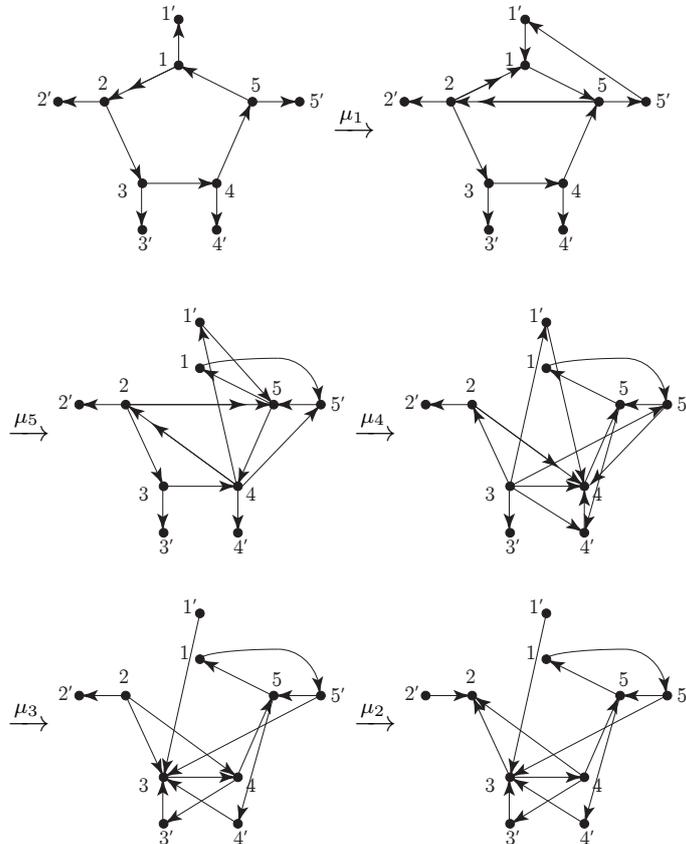
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(k_1 k_1^\vee + k_2 k_2^\vee + k_3 k_3^\vee + k_4 k_4^\vee) &= \frac{1}{2}((k_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 k_2 + k_1 k_4) - k_1 k_3) \\
 &\quad + (k_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 k_2 + k_2 k_4) - \frac{1}{2} k_2 k_3) \\
 &\quad + (k_3^2 - \frac{1}{2}(k_2 k_3 + k_3 k_4) - k_1 k_3) \\
 &\quad + (k_4^2 + \frac{1}{2}(k_1 k_4 + k_2 k_4) - \frac{1}{2} k_3 k_4)) \\
 &= \frac{1}{4}(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_4^2 + 2k_1 k_2 - 4k_1 k_3 \\
 &\quad + 2k_1 k_4 - 2k_2 k_3 + 2k_2 k_4 - 2k_3 k_4)
 \end{aligned}$$

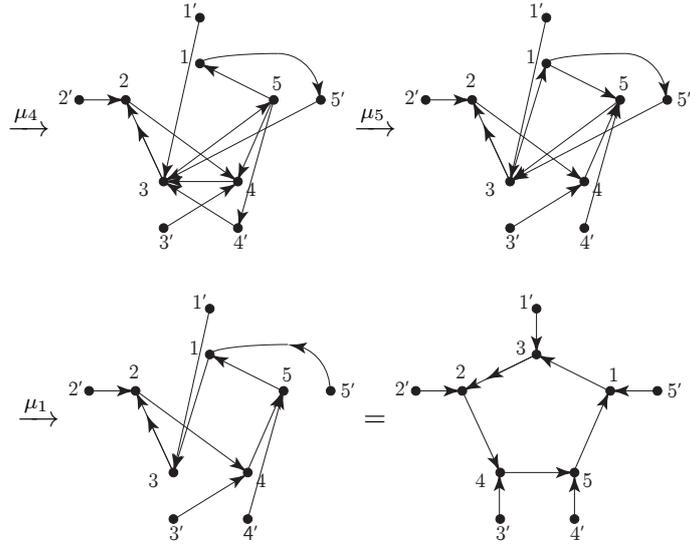
よって以下の対称行列が得られる。

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$n = 4$ のときも同様である。

$n = 5$ のとき、 $\mathbf{m} = (15432451)$ で mutation すると、





よって、 s 変数は、

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5, s''_1, s''_4, s''_5$$

境界条件は、

$$\psi = (3 \ 1 \ 5 \ 4)$$

k 変数は、

$$k_1 = s_1 + s'_1 - s_5$$

$$k_2 = s_5 + s'_5 - s'_1 - s_4$$

$$k_3 = s_4 + s'_4 - s'_5 - s_3$$

$$k_4 = s_3 + s'_3 - s'_4 = s_3 + s_1 - s'_4$$

$$k_5 = s_2 + s'_2 = 2s_2$$

$$k_6 = s'_4 + s''_4 - s'_3 = s'_4 + s_3 - s_1$$

$$k_7 = s'_5 + s''_5 - s'_3 = s'_5 + s_4 - s_1$$

$$k_8 = s'_1 + s''_1 - s'_3 = s'_1 + s_5 - s_1$$

よって、

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
s_2 &= \frac{1}{2}k_5 \\
s_3 &= \frac{1}{2}(k_4 + k_6) \\
s_4 &= \frac{1}{2}(k_3 + k_4 + k_7) \\
s_5 &= \frac{1}{2}(k_2 + k_3 + k_4 + k_8) \\
s'_1 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_8) \\
s'_4 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_6) \\
s'_5 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_7)
\end{aligned}$$

