No.10 2026 年 6 月 11 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

10-1.

(1) $t > 0$ とする。閉区間 $[0, t]$ を n 等分して分割

$$\Delta : 0 < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \cdots < \frac{(n-1)t}{n} < t$$

を作り、各小閉区間 $\left[\frac{(i-1)t}{n}, \ \frac{it}{n}\right]$ $(i = 1, \cdots, n)$ から 1 点 $\frac{it}{n}$ を選んで、Δ にフィットする有限数列 ξ を作る：

$$\xi \ : \ \frac{t}{n}, \ \frac{2t}{n}, \ \cdots, \ \frac{(n-1)t}{n}, \ t.$$

関数 $f(x) = x$ $(x \in [0, t])$ のリーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、

$$R = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{3i\pi}{n}\right)$$

とおく。閉区間 $[0, \pi]$ の分割 $\Delta : 0 < \frac{\pi}{n} < \frac{2\pi}{n} < \cdots < \frac{(n-1)\pi}{n} < \pi$ とそれにフィットする有限数列 $\xi = \left\{\frac{i\pi}{n}\right\}_{i=1}^{n}$ をとると、ある連続関数 $f(x)$ $(x \in [0, \pi])$ のリーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ に一致する。そのような連続関数 $f(x)$ を 1 つ見出せ。

10-2. 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in [1, 3])$ を考える。

(1) 分割 $\Delta : 1 < \frac{4}{3} < 2 < \frac{8}{3} < 3$ について、過剰和 $S_\Delta(f)$ と不足和 $s_\Delta(f)$ を求めよ。

(2) 上の結果を用いて、定積分

$$\int_1^3 \frac{1}{x} \, dx$$

の値を評価せよ。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.10]

2026 年 6 月 11 日発行

■ 演習 9-1 について

逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}(x)$ $(-1 < x < 1)$ の微分が正しく行えていない答案が多数ありました。Sin の右上の -1 は逆関数を意味し、逆数を意味しているわけではありません。(8-4 b) に書かれているように、$\left(\mathrm{Sin}^{-1}(x)\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となります。結果のみを記すと、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ はそれぞれ次のようになります。

$$f'(x) = -\frac{x\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + 1, \quad f''(x) = -\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{1-x^2}.$$

■ 演習 9-2 について

Maclaurin 展開の式 (9-2 a) を正しく理解できていない人がまだ沢山いるようです。0 を含む開区間上で定義された、n 回微分可能な関数 $f(x)$ の第 n 次 Maclaurin 展開は

$$(*) \quad f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}}_{①} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n}_{②} \quad (0 < \theta < 1)$$

により与えられます。ここで、逐次導関数 $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ には 0 を代入しますが、第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ には θx を代入することに注意してください。もし、$f^{(n)}(x)$ にも 0 を代入してしまうと、$f(x)$ 自身が多項式関数になってしまいます。②は $f(x)$ に等しくするための「調整」の役割を果たしている項といえます。②をラグランジュの剰余項と呼ぶのでした。

上記のことに注意して $f(x) = \sqrt{1+x}$ $(x > -1)$ の第 3 次 Maclaurin 展開を求めると、$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$ $(0 < \theta < 1)$ となります。この表示から、$f(x)$ を近似する 2 次多項式 $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ を見出すことができます。さらに、$f(x)$ を $p(x)$ で近似したときの誤差は $R_3 = \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$ により与えられるので、$|x| < \frac{1}{10}$ の範囲で $|R_3|$ を評価することで、具体的な誤差の程度を知ることができます。計算すると $|R_3| < 10^{-4}$ がわかります。なお、答えは同じになったとしても、評価の根拠がはっきりしない場合は加点されません。

■ 第 9 回学習内容チェックシート Q1 について

- ◦ 第 1 項目の 2 番目と 4 番目について、$\frac{d}{dx}(f'(x))$, $\frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x))$ といった解答がありましたが、これらは「表し方」ではなく「定義」になります。2 番目と 4 番目の枠にはそれぞれ $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ と $\frac{d^nf}{dx^n}(x)$ を書き入れてください。
- ◦ 第 2 項目の余弦関数の第 n 次導関数 $(\cos x)^{(n)}$ については符号が正しくないシートが多数ありました。$n = 2m+1$ のとき $(-1)^m \sin x$ では、$m = 0$ のとき $\sin x$ になってしまい、$\cos x$ を微分した結果と符号が一致しません。$n = 2m+1$ のときは $(\cos x)^{(n)} = (-1)^{m+1}\sin x$ になります。また、場合分けに用いる中括弧 $\{$ がないシートが多かったです。
- ◦ 第 3 項目の最後の枠には、ラグランジュの剰余項 $R_5(x)$ の式を書き入れますが、θ の範囲が書かれていないものがほとんどでした。式の後に、$(0 < \theta < 1)$ を追記してください。

■ 次回予告

次回は「微分」「積分」とが互いに逆操作であることを主張する微積分学の基本定理を学びます。この定理のおかげで、様々な関数の積分を具体的に求められるようになります。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 10 回 (2026 年 6 月 11 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。