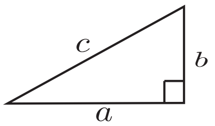
Pythagorian triples tree and Stern-Brocot tree

荒木　優弥　　(表現論研究室)

特別研究で小林吹代著「ピタゴラス数を生み出す行列の話」［1］を読んだ。その中には、三平方の定理（ピタゴラスの定理）を満たす3つの自然数の組（ピタゴラス数）が行列 P を用いることで無限に増加していくということが説明されている。

$$a^2+b^2=c^2$$



$$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

［1］の後半では直角三角形だけでなく、1つの角を120°とする三角形のピタゴラス数についても扱われており、直角三角形と似たような展開ができる。また、N.Zimhoni 著「A forest Eisensteinian triangles」［2］では、60°のピタゴラス数を、Farey 和や Stern-Brocot tree を用いて統一的に扱っている。この論文では、120°のピタゴラス数に対して、Zimhoni の方法を参考に、Farey 和と Stern-Brocot tree による解釈を与える。［1］では、θ（一般的な角度）のピタゴラス数に触れられており、これについても研究したかったが、数値が非常に複雑になり困難だった。

§1. 120°のピタゴラス数

この節では、［1］に基づいて120°のピタゴラス数について説明する。120°のピタゴラス数は等式 $a^2+ab+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 (a,b,c) というだけでなく、a,b,c の最大公約数が1、つまり既約とする。このとき、120°のピタゴラス数は次の公式により与えられる。

120°のピタゴラス数の公式

$$a=m^2-n^2, b=2mn+n^2, c=m^2+mn+n^2$$

ここで、m,n は以下の4つの条件を満たすものとする。

(1) m,n は自然数
(2) $m>n$
(3) m,n は3で割った余りが異なる
(4) m,n は互いに素

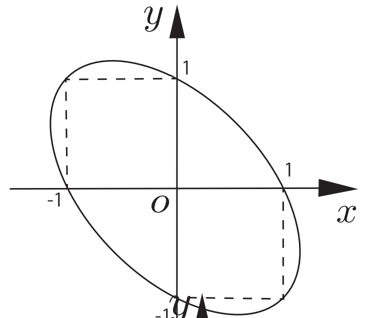
$a^2+ab+b^2=c^2$ になることは実際に代入することで確認できる。では、パラメータ m,n がどこから現れるのか、座標を用いて説明していく。$a^2+ab+b^2=c^2$ より、

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

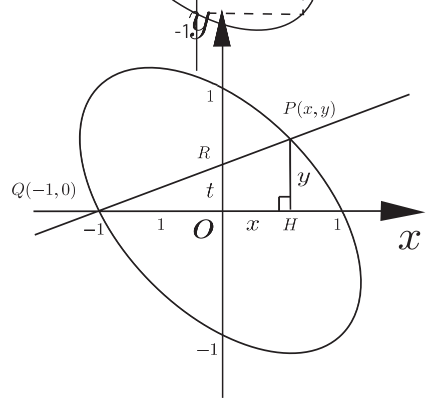
ここで、$\dfrac{a}{c}=x, \dfrac{b}{c}=y$ とおくと、

$$x^2+xy+y^2=1$$

となる。グラフにすると右図のような楕円になる。



このとき、$\dfrac{a}{c}=x, \dfrac{b}{c}=y$ とおいたため、x,y はそれぞれ有理数、すなわち点 $\mathrm{P}(x,y)$ は有理点となる。よって、120°のピタゴラス数 (a,b,c) があったら、$\dfrac{a}{c}=x, \dfrac{b}{c}=y$ とおくことにより、楕円上の有理点 (x,y) を対応させることができる。



ここで、右図のように、点 $(-1,0)$ を Q とし、直線 PQ と y 軸の交点を $\mathrm{R}(0,t)$ とする。また、点 P から x 軸に降ろした垂線と x 軸の交点を H とする。このとき、$0<t<1$ となる。この t を用いると、点 $\mathrm{P}(x,y)$ の x,y が、次のように表される。

$$(*) \qquad x=\frac{1-t^2}{1+t+t^2},\ y=\frac{2t+t^2}{1+t+t^2}$$

証明は後に示す。QO$=1$, OR$=t$ なので、t は直線 PQ の傾きでもある。また、QH$=1+x$, HP$=y$ より、$\dfrac{y}{1+x}$ も直線 PQ の傾きである。よって、点 P(x,y) が有理点であることと、t が有理数であることは同じである。

$$x=\frac{1-t^2}{1+t+t^2},\ y=\frac{2t+t^2}{1+t+t^2} \text{ が有理数} \iff \quad t=\frac{y}{1+x} \text{ が有理数}$$

