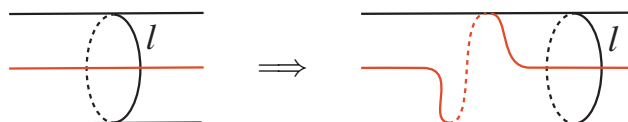


デーンツイストを用いた 閉曲面上の単純閉曲線のパズルとその解き方

黄倉 成利 (表現論研究室)

§1. Introduction

題名における閉曲面上の単純閉曲線のパズルというのは、1990年代に阿原一志先生が開発した Teruaki というパズルゲームのことである。これは向き付け可能な穴が2つある閉曲面 Σ_2 上に描かれた単純閉曲線を扱うパズルであり、トポロジーの考え方に基づいて作られている。そのため、単純閉曲線は Σ_2 上を連続的に自由に動かすことができる。連続的に自由に動かすことによって写り合う2つの単純閉曲線はフリーホモトピックと呼ばれ、フリーホモトピックな単純閉曲線は同じものとみなす。デーンとリコリッシュにより任意の2つの単純閉曲線は一方に対してデーンツイストと呼ばれる操作を何回か行うことで、もう一方の単純閉曲線に写すことができることが知られている。ここで、 Σ_2 上の単純閉曲線 l に沿った右回りのデーンツイストとは



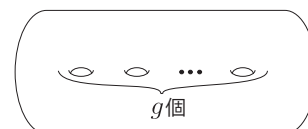
という閉曲面上の変形のことをいう (詳しい定義は §2 を参照)。Teruaki では、最初にスタートの単純閉曲線 c_s とゴールの単純閉曲線 c_g が与えられ、デーンツイストと呼ばれる操作を使って c_s と c_g に写すのであるが、そのときに操作した回数の少なさを競うゲームである。

本論文では Teruaki の基礎となっている数学的考えや理論を [1] に基づいて説明する。最後に応用として、3つの穴あき閉曲面 Σ_3 上への Teruaki の拡張と、 Σ_2 上の2つの単純閉曲線を同時に入れ替えるパズルを考察してその解法を与える。

§2. デーンツイスト・写像類群・複雑度

ここでは、Teruaki の数学的背景を説明するために必要な諸概念を述べる。

第二可算公理を満たす二次元多様体を**曲面**という。曲面が境界をもたず、かつ、コンパクトなとき**閉曲面**という。閉曲面には向き付け可能なものとそうでないものがあるが、この論文では、閉曲面といえば向き付け可能な閉曲面であるとする。向き付け可能で連結な閉曲面は \mathbb{R}^3 の中に右図のような閉曲面として実現される。この閉曲面を種数 g の閉曲面といい、 Σ_g で表す。



定義 2.1 曲面 Σ 上の曲線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ について

1. γ が単射な写像であるとき γ を **単純曲線** という。
2. γ の始点と終点が一致しているとき γ を **閉曲線** という。
3. 閉曲線 γ の $[0, 1)$ への制限 $\gamma|_{[0, 1)}$ が単射であるとき γ を **単純閉曲線** という。

定義 2.2 閉曲面上の単純閉曲線 c が **分離曲線** であるとは、閉曲面を c に沿って切ったときに閉曲面が2つの部分に分かれることをいう。 c に沿って閉曲面を切っても2つの部分に分かれないとき、 c は **非分離曲線** であるという。

