Supplement to “Schrödinger representations from the viewpoint of monoidal categories”

和久井道久 (関西大学システム理工学部)

この記事は, 清水健一 (名古屋大学) との共著の論文 [32] に関する補足兼解説である。研究集会には若手の研究者が多数参加されていたこともあり, Hopf 代数の専門家でなくてもある程度理解できるように, 第 1 節で基礎的な用語・記法および概念をやや詳しく説明した。上記の論文を読まれる際の一助になれば幸いである。現在, 改訂版を作成中であるが, この記事で引用されている定理番号等はすべて version 1 のものである。

(体上で定義された有限次元) Hopf 代数についての 1 つの研究動向として, その表現全体のなすモノイダル圏の構造を解析して, モノイダル圏同値を法として Hopf 代数を緩やかに分類するというものがある。その一般論は Schauenburg により確立されており, 表現圏がモノイダル圏同値となるような 2 つの Hopf 代数 (の双対) はコサイクル変形によって移り合うことが知られている [29]。この結果により, モノイダル圏同値を法とした Hopf 代数の分類問題は, Hopf 代数の 2 コサイクルをコホモローガスを法として決定する問題に帰着されるが, それを解くことは容易ではない。そのため, 非同値性の判定に有用なモノイダル圏同値不変量がいくつも発見されている (例えば, [22, 30, 31, 34] を参照)。上記の論文 [32] では, Hopf 代数の Drinfel'd 二重化の Schrödinger 表現 [18; Chapter 6] がモノイダル圏同値の下で保たれることを示し, そのような不変量を構成した。実のところ, Schrödinger 表現がモノイダル圏同値不変であるという事実自体は目新しいものではないが [20], Schrödinger 表現が圏論的に意義深い対象であることはこれまで強調されてこなかったように思える。[32] では, Schrödinger 表現の圏論的意味が詳しく調べられ, それを研究することの重要性を裏付ける様々な結果が導かれている。結果の一部をこの記事の第 2 節の最後に列挙したので, 参照されたい。

今回講演させていただいた折りに論文を再検討したところ, 修正を要すると思われる箇所がいくつか見つかった。いずれも軽微なミスであるが, 無用な混乱を避けるために, Appendix を設けてそれらを列挙させていただいた。

謝辞. 研究集会滞在中, 山根宏之先生と大島和幸先生の両先生に大変お世話になりました。さらに講演後, 研究集会に参加されていた土屋昭博先生から, 現在のご研究について様々な話を聴かせていただきました。思いがけない, 幸運な出来事でした。山根先生, 大島先生, そして, 土屋先生, ありがとうございました。

§1. Hopf 代数とその表現圏

この記事を通して, $\boldsymbol{k}$ は体であり, テンソル積 $\otimes$ はすべて $\boldsymbol{k}$ 上でとるものとする。ここでは, Hopf 代数とその表現圏に関する基本事項を解説する。詳しくは, Hopf 代数の全般的なことについては [1, 21, 33] を, モノイダル圏に関しては [14, 16] を参照されたい。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の **Hopf 代数**とは, $\boldsymbol{k}$ 上の代数 H に, 以下の条件を満たす $\boldsymbol{k}$-線形写像 $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$, $\varepsilon : H \longrightarrow \boldsymbol{k}$, $S : H \longrightarrow H$ が指定されたものをいう：

(i) Δ および ε は代数準同型である。

(ii) (H, Δ, ε) は $\boldsymbol{k}$ 上の余代数である。すなわち, 次の等式を満たす：

(CA1) (余結合律) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta$,

(CA2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = \mathrm{id}_H = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.

(iii) $\mu : H \otimes H \longrightarrow H$, $\eta : \boldsymbol{k} \longrightarrow H$ をそれぞれ H の積, 単位射 ($= \boldsymbol{k}$ の単位元に H の単位元 1_H を対応させる線形写像) とするとき,

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta.$$

上記の条件から S は反代数準同型であることが従う。Δ, ε, S をそれぞれ Hopf 代数 H の**余積**, **余単位射**, **対合**と呼ぶ。Hopf 代数を複数扱う状況においては, Hopf 代数 H の余積, 余単位射, 対合をそれぞれ Δ_H, ε_H, S_H のように表わす。

Hopf 代数の典型例として, 有限群 G の群環 $\boldsymbol{k}G$ が挙げられる。これは,

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1} \qquad (g \in G)$$

と定めることにより, Hopf 代数の構造を持つ。この Hopf 代数を有限群 G の群 Hopf 代数と呼ぶ。もう 1 つの典型例として, $\boldsymbol{k}$ 上のリー代数 L の普遍包絡代数 $U(L)$ が挙げられる。これは次のように余積, 余単位射, 対合を定めることにより, Hopf 代数の構造を持つ。

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x \qquad (x \in L).$$

特に, 多項式環 $\boldsymbol{k}[X_1, \ldots, X_n]$ は Hopf 代数の構造を持つ。$U(L)$ を 'q-変形' したものとして, 神保 [10] と Drinfel'd [5] によって発見された量子群 (= 量子普遍包絡代数) があるが, 純粋に代数的に見れば, これも Hopf 代数である (詳細は [11] を参照)。

Hopf 代数の大きな特徴の 1 つに, その定義が「自己双対的」であることが挙げられる。これについて説明しよう。H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。このとき, 双対ベクトル空間 $H^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(H, \boldsymbol{k})$ は, 次のように定義される積 μ_{H^*}, 単位元 1_{H^*}, 余積 Δ_{H^*}, 余単射 ε_{H^*}, 対合 S_{H^*} に関して $\boldsymbol{k}$ 上の Hopf 代数になる。$p, q \in H^*$, $a, b \in H$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \mu_{H^*}(p \otimes q),\ a \rangle &= p(a_{(1)})q(a_{(2)}), \\
1_{H^*} &= \varepsilon_H, \\
\langle \Delta_{H^*}(p),\ a \otimes b \rangle &= p(ab), \\
\varepsilon_{H^*}(p) &= p(1_H), \\
\langle S_{H^*}(p),\ a \rangle &= p(S_H(a)).
\end{aligned}$$

この Hopf 代数 H^* を H の双対 Hopf 代数と呼ぶ。ここで, μ_{H^*} の右辺にある記号 $a_{(1)}, a_{(2)}$ の意味を説明しておく。この記号は Sweedler の記法と呼ばれていて, 余積を表わすときによく使われる。各 $a \in H$ に対して $\Delta(a) \in H \otimes H$ なので, $\Delta(a)$ は $\Delta(a) = a_1 \otimes a_1' + \cdots + a_r \otimes a_r'$ のような表示を持つが, これを $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ のように表わす。最近では, 和の記号を省略して, $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と記されることが多くなった。この記事も最近の傾向に従うことに

する。余結合律 (CA1) により, $\left(a_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(a_{(1)}\right)_{(2)}\otimes a_{(2)}=a_{(1)}\otimes\left(a_{(2)}\right)_{(1)}\otimes\left(a_{(2)}\right)_{(2)}$ が成り立つが, これを $a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}$ のように表わす。なお, この記事には登場しないが, 1 つの式の中に同じ $\Delta(a)$ の展開が 2 つ現れるときには, 一方を $\Delta(a)=a_{(1')}\otimes a_{(2')}$ のように書いて区別すれば混乱を避けることができる。

Hopf 代数はまた, 積や余積を opposite なものに取り替える操作を許容する。これについて説明しよう。$H=(H,\mu,1_H,\Delta,\varepsilon,S)$ を $\boldsymbol{k}$ 上の Hopf 代数とする。$T: H\otimes H\longrightarrow H\otimes H$ を $T(a\otimes b)=b\otimes a$ $(a,b\in H)$ によって定義される線形写像とする。もし, 対合 S_H が全単射ならば, $H^{\mathrm{op}}:=(H,\mu\circ T,1_H,\Delta,\varepsilon,S^{-1})$ および $H^{\mathrm{cop}}:=(H,\mu,1_H,T\circ\Delta,\varepsilon,S^{-1})$ はどちらも Hopf 代数になる。これらの Hopf 代数はそれぞれ H の opposite な積を持つ Hopf 代数, opposite な余積を持つ Hopf 代数と呼ばれる。$\mu^{\mathrm{op}}:=\mu\circ T,\ \Delta^{\mathrm{cop}}:=T\circ\Delta$ と書く。

Hopf 代数を表現の視点で眺めてみよう。一般に, 代数 A 上の加群 V,W に対して $V\otimes W$ は $A\otimes A$ 上の加群にはなるが, A 上の加群にはならない。これは, 左 A-加群を対象とし, それらの間の A-加群準同型を射とする圏 ${}_A\mathbf{M}$ がテンソル積に関して閉じていないことを意味する。ところが, Hopf 代数 H に対しては, 余積 Δ を通して $V\otimes W$ に H の作用を定義することができ, Δ の余結合律により, ベクトル空間の間の通常の同型 $(U\otimes V)\otimes W\cong U\otimes(V\otimes W)$ は左 H-加群としての同型を与えることがわかる。さらに, 基礎体 $\boldsymbol{k}$ には余単位射 ε により左 H-作用が定義され, 左 H-加群になることがわかる。余代数であるための条件 (CA2) は, ベクトル空間の間の通常の同型 $\boldsymbol{k}\otimes V\cong V\cong V\otimes\boldsymbol{k}$ が左 H-加群としての同型になっていることを意味する。一般に, $\boldsymbol{k}$-線形アーベル圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手 $\otimes:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ と対象 $\mathbb{I}$, および, $\mathcal{C}$ の任意の対象 U,V,W に対して自然な同型 $a_{U,V,W}:(U\otimes V)\otimes W\longrightarrow U\otimes(V\otimes W)$, $l_V:\mathbb{I}\otimes V\longrightarrow V,\ r_V: V\otimes\mathbb{I}\longrightarrow V$ が与えられていて, 次の条件 (i), (ii) が満たされるとき, 組 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{I},a,l,r)$ を **$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏**と呼び, $\mathbb{I}$ をその**単対象**と呼ぶ：

