2024年5月2日

基礎数学演義1 第4回・問題解答&要約シート (1)

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

Q4-1. 累積的帰納法と普通の数学的帰納法の違いを、累積的帰納法はどんなときに有用かを含めて説明せよ。

Q4-2. n (≥ 1) 個の小ピースがつながってできた板チョコを考える。この板チョコを 2 つのつながった部分に、小ピースをつないでいる溝に沿って分解する。この操作を繰り返し行って n 個の小ピースにするには丁度 $(n-1)$ 回分解操作を繰り返す必要があることを、命題関数 $P(n)$ を定めた上で、累積的帰納法を用いて証明する。

(1) 命題関数 $P(n)$ の定め方を書け。

(2) 帰納法による証明の第1段が成り立つことを確かめよ。

(3) 帰納法による証明の第2段を書け。

2024 年 5 月 2 日

基礎数学演義 1　第 4 回・問題解答&要約シート (2)

学 籍 番 号 ________________　氏 名 __________________________

Q4-3. 任意の自然数は異なる指数を持つ 2 の冪の和として表わされる、すなわち、

$$2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_m} \qquad (m \in \mathbb{N},\ 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m)$$

の形に表わされることを、命題関数 $P(n)$ を定めた上で、累積的帰納法により証明する。

ヒント：帰納法の第 2 段階では、$2^j \leq k+1$ を満たす最大の j をとり、$i := (k+1) - 2^j$ に帰納法の仮定を適用する。

(1) 命題関数 $P(n)$ の定め方を書け。

(2) 帰納法による証明の第 1 段が成り立つことを確かめよ。

(3) 帰納法による証明の第 2 段を書け。

Q4-4. $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ および漸化式

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

により定まる実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。この実数列の一般項は

$$a_n = (n-1) \cdot 3^{n-2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

により与えられることを、命題関数 $P(n)$ を定めた上で、累積的帰納法を用いて証明せよ。