例えば、トーラス Σ_1 上の図 2.1 のような単純閉曲線 c は分離曲線であり、 d は非分離曲線である。

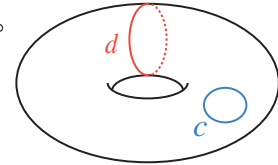


図 2.1

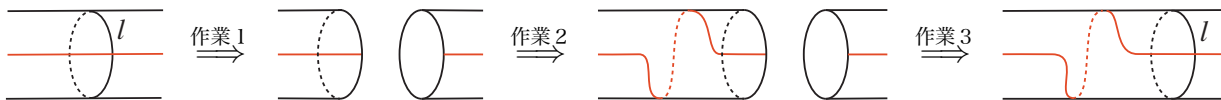
曲面上の単純閉曲線 l を用いて、曲面に次のような操作を施すことを考える。

作業 1 l に沿って曲面を切る。

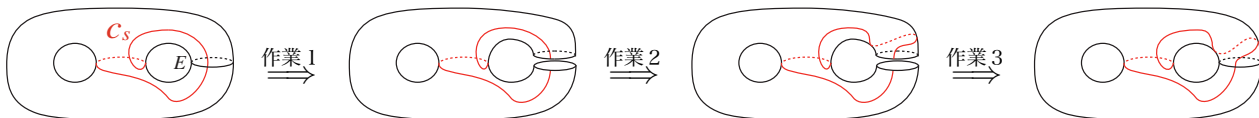
作業 2 切り口の一方を、切り口に沿って右回り（左回り）に 360 度ねじる。

作業 3 ねじったまま曲面を貼付ける。

この一連の操作を l に沿っての **右回り（左回り）のデーンツイスト** といい、右回りのデーンツイストを τ_l 、左回りのデーンツイストを τ_l^{-1} と書くことにする。このとき l の向きは考えない。下図は右回りのデーンツイストの様子を描いている。



l に沿っての右回りのデーンツイストを行う操作を $+l$ 、左回りのデーンツイストを行う操作を $-l$ と書く。例えば、下図左端の Σ_2 上の c_s に $+E$ という操作をすると右端の単純閉曲線が得られる。



連続的に動かした曲線も、同じとみたいのでアイソトピーという概念を入れる。

定義 2.3

1. 連続写像 $H : \Sigma_g \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$ であって、条件「各 $t \in [0, 1]$ に対して、 $H_t(x) := H(x, t)$ で定まる連続写像 $H_t : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は Σ_g の自己同相写像である」を満たすものを、 Σ_g の自己同相写像の **アイソトピー** という。

また、2つの単純閉曲線 ϕ, ψ に対して、 $H_0 = \phi, H_1 = \psi$ となるアイソトピー H が存在するとき、 ϕ と ψ は**アイソトピック**であるという。

2. 曲面 Σ 上の2つの曲線 $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ が**アンビエント・アイソトピック**であるとは、 $\gamma' = \phi \circ \gamma$ を満たす、恒等写像とアイソトピックな閉曲面 Σ の自己同相写像 ϕ が存在するときをいう。

デーンツイストは向きを保つ自己同相写像である。ここで、自己同相写像 $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が**向きを保つ**とは外から見て反時計回りに動く単純閉曲線 c の自己同相写像による像 $\phi(c)$ が外から見て反時計回りに動く閉曲線であるときをいう。

定義 2.4 閉曲面 Σ_g の向きを保つ自己同相写像のアイソトピー類のことを**写像類**といい、写像類全体の集合を \mathcal{M}_g と書く。このとき \mathcal{M}_g には、演算写像 $\circ : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ が $[\phi] \circ [\psi] = [\phi \circ \psi]$ により矛盾なく定義され、これは次の性質を満たす。

1. 演算 \circ は結合律を満たす。
2. 単位元 $[id_{\Sigma_g}] \in \mathcal{M}_g$ が存在する。
3. 全ての $[\phi] \in \mathcal{M}_g$ に対して、その逆元 $[\phi]^{-1} = [\phi^{-1}] \in \mathcal{M}_g$ が存在する。

したがって \mathcal{M}_g は群構造をもつ。この群 \mathcal{M}_g のことを Σ_g の**写像類群**という。写像類群の定義より、次の命題が分かる。

命題 2.5

1. 閉曲面 Σ_g 上の単純閉曲線 c と、 Σ_g の自己同相写像 $\phi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ に対して $[\tau_{\phi(c)}] = [\phi] \circ [\tau_c] \circ [\phi]^{-1}$.
2. 閉曲面 Σ_g 上の2つの単純閉曲線 c, c' がアンビエント・アイソトピックならば $[\tau_c] = [\tau_{c'}]$.

