No.7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2026 年 5 月 21 日

線形代数 1 演習問題

7-1. (2 次および 3 次の行列式)

次の各行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 76 & 78 \\ 77 & 79 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 25 & 49 \\ 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$

7-2. (行列式の性質と因数分解)

行列式の計算の仕方を工夫して、次の等式を示せ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(2) $\begin{vmatrix} a+b+c & a & a \\ a & a+2b+c & a+b \\ a+b & a & a+b+c \end{vmatrix} = (3a+2b+c)(b+c)^2$

線形代数１通信　[No.7]　2026 年 5 月 21 日発行

■ 第６回学習内容チェックシート Q1 について

「n 次正方行列が正則かどうかを調べるには？」という問いに対して、正則行列の定義を書いた人がいました。$AX = XA = E_n$ となる正方行列 X が存在するか否かを直接調べるのは困難なので、ここには、[定理 7-2-1] と [例 7-2-2] に書かれているような実用的な方法を記入してください。行列 $(A|E_n)$ に対して、どんな操作を行って、どんな形にできれば A は正則と言えるのかを答えた上で、A が正則なときの逆行列は、その操作を行って得られる行列のどの部分を見ればわかるのかを答えてください。

■ 演習 6-1 について

事前練習用演習問題 pre6-1 と同じ方法で解くことができます。$(4,8)$-行列 $(A|E_4)$ に行基本変形を施していき、$(E_4|X)$ の形 (最初に A が入っていた部分を単位行列) にできるかどうかを調べます。その際のポイントはやはりガウスの消去法です。途中まではガウスの消去法の前進部分を適用して、中央の $|$ の左側の部分が階段型になるようにします。このプロセスが実行できていない答案が多数ありましたので、最初の部分を書いておきます。

$$(A|E_4) \xrightarrow[\text{①}\times(-3)+\text{④}]{\text{①}\times(-2)+\text{②}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}\times(-2)+\text{④}]{\text{②}\times1+\text{③}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③}\leftrightarrow\text{④}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{④}\times\frac{1}{3}} \cdots$$

$|$ の左側が階段型になったら、ガウスの消去法の後退代入に当たる操作を行列のまま行って $|$ の左側の部分を単位行列 E_4 にしていきます。この方法で、与えられた行列 A は正則であることがわかり、逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ -8 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ が求まります。

■ 演習 6-2(2) について

PA は、A から第 1 行の 1 倍を第 2 行に加え、第 1 行の -2 倍を第 3 行に加え、第 1 行の -3 倍を第 4 行に加える行基本変形を続けて行うことにより得られます。ここで、波線部分は「第 1 行の第 2 行に加え」としてもよさそうに思えますが、行基本変形の定義に照らしわせると不十分です。QA は、第 1 行を第 4 行に、第 3 行を第 1 行に、第 4 行を第 3 行に入れ替えて得られていますが、3 つの行を同時に入れ替える操作は行基本変形ではありません。「第 1 行と第 3 行を入れ替えたのち、第 3 行と第 4 行を入れ替えることによって得られる」、のように答える必要があります。QA の正解は一通りではなく、「第 3 行と第 4 行を入れ替えたのち、第 1 行と第 3 行を入れ替えることによって得られる」も正解です。

■ 次回予告

次回は、行列式の余因子展開を学びます。余因子展開を使って、4 次以上の行列式を見通しよく計算ができるようになることが最大の目標です。

線形代数１・第７回 (2026 年 5 月 21 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。