(i) (5 角等式)　任意の対象 U,V,W,X に対して

$$a_{U\otimes V,W,X}\circ a_{U,V,W\otimes X}=(a_{U,V,W}\otimes\mathrm{id}_X)\circ a_{U,V\otimes W,X}\circ(\mathrm{id}_U\otimes a_{V,W,X}).$$

(ii) (3 角等式)　任意の対象 U,V に対して

$$(\mathrm{id}_U\otimes l_V)\circ a_{U,\mathbb{I},V}=r_U\otimes\mathrm{id}_V.$$

Hopf 代数 H 上の加群のなす圏 ${}_H\mathbf{M}$ は $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏の構造を持つ。

対象を有限次元なものだけに制限して得られる ${}_H\mathbf{M}$ の充満部分圏を ${}_H\mathbb{M}$ で表わすことにしよう。${}_H\mathbb{M}$ もまた $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏をなすが, この圏は (左) 双対を持つ圏になっている。このことを説明しよう。V を有限次元左 H-加群とすると, 双対ベクトル空間 V^* には対合 S を使って左 H-作用が定義され, 左 H-加群になる。その作用は, 具体的には $(a\cdot f)(v)=f(S(a)\cdot v)$ $(a\in H,\ f\in V^*,\ v\in V)$ によって与えられる。これにより実際に左作用になるのは S が反代数準同型だからである (代数 A 上の加群では, $(f\cdot a)(v)=f(a\cdot v)$ と定めて, 双対加群を右 A-加群として定義するが, Hopf 代数には対合 S があるので, その作用を S によって左作用に変更することができる)。$\boldsymbol{k}$-線形写像 $e_V: V^*\otimes V\longrightarrow\boldsymbol{k}$ および $n_V:\boldsymbol{k}\longrightarrow V\otimes V^*$ を次のように定義する：

$$e_V(f \otimes v) = f(v) \qquad (f \in V^*,\ v \in V),$$

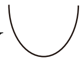
$$n_V(1) = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes v_i^* \qquad (\{v_i\} \text{ と } \{v_i^*\} \text{ とは互いに双対的な基底}).$$

これらは対合の条件により H-加群準同型であることがわかり, 次の合成はそれぞれ恒等写像 $\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_{V^*}$ に等しい。

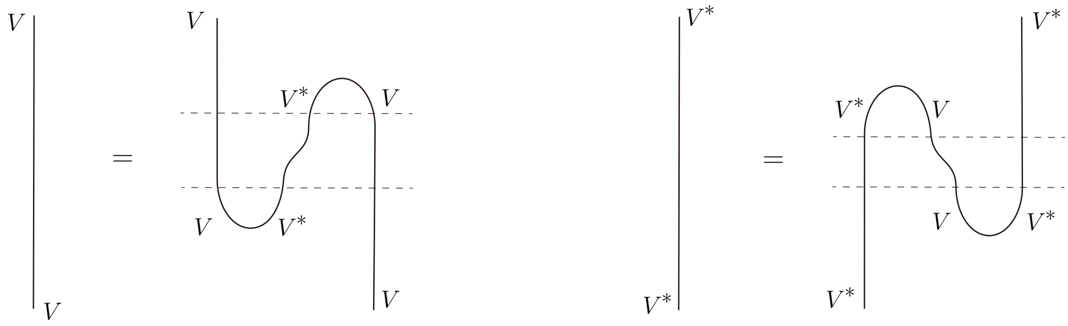
$$V \xrightarrow{l^{-1}} \boldsymbol{k} \otimes V \xrightarrow{n_V \otimes \mathrm{id}} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes e_V} V \otimes \boldsymbol{k} \xrightarrow{r} V,$$

$$V^* \xrightarrow{r^{-1}} V^* \otimes \boldsymbol{k} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes n_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a^{-1}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{e_V \otimes \mathrm{id}} \boldsymbol{k} \otimes V \xrightarrow{l} V$$

この 2 つの等式は, e_V と n_V をそれぞれ図

$e_V =$ V^*  $V,$ $\qquad$ $n_V =$ V  V^*

で表わすと, 次の図のように解釈することができる (合成は下から上に向かってとる)。



一般に, モノイダル圏 $\mathcal{C}$ の対象 V に対して, 上で述べたものと同じ性質を持つ $\mathcal{C}$ の対象 V^* と 2 つの射 $e_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{I}$, $n_V : \mathbb{I} \longrightarrow V \otimes V^*$ からなる組 (V^*, e_V, n_V) を V の**左双対**と呼ぶ。任意の対象が左双対を持つようなモノイダル圏は**左剛的**であると呼ばれる。先に述べたことから, Hopf 代数 H 上の有限次元加群のなす $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 ${}_H\mathbb{M}$ は左剛的である。

このように, Hopf 代数上の加群のなす圏 ${}_H\mathbf{M}$ や有限次元加群のなす圏 ${}_H\mathbb{M}$ は豊かな構造をもつが, Hopf 代数の公理から, 左 H-加群としての同型 $V \otimes W \cong W \otimes V$ の存在は保証されない。このような同型が存在するためには, $H \otimes H$ の中に特別な条件を満たす元の存在が必要になる。それが普遍 R-行列である。$R \in H \otimes H$ が Hopf 代数 H の**普遍 R-行列**であるとは, 以下の条件が満たされるときをいう [5].

(QT0) R は可逆元である。

(QT1) $\Delta^{\mathrm{cop}}(a) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}$ for all $a \in H$.

(QT2) $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}$.

(QT3) $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$.

ここで, $(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$ に対して, $R_{ij} \in H^{\otimes 3}$ は第 i 成分と第 j 成分にそれぞれ R の第 1 成分と第 2 成分を挿入し, 残りの成分に 1_H を挿入したものを表わす。行列ではないのに行列という名称が付けられている理由は, 上記のような R が代数レベルで見つかれば, 可解模型における Yang-Baxter 方程式の行列解が表現を通して組織的に求まることに由来している。

Hopf 代数 H とその普遍 R-行列 R との組 (H, R) を**準三角 Hopf 代数**という。左 H-加群 V, W に対して $c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ を次式によって定義する：

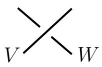
$$c_{V,W}(v \otimes w) = (R^{(2)} \cdot w) \otimes (R^{(1)} \cdot v) \qquad (v \in V,\ w \in W).$$

ここで, $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)}$ である。この記号も Sweedler の記法の流用であり, 本来は $R = \sum_{i=1}^{r} R_i \otimes R'_i$ のように書かれるべきものである。(QT0) と (QT1) より, $c_{V,W}$ は左 H-加群の間の同型写像になる。さらに, (QT2),(QT3) から次が成立する：左 H-加群 U, V, W に対して

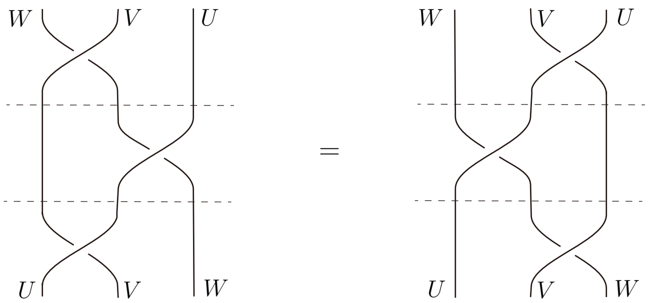
(1.1) $$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}), \quad c_{U,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W).$$

この 2 式から **Yang-Baxter 方程式**

$$(c_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U) \circ (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) = (\mathrm{id}_W \otimes c_{U,V}) \circ (c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W})$$

が導かれる。$c_{V,W}$ を図 $c_{V,W} =$ 

で表わすことにすると, Yang-Baxter 方程式は組み紐に対する次の等式になる。



このことから, すべての紐に同じ左 H-加群 V を割り当てることにより, n 本の紐からなる組み紐群 B_n の表現 $\rho_V : B_n \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ が得られる。

準三角 Hopf 代数は量子群の代数構造を記述するために導入されたものだが, それとは直接関わらない数多くの例が存在する。

Hopf 代数の普遍 R-行列は (1.1) により圏論的に特徴付けられる。これについて説明しよう。一般に, モノイダル圏 $\mathcal{C}$ において, 任意の対象 V, W に対して自然な同型 $c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ が与えられていて, (1.1) に相当する式を満たすとき, $c = \{c_{V,W}\}_{V,W \in \mathcal{C}}$ をモノイダル圏 $\mathcal{C}$ の**組み紐構造 (braiding)** と呼び, 組 $(\mathcal{C}, c)$ を**組み紐モノイダル圏**と呼ぶ。先に説明したことから, H の普遍 R-行列から ${}_H\mathsf{M}$ の組み紐構造が得られるが, 逆に, ${}_H\mathsf{M}$ の組み紐構造 c に対して $R = T \circ c_{H,H}(1_H \otimes 1_H)$ と定めることにより, H の普遍 R-行列が得られる (但し, 右辺の $c_{H,H}$ における H は左正則加群を意味する)。このように, H の普遍 R-行列全体と ${}_H\mathsf{M}$ の組み紐構造全体とは 1 対 1 に対応する。

どのような Hopf 代数も普遍 R-行列を持つわけではない。例えば, G が非可換有限群のとき, $\boldsymbol{k}$ 上の群 Hopf 代数の双対 Hopf 代数 $(\boldsymbol{k}G)^*$ には普遍 R-行列は存在しない。しかし, Drinfel'd はどのような有限次元 Hopf 代数 H に対しても, それを部分 Hopf 代数として含む準三角 Hopf 代数 $(D(H), \mathcal{R})$ が存在することを示した [5]。この準三角 Hopf 代数は次のように与えられる。まず, $\boldsymbol{k}$ 上の余代数として $D(H) = H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ とおき, その積を次のように定義する：$p, p' \in H^*$,

$a, a' \in H$ に対して

$$(p \otimes a) \cdot (p' \otimes a') = \langle p'_{(1)}, S_H^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle p'_{(3)}, a_{(1)} \rangle pp'_{(2)} \otimes a_{(2)} a'.$$

