三葉結び目と 8 の字結び目の
ホワイトヘッドダブルの彩色数

藤井玲南　　(表現論研究室)

1 本の紐を用意する。その紐に好きなように結び目をつけて、端を結ぶ。そうしてできた輪っかを結び目と呼ぶ。連続変形で移りあう結び目同士は同じ結び目と考える。

結び目に色を塗ることで結び目を区別する方法がある。例えば、図 0.1 の結び目は 3 色を用いて塗ることができる。一方、3 色で塗り分けられない結び目も存在する。一般に、3 色に限らず、もっとたくさんの色をある条件のもとで塗り分けることができるだろうか、という問題も考えられる。

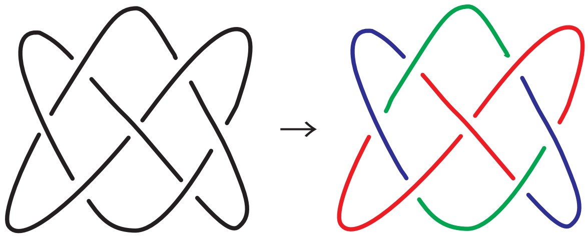


図 0.1

このような塗り分けによる区別は、普段は与えられた結び目に対してのみ考えるが、この論文ではもとの結び目とそのホワイトヘッドダブルに対して塗り分けを行う。ここで、ホワイトヘッドダブルとは、図 0.2 のように、もとの結び目を二重にして、一部を絡めることで作られる結び目のことである。

三葉結び目は 3 色で、8 の字結び目は 5 色で彩色可能であることが知られている [1]。本論文で考察した結果、三葉結び目のホワイトヘッドダブルは 11 色で彩色可能であることがわかった。また、8 の字結び目のホワイトヘッドダブルは何色用いても塗り分けできないことがわかった。彩色可能性を調べるにあたって、結び目の射影図から定義される合同式や行列、行列式の計算を用いた。

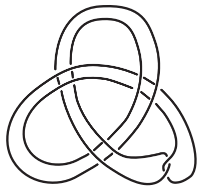


図 0.2

この論文を書くにあたって、主に [1] と [2] を参考にした。

§1. 結び目とライデマイスター移動

定義 1.1. 向きを持ついくつかの円周 S^1 を三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ像のことを**絡み目**という。また、ただ一つの円周の埋め込みとなっている絡み目を**結び目**という。

例えば、次のような結び目、絡み目がある。

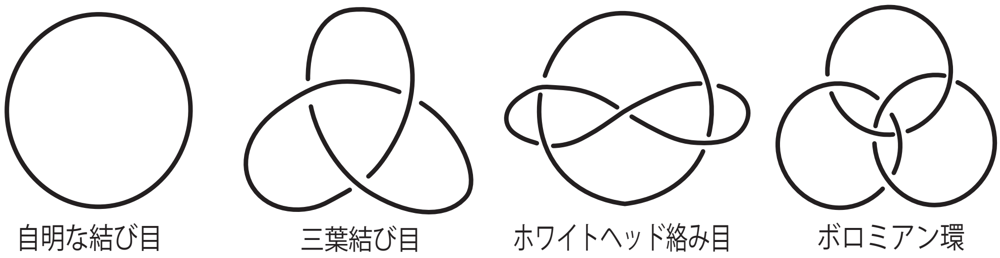


図 1.1

結び目を変形する際には、その一部を切り離さずにする。三次元空間内でのこのような変形を**全同位変形**という。全同位変形で移りあう結び目同士は同値な結び目である。

結び目や絡み目の二次元球面 S^2 への埋め込みであって、各二重点に上下の情報が与えられたもののことを**射影図**という。

全同位変形をすると、同じ結び目や絡み目でもいろんな射影図を描くことができる。

例えば、8 の字結び目の射影図は次のように、たくさんの射影図で表すことができる。

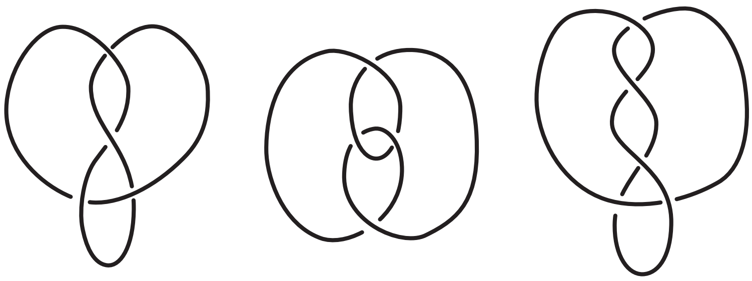


図 1.2

射影図において、紐が交わっているところを**交点**という。そして、結び目の射影図において隣接する下を通る交点間を結び、途中は上しか通らない部分のことを**弧**という。

