線形代数 1 演習問題

9-1. (行列式と行列の正則性)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a-71 & 60 & -26 \\ -52 & a+41 & 33 \\ -59 & 59 & a-19 \end{pmatrix}$ が正則でないのは、a がどんな値のときか？そのような a の値をすべて求めよ。

9-2. (行列の積と行列式)

(1) 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \\ a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 & a^5+b^5+c^5 \\ a^4+b^4+c^4 & a^5+b^5+c^5 & a^6+b^6+c^6 \end{pmatrix}$ の行列式 $|X|$ を、

$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} B$ となる 3 次正方行列 B を見出すことにより、因数分解せよ。

(2) 4 次実正方行列 A が $A^3 = -2A$ を満たすとき、A の行列式 $|A|$ の取り得る値を求めよ。

線形代数１通信 [No.9]

2026 年 6 月 4 日発行

■ 第 8 回の学習内容チェックシートについて

- ◦ Q1 の最後の行列式の値の誤答として 0, 1, $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ というものが多かったです。正しい値は -1 になります。次のように考えましょう。与えられた行列式において、第 1 行と第 n 行を入れ替えると単位行列 E_n になります。2 つの行を入れ替えると行列式の値は符号が変わるので、Q1 の最後の行列式の値は、$|E_n|$ の -1 倍、つまり、-1 となるわけです。
- ◦ Q3 の最初の枠の解答では、「1 つの行あるいは列に 0 ができるだけ多くなるようにする」とだけ書かれているものがありました。どんな操作を行いそのような形にするのか、そして、そのような形にすることができた後に、何を行うのかについても記述してください。
- ◦ Q3 の 2 番目の枠の解答として「単に計算が楽になるから」というものがありましたが、なぜ楽になるのかを、Q3 の最初の枠の解答と関連づけて答えてください。

■ 演習 8-1 について

定義通りに計算するだけの問題です。$|A|$ を第 4 列に関して余因子展開することにより、

$$f_0(x) = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & x-3 & 10 \\ 1 & 2 & x-5 \\ x & x & x \end{vmatrix}, \qquad f_1(x) = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & x-5 \\ x & x & x \end{vmatrix},$$

$$f_2(x) = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & x-3 & 10 \\ x & x & x \end{vmatrix}, \qquad f_3(x) = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ 1 & x-3 & 10 \\ 1 & 2 & x-5 \end{vmatrix}$$

が得られ、それぞれの行列式を計算することで、

$$f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = -x^3 + 10x^2 - 15x, \quad f_3(x) = x^3 - 9x^2 + 5x + 15$$

と求められます。3 次行列式はサラスの方法で計算できますが、$f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ に関しては、第 3 行から x をくくり出してから、第 3 行の適当な定数倍を第 1 行と第 2 行にそれぞれ加えて 0 を増やし、0 が増えた列に関して余因子展開しましょう。$f_3(x)$ に関しては、第 1 行に足しあげる操作を行って見ましょう。$x+1$ でくくり出せることがわかります。その後、第 1 行の適当な定数倍を第 2 行と第 3 行にそれぞれ加えて、0 を増やしてから計算するとよいでしょう。

■ 演習 8-2 について

最初に、第 1 行から 9 をくくり出した後、第 4 列から 5 をくくり出します。次に、$\boxed{1}\times 2 + \boxed{2}$, $\boxed{1}\times 3 + \boxed{3}$, $\boxed{1}\times 1 + \boxed{4}$ を行い、第 1 行の第 2 列目以下を 0 にします。そして、第 1 行に関して余因子展開します。すると、$|A| = 9\cdot 5\begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 12 & 22 & 2 \\ -9 & -6 & 4 \end{vmatrix}$ となることがわかります。続けて第 1 列から 3 をくくり出した後、$\boxed{3}\times(-1) + \boxed{1}$, $\boxed{3}\times(-11) + \boxed{2}$ を行い、第 1 行に関して余因子展開します。すると、$|A| = -45\cdot 3\cdot (-1)^{1+3}\, 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -50 \end{vmatrix} = -135\cdot(-100) = 13500$ が得られます。

■ 次回予告

次回は、再び、階数を取り上げます。今までは行に関する基本変形ばかりを考えてきましたが、列に関する同様の変形を導入して、両方用いてどのような行列も、“対角線”上に 1 がいくつか並びあとの部分はすべて 0 であるような行列 (階数標準形) に変形できることを示します。

線形代数１・第９回 (2026 年６月４日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。