但し, $((\Delta_{H^*} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{H^*})(p') = p'_{(1)} \otimes p'_{(2)} \otimes p'_{(3)}$ である。単位元は $\varepsilon \otimes 1$ であり, 対合は $S_{D(H)}(p \otimes a) = (S_{H^*}^{-1}(p) \otimes 1)(\varepsilon \otimes S_H(a))$ $(p \in H^*,\ a \in H)$ によって与えられる。積と対合の定義に S_H^{-1}, $S_{H^*}^{-1}$ が使われているが, Radford [23] により, 有限次元 Hopf 代数の対合は常に全単射であることが知られているので, 心配はいらない。2 つの標準的な単射 $\iota_H : H \longrightarrow D(H)$, $\iota_H(a) = \varepsilon \otimes a$ と $\jmath_H : H^{*\mathrm{cop}} \longrightarrow D(H)$, $\jmath_H(p) = p \otimes 1$ は Hopf 代数準同型 (= 代数準同型かつ余代数準同型) であり, これらの写像により $H, H^{*\mathrm{cop}} \subset D(H)$ とみなすことができる。Majid に従い, 元 $p \otimes a$ in $D(H)$ をしばしば $p \bowtie a$ という記号で表わす。すると, $D(H)$ の普遍 R-行列 $\mathcal{R}$ は

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{d} (\varepsilon_H \bowtie e_i) \otimes (e_i^* \bowtie 1_H) \in D(H) \otimes D(H)$$

によって与えられる。ここで, $\{e_i\}_{i=1}^d$, $\{e_i^*\}_{i=1}^d$ は H, H^* の互いに双対的な基底である。準三角 Hopf 代数 $(D(H), \mathcal{R})$ を **Drinfel'd 二重化**と呼ぶ。$D(H)$ の積は複雑であるが,

- $(p \bowtie 1) \cdot (\varepsilon \bowtie a) = p \bowtie a \qquad (p \in H^*,\ a \in H)$,
- $\Delta^{\mathrm{cop}}(\varepsilon \bowtie a) \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \Delta(\varepsilon \bowtie a) \qquad (a \in H)$

を満たすように定義しようとすると, 必然的にそうなってしまう。この記事では使わないが, Drinfel'd 二重化 $D(H)$ は Hopf 代数のテンソル積 $H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ のコサイクル変形として理解することができ, その方がわかりやすい [3,4,8].

$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 ${}_{D(H)}\mathbf{M}$ には普遍 R-行列 $\mathcal{R}$ から定まる組み紐構造 $c^{\mathcal{R}}$ が存在する。この組み紐モノイダル圏 $({}_{D(H)}\mathbf{M},\ c^{\mathcal{R}})$ を $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 ${}_H\mathbf{M}$ から直接構成することができる。この構成は Drinfel'd の中心構成と呼ばれている (Joyal-Street [13], Majid [18] を参照)。ここでは, Kassel の本 [14; XIII.4, p.330–337] に従う。

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, r, l)$ を $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏とする。このとき, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が次のように定義される。

- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の対象は組 $(V, c_{-,V})$ である。但し, V は $\mathcal{C}$ の対象であり, $c_{-,V}$ は関手 $-\otimes \mathrm{id}_V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ から $\mathrm{id}_V \otimes - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ への自然同値で, 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して次の図式を可換にするものである：

$$\begin{CD}
(X \otimes Y) \otimes V @>{a_{X,Y,V}}>> X \otimes (Y \otimes V) @>{\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V}}>> X \otimes (V \otimes Y) \\
@V{c_{X \otimes Y, V}}VV @. @VV{a^{-1}_{X,V,Y}}V \\
V \otimes (X \otimes Y) @<{a_{V,X,V}}<< (V \otimes X) \otimes Y @<{c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y}<< (X \otimes V) \otimes Y
\end{CD}$$

- 対象 $(V, c_{-,V})$ から $(W, c_{-,W})$ への射は, $\mathcal{C}$ における射 $f : V \longrightarrow W$ であって, すべての対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して次の等式を満たすものである：

$$(f \otimes \mathrm{id}_X) \circ c_{X,V} = c_{X,W} \circ (\mathrm{id}_X \otimes f).$$

射の合成は $\mathcal{C}$ における射の合成で定義する。

- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ のモノイダル構造は次のように定義される。
  - ▶ 2 つの対象 $(V, c_{-,V})$ と $(W, c_{-,W})$ とのテンソル積は $(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) := (V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ によって与えられる。但し, $c_{-,V\otimes W}$ は次の図式を可換にする同型射 $c_{X,V\otimes W}$ からなる自然同値である：

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Y,V}"] \arrow[d, "c_{X,V\otimes W}"'] & (X \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W"] & (V \otimes X) \otimes W \arrow[d, "a_{V,X,W}"] \\
(V \otimes W) \otimes X & V \otimes (W \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{V,W,X}"'] & V \otimes (X \otimes W) \arrow[l, "\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W}"']
\end{tikzcd}$$

  - ▶ 単対象 $\mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ は $(\mathbb{I}, l^{-1} \circ r)$ で与えられる。
- モノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = (\mathcal{Z}(\mathcal{C}), \otimes)$ の組み紐構造 c は次で与えられる：

$$c = \{c_{V,W} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \longrightarrow (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V})\}_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W})\in\mathcal{Z}(\mathcal{C})}.$$

上記のように定義される組み紐モノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = (\mathcal{Z}(\mathcal{C}), c)$ を $\mathcal{C}$ の**中心**という。$\mathcal{C}$ が $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 H 上の左加群のなすモノイダル圏 ${}_H\mathbf{M}$ の場合には, その中心 $\mathcal{Z}({}_H\mathbf{M})$ は Drinfel'd 二重化 $D(H)$ 上の左加群のなす組み紐モノイダル圏 $({}_{D(H)}\mathbf{M}, c^{\mathcal{R}})$ に $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏として同型になる。

中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ から $\mathcal{C}$ への標準的なモノイダル共変関手 $\Pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ が

$$\Pi_{\mathcal{C}}(V, c_{-,V}) = V$$

により定義される。

補題 1.1. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, r, l)$ と $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', \otimes, \mathbb{I}', a', r', l')$ をモノイダル圏とする。

モノイダル共変関手 $F = (F, \phi, \omega) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ がモノイダル圏同値ならば, 次の条件を満たす組み紐モノイダル圏同値 $\mathcal{Z}(F) : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C}')$ が一意的に存在する：

(i) $F \circ \Pi_{\mathcal{C}} = \Pi_{\mathcal{C}'} \circ \mathcal{Z}(F)$,

(ii) 各 $(V, c_{-,V}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ に対して $\big(\mathcal{Z}(F)\big)(V, c_{-,V}) = (F(V), c'_{-,F(V)})$ とおくとき, F は $(\mathcal{C}, c_{-,V})$ から $(\mathcal{C}', c'_{-,F(V)})$ への関手である, すなわち, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes F(V) \arrow[r, "c'_{F(X),F(V)}"] \arrow[d, "\phi_{X,V}"'] & F(V) \otimes F(X) \arrow[d, "\phi_{V,X}"] \\
F(X \otimes V) \arrow[r, "F(c_{X,V})"] & F(V \otimes X)
\end{tikzcd}$$

さらに, 対応 $F \longmapsto \mathcal{Z}(F)$ はモノイダル関手の合成と両立する。 □

補題の証明は [35; 補題 2.1] を参照。

加群の双対的な概念として余加群と呼ばれるものがある。右 H-余加群とは, $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V と $\boldsymbol{k}$-線形写像 $\rho : V \longrightarrow V \otimes H$ との組 (V, ρ) であって, $(\rho \otimes \mathrm{id}_H) \circ \rho = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \rho$,

$(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon) \circ \rho = \mathrm{id}_V$ を満たすものをいう。各 $v \in V$ に対して $\rho(v)$ を $\rho(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ のように表わす。これは右余作用に対する Sweedler の記法である。右 H-余加群 (U, ρ_U), (V, ρ_V) の間の $\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : U \longrightarrow V$ が H-余加群準同型であるとは, $(f \circ \mathrm{id}_H) \circ \rho_U = \rho_V \circ f$ となるときをいう。右 H-余加群を対象とし, それらの間の準同型を射とする圏を M^H により表わす。これは $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏をなす。そのテンソル積は $(U, \rho_U) \otimes (V, \rho_V) = (U \otimes V, \rho)$, $\rho(u \otimes v) = u_{(0)} \otimes v_{(0)} \otimes u_{(1)} v_{(1)}$, により与えられ, 基礎体 $\boldsymbol{k}$ は $1_{\boldsymbol{k}} \longmapsto 1_{\boldsymbol{k}} \otimes 1_H \in \boldsymbol{k} \otimes H$ を右余作用として右 H-余加群となる。この右余加群を自明な右 H-余加群という。

H が有限次元のとき, ベクトル空間 V に左 H^*-加群構造を与えることと右 H-余加群構造を与えることとは同値である。その具体的な対応は次で与えられる。

- V への右 H-余作用 $\rho : V \longrightarrow V \otimes H$

  $\longmapsto\!\!\!\rightsquigarrow$ V への左 H^*-作用 $\alpha : H^* \otimes V \longrightarrow V$

  $$\alpha(p \otimes v) = v_{(0)} \langle p, v_{(1)} \rangle$$

- V への左 H^*-作用 $\alpha : H^* \otimes V \longrightarrow V$

  $\longmapsto\!\!\!\rightsquigarrow$ V への右 H-余作用 $\rho : V \longrightarrow V \otimes H$

  $$\rho(v) = \textstyle\sum_{i=1}^d \alpha(e_i^*, v) \otimes e_i.$$

  但し, $\{e_i\}_{i=1}^d$ と $\{e_i^*\}_{i=1}^d$ は H と H^* の互いに双対的な基底である。

上記の対応で, ${}_{H^*}\mathsf{M}$ と M^H とは $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として同型である。しかし, ${}_{H^{*\mathrm{cop}}}\mathsf{M}$ と M^H とはテンソル積構造が少し違っている。このことを正確に記述するために, 反転モノイダル圏の概念を導入しよう。$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。このとき, 次のようにしてモノイダル圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ を作ることができる。

$$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} = (\mathcal{C}, \bar{\otimes}, \mathbb{I}, a^{-1}, r, l) \tag{1.2}$$

