線形代数 1 演習問題

10-1. (行列の標準形と階数)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & -8 \\ 4 & -8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

について、

(1) A に有限回行基本変形を施して、階段型にし、$\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A の標準形を求めよ。(答えのみは不可。どのような基本変形を施して標準形が得られたのかがわかるように変形の過程を書くこと。)

10-2. (正方行列の階数と行列式)

a を正の実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -a & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -a & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ。

線形代数１通信　[No.10]　2026 年 6 月 11 日発行

■ 演習 9-1 について

$(3,1)$-成分の -59 と $(3,2)$-成分の 59 に着目して、第 1 列の 1 倍を第 2 列に加えて、0 を増やします。すると、第 2 列から $a-11$ を括り出すことができるので、その操作を行ってから、第 1 行の -1 倍を第 2 行に加えて、$(2,2)$-成分を 0 にします。そして、サラスの方法で計算すると $|A|=(a-11)(-(a-19)^2-59^2)=(a-11)(a-78)(a+40)$ のように因数分解できるので、A が正則でないような a の値は $-40, 11, 78$ になります。

ここに来て、行列と行列式の混同が目立つようになりました。表記上は、**行列は丸括弧 ( )** で括り、**行列式は絶対値記号 | |** で挟む違いでしかありませんが、行列は数を長方形の形に並べた表であるのに対し、行列式はある規則に則って計算される数または式を表わしています。そのため、**行列の基本変形では矢印 $\to$ を用います**が、**行列式の計算では等号 $=$ を用います**。計算規則についても、行列式はある行 (またはある列) に定数 t が掛けられていれば、それで括り出すことができますが、行列の方はすべての成分が t 倍されていないとできません。このように、行列と行列式とは考え方も計算規則も異なるので、きちんと区別して書く必要があります。

■ 演習 9-2 について

(1) B を見つけられなかった人が多かったです。$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ とおくと、$X=AA^{\mathrm{T}}$ を満たすことが計算によりわかます。よって、行列式の性質 $|AB|=|A|\cdot|B|$ と $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$ を用いて、$|X|=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}|=|A|^2$ がわかります。ここで、

$$|A|=abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{1}\times(-1)+\boxed{3}}{\overset{\boxed{1}\times(-1)+\boxed{2}}{=}} abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \cdots = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

なので、$|X|$ は $|X|=a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ のように因数分解できます。

(2) は例年になくよくできていました。$A^3=-2A$ の両辺の行列式をとって $|A|$ の等式を導きます。その際、$|-2A|$ を $|-2|\cdot|A|=2|A|$ としがちですが、それは間違いです。正しくは、各列から -2 を括りだして、$|-2A|=(-2)^4|A|=16|A|$ です (A は 4 次正方行列という設定になっていることに注意しましょう)。$|A|^3=16|A|$ を $|A|$ について解き、$|A|$ の取り得る値は $0, \pm 4$ であることがわかります。

■ 第 9 回の学習内容チェックシートについて

- ○ Q2 には余因子の値を入れる箇所がいくつかあります。そのうち $\tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{23}$ について符号が逆のものがありました。また、$b_2c_3-c_2b_3$ や $b_3c_1-c_3b_1$ など、未定義の文字 b_1, c_1 を使って書かれているものもありました。問いの行列 A の成分は a_{ij} で与えられているのですから、余因子 $\tilde{a}_{ij}$ の成分も $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}$ (のいくつか) を用いて書いてください。
- ○ Q3 では例示されている 3 次正方行列について答えるのではなく、文字 a を含む一般の正方行列に対して、それが正則でなくなるときの a の値を求める手順を答えます。まず、何を計算し、次に、それがどうなるときの a の値を求めればよいのかを書いてください。

■ 次回予告

次回は、解が複数存在する場合の連立一次方程式の解法を学びます。解を簡潔に記述するために、数ベクトル空間、一次独立といった、線形代数における主要概念を導入します。

線形代数１・第 10 回 (2026 年 6 月 11 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。