また、 k^\vee 変数は、

$$\begin{aligned}
k_1^\vee &= s_1 + s'_1 - 2s_2 = k_1 + \frac{1}{2}(k_2 + k_3 + k_4 + k_8) - k_5 \\
k_2^\vee &= s_5 + s'_5 - 2s_2 = k_2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_3 + k_4 + k_7 + k_8) - k_5 \\
k_3^\vee &= s_4 + s'_4 - 2s_2 = k_3 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_4 + k_6 + k_8) - k_5 \\
k_4^\vee &= s_3 + s'_3 - s_2 = k_4 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_6) - \frac{1}{2}k_5 \\
k_5^\vee &= s_2 + s'_2 - s'_3 - s'_4 = k_5 - (k_1 + k_2 + k_3) - \frac{1}{2}(k_4 + k_6) \\
k_6^\vee &= s'_4 + s''_4 - s'_2 - s'_5 = k_6 + \frac{1}{2}(k_3 + k_4) - \frac{1}{2}(k_5 + k_7) \\
k_7^\vee &= s'_5 + s''_5 - s''_4 - s'_1 = k_7 + \frac{1}{2}(k_2 + k_3) - \frac{1}{2}(k_6 + k_8) \\
k_8^\vee &= s'_1 + s''_1 - s''_5 = k_8 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) - \frac{1}{2}k_7
\end{aligned}$$

よって分配級数の分子の q の指数の 2 次形式は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(k_1k_1^\vee + k_2k_2^\vee + k_3k_3^\vee + k_4k_4^\vee + k_5k_5^\vee + k_6k_6^\vee + k_7k_7^\vee + k_8k_8^\vee) \\
&= \frac{1}{2}(k_1^2 + \frac{1}{2}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_1k_8) - k_1k_5 \\
&\quad + k_2^2 + \frac{1}{2}(k_1k_2 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_2k_7 + k_2k_8) - k_2k_5 \\
&\quad + k_3^2 + \frac{1}{2}(k_1k_3 + k_2k_3 + k_3k_4 + k_3k_6 + k_3k_7) - k_3k_5 \\
&\quad + k_4^2 + \frac{1}{2}(k_1k_4 + k_2k_4 + k_3k_4 + k_4k_6) - \frac{1}{2}k_4k_5 \\
&\quad + k_5^2 - \frac{1}{2}(k_1k_5 + k_2k_5 + k_3k_5) - \frac{1}{2}(k_4k_5 + k_5k_6) \\
&\quad + k_6^2 + \frac{1}{2}(k_3k_6 + k_4k_6) - \frac{1}{2}(k_5k_6 + k_6k_7) \\
&\quad + k_7^2 + \frac{1}{2}(k_2k_7 + k_3k_7) - \frac{1}{2}(k_6k_7 + k_7k_8) \\
&\quad + k_8^2 + \frac{1}{2}(k_1k_8 + k_2k_8) - \frac{1}{2}k_7k_8) \\
&= \frac{1}{2}(k_1^2 + \cdots + k_8^2 \\
&\quad + k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 - 2k_1k_5 + k_1k_8 \\
&\quad + k_2k_3 + k_2k_4 - 2k_2k_5 + k_2k_7 + k_2k_8 \\
&\quad + k_3k_4 - 2k_3k_5 + k_3k_6 + k_3k_7 \\
&\quad - k_4k_5 + k_4k_6 - k_5k_6 - k_6k_7 - k_7k_8)
\end{aligned}$$

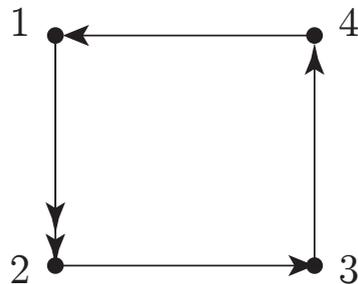
よって以下の対称行列が得られる。

$$\frac{1}{4} \left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-2 & -2 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{array} \right)$$

□

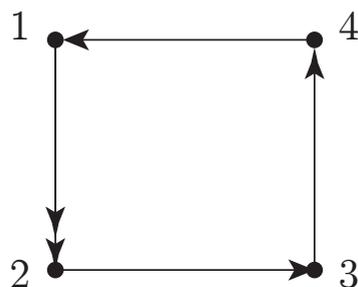
§5.5 アフィン A_4 型 quiver のある拡張に関する分配級数から得られた行列に関する考察

定理 5.17 での quiver で $n = 4$ の場合を考える。



このとき、mutation によって得られる分配級数に関する行列に関して次の命題が成り立つ。

命題 5.20.