例えば、図 1.1 の中の三葉結び目の射影図は交点と弧をそれぞれ 3 つずつ持っている (図 1.3 を参照)。

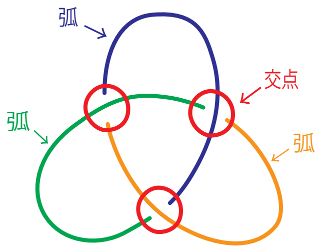


図 1.3

射影図の変形の中で、自分自身を横切る変形でないものを平面の同位変形という。この変形において、射影図の交点同士の関係を変えるような 3 つの基本的な変形があり、それらを**ライデマイスター移動**という。これを 1 つずつ見ていく。

1. ライデマイスター移動 I

結び目の射影図の一部にひねりを入れたり外したりする操作。

図 1.4

2. ライデマイスター移動 II

結び目の射影図の 2 つの部分に対して、2 交点を加えたり除いたりする操作。

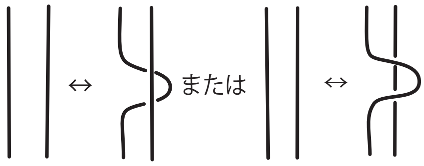


図 1.5

3. ライデマイスター移動 III

結び目の射影図の一部をある交点の一方からもう一方にすべらせる操作。

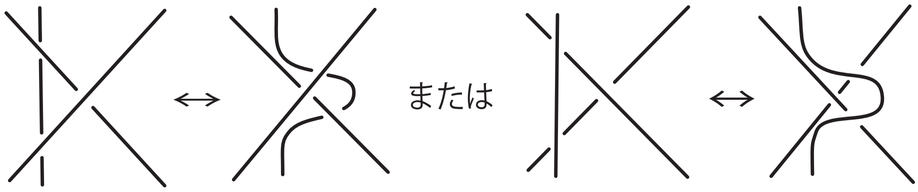


図 1.6

定理 1.2. (ライデマイスター)
二つの結び目、または絡み目が全同位変形で移りあうことは、ライデマイスター移動 I,II,III と平面の同位変形の有限回で移りあうことと同値である。

§2. 彩色可能性

結び目や絡み目の弧に、ある規則のもとで色を塗ることができるかどうかを調べることで、結び目や絡み目を区別することができる場合がある。

① 3 **彩色可能性**

はじめに、最も基本的な 3 彩色可能性について述べる。

絡み目が 3 彩色可能であるとは、射影図の弧を 3 色で塗り分けることができることである。その時の条件は、各交点に注目したときに、3 本の弧がすべて異なる色で塗られている、もしくはすべて同じ色で塗られていること、さらに射影図全体を見たときに、少なくとも 2 色以上用いられていることである。

例えば、三葉結び目は図 2.1 のように塗り分けると条件を満たすので 3 彩色可能である。

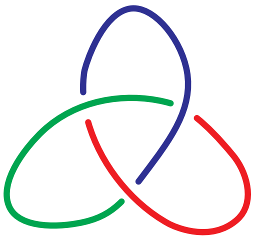


図 2.1

一方、図 2.2 のように塗ると、自明な結び目は 2 色以上用いられていないので条件を満たしていない。また、8 の字結び目は各交点に注目すると、条件を満たしていない交点がある。これより、自明な結び目や 8 の字結び目は 3 彩色不可能ではないかと考えられる。

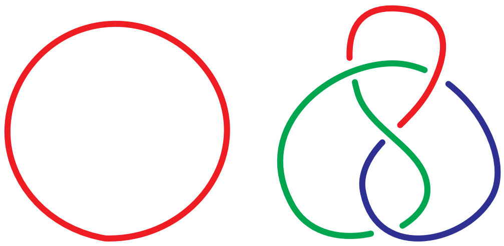


図 2.2

3 色という色を数字 $0, 1, 2$ に置き換えて、式を用いて 3 彩色可能性を言い換えると次の定義となる。

定義 2.1. 結び目 K が **3 彩色可能**であるとは、射影図の各弧に 0, 1, 2 のいずれかの値を次の条件を満たすように割り当てられることである。
①少なくとも 2 つの値が用いられる。
②すべての交点において $2a_k - a_i - a_j \equiv 0 \pmod 3$ を満たす。
ただし、a_i, a_j, a_k は図 2.3 のように割り当てられた整数である。