但し, $\bar{\otimes}$ は, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の対象 (X, Y) に対して $\mathcal{C}$ の対象 $Y \otimes X$ を対応させ, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の射 (f, g) に対して $\mathcal{C}$ の射 $g \otimes f$ を対応させる共変関手である。モノイダル圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ を $\mathcal{C}$ の**反転 (reversed) モノイダル圏**と呼ぶ。2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ の射は同じものだが, $\mathcal{C}$ の射 f を $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ における射とみなすときに, 必要に応じて f^{rev} という記号で表わす。$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として $({}_H\mathsf{M})^{\mathrm{rev}} \cong {}_{H^{\mathrm{cop}}}\mathsf{M}$ であることから, $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏としての同型 ${}_{H^{*\mathrm{cop}}}\mathsf{M} \cong (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ を得る。

c がモノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対する組み紐構造であるとき,

$$c^{\mathrm{rev}} = \{(c^{\mathrm{rev}})_{X,Y} = c_{Y,X} : X \bar{\otimes} Y \longrightarrow Y \bar{\otimes} X\}_{(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}} \tag{1.3}$$

は $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ の組み紐構造である。組み紐モノイダル圏 $(\mathcal{C}, c)$ に対して, 組み紐モノイダル圏 $(\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}, c^{\mathrm{rev}})$ を $(\mathcal{C}, c)^{\mathrm{rev}}$ により表わし, $(\mathcal{C}, c)$ の反転組み紐モノイダル圏と呼ぶ。

補題 1.2. $(\mathcal{C}, c)$, $(\mathcal{C}', c')$ を $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏とし, $(F, \phi, \omega) : (\mathcal{C}, c) \longrightarrow (\mathcal{C}', c')$ を組み紐共変モノイダル関手とする。このとき, $(F, \phi, \omega)^{\mathrm{rev}}$ は組み紐共変モノイダル関手 $(\mathcal{C}, c)^{\mathrm{rev}}$ から $(\mathcal{C}', c')^{\mathrm{rev}}$ への組み紐モノイダル共変関手である。さらに, (F, ϕ, ω) が組み紐テンソル圏同値を与える, 組み紐共変モノイダル関手ならば, $(F, \phi, \omega)^{\mathrm{rev}}$ も組み紐テンソル圏同値を与える, 組み紐共変モノイダル関手である。 $\square$

§2. Schrödinger 加群の圏論的意味とモノイダル森田不変量の構成

H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。Drinfel'd 二重化 $D(H)$ は Schrödinger 表現と呼ばれる標準的な表現を持つ。ここで扱う Schrödinger 表現は, 量子力学において Schrödinger 描像と呼ばれる現象を, Majid が Hopf 代数の言葉で定式化したものである [18; Examples 6.1.4 & 7.1.8]。この表現は, H の左随伴作用と右 H^*-作用 $\leftharpoonup$ (定義は以下の (2.1) と (2.2) を参照) を統合したものになっている。Schrödinger 表現の一般化が, 準 Hopf 代数に対しては Bulacu と Torrecillas [2; Section 3] により, 一般化された Hopf pairing から構成される Drinfel'd 二重化に対しては Fang [8; Section 2] により与えられている。特に後者においては 2 種類の Schrödinger 表現が導入されており, そのうちの 1 つは Schrödinger 表現に, もう 1 つは Majid [18; Proposition 6.2.7] が co-Schrödinger 表現と呼んでいるものに相当している。この 2 種類の Schrödinger 表現の定義を我々の設定の下で述べよう。

次の 4 つの作用を考える。

$$a \blacktriangleright c = a_{(1)} c S(a_{(2)}) \qquad (a, c \in H), \tag{2.1}$$

$$a \leftharpoonup p = \langle a_{(1)}, p \rangle a_{(2)} \qquad (p \in H^*,\ a \in H), \tag{2.2}$$

$$q \blacktriangleleft p = S(p_{(1)}) q p_{(2)} \qquad (p, q \in H^*), \tag{2.3}$$

$$a \rightharpoonup q = q_{(1)} \langle a, q_{(2)} \rangle \qquad (q \in H^*,\ a \in H). \tag{2.4}$$

これらの作用を使って, H および H^* 上に $D(H)$ の 2 つの左作用 $\bullet$ を次のように定義することができる：$a, b \in H^*$, $p, q \in H^*$ に対して

$$(p \bowtie a) \bullet b = (a \blacktriangleright b) \leftharpoonup S^{-1}(p), \tag{2.5}$$

$$(p \bowtie a) \bullet q = (a \rightharpoonup q) \blacktriangleleft S^{-1}(p). \tag{2.6}$$

左 $D(H)$-加群 $(H, \bullet)$ および $(H^*, \bullet)$ をそれぞれ **Schrödinger 加群**, **双対 Schrödinger 加群**と呼び, それらを ${}_{D(H)}H$ および ${}_{D(H)}H^{*\mathrm{cop}}$ により表わす。(これらの作用に関する説明については [35] も参照。)

任意の左 $D(H)$-加群は (左-右) Yetter-Drinfel'd 加群とみなされるから, (双対) Schrödinger 加群も Yetter-Drinfel'd 加群とみなすことができる。そこで, Yetter-Drinfel'd 加群について説明しよう。この概念は, crossed bimodule という名称で Yetter [36] により導入された。Yetter-Drinfel'd 加群という名称は [27] で初めて使われた。

$D(H)$ は 2 つの Hopf 代数 H と $H^{*\mathrm{cop}}$ とを同時に含む Hopf 代数であって, H と $H^{*\mathrm{cop}}$ の元との間にある種の交換関係を満たすものであった。したがって, ベクトル空間への左 $D(H)$-加群の構造は, 左 H-加群構造と左 $H^{*\mathrm{cop}}$-加群構造の組であり, それらの作用がある種の交換関係を満たすものと理解することができる。代数として $H^{*\mathrm{cop}} = H^*$ であるから, ベクトル空間に左 $H^{*\mathrm{cop}}$-加群構造を与えることは左 H^*-加群構造を与えることと同値であり, それは右 H-余加群構造を与えることと同値である。こうして, 任意の左 $D(H)$-加群 V は, ベクトル空間 V に次の条件 (YD) を満たす左 H-作用 $\cdot$ と右 H-余作用 ρ が指定されたものとして捉えられるこ

とがわかる。任意の $a \in H,\, v \in V$ に対して

$$\text{(YD)} \qquad (a_{(1)} \cdot v_{(0)}) \otimes (a_{(2)} v_{(1)}) = (a_{(2)} \cdot v)_{(0)} \otimes (a_{(2)} \cdot v)_{(1)} a_{(1)}.$$

条件 (YD) を Yetter-Drinfel'd 条件といい, 組 $V = (V, \cdot, \rho)$ を **Yetter-Drinfel'd H-加群**と呼ぶ。

U, V を Yetter-Drinfel'd H-加群とする。$\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : U \longrightarrow V$ が **Yetter-Drinfel'd 準同型**であるとは, H-加群準同型であって, かつ, H-余加群準同型であるときをいう。テンソル積 $U \otimes V$ は次のように定義される作用と余作用に関して Yetter-Drinfel'd H-加群になる：任意の $a \in H,\ u \in U,\ v \in V$ に対して

$$a \cdot (u \otimes v) = (a_{(1)} \cdot u) \otimes (a_{(2)} \cdot v),$$
$$u \otimes v \longmapsto u_{(0)} \otimes v_{(0)} \otimes v_{(1)} u_{(1)}.$$

Yetter-Drinfel'd H-加群とそれらの間の Yetter-Drinfel'd 準同型は上記のように定義されるテンソル積に関して $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏をなす。このモノイダル圏を Yetter-Drinfel'd 圏と呼び, ${}_H\mathcal{YD}^H$ により表わす。Yetter-Drinfel'd 加群の定義より, $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として ${}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathsf{M}$ である。この同型の下で, Yetter-Drinfel'd H-加群 V は次の作用を持つ左 $D(H)$-加群とみなされる：

$$(p \bowtie a) \cdot v = \langle p, (av)_{(1)} \rangle (av)_{(0)} \qquad (p \in H^*,\ a \in H,\ v \in V).$$

この同型を使って (双対) Schrödinger 加群を Yetter-Drinfel'd 加群と見なすことができる。

補題 2.1. (1) Schrödinger 加群 ${}_{D(H)}H$ に対応する Yetter-Drinfel'd 加群は $(H, \blacktriangleright, \rho)$ である。但し, 右 H-余作用 ρ は次で与えられる。

$$\rho(a) = a_{(2)} \otimes S^{-1}(a_{(1)}) \qquad (a \in H).$$

この Yetter-Drinfel'd 加群を Yetter-Drinfel'd 圏における **Schrödinger 加群**と呼ぶことにする。

(2) 双対 Schrödinger 加群 ${}_{D(H)}H^{*\mathrm{cop}}$ に対応する Yetter-Drinfel'd 加群は $(H^*, \rightharpoonup, \rho)$ である。但し, 右 H-余作用 ρ は次で与えられる。

$$\rho(p) = \sum_{i=1}^{d} \big(p \blacktriangleleft e_i^*\big) \otimes S^{-1}(e_i) \qquad (p \in H^*).$$

但し, $\{e_i\}_{i=1}^d$ と $\{e_i^*\}_{i=1}^d$ は H と H^* の互いに双対的な基底である。この Yetter-Drinfel'd 加群を Yetter-Drinfel'd 圏における**双対 Schrödinger 加群**と呼ぶことにする。 □

Yetter-Drinfel'd 圏における (双対)Schrödinger 加群は, Radford 誘導関手 $I_H : {}_H\mathsf{M} \longrightarrow {}_H\mathcal{YD}^H$ および $I^H : (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}} \longrightarrow {}_H\mathcal{YD}^H$ に関する自明 (余) 加群の像に同型である。ここで, **Radford 誘導関手** I_H および I^H はそれぞれ次のように定義される共変関手である [26; Propositions 2&1].