実はこの有理数 t を $\frac{n}{m}$ と表すことで、m,n がどのようにして表れたのかが分かる。

$$x=\frac{1-t^2}{1+t+t^2}=\frac{1-\frac{n^2}{m^2}}{1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{m^2-n^2}{m^2+mn+n^2},\ y=\frac{2t+t^2}{1+t+t^2}=\frac{2\times\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}}{1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{2mn+n^2}{m^2+mn+n^2}$$

よって、有理点 (x,y) の座標は次のように定まる。

$$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+mn+n^2},\ \frac{2mn+n^2}{m^2+mn+n^2}\right)$$

ここで $(*)$ を証明をする。
P(x,y) と Q$(-1,0)$ は、楕円と直線の交点である。つまり、この 2 点は次の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 & \cdots(1) \\ y=tx+t & \cdots(2) \end{cases}$$

(2) 式を (1) 式に代入して整理すると、次のようになる：

$$(1+t+t^2)x^2+(t+2t^2)x+t^2-1=0.$$

連立方程式の解の 1 つは、点 Q$(-1,0)$ より、2 次方程式の解の 1 つは、$x=-1$ である。よって、この 2 次方程式は $(x+1)$ を因数にもつので、因数分解すると、

$$(x+1)\{(1+t+t^2)x+t^2-1\}=0.$$

よって、

$$x=-1,\quad \frac{1-t^2}{1+t+t^2}.$$

(2) より、$x=\dfrac{1-t^2}{1+t+t^2}$ のとき、

$$y=t\times\frac{1-t^2}{1+t+t^2}+t=\frac{2t+t^2}{1+t+t^2}.$$

これで、t を用いて、x と y を表すことができた。

最初に述べたように、ピタゴラス数は行列 P を用いて、新たにピタゴラス数を生じさせることができるが、120° のピタゴラス数でも次の行列 Q を用いて、新たに 120° のピタゴラス数を生じさせることができる。以下、このことを説明する。

$$Q=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

この行列を用いて新しいピタゴラス数を生むことを**ピタゴラス変換**と呼ぶことにする。では、この行列がどのようにして求まるのか見ていく。

まず、120° のピタゴラス数 (a,b,c) の変換後の 120° のピタゴラス数を (a',b',c') とする。また、それぞれのパラメータ $(m,n),(m',n')$ とする。このとき、(a,b,c) から (a',b',c') への変換は以下のようになる。

$$\begin{cases} a=m^2-n^2 \\ b=2mn+n^2 \\ c=m^2+mn+n^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a'=m'^2-n'^2 \\ b'=2m'n'+n'^2 \\ c'=m'^2+m'n'+n'^2 \end{cases}$$

また、(m,n) から (m',n') への変換は以下のようになる。

$$(m,n)\Rightarrow(m',n')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} m-2n=m' \\ -n=n' \end{cases}$$

ここで、

$$Q=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

とおく。また、後に必要となる計算のために、$xa+yb+zc$ を以下のようにまとめておく。必要に応じて、x は x_1, x_2, x_3 に、y は y_1, y_2, y_3 に、z は z_1, z_2, z_3 におきかえるものとする。

$$\begin{aligned} xa+yb+zc &= x(m^2-n^2)+y(2mn+n^2)+z(m^2+mn+n^2) \\ &= (x+z)m^2+(2y+z)mn+(-x+y+z)n^2 \end{aligned}$$

まず、x_1, y_1, z_1 を求める。

a' は以下の２式で表すことができる。

$$a' = m'^2-n'^2 = (m-2n)^2-(-n)^2 = m^2-4mn+3n^2 \cdots (1)$$
$$a' = x_1a+y_1b+z_1c = (x_1+z_1)m^2+(2y_1+z_1)mn+(-x_1+y_1+z_1)n^2 \cdots (2)$$

(1)(2) の係数を比較すると、

$$\begin{cases} x_1+z_1=1 \\ 2y_1+z_1=-4 \\ -x_1+y_1+z_1=3 \end{cases}$$

となり、この連立方程式を解くと、x_1, y_1, z_1 が次のように求まる：

$$x_1=-3,\ y_1=-4,\ z_1=4.$$

同様に、

$$x_2=-4,\ y_2=-3,\ z_2=4,$$

$$x_3=-6,\ y_3=-6,\ z_3=7.$$

と求められる。よって、求める行列は以下のようになる。

$$Q=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

これで、120° のピタゴラス行列 Q が求まった。

実は、Q から５組の新しいピタゴラス数が生み出される。そのためには、５つの行列を必要とする。ではその５つの行列がどのようにして求まるのか見ていく。

楕円の話に遡るが、実は点 $\mathrm{P}(x,y)$ は $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$ としていたため、第１象限に存在している。この楕円上の第１象限の点 $\mathrm{P}(x,y)$ から次のような点を考える。