において、mutation sequence

$$\mathbf{m} = (143241) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (341243)$$

$$\mathbf{m} = (134231) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (314213)$$

$$\mathbf{m} = (134231) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (431234)$$

で、1 と 3 を入れ替える変換が存在する。さらに分配級数の分子の q の 2 次形式を行列で表すと、それらの行列間では

$$(16)(25)(34)$$

という変換が存在する。

(証明)

mutation sequence が存在するかは、Keller [K4] によって調べることができる。それぞれ

の mutation sequence から得られる分配級数の分子の q の 2 次形式を行列で表したものは以下の 6 つである。

$$\mathbf{m} = (143241) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (134231) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (413214) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (341243) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (431234) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = (314213) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり、mutation sequence の間で、

$$\mathbf{m} = (143241) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (341243)$$

$$\mathbf{m} = (134231) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (314213)$$

$$\mathbf{m} = (134231) \xrightarrow{(13)} \mathbf{m} = (431234)$$

1 と 3 を入れ替える変換が存在する。さらにそれらの行列間では

$$(16)(25)(34)$$

という変換が存在する。 □

他にも $n = 5, 6, \dots$ でも同様の変換が存在するか、さらに一般の場合においても変換が存在するかを確認することが今後の課題である。

謝辞

この研究テーマに関して有益な助言を与えてくださいました東北大学の寺嶋郁二先生に感謝します。そして、2年間のセミナーで丁寧に、かつ熱心にご指導して下さった和久井道久先生に感謝します。

参考文献

- [A] M. Aigner, ‘Markov’s Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture’, Springer International Publishing, Swizerland, 2013.
- [BDP] T .Brüstle, G. Dupont, M. Pérotin, On maximal green sequences. Int. Math. Res. Not. **16** (2014), 4547-4586.
- [C] A. N. Chávez, On the c-vectors and g-vectors of the Markov cluster algebra, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **69** (2013), Article B69d.
- [CDRSW] E. Cormier, P. Dillery, J. Resh, K. Serhiyenko and J. Whelan, Minimal length maximal green sequences and triangulations of polygons, J. Algebr. Comb. **44** (2016), 905-930.
- [DT] S. K. Donaldson, R. P. Thomas, R. P. ‘Gauge theory in higher dimensions. The geometric universe’, Oxford Univ. Press, Oxford, (1998), 31-47.
- [FZ1] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497-529.

- [FZ2] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. II. Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003), 63-121.
- [FZ3] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells, *Duke Math. J.* **126** (2005), 1-52.
- [FZ4] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, *Compos. Math.* **143** (2007), 112-164.
- [G] Y. Gyoda, Positive integer solutions to $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 = 12x_1x_2x_3$, arXiv:2109.09639.
- [GM] Y. Gyoda and K. Matsushita, Generalization of Markov diophantine equation via generalized cluster algebra, arXiv:2201.10919.
- [Ga] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *manuscripta mathematica* **6** (1972), 71-103.
- [IJ] 井上玲 (神保道夫, 記述), 「クラスター代数入門」, 立教大学, 2016.
- [K1] B. Keller, On cluster theory and quantum dilogarithm identities, in : ‘Representations of Algebras and Related Topics’, (EMS Ser. Congr. Rep.) , edited by A.Skowroński and K.Yamagata, Eur. Math. Soc., Zürich , (2011), 85-116.
- [K2] B. Keller, Cluster algebras and derived categories, in :‘Derived Categories in Algebraic Geometry’, (EMS Ser. Congr Rep.), Eur. Math. soc., Zürich, (2012), 123-183.
- [K3] B. Keller, Quiver mutation and combinatorial DT-invariants. In: FPSAC ’13 The 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Paris, France, June, (2013), 24-28.
- [K4] B. Keller, Quiver mutation in JavaScript and Java, <https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/quivermutation/> .
- [Ki] A. N. Kirillov, Dilogarithm identities, quantum field theory, integrable models and beyond. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* **118** (1995), 61-142.

- [KT1] A. Kato and Y. Terashima, Quiver mutation loops and partition q -series, *Comm. Math. Phys.* **336** (2015), 811-830.
- [KT2] A. Kato and Y. Terashima, Quantum dilogarithms and partition q -series, *Comm. Math. Phys.* **338** (2015), 457-481.
- [M] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.* **15** (1879), 381-406.
- [B] E. Bucher, Maximal green sequences for cluster algebras associated to orientable surfaces with empty boundary, *Arnold Math. J.* **2** (2016), 487-510.