- $L \in {}_H\mathsf{M}$ に対して, $I_H(L) := L \otimes H \in {}_H\mathcal{YD}^H$ とする。但し, 左 H 作用 $\cdot$ と右 H 余作用 ρ はそれぞれ次で与えられる：$h, a \in H$, $l \in L$ に対して

$$\begin{aligned} h \cdot (l \otimes a) &= (h_{(2)} \cdot l) \otimes h_{(3)} a S^{-1}(h_{(1)}), \\ \rho(l \otimes a) &= (l \otimes a_{(1)}) \otimes a_{(2)}. \end{aligned}$$

- $N \in \mathsf{M}^H$ に対して, $I^H(N) := H \otimes N \in {}_H\mathcal{YD}^H$ とする。但し, 左 H 作用 $\cdot$ と右 H 余作用 ρ は次式で与えられる：任意の $h, a \in H$, $n \in N$ に対して

$$\begin{aligned} h \cdot (a \otimes n) &= ha \otimes n, \\ \rho(h \otimes n) &= (h_{(2)} \otimes n_{(0)}) \otimes h_{(3)} n_{(1)} S^{-1}(h_{(1)}). \end{aligned}$$

命題 2.2 (**[32; Propositions 2.6&2.8]**)**.** H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。

(1) 同一視 ${}_H\mathcal{YD}^H = {}_{D(H)}\mathsf{M}$ により Radford 誘導関手 I_H を ${}_H\mathsf{M}$ から ${}_{D(H)}\mathsf{M}$ への関手とみなす。このとき, $\boldsymbol{k}$-線形写像

$$\Phi : {}_{D(H)}H \longrightarrow I_H(\boldsymbol{k}), \qquad \Phi(a) = 1 \otimes S^{-1}(a) \quad (a \in H)$$

は左 $D(H)$-加群の同型である。ここで, $I_H(\boldsymbol{k})$ における $\boldsymbol{k}$ は自明な左 H-加群である。

(2) 同一視 ${}_H\mathcal{YD}^H = {}_{D(H)}\mathsf{M}$ により Radford 誘導関手 I^H を $(\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ から ${}_{D(H)}\mathsf{M}$ への関手とみなす。このとき, $\boldsymbol{k}$-線形写像

$$\Phi : {}_{D(H)}H^{*\mathrm{cop}} \longrightarrow \big(I^H(\boldsymbol{k})\big)^*, \qquad \Phi(q) = S^{-1}(q) \otimes 1 \quad (q \in H^*)$$

は左 $D(H)$-加群の同型を与える。ここで, $I^H(\boldsymbol{k})$ における $\boldsymbol{k}$ は自明な右 H-余加群であり, $\big(I^H(\boldsymbol{k})\big)^*$ は $I^H(\boldsymbol{k})$ の双対 Yetter-Drinfel'd 加群である。但し, 有限次元 Yetter-Drinfel'd H-加群 $V = (V, \cdot, \rho_V)$ の双対 Yetter-Drinfel'd 加群とは, 次のように定義される作用 $\cdot$ と余作用 ρ_{V^*} をもつ Yetter-Drinfel'd H-加群 $V^* = (V^*, \cdot, \rho_{V^*})$ のことを意味する：

$$\begin{aligned} (a \cdot \alpha)(v) &= \alpha(S(a) \cdot v) \qquad (a \in H,\ \alpha \in V^*,\ v \in V), \\ \rho_{V^*}(v_j^*) &= \sum_{i=1}^m v_i^* \otimes S^{-1}(a_{ji}) \qquad (j = 1, \ldots, m), \end{aligned}$$

ここで, $\{v_i\}_{i=1}^m$ と $\{v_i^*\}_{i=1}^m$ は V と V^* の互いに双対的な基底, $\rho_V(v_j) = \sum_{i=1}^m v_i \otimes a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, m)$ である。 □

H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。${}_{D(H)}\mathsf{M}$ の組み紐構造 $c^{\mathcal{R}}$ を $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏としての同型 ${}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathsf{M}$ で写せば, Yetter-Drinfel'd 圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ の組み紐構造が得られる。それは, 次のように定義される Yetter-Drinfel'd 準同型 $c_{U,V} : U \otimes V \longrightarrow V \otimes U$ $(U, V \in {}_H\mathcal{YD}^H)$ の族からなる [36]：

$$c_{U,V}(u \otimes v) = v_{(0)} \otimes (v_{(1)} \cdot u) \qquad (u \in U,\ v \in V). \tag{2.7}$$

このとき, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏として $({}_H\mathcal{YD}^H, c) \cong ({}_{D(H)}\mathsf{M}, c^{\mathcal{R}})$ である。$({}_{D(H)}\mathsf{M}, c^{\mathcal{R}})$ は中心 $\mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$ に $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏として同型であったから, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダ

ル圏としての同型 $({}_H\mathcal{YD}^H, c) \cong \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$ が得られる。この同型 $({}_H\mathcal{YD}^H, c) \longrightarrow \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$ は具体的に次で与えられる。

$$V \in {}_H\mathcal{YD}^H \longmapsto (V, \{c_{X,V}\}_{X \in {}_H\mathsf{M}}) \in \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M}),$$

(但し, $c_{X,V}$ は (2.7) と同じ式によって定義される左 H-加群の間の同型写像)

Radford [26] および Hu と Zhang [9; Lemma 2.1, Remark 2.2] において指摘されているように, Radford 誘導関手 I_H は忘却関手 $R_H : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow {}_H\mathsf{M}$ の右随伴であり, Radford 誘導関手 I^H は忘却関手 $R^H : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ の左随伴である。すなわち, Yetter-Drinfel'd H-加群 V と左 H-加群 X と右 H-余加群 N に対して自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{{}_H\mathsf{M}}(R_H(V), X) \cong \mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(V, I_H(X))$, $\mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(I^H(N), V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{M}^H}(N, R^H(V))$ が存在する。${}_H\mathcal{YD}^H = \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$ と同一視すると, 忘却関手 $R_H : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow {}_H\mathsf{M}$ はモノイダル関手として忘却関手 $\Pi_{{}_H\mathsf{M}} : \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M}) \longrightarrow {}_H\mathsf{M}$ に一致する。忘却関手 $R^H : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ についても同様の解釈が可能である。まず, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏としての同型 $\big(\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)\big)^{\mathrm{rev}} \cong {}_H\mathcal{YD}^H$ が存在することに注意する。実際, この同型は次の共変関手により与えられる。

$$V \in {}_H\mathcal{YD}^H \longmapsto (V, \{c_{X,V}\}_{X \in \mathsf{M}^H}) \in \big(\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)\big)^{\mathrm{rev}}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{但し, } (V, \{c_{X,V}\}_{X \in \mathsf{M}^H}) \text{ における } V \text{ への } H \text{ の右余作用は } V \in {}_H\mathcal{YD}^H \text{ に対するもの}\\ \text{と同じであり, } c_{X,V} \text{ は次のように定義される右 } H\text{-余加群の間の同型写像である：}\\ c_{X,V}(x \otimes v) = (x_{(1)} \cdot v) \otimes x_{(0)} \quad (x \in X,\ v \in V).\end{array}\right)$$

この同型により, 同一視 ${}_H\mathcal{YD}^H = \big(\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)\big)^{\mathrm{rev}}$ を行うと, 忘却関手 $R^H : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ はモノイダル関手として忘却関手 $\big(\Pi_{\mathsf{M}^H}\big)^{\mathrm{rev}} : \big(\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)\big)^{\mathrm{rev}} \longrightarrow (\mathsf{M}^H)^{\mathrm{rev}}$ に一致することがわかる。以上のことから, Schrödinger 加群は, 反変関手

$$\mathcal{Z}({}_H\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad V \longmapsto \mathrm{Hom}_{{}_H\mathsf{M}}(\Pi_{{}_H\mathsf{M}}(V), \boldsymbol{k})$$

の representing object であり, 双対 Schrödinger 加群は, 共変関手

$$\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H) \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad V \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{M}^H}(\boldsymbol{k}, \Pi_{\mathsf{M}^H}(V))$$

の representing object の左双対であることがわかった。清水はこの結果を捉えて Schrödinger 対象の概念を導入した [32]。

定義 2.3. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする。

(1) 反変関手

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad \boldsymbol{V} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{V}), \mathbb{I})$$

の representing object を $\mathcal{C}$ に対する **Schrödinger 対象**と呼ぶ。すなわち, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の対象 $\boldsymbol{S}$ が Schrödinger 対象であるとは, $\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ に関して自然性を持つ同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{V}), \mathbb{I}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})$ が存在するときをいう。

(2) 共変関手

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad \boldsymbol{V} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, \Pi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{V}))$$

の representing object を $\mathcal{C}$ に対する**余 Schrödinger 対象**と呼ぶ。

注意：米田の補題により, (余)Schrödinger 対象は (存在すれば) 同型を除いて一意的である。

例 2.4. H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。

(1) $\boldsymbol{S}_H := ((H, \blacktriangleright),\ c_{-,H}) \in \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$ は ${}_H\mathsf{M}$ に対する Schrödinger 対象である。但し, 各左 H-加群 X に対して $c_{X,H} : X \otimes H \longrightarrow H \otimes X$ は次式で定義される：

$$c_{X,H}(x \otimes a) = a_{(2)} \otimes (S^{-1}(a_{(1)}) \cdot x) \qquad (a \in H,\ x \in X).$$

(2) 次のように定義される $\boldsymbol{S}^H := ((H^*, \rho),\ c_{-,H^*}) \in \mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)$ は M^H に対する余 Schrödinger 対象の左双対である。但し, $\{e_i\}_{i=1}^d, \{e_i^*\}_{i=1}^d$ を互いに双対的な H, H^* の基底とするとき,

$$\rho(p) = \sum_{i=1}^{d} (p \blacktriangleleft e_i^*) \otimes S^{-1}(e_i)$$

であり, 各右 H-余加群 X に対して $c_{X,H^*} : X \otimes H^* \longrightarrow H^* \otimes X$ は次式で定義される：

$$c_{X,H^*}(x \otimes p) = (x_{(1)} \rightharpoonup p) \otimes x_{(0)} \qquad (p \in H^*,\ x \in X).$$

補題 2.5 ([32; Lemma 3.2]). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をモノイダル圏とする。

(1) 忘却関手 $\Pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ が右随伴 $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を持つとする。$\mathcal{C}$ の単対象 $\mathbb{I}$ に対して $I_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は Schrödinger 対象である。

