2026 年 6 月 9 日

基礎数学演義 3　第 9 回・問題解答&要約シート (1)

学 籍 番 号 ________________　氏 名 ____________________________

Q9-1. 複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して $\overline{\alpha} = a - bi$ を α の共役複素数と呼ぶ。

複素数 α, β に対して $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ が成り立つことを用いて、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ となることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

Q9-2. 0 でない多項式 $f \in \mathbb{R}[X]$ が $\alpha = 4 - i \in \mathbb{C}$ を根に持つとする。このとき、f は $\mathbb{R}[X]$ において $X^2 - 8X + 17$ により割り切れることを示せ。

Q9-3. n 次式 $f, g \in \mathbb{K}[X]$ が $\mathbb{K}$ に属する相異なる $(n+1)$ 個の元 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に対して $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を満たすならば、多項式として $f = g$ となることを、[系 9 - 2 - 3] を用いて示せ。

2026 年 6 月 9 日

基礎数学演義 3　第 9 回・問題解答&要約シート (2)

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q9-5. ラグランジュの補間式を適用して、(x, y)-座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 3 点 $\mathrm{P}(0, \alpha)$, $\mathrm{Q}(1, \beta)$, $\mathrm{R}(2, \gamma)$ を通る放物線あるいは直線の方程式を求めよ。但し、最終的な答えは $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ の形で与えること。

Q9-6. 複素数係数の多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d$ $(a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{C})$ と n 次複素正方行列 A に対して、n 次複素正方行列 $f(A)$ を

$$f(A) = a_0 E_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_d A^d$$

により定義する。但し、E_n は n 次単位行列を表わす。

(1) 2 次複素正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式 $\varphi_A(x) = |xE_2 - A|$ を考える。$\varphi_A(A) = O$ となることを示せ。

(2) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ の場合を考える。$f(x)$ を $\varphi_A(x)$ で割ったときの商と余りを求めることにより、$f(A)$ を計算せよ。