以下、アンビエント・アイソトピックな自己同相写像どうしを同一視する。また、記号が煩雑になるのを防ぐために $[\tau_c]$ を τ_c と略記する。

次に Σ_g の単純閉曲線の複雑度を導入する。

まず、 Σ_g を曲線 q_1, q_2, \dots, q_{g+1} によって $g+2$ 個の境界付き曲面 Y_0, Y_1, \dots, Y_{g+1} にわける (図 2.1)。円板と同相である Y_0, Y_{g+1} を除いた $Y_i (i = 1, 2, \dots, g)$ については、さらに図 2.2 のように曲線 m_i, l_i, b_i をとる。

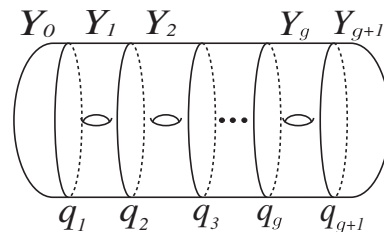


図 2.1

これらの曲線たちを基準曲線とよび、

$$R := \left(\bigcup_{i=1}^{g+1} q_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^g l_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^g m_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^g b_i \right)$$

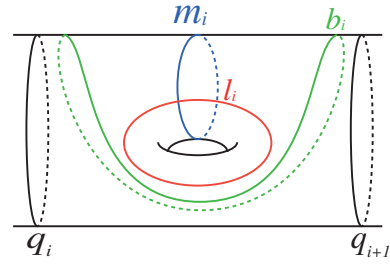


図 2.2

を基準曲線族と呼ぶ。

閉曲面上の任意の単純閉曲線 c に対して、 c と基準曲線族 R との交点の個数を c の**複雑度**という。ただし、必要ならば c を少し動かして c は R の曲線とは接しないとし、かつ、 l_i と m_i の交点を通らないものとしておく。こうすることで複雑度は有限の値になる。次が成り立つ [1,p.184]。

補題 2.6 写像類 ψ を

$$\psi = \tau_{l_{i+1}}^{-1} \circ \tau_{n_i}^{-1} \circ \tau_{l_i}^{-1} \circ \tau_{m'_i}^{-1} \circ \tau_{m_i}^{-1} \circ \tau_{l_i}^{-1} \circ \tau_{n_i}^{-1} \circ \tau_{l_{i+1}}^{-1}$$

と定めると、 ψ は $m'_{i+1} = \psi(m_{i+1})$ を満たす。

補題 2.7 曲面 Y_i において、写像類 ϕ を $\phi = (\tau_{m_i} \circ \tau_{l_i} \circ \tau_{m'_i})^4$ と定めると、等式 $\tau_{q_{i+1}} = \tau_{q_i}^{-1} \circ \phi$ が成り立つ。

§3. デーンとリコリッシュの定理

Teruaki を数学的に解くためにはデーンとリコリッシュにより証明された Σ_g 上の写像類群の構造に関する定理を用いるので、この節ではその定理を紹介する。

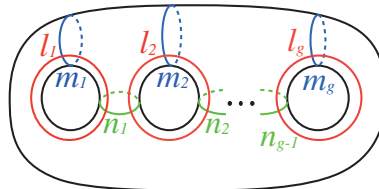


図 3.1

まず、 Σ_g 上の標準的な位置にある単純閉曲線に図 3.1 のように名前をつけておく。次のデーン-リコリッシュの定理により、群 M_g の生成元がデーンツイストで与えられることが分かる [1,p.105]。

定理 3.1 (デーン-リコリッシュの定理)

1. 任意の非分離曲線 c に対して、何回かデーンツイストを行って、 m_1 とアンビエント・アイソトピックな曲線に写すことができる。
2. 閉曲面の任意の自己同相写像は有限個のデーンツイストの積で書き表せる。

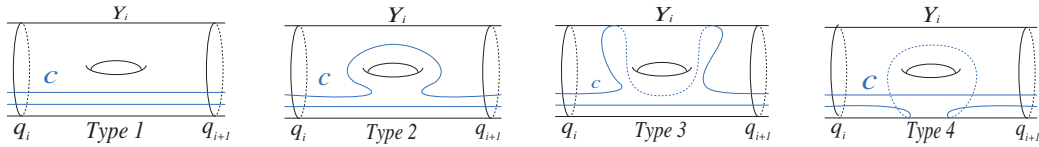
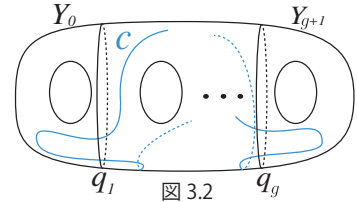
定理 3.1 の 2 に関しては、より詳しく次のことが分かる [1,p.174]。