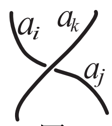


図 2.3

図 2.1 に対して、例えば、赤を 0、青を 1、緑を 2、とすると、定義 2.1 を満たしていることがわかる。

② p 彩色可能性

ここまでは 3 色に限定して彩色可能性を考えてきたが、一般化して次の定義を得る。

定義 2.2. p を 2 以上の自然数とする。結び目 K が p **彩色可能**であるとは、射影図の弧全体が $0, 1, \ldots, p-1$ のいずれかの値を次の条件を満たすように割り当てられることである。
①少なくとも 2 つの値が用いられる。
②すべての交点において $2a_k - a_i - a_j \equiv 0 \pmod p$（この式を**彩色方程式**という）を満たす。
ただし、a_i, a_j, a_k は図 2.3 のように割り当てられた整数である。結び目 K が p 彩色可能となるような最小の p をその結び目の**彩色数**という。

定理 2.3. 彩色数は結び目や絡み目の不変量となる。つまり、ライデマイスター移動を行っても元の射影図が p 彩色可能であれば、変形後も p 彩色可能である。

証明

ライデマイスター移動を施すところにのみ注目して、その両端の値に変化がないことを確認すればよい。それでは、1 つずつ見ていく。

1. ライデマイスター移動 I のもとでの不変性

新たな交点ができても、同じ色で塗り分ければよいので彩色性は保たれる。ひねりが解消されて交点がなくなるとき、なくなる交点に注目するとすべて同じ色で塗られているため、交点がなくなった後もその箇所を同じ色で塗ることができる。

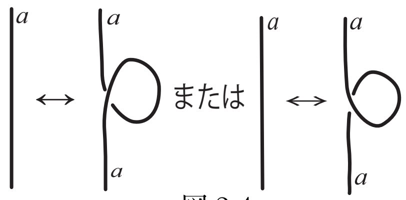


図 2.4

2. ライデマイスター移動 II のもとでの不変性

交差させる 2 つの部分に割り当てられた値が同じ場合は、新たに発生する弧も同様の値を割り当てればよい (図 2.5 左)。また、2 つの部分が異なる値の場合、新たな弧に彩色方程式が成り立つような異なる値を割り当てればよい (図 2.5 右)。

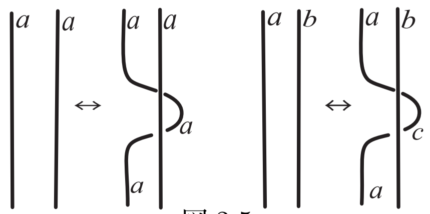


図 2.5

3. ライデマイスター移動 III のもとでの不変性

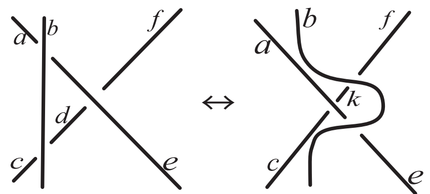


図 2.6

図 2.6 を参考に進めていく。左の射影図は p 彩色可能であり、これに対してライデマイスター移動 III を行い右の射影図に変形したときに、p 彩色可能性が保たれているかを確認する。

図 2.6 の左図において、弧に割り当てられている値 a, b, c, d, e, f は 0 から $p-1$ のいずれかの整数であり、図の交点において彩色方程式を満たしている。

この射影図の一番上の弧（b が割り当てられている弧）をすべらせてライデマイスター移動 III を行う。すると、左図において a, b, c, e, f が割り当てられていた弧はそのままの値を保つが d が割り当てられていた弧がなくなり、新たに k が割り当てられている弧が発生する。図 2.6 右図の交点で彩色方程式を満たすかどうかを確かめる。

左図の 3 つの交点に対して彩色方程式を立てると次のようになる。

$$\begin{cases} 2b - a - e \equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2b - c - d \equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2e - d - f \equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

次に、右図の交点に対して彩色方程式を立てると次のようになる。

$$\begin{cases} 2b-a-e\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 2a-c-k\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 2b-f-k\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

