数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

7-1. 関数

$$f(x) = \sin x(1 - \cos x) \qquad (-\pi < x < \pi)$$

の増減の様子を調べて、極値を求めよ。

7-2. 次の極限が存在するならば、その値を求めよ (定理を使う際にその仮定が満たされていることを確認すること)。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ (2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信　[No.7]

2026 年 5 月 21 日発行

■ 第 6 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の表の 3 番目と 4 番目について、実数としての a^x と指数関数としての a^x の区別ができていない解答がありました。

  3 番目の方は、実数としての a^x の定義が問われています。よって、(6-2a) に書かれているように、$x = \lim_{n\to\infty} r_n$ となる有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとって、$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ により定まる実数、と答えてください。一方、4 番目の方は、正の実数 a を底とする指数関数の定義が問われています。よって、実数 x を入力したときに、a^x を出力する関数 $\exp_a(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R})$ のことと答えましょう。あるいは、有理数上で定義された関数 $g(r) = a^r$ を、連続になるように定義域を実数全体に拡張して得られる関数 $\exp_a(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$ のことと書いても構いません。
- Q3 の第 2 項目は、3 つの実数 $2^{\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{1}{6}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{12}}$ の大小を比較する問題でした。予想外にできていないシートが多かったです。自然数 n に対して関数 $f(x) = x^n$ $(x > 0)$ は狭義単調増加関数なので、n 乗根の大小関係は n 乗することにより比較することができます (第 4-5 節参照)。この問いの場合には、12 乗すれば簡単に大小を比較することができます。

■ 演習 6-1 について

(1) は $e^{-\frac{2}{3}}$, (2) は e^3 が答えになります。

(1) いろいろな求め方が考えられますが、オーソドックスなのは、与えられた極限の中身を $\left(\left(1 + \frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n\right)^2$ の形に変形して、$\lim_{n\to\infty}$ を外側の 2 乗がついている括弧中に入れて計算する、という方法でしょう。その際に、関数 $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ の連続性を使っていることに注意しましょう。このことについての言及がない解答が多かったです。

(2) は、与えられた極限の中身を $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ の形に変形することがポイントになります。図らずも、$\left(1 + \frac{3n+2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{3+\frac{2}{n}}{n}\right)^n$ のように変形し、「$\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$ だから $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3+\frac{2}{n}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$」という解答がかなりありました。答えは正解と同じですが、一部だけを先行して極限をとることは許されませんので、この解答では点がつきません。

■ 演習 6-2 について

よくできていましたが、指数関数が掛け算されている関数は、ライプニッツの公式で計算した後に、必ず各項にその指数関数が現れるので、その指数関数で括り出すようにしましょう。計算結果のみ記すと、$f'(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$, $g'(x) = 2xe^{x^2}\cos^3(x^3)\left(\cos(x^3) - 6x\sin(x^3)\right)$ となります。

■ 次回予告

次回は、逆関数の微分公式の導出方法を説明し、それを用いて、逆三角関数の微分を計算します。さらに、対数関数、冪関数を定義し、その導関数を求めます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第７回 (2026 年 5 月 21 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。