2026 年 5 月 28 日

線形代数 1 演習問題

8-1. (余因子展開)

4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 2 & -4 & a \\ 1 & x-3 & 10 & b \\ 1 & 2 & x-5 & c \\ x & x & x & d \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を第 4 列に関して余因子展開することにより、

$$|A| = f_0(x)a + f_1(x)b + f_2(x)c + f_3(x)d$$

を満たす多項式 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を求めよ。

8-2. (行列式の計算)

次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} -9 & 18 & 27 & 45 \\ -10 & 23 & 41 & 55 \\ -11 & 34 & 55 & 65 \\ -12 & 15 & 30 & 80 \end{vmatrix}$$

線形代数１通信　[No.8]　2026 年 5 月 28 日発行

■ 第 7 回の学習内容チェックシート Q2 の 4 番目の枠について

3 次の行列式を 2 次の行列式の交代和で書くように指示されていたのですが、3 次の行列式をサラスの公式で展開した式を書き入れた人が何人かいました。アブストラクト 60 ページの 4 行目を見てください。3 次の行列式が 3 つの 2 次の行列式 (に定数倍を掛けたもの) の交代和で表わされていますね。Q2 の 4 番目の枠内にはこれを書いてください。

■ 演習 7-1 について

(1) の行列式の値は -2 であり、(2) の行列式の値は 1680 になります。

2 次や 3 次の行列式は、公式に当てはめてすぐに計算することができますが、[例 7-2-1], [例 7-4-1(1)] および事前練習用問題 pre7-1 のヒントと略解のように、工夫して計算しましょう。

(1) の行列式については、第 1 行の -1 倍を第 2 行に加えてから計算すると、

$$\begin{vmatrix} 76 & 78 \\ 77 & 79 \end{vmatrix} \overset{①\times(-1)+②}{=} \begin{vmatrix} 76 & 78 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 76\cdot 1 - 78\cdot 1 = -2$$

のように簡単に計算できます。

(2) の行列式については、第 1 列、第 2 列、第 3 列から順に 3, 5, 7 をくくりだした後、第 1 列の -1 倍を第 2 列と第 3 列に加えて計算するとよいでしょう。

■ 演習 7-2 について

[例 7-4-1(2)] や pre7-2 のヒントと略解のように、主に (Det4) を用いてある行または列に共通因子が揃うようにしてから、それを括り出すことにより因数分解していってください。この問題の目的は行列式の性質を理解することにあるため、サラスの公式で展開してから因数分解しても点数になりません。

(1) まず、第 1 列の -1 倍を第 2 列と第 3 列に加えます。すると、第 2 列から $c-a$ を、第 3 列から $c-b$ を括り出すことができます。さらに、第 2 列の -1 倍を第 3 列に加えます。すると、第 3 列から $a-b$ を括り出すことができます。最後に、第 3 行の 1 倍を第 2 行に加えます。すると、最初に与えられた行列式は $(c-a)(c-b)(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2+ab+b^2 & a+b+c & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & -1 \end{vmatrix}$ となり、この行列式をサラスの公式で計算すると求める因数分解が得られます。

(2) 第 1 行へ第 2 行から第 3 行までを足し上げます。すると、第 1 行から $3a+2b+c$ を括り出すことができます。次に、第 1 列の -1 倍を第 2 列と第 3 列に加えます。すると、最初に与えられた行列式は $(3a+2b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2b+c & b \\ a+b & -b & c \end{vmatrix}$ となります。さらに、第 3 列の -1 倍を第 2 列に加えると、第 2 列から $b+c$ を括り出すことができます。ここで、ようやくサラスの公式を使って計算することにより、求めていた式 $(3a+2b+c)(b+c)^2$ を得ることができます。

■ 次回予告

正方行列の積と行列式との間には、関係式 $|AB| = |A||B|$ が成り立ちます。次回は、この関係式を用いて、正方行列が正則であるかないかが行列式の値を調べることによってわかることを証明します。さらに、正則行列の逆行列を行列式によって計算するための公式を導きます。

線形代数１・第８回 (2026 年 5 月 28 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。