この右図における彩色方程式 (④,⑤,⑥) が満たされているかどうかを確認していく。

①より、④は満たされている。

次に、⑤と⑥を満たすような k が存在するかどうかを確かめる。次の式が成り立つかどうかを考えていく。

$$2a-c\equiv 2b-f \pmod{p}$$

①、②、③を用いて、左辺と右辺をそれぞれ変形していく。

$$2a-c\equiv a+d-e \pmod{p}$$

$$a+d-e\equiv a+2b-c-e \pmod{p}$$

$$2d-f\equiv 2b-2e+d \pmod{p}$$

$$2b-2e+d\equiv 2b-e+a-c \pmod{p}$$

これらより、

$$2a-c\equiv 2b-f \pmod{p}$$

を満たす。よって、$k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ を $k\equiv 2a-c \pmod{p}$ となるように定めると、⑤,⑥が成り立つ。右図から左図にライデマイスター移動 III を施こすときも同様に証明できる。これより、ライデマイスター移動 III を施した後の彩色方程式は成り立つ。以上より、ライデマイスター移動 III を施しても彩色可能性は変わらない。

これより、どのライデマイスター移動を行っても彩色可能性は変わらないことが分かった。よって、彩色数は結び目の不変量となる。 □

③ p の求め方

ここまでは、ライデマイスター移動を施しても彩色可能性が変わらないことを証明した。ここからは、p がどのような自然数となるかを考える。

p を求める例として、8 の字結び目の彩色数を考える。まず、8 の字結び目の弧（a_1,a_2,a_3,a_4）と交点（①, ②, ③, ④）に変数を割り当てる。

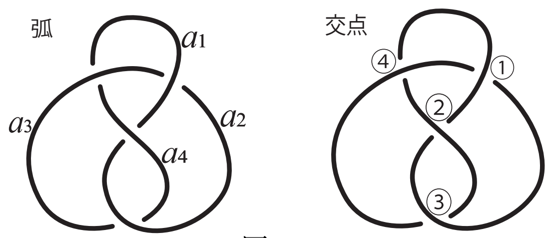


図 2.7

これより、彩色方程式は次のようになる。(彩色数は p とおく。)

$$\begin{cases} 2a_1-a_2-a_3\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2a_4-a_1-a_2\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2a_2-a_3-a_4\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 2a_3-a_1-a_4\equiv 0 \pmod{p} & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

この方程式から [2, Example 3.3] のように行は交点、列は弧と対応させて行列を構成する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式に注目して、ある 1 行とある 1 列を削った小行列式の値の絶対値を考える。このようにに作られた射影図 K の小行列式を $\det(K)$ と表し、**彩色行列式**と呼ぶ。これに関して、次の定理が成り立つ。

定理 2.4. 絡み目 K の射影図は、$\gcd(|\det(K)|, p) > 1$ の場合にのみ、p 色で彩色可能である。つまり、$|\det(K)|$ と p に共通の素因数がある場合に限り、K を p 色で塗り分けることができる。

証明は、[2, Theorem 3.11] を参照。

定理 2.4 より p 彩色可能であることを調べるには、彩色行列式の値に対して、"$|\det(K)| \equiv 0 \pmod{p}$" となるような p を見つければよい。

先ほどの行列 A において、1 行 1 列、1 行 2 列、2 行 1 列、3 行 2 列 をそれぞれ削って彩色行列式を作ると、順に次のようになる。

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} -1 & -0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

これらの彩色行列式を計算すると 5 や -5 が出てくる。これより、"$|\det(K)| \equiv 0 \pmod{p}$" となるような素数 p は 5 であることがわかる。

実際、$p = 5$ の場合、8 の字結び目は次の図ように彩色できる。

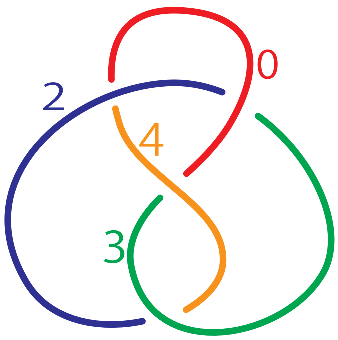


図 2.8

§3. ホワイトヘッドダブルの彩色可能性

①ホワイトヘッドダブル

ここからは、ホワイトヘッドダブルの彩色数を考えていく。彩色数を確かめる前に、それの作り方を見ていく。

元となる結び目 K を二重にして出来た絡み目を $K^{(2)}$ とするとき、$K^{(2)}$ のホワイトヘッドダブル $\mathrm{WHD}_{\pm}(K)$ は下図のように、$K^{(2)}$ の一部を切り離して絡めることで作られる。

