

線形代数1 演習問題

3-1. (ブロック計算)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を適当に4つの小行列に分割することにより、 A^2 を計算せよ(分割の仕方も書くこと)。

(2) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して B^2 を計算せよ。

3-2. (A の冪乗)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$ について、

(1) A^2, A^3 を計算せよ。(2) A の k 乗を予測し、それを求めよ。

■ 第 2 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の表の最初の問いは「単位行列とは？」というものでした。単位行列の定義は [補題 2-2-2(2)] に書かれています。その主張を丸々書き込んだものや単位行列の性質 (2-2c) を書き込んだものがいくつかありましたが、ここでは単位行列の定義を教えてください。つまり、「対角成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような正方行列のこと」、あるいは、具体的に (2-2b) の行列 E_n を書いて、この行列のこと、のように書いてください。
- Q2 の第 4 項目は行列同士の積 AB を行列とベクトルの積で書くとどうかけるかという問題でした。(2-1a) の右辺と同じ要領で枠を埋めればよいのですが、ベクトルを表記するときの原則を怠っているものが非常に多かったです。各 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を二重化して表現しなければなりません (p.3, 第 1-4 節を参照)。
- Q2 の第 5 項目は積 AB の (i, j) -成分を答える問題でした。余計な括弧がついていたり、 $a_{ik}b_{kj}$ までで止まっているシートがありました。問題の設定では、 $A = (a_{ik})$ は (l, m) -行列で、 $B = (a_{kj})$ は (m, n) -行列なので、アブストラクトの 10 ページの (2-1c) と同じ設定です。よって、当該の枠には、 c_{ij} の右辺を書き入れます。

■ 演習 2-1 について

- (1) は解答のみ記しておきますので、各自で確認してください。 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 12 & 42 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -24 & 42 \end{pmatrix}$.
- (2) については、事前練習用演習問題と同じように理由を書かなければなりません。(1, 1)-成分は等しいので、他の成分を比較します。すると、 AB と BA において (1, 2)-成分と (2, 1)-成分が異なっていることがわかりますが、両方書くのは書き過ぎで、どちらか一方の成分についてのみ書くようにします。

■ 演習 2-2 について

不注意による計算ミスが多かったですが、概ねできているように感じました。計算結果は次のようになります。 $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 85 & 13 & -38 \\ 13 & 58 & -5 \\ -38 & -5 & 17 \end{pmatrix}$, $AA^T = \begin{pmatrix} 54 & 1 \\ 1 & 106 \end{pmatrix}$.

計算して気づいたと思いますが、 $A^T A$ と AA^T に並ぶ数字は、対角成分上を通る直線に関して対称になっています。実際、これは任意の行列 A に対して正しく、 $X = A^T A$ に関しては $X^T = A^T (A^T)^T = A^T A = X$ となることからわかり、 $Y = AA^T$ についても同様に示すことができます。

■ 次回予告 †

今回は、ベクトルの長さ、内積、ベクトルの直交条件などを説明します。そして、方程式 $ax + by + cz = d$ の幾何学的な意味、すなわち、平面の方程式を学びます。

† 授業時に配布したものは正しくなかったため、差し替えました。

線形代数1・第3回(2024年4月25日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。