(2) $\boldsymbol{S} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ に対する Schrödinger 対象とし, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ をモノイダル圏同値とする。このとき, $\big(\mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ に対する Schrödinger 対象である。

(**証明**)

(1) $I_{\mathcal{C}}$ は $\Pi_{\mathcal{C}}$ の右随伴であるから, 自然同値 $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(-), -) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(-, I_{\mathcal{C}}(-))$ が存在する。よって, 自然同値 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(-), \mathbb{I}) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(-, I_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}))$ が存在する。定義により, $I_{\mathcal{C}}(\mathbb{I})$ は $\mathcal{C}$ に対する Schrödinger 対象である。

(2) モノイダル共変関手 $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を F の準逆 (quasi-inverse) とする。このとき, $\mathcal{Z}(G) : \mathcal{Z}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{Z}(F)$ の準逆である。これより, 任意の $\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{D})$ に対して自然な同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{D})}\big(\boldsymbol{V}, \big(\mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S})\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(\big(\mathcal{Z}(G)\big)(\boldsymbol{V}), \big(\mathcal{Z}(G) \circ \mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S})\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(\big(\mathcal{Z}(G)\big)(\boldsymbol{V}), \boldsymbol{S}\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\big(\Pi_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{Z}(G)\big)(\boldsymbol{V}), \mathbb{I}_{\mathcal{C}}\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\big(G \circ \Pi_{\mathcal{D}}\big)(\boldsymbol{V}), \mathbb{I}_{\mathcal{C}}\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\big(F \circ G \circ \Pi_{\mathcal{D}}\big)(\boldsymbol{V}), F(\mathbb{I}_{\mathcal{C}})\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\Pi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{V}), F(\mathbb{I}_{\mathcal{C}})\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\Pi_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{V}), \mathbb{I}_{\mathcal{D}}\big)
\end{aligned}$$

が得られる。こうして, $\big(\mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S})$ は $\mathcal{D}$ に対する Schrödinger 対象であることが示された。 □

系 2.6 ([32; Theorem 3.4&Corollary 3.5]). A, B を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。

(1) $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏同値 $F : {}_A\mathsf{M} \longrightarrow {}_B\mathsf{M}$ が存在すると仮定する。このとき, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏同値 $\mathcal{Z}(F) : \mathcal{Z}({}_A\mathsf{M}) \longrightarrow \mathcal{Z}({}_B\mathsf{M})$ により, $\big(\mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S}_A) \cong \boldsymbol{S}_B$.

(2) $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏同値 $F : \mathsf{M}^A \longrightarrow \mathsf{M}^B$ が存在すると仮定する。このとき, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏同値 $\mathcal{Z}(F) : \mathcal{Z}(\mathsf{M}^A) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathsf{M}^B)$ の反転関手により, $\big(\mathcal{Z}(F)\big)^{\mathrm{rev}}(\boldsymbol{S}^A) \cong \boldsymbol{S}^B$.

注意 2.7. 勝手な $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏同値 $\tilde{F} : \mathcal{Z}({}_A\mathsf{M}) \longrightarrow \mathcal{Z}({}_B\mathsf{M})$ が Schrödinger 対象を保つ訳ではない。上の系が成立する背後には, $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル圏としての同型 ${}_{D(H)}\mathsf{M} \cong \mathcal{Z}({}_H\mathsf{M})$, ${}_{D(H)}\mathsf{M} \cong \big(\mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)\big)^{\mathrm{rev}}$ が "fibered" である, すなわち, 忘却関手と可換であるという事実が働いている。

注意 2.8. 系 2.6 は, 増岡が [20; Proposition 5.1] において与えた作用を用いることにより, コサイクル変形の視点から導くこともできる [19]。

双対 Schrödinger 加群は Schrödinger 対象と見なすことができる。次の補題がその鍵になる。

補題 2.9 (**[32; Lemma 2.9(2)]**). H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 H とする。このとき, 任意の左 H-加群 X と任意の Yetter-Drinfel'd H-加群 V に対して, 同型射 $I_H(R_H(V)\otimes X) \longrightarrow I_H(X)\otimes V$ が存在する。ここで, I_H は Radford 誘導関手, R_H は忘却関手を表わす。 □

注意：$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし, 忘却関手 $\Pi : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ が左随伴 $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を持つとする。$\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が左双対を持つとき, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $I(\Pi(\boldsymbol{V}) \otimes X) \cong I(X) \otimes \boldsymbol{V}$ となる [31; Lemma 3.6]。しかし, 一般の $\boldsymbol{V}$ に対して同様の結果が成り立つか否かは分かっていない。上の補題は $\mathcal{C} = {}_H\mathsf{M}$ の場合にはそれが成り立つということを主張している。

定理 2.10 (**[32; Theorem 3.10]**). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし, 忘却関手 $\Pi : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ は左随伴 $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を持つと仮定する。$\mathbb{I}$ を $\mathcal{C}$ の単対象とする。任意の $\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ に対して $I(\Pi(\boldsymbol{V})) \cong I(\mathbb{I}) \otimes \boldsymbol{V}$ であり, $\mathcal{C}$ に対する余 Schrödinger 対象 $\boldsymbol{S} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が左双対を持つならば, $\boldsymbol{S}^*$ は $\mathcal{C}$ に対する Schrödinger 対象である。

(証明)

余 Schrödinger 対象の一意性から, 一般性を失うことなく $\boldsymbol{S} = I(\mathbb{I})$ であると仮定してよい。このとき, 任意の $\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ に対して, 自然な同型

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S}^*) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(\boldsymbol{V},\ \big(I(\mathbb{I})\big)^*\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(\boldsymbol{V},\ \mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})} \otimes \big(I(\mathbb{I})\big)^*\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(\boldsymbol{V} \otimes I(\mathbb{I}),\ \mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(I(\mathbb{I}) \otimes \boldsymbol{V},\ \mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big) \qquad (\because \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \text{ は braided}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big(I\big(\Pi(\boldsymbol{V})\big),\ \mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}\big) \qquad (\because \text{仮定より}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\Pi(\boldsymbol{V}),\ \Pi(\mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})})\big) \qquad (\because I \text{ は } \Pi \text{ の左随伴}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\Pi(\boldsymbol{V}),\ \mathbb{I}\big)
\end{aligned}
$$

が存在する。これは $\boldsymbol{S}^* \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{C}$ に対する Schrödinger 対象であることを示している。 □

補題 2.9 と定理 2.10 より, 次が従う。

系 2.11 (**[32; Theorem 3.10]**). H を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。このとき, $\boldsymbol{S}^H \in \mathcal{Z}(\mathsf{M}^H)$ は M^H に対する Schrödinger 対象である。

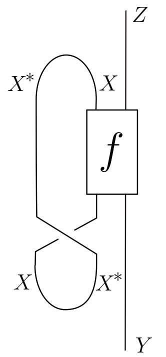
Schrödinger 加群を用いて Hopf 代数の表現圏 ${}_A\mathbf{M}$ のモノイダル森田不変量を定義することができる。その方法を簡単に述べる。詳細は [32] を参照されたい。

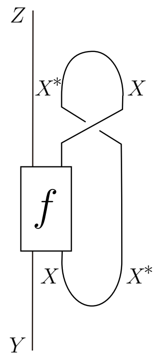
$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, r, l)$ を $\boldsymbol{k}$-線形左剛的なモノイダル圏とし, 各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して左双対 (X^*, e_X, n_X) を選んでおく。$\mathcal{C}$ における射 $f : X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Z$ に対して次の合成により射 $\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{l,X}(f) : Y \longrightarrow Z$ を定義する：

$$\begin{aligned} Y \xrightarrow{l_Y^{-1}} \mathbb{I} \otimes Y \xrightarrow{n_X \otimes \mathrm{id}_Y} X \otimes X^* \otimes Y \xrightarrow{c_{X^*,X}^{-1} \otimes \mathrm{id}_Y} X^* \otimes X \otimes Y \\ \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes f} X^* \otimes X \otimes Z \xrightarrow{e_X \otimes \mathrm{id}_Z} \mathbb{I} \otimes Z \xrightarrow{l_Z} Z. \end{aligned}$$

射 $\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{l,X}(f) : Y \longrightarrow Z$ を X 上の f の**左部分組み紐トレース**と呼ぶ。同様に, 射 $f : Y \otimes X \longrightarrow Z \otimes X$ に対して X 上の f の**右部分組み紐トレース**が次の合成により定義される：

$$\begin{aligned} Y \xrightarrow{r_Y^{-1}} Y \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \otimes n_X} Y \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_{X^*}} Z \otimes X \otimes X^* \\ \xrightarrow{\mathrm{id}_Z \otimes c_{X,X^*}} Z \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}_Z \otimes e_X} Z \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{r_Z} Z. \end{aligned}$$

$\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{l,X}(f) =$ 

$\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{r,X}(f) =$ 

X 上の左部分組み紐トレース, 右部分組み紐トレースは X の左双対の選び方によらない。これは, X の 2 つの左双対 (X^*, e_X, n_X), $(X^\vee, \bar{e}_X, \bar{n}_X)$ が与えられると, 次の合成により定義される同型射 $\varphi_X : X^* \longrightarrow X^\vee$ が $\bar{e}_X \circ (\varphi_X \otimes \mathrm{id}) = e_X$ と $(\mathrm{id} \otimes \varphi_X) \circ n_X = \bar{n}_X$ を満たすことを用いて示される：

$$X^* \xrightarrow{r^{-1}} X^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \bar{n}_X} X^* \otimes (X \otimes X^\vee) \xrightarrow{a^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^\vee \xrightarrow{e_X \otimes \mathrm{id}} \mathbb{I} \otimes X^\vee \xrightarrow{l} X^\vee.$$

V を $\mathcal{C}$ の対象とする。各自己射 $f \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ に対して $\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^l(f)$, $\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^r(f) \in \mathrm{End}(\mathbb{I})$ を

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^l(f) := (\overbrace{\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{l,V} \circ \cdots \circ \underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{l,V}}^{n})(f), \quad \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^r(f) := (\overbrace{\underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{r,V} \circ \cdots \circ \underline{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{C}}^{r,V}}^{n})(f) \tag{2.8}$$