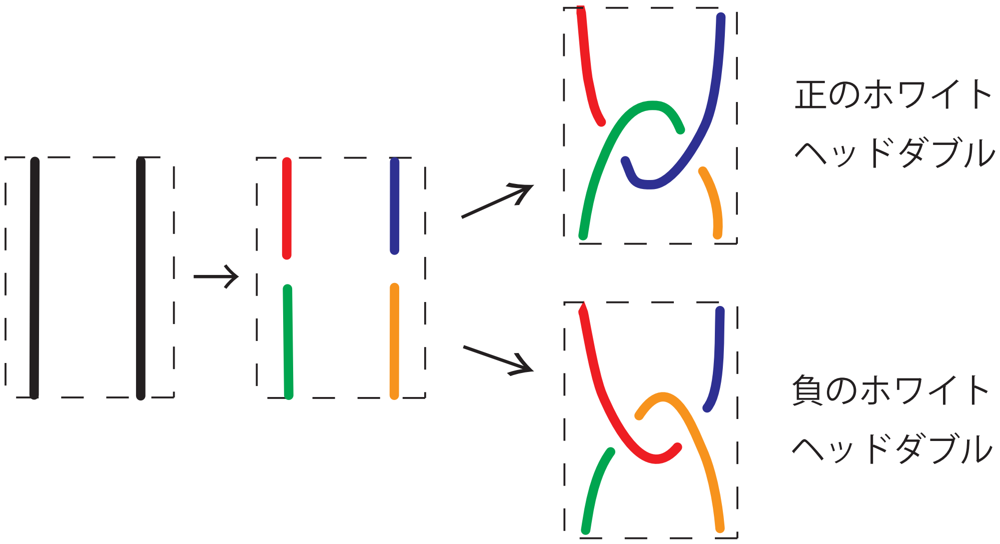


図 3.1

(注意:図 3.1 は絡め方の説明のために結び目に色を付けているため、彩色問題ではない。)

例えば、三葉結び目の負のホワイトヘッドダブル $\mathrm{WHD}_{-}(K)$ は次のようになる。

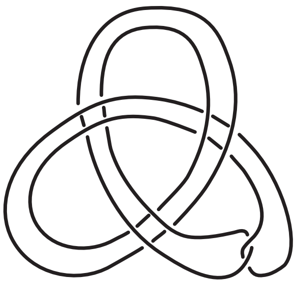


図 3.2

このようにして作った三葉結び目と 8 の字結び目のホワイトヘッドダブルの彩色可能性を考える。

②三葉結び目のホワイトヘッドダブルの彩色可能性

三葉結び目の負のホワイトヘッドダブル $\mathrm{WHD}_{-}(K)$ に、弧と交点にそれぞれ変数を割り当てる。

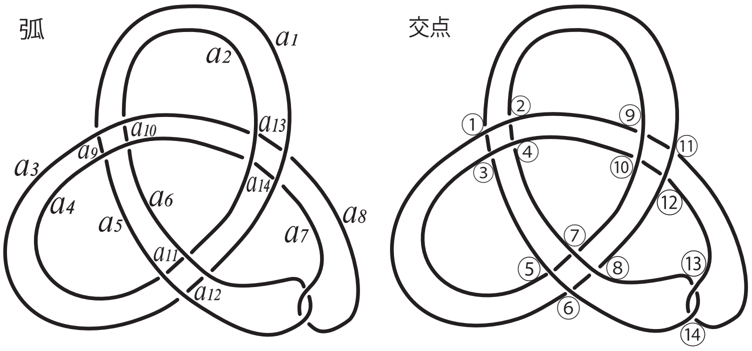


図 3.3

すると、この射影図から定まる行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

これを用いて、彩色行列式の値を計算する。

Matrix calculator を用いて計算すると、1 行 1 列を削った行列式の値は -11、14 行 9 列を削った行列式の値は -11 となる。同様に、他の行と列を削って出てきた彩色行列式の値は ± 11 であることがわかる。定理 2.4 より、三葉結び目の負のホワイトヘッドダブルは 11 彩色可能であり、11 以外の任意の素数 p に対して、p 彩色可能ではない。実際に塗り分けると次のようになる。

