No.8 2026 年 5 月 28 日

# 数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

**8-1**. 逆関数定理により、関数 $\tan x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ は微分可能な逆関数を持つ (この事実は既知とする)。この逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}(y) \quad (y \in \mathbb{R})$ で表わす。

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)$ を求めよ (答えのみは不可)。

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}(y) \quad (y \in \mathbb{R})$ の導関数を求めよ (どのようにして導いたのかがはっきりわかるように書くこと)。

**8-2**. 次の関数を微分せよ (どのようにして導いたのかがはっきりわかるように書くこと)。

(1) $f(x) = \sqrt{2 - \cos 5x} \quad (x \in \mathbb{R})$ (2) $g(x) = 3^x \log 2x \quad (x > 0)$

# 数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信　[No.8]

2026 年 5 月 28 日発行

## ■ 第 7 回学習内容チェックシートについて

◦ Q2(2) は、ラグランジュの平均値の定理から関数の増減に関してわかることを答える問題でした。ところが、2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ直線と同じ傾きを持つ接線が引ける、という解答が何枚もありました。これは、関数の増減に関する結果と言えません。この枠には [補題 7-2-1] の内容を書いてください。

◦ Q3 は関数 $f(x)$ の極大値を与える点を求めるための方法・方針を答える問題でした。高校の数学 III で学んでいるように、まず最初に導関数 $f'(x)$ を求め、$f'(x) = 0$ を解きます。その解のすべてが $f(x)$ の極値になるわけではありません。解の中から、その前後で $f'(x)$ の符号が正から負になるものを拾い出すわけです。

## ■ 演習 7-1 について

まず、$f(x)$ を微分して $f'(x) = 0$ となる $x \in (-\pi < x < \pi)$ を求めます。$f'(x) = (1 - \cos x)(1 + 2\cos x)$ のように因数分解されることから、$x = 0,\ \pm\dfrac{2}{3}\pi$ が解になります。これをもとに増減表を書くわけですが、0 が含まれていないものや、0 の前後で $f'(x)$ の符号が正から負になっているものがありました。

| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | / |
| $f(x)$ | / | ↘ | (極小) | ↗ | | ↗ | (極大) | ↘ | / |

増減表は右上のようになり、極大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 極小値は $f\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ です。

## ■ 演習 7-2 について

ロピタルの定理 [定理 7- 4 -1] を適用する際には、① $f(a) = g(a) = 0$ であり (すなわち、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ の不定形であり)、関数 $f(x)$, $g(x)$ は微分可能であって、② 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在していなければなりません。例えば (1) で、「ロピタルの定理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(3x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to a}\frac{(\cos(3x) - 1)'}{(x^2)'} = \cdots$」のように解答すると、論理的に誤りになります。ロピタルの定理によりこの等式が成立するのは、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(\cos(3x) - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to a}\frac{-3\cos(3x)}{2x}$ の存在が言えてからですが、この極限もまた $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので、この時点でロピタルの定理は使えないのです。分母・分子をそれぞれ微分していって、極限が存在することがわかった段階で初めてロピタルの定理が適用できるようになります。(1) の極限は、分母・分子をそれぞれ 2 回微分すると極限が存在するようになり、(2) の極限は、分母・分子をそれぞれ 3 回微分すると極限が存在するようになります。その結果、(1) の極限は $-\dfrac{9}{2}$, (2) の極限は 2 であることがわかります。

## ■ 次回予告

次回は関数を続けて 2 回、3 回、一般に、$n$ 回微分することを考えます。そして、微分可能な関数を多項式関数によって近似するための公式—Maclaurin 展開—を導出します。

**数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 8 回 (2026 年 5 月 28 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

---

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。