と定める。修正されたトレース (2.8) は次の意味で組み紐モノイダル関手の下で保たれる：$\boldsymbol{k}$-線形な組み紐モノイダル共変関手 $(F, \phi, \omega) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{aligned} \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}'}^l\big((\phi^{(n)})^{-1} \circ F(f) \circ \phi^{(n)}\big) &= \omega^{-1} \circ F\big(\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^l(f)\big) \circ \omega, \\ \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}'}^r\big((\phi^{(n)})^{-1} \circ F(f) \circ \phi^{(n)}\big) &= \omega^{-1} \circ F\big(\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^r(f)\big) \circ \omega \end{aligned} \tag{2.9}$$

但し, $\phi^{(n)} : F(V)^{\otimes n} \longrightarrow F(V^{\otimes n})$ は ϕ を繰り返し合成することにより得られる同型射を表わす。もし, $\mathcal{C}$ の単対象 $\mathbb{I}$ が単純である, すなわち, $\mathrm{End}(\mathbb{I}) \cong \boldsymbol{k}$ ならば, $\boldsymbol{k}$ の元として

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}'}^l\big((\phi^{(n)})^{-1} \circ F(f) \circ \phi^{(n)}\big) = \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^l(f), \quad \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}'}^r\big((\phi^{(n)})^{-1} \circ F(f) \circ \phi^{(n)}\big) = \widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}_{\mathcal{C}}^r(f) \tag{2.10}$$

が成り立つ。

n-糸からなる組み紐群 B_n の表現 $\rho_V : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$ であって, 正の交差点と負の交差点がそれぞれ $c_{V,V}$ と $c_{V,V}^{-1}$ に対応するものが存在する [28]。各 $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対して

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^l_c(V) := \underline{\widetilde{\mathrm{Tr}}}^l_c\big(\rho_V(\boldsymbol{b})\big), \qquad \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_c(V) := \underline{\widetilde{\mathrm{Tr}}}^r_c\big(\rho_V(\boldsymbol{b})\big)$$

とおく。B_1 の単位元 $\mathbf{1}$ に対して, $\underline{\mathbf{1}\text{-}\dim}^r_c(V)$ は V の量子次元に一致する。

$\mathcal{C}$ は Schrödinger 対象 $\boldsymbol{S} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を持つと仮定する。このとき, $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対して

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\mathrm{Sdim}}^l(\mathcal{C}) := \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^l_c(\boldsymbol{S}), \qquad \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\mathrm{Sdim}}^r(\mathcal{C}) := \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_c(\boldsymbol{S}) \tag{2.11}$$

と定め, $\mathcal{C}$ の **Schrödinger 組み紐次元**と呼ぶ。ここで, 右辺の c は $\mathcal{C}$ の中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の組み紐構造を表わす。

命題 2.12. $\boldsymbol{b} \in B_n$ とする。単対象が単純であり, かつ, 左双対を持つ Schrödinger 対象が存在する $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対して, Schrödinger 組み紐次元 $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\mathrm{Sdim}}^l(\mathcal{C})$, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\mathrm{Sdim}}^r(\mathcal{C}) \in \boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏同値の下で不変である。

(**証明**)

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を $\boldsymbol{k}$-線形なモノイダル圏同値とする。$\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ に対する Schrödinger 対象とすると, 補題 2.5(2) により, $\boldsymbol{S}_{\mathcal{D}} := \big(\mathcal{Z}(F)\big)(\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}})$ は $\mathcal{D}$ に対する Schrödinger 対象である。以下, $\mathcal{Z}(F)$ を $(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) : (\mathcal{Z}(\mathcal{C}), c) \longrightarrow (\mathcal{Z}(\mathcal{D}), c')$ と表わし, 任意の左対象を持つ $\boldsymbol{V} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ に対して $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_{c'} \tilde{F}(\boldsymbol{V}) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_c \boldsymbol{V}$ が成り立つことを示す。$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{V}^{\otimes n}$ および $f := \rho_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{b}) : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ とおく。図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F}(\boldsymbol{V}) \otimes \tilde{F}(\boldsymbol{V}) \arrow[r, "c'_{\tilde{F}(\boldsymbol{V}),\tilde{F}(\boldsymbol{V})}"] \arrow[d, "\tilde{\phi}_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}}"'] & \tilde{F}(\boldsymbol{V}) \otimes \tilde{F}(\boldsymbol{V}) \arrow[d, "\tilde{\phi}_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}}"] \\
\tilde{F}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V}) \arrow[r, "\tilde{F}(c_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}})"] & \tilde{F}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V})
\end{tikzcd}$$

が可換であること, および, f が $c^{\pm 1}_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}}$ と $\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}$ のいくつかのテンソル積およびそれらの合成で表されていることから, $\tilde{\phi}$ から定義される同型射 $\tilde{\phi}^{(n)} : \tilde{F}(\boldsymbol{V})^{\otimes n} \longrightarrow \tilde{F}(\boldsymbol{X})$ に関して, 図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F}(\boldsymbol{V})^{\otimes n} \arrow[r, "\rho_{\tilde{F}(\boldsymbol{V})}(\boldsymbol{b})"] \arrow[d, "\tilde{\phi}^{(n)}"'] & \tilde{F}(\boldsymbol{V})^{\otimes n} \arrow[d, "\tilde{\phi}^{(n)}"] \\
\tilde{F}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\tilde{F}(f)"] & \tilde{F}(\boldsymbol{X})
\end{tikzcd}$$

は可換になる。したがって, (2.10) より,

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_{c'}\big(\tilde{F}(\boldsymbol{V})\big) &= \underline{\widetilde{\mathrm{Tr}}}^r_{c'}\big(\rho_{\tilde{F}(\boldsymbol{V})}(\boldsymbol{b})\big) \\
&= \underline{\widetilde{\mathrm{Tr}}}^r_{c'}\big((\tilde{\phi}^{(n)})^{-1} \circ \tilde{F}(f) \circ \tilde{\phi}^{(n)}\big) \\
&= \underline{\widetilde{\mathrm{Tr}}}^r_{c}(f) \\
&= \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_c(\boldsymbol{V})
\end{aligned}$$

を得る。特に, $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}}$ にとって,

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(\mathcal{D})=\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_{\mathcal{C}'}\big(\tilde{F}(\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}})\big)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}^r_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}})=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(\mathcal{C})$$

を得る。同様にして, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(\mathcal{C})=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(\mathcal{D})$ も示される。 □

$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 H に対して,

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H):=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l({}_H\mathsf{M}),\quad \underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H):=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r({}_H\mathsf{M}) \tag{2.12}$$

と定める。命題 2.12 により, 次の結果が直ちに従う。

系 2.13. 任意の $\boldsymbol{b}\in B_n$ に対して $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H)$, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)$ は有限次元 Hopf 代数 H のモノイダル森田不変量である。すなわち, $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 A, B に対して, ${}_A\mathsf{M}$ と ${}_B\mathsf{M}$ が $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として同値ならば, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(A)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(B)$ および $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(A)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(B)$ が成り立つ。 □

Hopf 代数 H に対して上記の不変量を計算するとき, 以下の公式 (2.13), (2.14) が役に立つ。$D(H)$ の普遍 R-行列 $\mathcal{R}$ に対して $u=S(\mathcal{R}^{(2)})\mathcal{R}^{(1)}$ を $D(H)$ の **Drinfel'd 元**という。Drinfel'd 元 u は可逆であり, その逆元は $u^{-1}=\mathcal{R}^{(2)}S^2(\mathcal{R}^{(1)})$ により与えられる [6,24]. V を有限次元左 $D(H)$-加群とする。任意の $a\in D(H)$ に対して, a の V 上の作用を $\underline{a}_V$ で表わす。このとき, $V^{\otimes n}$ 上の任意の $D(H)$-加群自己準同型 f に対して次が成り立つ [32; Example 4.5]:

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}^l_{c^{\mathcal{R}}}(f)=\mathrm{Tr}((\underline{u}_V^{-1}\otimes\cdots\otimes\underline{u}_V^{-1})\circ f), \tag{2.13}$$

$$\widetilde{\underline{\mathrm{Tr}}}^r_{c^{\mathcal{R}}}(f)=\mathrm{Tr}((\underline{u}_V\otimes\cdots\otimes\underline{u}_V)\circ f), \tag{2.14}$$

但し, 右辺の Tr は線形変換に対する通常のトレースを表わす。

モノイダル森田不変量 $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H)$ および $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)$ は以下の性質を持つ。

(1) 双対 Schrödinger 加群 ${}_{D(H)}H^{*\mathrm{cop}}$ $(=\boldsymbol{S}^H)$ の不変量の値は, Schrödinger 加群 ${}_{D(H^*)}H^*$ $(=\boldsymbol{S}_{H^*})$ の不変量の値から次のように計算することができる [32; Proposition 4.8].

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(\mathsf{M}^H)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l({}_{H^*}\mathsf{M}),\quad \underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(\mathsf{M}^H)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r({}_{H^*}\mathsf{M}) \tag{2.15}$$

(2) H がインボリュートリ (*i.e.* $S^2=\mathrm{id}_H$) かつユニモジュラーならば,

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)=\mathrm{Tr}(\rho(\boldsymbol{b})).$$

但し, $\rho: B_n\longrightarrow \mathrm{GL}(({}_{D(H)}H)^{\otimes n})$ は組み紐群 B_n の表現を表わす [32; Proposition 4.10].

(3) 余半単純な Hopf 代数に対してのみ有効である。詳しく述べると, H が余単純でないならば, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)=0$ となる [32; Theorem 4.15].

(4) 有限群 G の群 Hopf 代数 $\boldsymbol{k}G$ に対しては, 組み紐 $\boldsymbol{b}$ の閉包として得られる絡み目 $\widehat{\boldsymbol{b}}$ の $\mathbb{R}^3$ における補空間の基本群の G への表現の個数に等しい：

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(\boldsymbol{k}G)=\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(\boldsymbol{k}G)=\sharp\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{R}^3-\widehat{\boldsymbol{b}}),G).$$

但し, π_1 は基本群を表わす [32; Theorem 4.13].