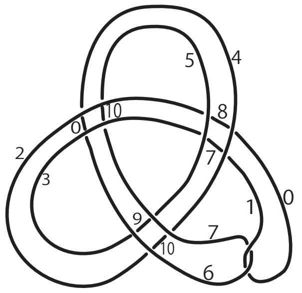


図 3.4

同様に、三葉結び目の正のホワイトヘッドダブルも考えると、13 彩色可能であることがわかる。

③8 の字結び目のホワイトヘッドダブルの彩色可能性

8 の字結び目の正のホワイトヘッドダブル $\mathrm{WHD}_+(K)$ を次のように作り、弧と交点にそれぞれ変数を割り当てる。

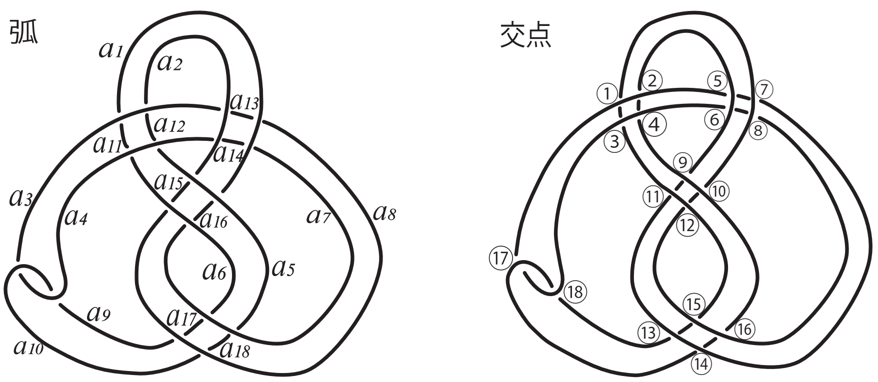


図 3.5

すると、この射影図から定まる行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

これを用いて、彩色行列式の値を計算する。

Matrix calculator を用いて計算すると、18 行 18 列を削った行列式の値は -1 となるため、$\gcd(|\det(K)|, p) > 1$ を満たさない。よって、定理 2.4 より 8 の字結び目の正のホワイトヘッドダブルはどんな自然数でも塗り分けられないとわかる。

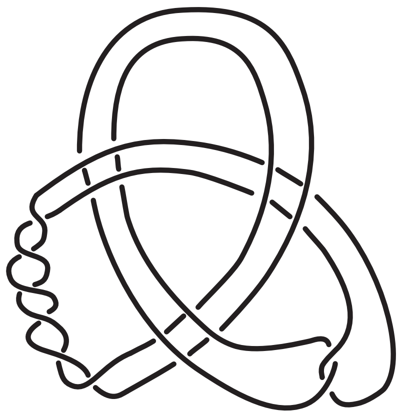
同様に、8 の字結び目の負のホワイトヘッドダブルも考えると、これもまた、どんな自然数でも塗り分けられないとわかる。

まとめ
$p \geq 2$ を素数とする。
(1) 三葉結び目が p 彩色可能であるための必要十分条件は $p = 3$ であり、その正のホワイトヘッドダブルが p 彩色可能であるための必要十分条件は $p = 13$、負のホワイトヘッドダブルが p 彩色可能であるための必要十分条件は $p = 11$ である。

(2) 8 の字結び目が p 彩色可能であるための必要十分条件は $p = 5$ であり、そのホワイトヘッドダブルはどちらとも p 彩色不可能である。

注意:ホワイトヘッドダブルの構成において、$(k - 2\mathrm{wr}(D))$ 回ひねりを入れた $\mathrm{WHD}_{\pm}(K, k)$ を考えることができる。ここで、$\mathrm{wr}(D)$ は K の射影図 D のひねり数である (定義は [1] を参照)。また、図 1.1 の三葉結び目を 3_1、図 2.8 の 8 の字結び目を 4_1 と表す。

例えば、$\mathrm{WHD}_{-}(3_1, 0)$ は、次図のようになる。



この論文で扱ったホワイトヘッドダブルは、$\mathrm{WHD}_{-}(3_1, 3)$ と $\mathrm{WHD}_{+}(4_1, 0)$ である。

この論文では、三葉結び目と 8 の字結び目のホワイトヘッドダブルの彩色数を見つけることで、どのような関係があるかを考えたが、関係性は発見できなかった。元の結び目とホワイトヘッドダブルの関係性や、ひねり数と彩色数の関係性を考えることが今後の課題である。

参考文献

[1] C. アダムス (原著), 金信 泰造 (翻訳)『結び目の数学: 結び目理論への初等的入門』原書改訂版 丸善出版,2021 年

[2]Richard Hepworth, “MX4540: Knots”,
`https://homepages.abdn.ac.uk/r.hepworth/pages/files/Knots_Notes.pdf`

[3] Matrix calculator,(行列式の計算で用いたソフトウェア), `https://matrixcalc.org/ja/`