定理 3.2 (リコリッシュの定理)

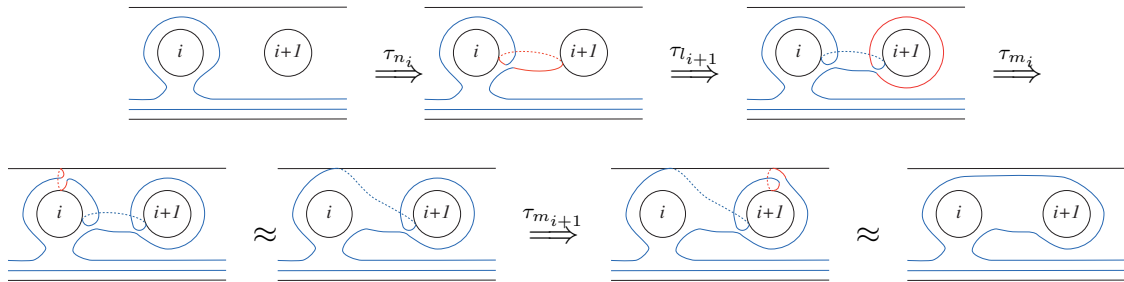
Σ_g 上の写像類群は図 3.1 にある $3g - 1$ 個の Σ_g 上の単純閉曲線に沿ってのデーンツイストたちで生成される。

定理 3.2 の証明の中で「リコリッシュの職人技」と呼ばれるテクニックが使われている。このテクニックの一部を次節以降において「てるあき」を解くときに使うので、ここで説明する。

閉曲面 Σ_g を基準曲線 q_1, q_2, \dots, q_g によって Y_0, Y_1, \dots, Y_{g+1} に分割したときに、閉曲面 Σ_g 上の単純閉曲線 c が Y_0, Y_{g+1} 上では図 3.2 であり、 $Y_i (i = 1, 2, \dots, g)$ 上では次図の Type 1 から Type 4 のいずれかであるとする。



このとき、 c を l_1 へと写すときに使うテクニックがリコリッシュの職人技である。この職人技を使うと、次の変形が行える。



§4. パズルゲーム「てるあき」とその解き方

パズルゲーム「てるあき」は、明治大学の阿原先生が視覚的に幾何学の問題を解けるように、と考へて作ったソフトウェアである。(以後、パズルゲーム「てるあき」を「てるあき」と書くことにする。)

「てるあき」では Σ_2 上に図 4.1 のような 5 つの単純閉曲線 A, B, C, D, E が用意されている。このとき、「てるあき」は次のルールのもとで、 Σ_2 上の与えられたスタートの単純閉曲線 c_s からゴールの単純閉曲線 c_g に写すゲームである。

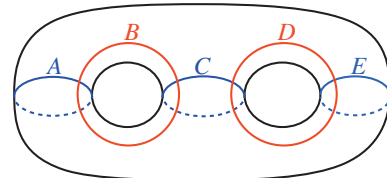
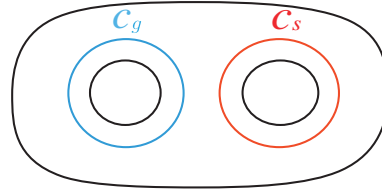