(5) $\sigma_i \in B_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を組み紐群 B_n の標準的な生成元 (すなわち, 第 i 番目と第 $(i+1)$ 番目の間に 1 つだけ正の交差を持つ組み紐) とする。整数 p, q $(p \geq 2)$ に対して $\boldsymbol{t}_{p,q} := (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q \in B_p$ を (p, q)-トーラス組み紐と呼ぶ。

有限群 G の標数 0 の代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の群 Hopf 代数 $H = \boldsymbol{k}G$ の場合, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}_{2,2}$ の Schrödinger 組み紐次元は次で与えられる。

$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H) = \underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^r(H) = |G| \cdot \sharp\mathrm{Conj}(G),$$
$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H^*) = \underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^r(H^*) = |G|^2.$$

但し, $\mathrm{Conj}(G)$ は G の共役類の集合を表わす。よって, G がアーベル群でないならば,

$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H) \neq \underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H^*)$$

である [32; Example 4.14]. これは, [7] や [30] で与えられている他のモノイダル森田不変量にはみられない興味深い事実である。

一方, Hopf 絡み目 $\widehat{\boldsymbol{t}}_{2,2}$ の補空間の基本群は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に同型であるから, (4) により,

$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H) = \underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^r(H) = \sharp\mathrm{Comm}(G)$$

を得る。但し, $\mathrm{Comm}(G) = \{\ (x, y) \in G \times G \mid xy = yx\ \}$. よって, 先に得られた等式と比較して, 有限群論でよく知られた等式 $|G| \cdot \sharp\mathrm{Conj}(G) = \sharp\mathrm{Comm}(G)$ が得られる。

(6) $\boldsymbol{k}$ が標数 0 の代数閉体であるとき, $\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H)$ は本質的に, 既約な左 H-加群の同型類がいくつあるのかを表わした不変量である。詳しく述べると, H が標数 0 の代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純 Hopf 代数ならば,

$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^l(H) = \underline{\boldsymbol{t}_{2,2}\text{-Sdim}}^r(H) = (\dim H)\, \sharp\mathrm{Irr}(H)$$

である。但し, $\sharp\mathrm{Irr}(H)$ は既約な左 H-加群の同型類の個数を表わす [32; Theorem 4.12].

以上, 現在までに判明している主な結果を挙げてきたが, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{t}_{2,2}$ のとき, モノイダル森田不変量 $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H)$ および $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)$ がどのような表現論的意味を持つのかはまだわかっていない。これについて調べることや, 他のモノイダル圏に対する Schrödinger 対象について, 同種のモノイダル森田同値不変量を定めて, その性質を調べることは重要な課題である。また, 今まで得られている結果においては, すべて $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)$ となっている。一般に, 単対象が単純であるような $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対し, その Schrödinger 対象 $\boldsymbol{S}$ が左双対を持ち, $\boldsymbol{S}^* \cong \boldsymbol{S}$ を満たせば, [32; Lemma 4.6 (2)] から, $\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(\mathcal{C}) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(\mathcal{C})$ となることがわかるが, そうでない場合に両者が等しいかどうかはわからない。$\underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^l(H) \neq \underline{\boldsymbol{b}\text{-Sdim}}^r(H)$ となる Hopf 代数 H の例を見つけることも今後の課題の 1 つに挙げられよう。

Appendix. 以下は, 共著論文 [32] の中で修正を要すると思われる箇所の一覧である。

(i) (Lemma 2.9 (2)) 同型を与える写像 Ψ の定義域を $I^A(R^A(M) \otimes V)$ に修正し, $\Psi(a \otimes v \otimes m)$ を $\Psi(a \otimes m \otimes v)$ に。

(ii) (Lemma 3.1) $\mathcal{Z}(F)$ を規定するための条件として, $\Pi_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{Z}(F) = \Pi_{\mathcal{C}} \circ F$ であることに加えて補題 1.1(ii) の条件を付け加える。

(iii) (3.2 節の 2 行目) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}), \mathbb{I}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})})$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}), \mathbb{I}_{\mathcal{C}})$ に。

(iv) (Lemma 3.2 の証明)

- (3 行目) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big((\Pi_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{Z}(F))(\mathbf{X}), \mathbb{I}\big)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big((\Pi_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{Z}(\overline{F}))(\mathbf{X}), \mathbb{I}\big)$ に。
- (4 行目) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big((F \circ \Pi_{\mathcal{D}})(\mathbf{X}), \mathbb{I}\big)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big((\overline{F} \circ \Pi_{\mathcal{D}})(\mathbf{X}), \mathbb{I}\big)$ に。
  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{X}), \overline{F}(\mathbb{I})\big)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\Pi_{\mathcal{D}}(\mathbf{X}), F(\mathbb{I})\big)$ に。
- (5 行目) $\mathbf{X} \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を $\mathbf{X} \in \mathcal{Z}(\mathcal{D})$ に。

(v) (Theorem 3.3(2), Theorem 3.4(2), Theorem 3.8(1)) 一意性の部分は (ii) と同じ条件を付け加える。Theorem 3.8(1) においては, さらに, $F \circ R^A$ を $F^{\mathrm{rev}} \circ R^A$ に。

(vi) (Theorem 3.3(2) の証明) Φ_A を Φ_A^{-1} に, Φ_B を Φ_B^{-1} に。

(vii) (Theorem 3.10 の 2 行上) dual Schrödinger object を dual Schrödinger module に。

(viii) (Theorem 3.11 の 2 行目) $({}_{D(A^*)}\mathsf{M})^{\mathrm{rev}} =$ を削除。

(ix) (p.18 の 3 行目) ${}_{D(A)}A^*$ を ${}_{D(A)}A^{*\mathrm{cop}}$ に。

(x) (Proposition 4.3, Proposition 4.4, Subsection 4.2) $\mathcal{C}$ の unit object が simple であるという仮定を付け加える。

(xi) (Lemma 4.9 およびその証明) $\rightharpoonup$ を $\bullet$ に。但し, p.25 の下から 5 行目の $S^{-1}(e_i) \rightharpoonup a_{(2)}$ だけは $S^{-1}(e_i) \blacktriangleright a_{(2)}$ に。

(xii) (p.26 の 1 行目) 引用文献を [30] から文献 [25] の Theorem 4(a) に変更。

(xiii) 第 3 節で, $\mathbf{X}$ を $\mathbf{V}$ に変更する (第 3 節冒頭のモノイダル圏の中心の定義は [14] を踏襲しているため)。

References

[1] 阿部英一,『ホップ代数』岩波書店, 東京, 1977.

[2] D. Bulacu and B. Torrecillas, *The representation-theoretic rank of double of quasi-Hopf algebras*, J. Pure and Appl. Algebra **212** (2008), 919–940.

[3] Y. Doi, *Braided bialgebras and quadratic bialgebras*, Commun. Algebra **921** (1993), 1731–1749.

[4] 土井幸雄, 竹内光弘, Hopf 代数のコサイクル変形, 数理解析研究所講究録 **942** (1996), 29–52.

[5] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, In Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, CA., 1987, 798–820.

[6] V. G. Drinfel'd, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321–342.

[7] P. Etingof and S. Gelaki, *On the exponent of finite-dimensional Hopf algebras*, Math. Res. Lett. **6** (1999), 131–140.

[8] X. Fang, *Quantum groups, q-Boson algebras and quantized Wely algebras*, International. J. Math. **22** (2011), 675–694.

[9] J. Hu and Y. Zhang, *The β-character algebra and a commuting pair in Hopf algebras*, Algebra Represent. Theory **10** (2007), 497–516.

[10] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[11] 神保道夫, 『量子群とヤン・バクスター方程式』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.

[12] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102** (1993), 20–78.

[13] A. Joyal, R. Street, *Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), 43–51.

[14] C. Kassel, *Quantum Groups*, G.T.M. 155, Springer-Verlag, New York,1995.

[15] L. A. Lambe and D. E. Radford, *Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*, J. Algebra **154** (1993), 228–288.

[16] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, G.T.M. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[17] S. Majid, *Representation-theoretic rank and double Hopf algebras*, Comm. Algebra **18** (1990), 3705–3712.

[18] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, 1995.

[19] 増岡彰, email dated July, 23, 2013.

[20] A. Masuoka, *Construction of quantized enveloping algebras by cocycle deformation*, The Arabian Journal of Science and Engineering–Theme Issues, Vol.33, No.2C (2008), 387–406.

[21] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, C.B.M.S. 82, American Mathematical Society, 1993.

[22] S.-H. Ng and P. Schauenburg, Higher Frobenius-Schur indicators for pivotal categories, Contemp. Math. **441**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 63–90.

[23] D. E. Radford, *The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite*, Amer. J. Math. **98** (1976), 333–355.

[24] D. E. Radford, *On the antipode of a quasitriangular Hopf algebra*, J. Algebra **151** (1992), 1–11.

[25] D. E. Radford, *Minimal quasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 285–315.

[26] D. E. Radford, *On orienter quantum algebras derived from representations of the quantum double of a finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **270** (2003), 670–695.

[27] D. E. Radford and J. Towber, *Yetter-Drinfel'd categories associated to an arbitrary bialgebra*, J. Pure Appl. Algebra **87** (1993), 259–279.

[28] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.

[29] P. Schauenburg, *Hopf bigalois extenstions*, Commun. Algebra **24** (1996), 3797–3825.

[30] K. Shimizu, *Monoidal Morita invariants for finite group algebras*, J. Algebra **323** (2010), 397–418.

[31] K. Shimizu, *The pivotal cover and Frobenius-Schur indicators*, arXiv1309.4539v3.

[32] K. Shimizu and M. Wakui, *Schrödinger representations from the viewpoint of monoidal categories*, arXiv1312.5037v1.

[33] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[34] M. Wakui, *Polynomial invariants for a semisimple and cosemisimple Hopf algebra of finite dimension*, J. Pure and Appl. Algebra **214** (2010), 701–728.

[35] 和久井道久, *Schrödinger representations of Drinfel'd doubles of Hopf algebras from the viewpoint of tensor Morita invariants*, 数理解析研究所講究録 **1840** (2013), 89–108.

[36] D. N. Yetter, *Quantum groups and representaions of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **108** (1900), 261–290.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science
Kansai University
3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan