

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎1）演習問題**9-1. 関数**

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1}(x) \quad (-1 < x < 1)$$

の導関数と第2次導関数を求めよ。

9-2. 関数

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad (x > -1)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の第3次 Maclaurin 展開を求めよ。
- (2) (1) の結果を利用して、 $f(x)$ を近似する2次多項式を1つ与えよ。さらに、 $|x| < \frac{1}{10}$ の範囲において、近似の誤差が10の何乗程度に収まるかを、 $\sqrt{10} > 3$ を用いて調べよ。

■ 演習 8-1 について

(1) の答えは $\text{Tan}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ です。導出過程を含めて、よくできていました。

$x = \text{Tan}^{-1}(-1)$ において \tan の式に書き換えて解きます。 $\tan x = -1$ とだけ書きがちですが、 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ も必要です。何故なら、 \tan は周期関数なので、定義域を適当に制限しないと逆関数を持たないからです。一般に、 $y \in \mathbb{R}$ に対して「 $x = \text{Tan}^{-1}(y) \iff \tan x = y, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 」のように書き換えられます。波線部分を忘れないようにしましょう。

(2) は逆関数の微分公式 (8-4a) を用いて、導関数を求めます。単に、その公式に当てはめると、

$$(\text{Tan}^{-1}y)' \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \stackrel{(\#)}{=} \frac{1}{1 + y^2}$$

のような解答が得られますが、これでは不十分です。公式を適用する前に、「 $x = \text{Tan}^{-1}(y)$ とおくと、逆関数の定義より $\tan x = y$ となり」と言った x と y の関係を記す必要があります。これがないと、(*) や (#) の等号が成立する理由を説明することができないからです。

なお、この問題は、アブストラクトの 46 ページに書かれているような逆関数の微分公式の導き方を、 $f(x) = \tan x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) の場合に当てはめて解答することもできます。

■ 演習 8-2 について

(1) の答えは $f'(x) = \frac{5 \sin 5x}{2\sqrt{2} - \cos 5x}$ であり、(2) の答えは $g'(x) = 3^x((\log 3)(\log 2x) + \frac{1}{x})$

です。いずれもよくできていました。その中で、(2) については、微分 $(\log 2x)'$ を $\frac{1}{2x}$ としてしまったり、 $(\log 3)(\log 2x)$ を $\log(2x + 3)$ に書き換えてしまった誤答が少しありました。

■ 第 8 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の 2 番目には、関数 $f(x)$ ($x \in S$) が狭義単調増加であるとはどのようなことを意味するのかを書きます。(8-3a) における resp. の中まで書いた人が少なからずいましたが、その中身は狭義単調減少であるための条件なので、書くのは不適切です。また、「～を満たす」や「 $f(x_1) < f(x_2)$ 」で止まっているシートもありました。問いに対する答えとして、言葉を最後まで書くようにしてください。
- Q2 の最初の項目における 4 つの箱枠のうち、最後の枠の解答として、何故か「逆関数」を書き入れたシートが何枚かありました。定義域が逆関数というのは意味不明です。この枠には「値域」が入ります。関数 f と逆関数 f^{-1} とでは、定義域と値域が入れ替わるということですが。
- Q2 の最後の項目は、冪関数 $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$) の導関数を答える問題でした。 $(\log x)x^\alpha$ や $(\log a)a^x$ という誤答が少数ですが、ありました。 α が自然数の場合と同様に、冪関数の導関数は $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ となります ((8-7c) を参照してください)。また、 a と書いて見える解答が多かったです。 a と α をはっきり区別して書いてください。

■ 次回予告

次回から積分に入ります。次回の目標は定積分の概念を理解することです。

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎1)・第9回(2026年6月4日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。