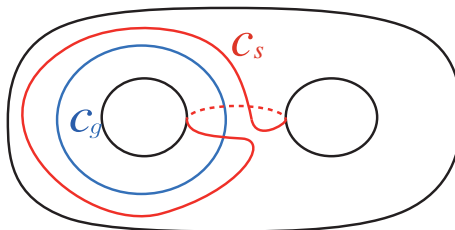
図 4.1

「てるあき」のルール

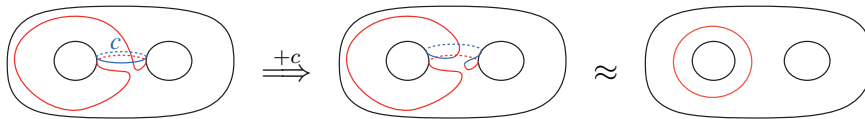
1. 5つの単純閉曲線 A, B, C, D, E に沿った
デーンツイストのみを使って単純閉曲線
を写すことができる。
2. c_s を最小回数で c_g に写すことを目指す。



例えば、図のように c_s と c_g が与えられたとき、 c_s を c_g に写すことを目指す。



そのためには $+C$ という操作を行えばよい。



今のは一例であるが、複雑度が1以上のとき一般の場合にもリコリッシュの定理より「てるあき」には（最小かどうかは分からないが）解があることが分かる。まずは $c_g = B$ の場合のときに c_s を c_g に写せることを説明する。その手順は以下の通りである ([1])。

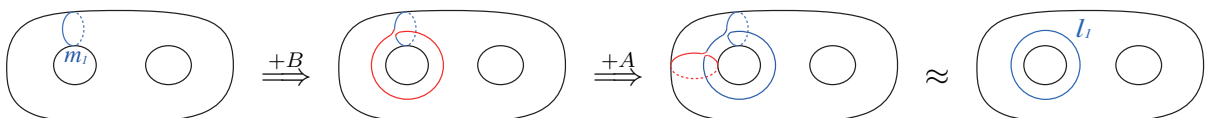
まず、スタートの単純閉曲線 c_s の複雑度が0か1か2以上であるかを考える。もし、 c_s の複雑度が0のときは c_s は分離曲線になってしまうので、 c_s を非分離曲線 $l_1 = c_g$ に写すことはできない。そこで複雑度が1以上のときを考える。

- 複雑度 = 1 のとき

c_s は、いずれかの非分離な基準曲線とアンビエント・アイソトピックであるから m_1, m_2, l_2 のいずれかである。

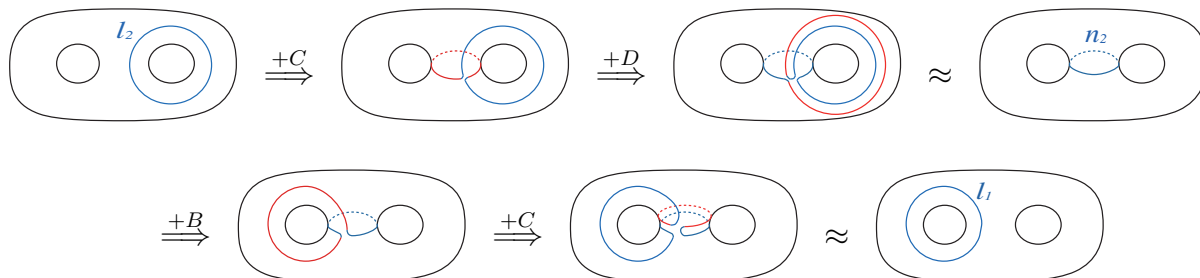
[i] $c_s = m_1$ のとき

“ $+B + A$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。



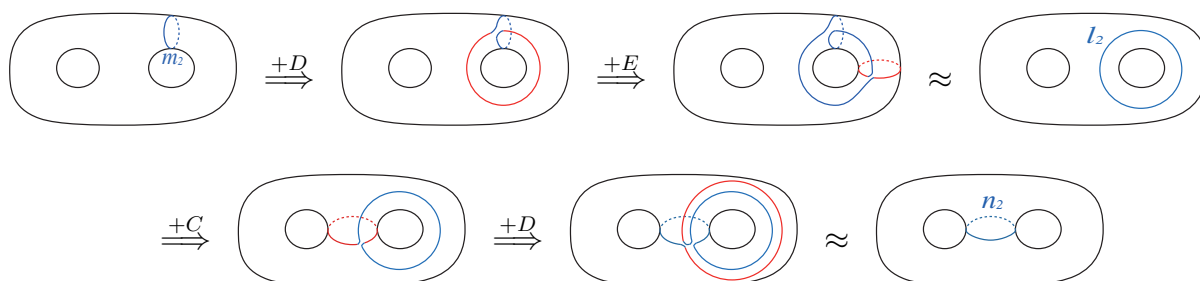
[ii] $c_s = l_2$ のとき

“ $+C + D + B + C$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。



[iii] $c_s = m_2$ のとき

“ $+D + E + C + D + B + C$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。



あとは [ii] と同じ操作で l_1 にすることができる。

上記のいずれの手順も最小手順である。次に複雑度が2以上のときを考えるが、実際には、このときの最小手順を求めることは非常に難しい。そのため、最小手順であるかはわからないが、複雑度が2以上のときの手順を示す。

● 複雑度が2以上のとき

c_s の複雑度が2以上のときは、リコリッシュの職人技などを使って複雑度を1まで減らしたあとに、ゴールの単純閉曲線に写す、という方針で解いていく。 c_s として次の3つの場合が考えられる。

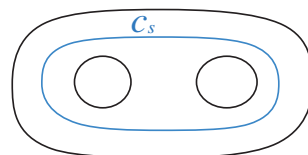
[i] c_s が片側に寄っている。

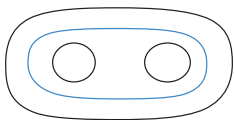
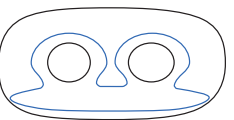
[ii] c_s が左右にまたがっている。

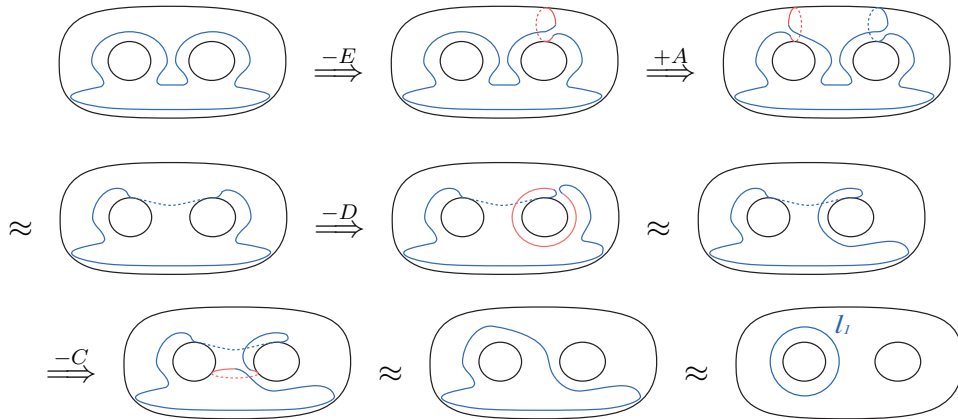
[iii] c_s が分離曲線に沿ってデーンツイストしている。

ここではページ数の都合上、[ii] の場合において c_s が右図の単純閉曲線であるときを考える。

「てるあき」の Level 1 の Stage 16 を使って説明する。



c_s を  \approx  のように変形する。この形は、「リコリッシュの職人技」の最後の形であるから「リコリッシュの職人技」を逆にたどる要領で “ $-E + A - D - C$ ” と操作すれば、 c_s を c_g に写すことができる。



以上のことから、 $(-E + A - D - C)(c_s) = l_1$ となるので、命題 2.5 より $\tau_{l_1} = (-E + A - D - C) \circ \tau_{c_s} \circ (-E + A - D - C)^{-1}$ となる。
従って、 $\tau_{c_s} = (-E + A - D - C)^{-1} \circ \tau_{l_1} \circ (-E + A - D - C)$ となる。

§5. 「てるあき」に関する考察

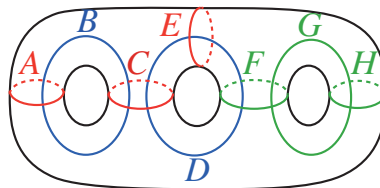
第 4 節では、 Σ_2 上の一つの非分離な単純閉曲線を別の非分離な単純閉曲線へ写せることを観察した。では、

[問題 A] Σ_2 と同様に Σ_3 上で「てるあき」を遊ぶことができるだろうか。

[問題 B] Σ_2 上で二つの非分離な単純閉曲線を同時に入れ替えることはできるだろうか。

最初に [問題 A] について考える。

スタートの単純閉曲線 c_s とゴールの単純閉曲線 c_g を与えて、 c_s を c_g に写すことは「てるあき」と同じでよいが、 Σ_3 上「てるあき」を遊ぶことができるようにするためには、次のように新しく「てるあき」のルールを定義し直す必要がある。まず、 Σ_2 上で準備した 5 つの単純閉曲線 A, B, C, D, E の代わりに Σ_3 上には 8 つの単純閉曲線 A, B, C, D, E, F, G, H を準備する。

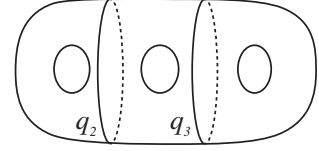


Σ_3 上の「てるあき」のルール

1. 上の8つの単純閉曲線に沿ったデーンツイストのみを使って単純閉曲線を写すことができる。

2. 最小の手順で c_s を c_g に写すことを目指す。

今回も $c_g = B$ としておく。いまから Σ_3 上で「てるあき」を遊ぶことができるということを確認していく。



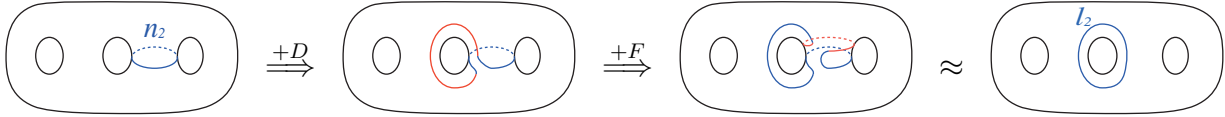
いま、 Σ_2 上では $c_s = m_1, n_1, l_2, m_2$ のときは c_s を c_g へ

写すことができ、 τ_{q_2} は A, B, C, D, E に沿ったデーンツイストを使って書くことができることは前節で確認した。これは Σ_3 上でもできる。

また、補題2.6と補題2.7より τ_{q_3} を A, B, C, D, E, F, G に沿ったデーンツイストを使って書くことができる。しかし、まだ $c_s = n_2, c_s = l_3, c_s = m_3$ のときに c_s を c_g へ写すことができることは確認できていないので実際に確かめてみる。

[i] $c_s = n_2$ のとき

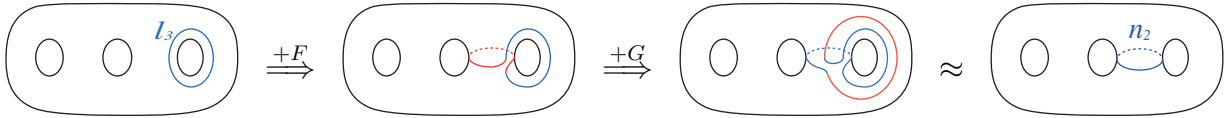
“ $+D+F$ ” という操作で c_s を l_2 に写すことができる。



l_2 を “ $+C+D+B+C$ ” という操作で l_1 へ写せることは分かっているので “ $+D+F+C+D+B+C$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。

[ii] $c_s = l_3$ のとき

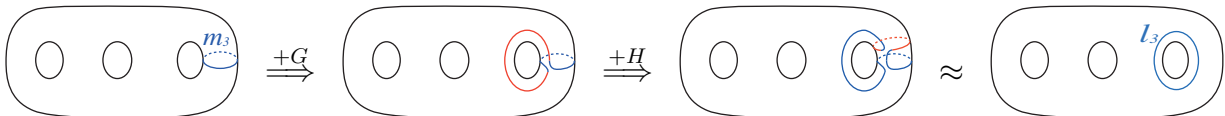
“ $+F+G$ ” という操作で c_s を n_2 に写すことができる。



n_2 を “ $+D+F+C+D+B+C$ ” という操作で l_1 へ写せることは分かっているので “ $+F+G+D+F+C+D+B+C$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。

[iii] $c_s = m_3$ のとき

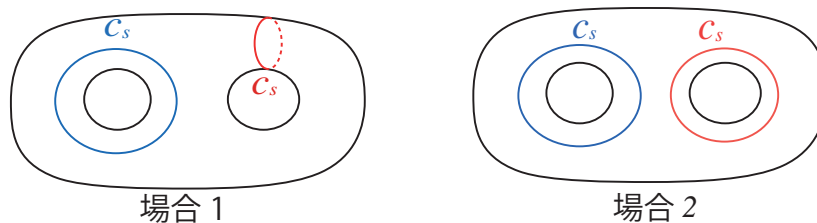
“ $+G+H$ ” という操作で c_s を l_3 に写すことができる。



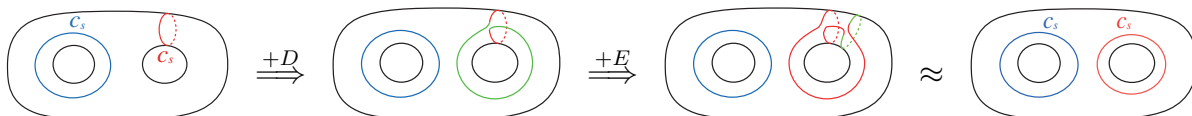
l_3 を “ $+F+G+D+F+C+D+B+C$ ” という操作で l_1 へ写せることは分かっているので “ $+G+H+F+G+D+F+C+D+B+C$ ” という操作で c_s を c_g に写すことができる。

c_s の複雑度が 1 の場合は今回示した手順が c_g に写す最小手順である。複雑度が 2 以上の場合にもデーとリコリッシュの定理により、上記のルールを使うことで Σ_3 上で「てるあき」を遊ぶことができる。なお、問題 A に関してはすでに、 Σ_g 上でのデーツイストを使った単純閉曲線 c の写り方を観察するためのソフトウェアが Teruaki の拡張版として東京大学の逆井卓也先生によって開発されている [2]。

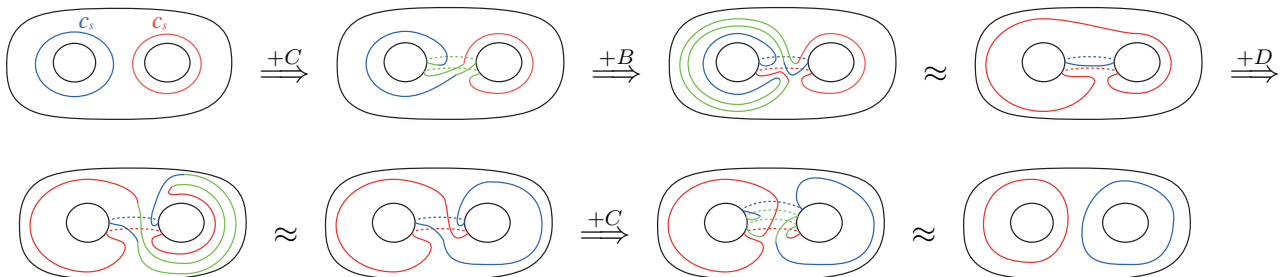
次に、問題 B について考える。まず、互いに交わらない簡単な二つの非分離な単純閉曲線を同時に入れ替えることができることを確かめる。この場合は場合 2 に帰着させることができる。



例えば、下図のように場合 1 は場合 2 にすることができる。



場合 2 のときは “ $+D + E + C - B + D + C$ ” という操作で互いの位置を入れ替えることができる。



このように、二つの簡単な非分離な単純閉曲線の位置は入れ替えることができることは分かったが二つの複雑な非分離な単純閉曲線の位置を入れ替えることができることは時間が足りなかったので確かめることができなかつた。これらを調べることは今後の課題である。

参考文献

- [1] 阿原一志, 逆井卓也 (共著) 『パズルゲームで楽しむ写像類群入門』日本評論社, 2013.
- [2] Teruaki for Mathematica 7,
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~sakasai/MCG/MCG.html>.