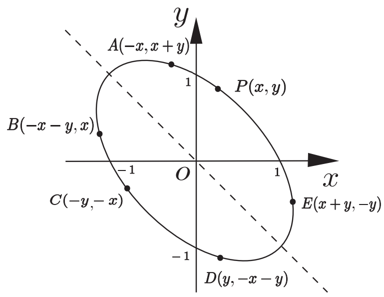
$$\mathrm{A}(-x,x+y),\ \mathrm{B}(-x-y,x),\ \mathrm{C}(-y,-x),\ \mathrm{D}(y,-x-y),\ \mathrm{E}(x+y,-y)$$

これらの点 A,B,C,D,E が点 P から生まれる新しい５組のピタゴラス数の点である。これらの５点は楕円 $x^2+xy+y^2=1$ 上にあることが計算により確認できる。

例えば、$\mathrm{A}(-x,x+y)$ は、

$(-x)^2+(-x)(x+y)+(x+y)^2$
$=x^2-x^2-xy+x^2+2xy+y^2$
$=x^2+xy+y^2$

となるので、$\mathrm{P}(x,y)$ が楕円 $x^2+xy+y^2=1$ 上の点ならば、点 A も楕円上にあることが分かる。



120° のピタゴラス数 (a,b,c) は $\frac{a}{c}=x, \frac{b}{c}=y$ とおくことで、有理点 (x,y) に対応させることができた。その逆の対応をすると、先ほどの５点に対応するピタゴラス数は以下のようになる。

$$\mathrm{A}\ \ (-a,a+b,c),\ \mathrm{B}\ (-a-b,a,c),\ \mathrm{C}\ (-b,-a,c),\ \mathrm{D}\ (b,-a-b,c),\ \mathrm{E}\ (a+b,-b,c)$$

これらを行列 Q に吸収させる。

A の場合：$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ a+b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

B の場合：$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

C の場合：$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ -a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

D の場合：$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -a-b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

E の場合：$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

このように、ピタゴラス変換を行う 5 つの行列が求まった。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

（例）$(3, 5, 7)$ のピタゴラス変換

各行列を用いて計算すると

A 変換 $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}$ B 変換 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 51 \\ 79 \end{pmatrix}$

C 変換 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}$ D 変換 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 32 \\ 67 \end{pmatrix}$

E 変換 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \\ 31 \end{pmatrix}$

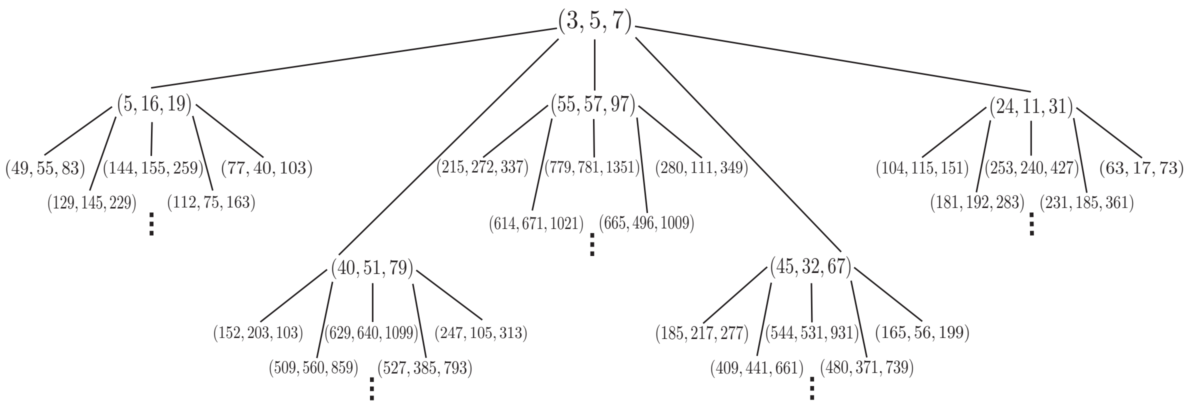
これらの数の組が 120°のピタゴラス数になっている。例えば A 変換の場合、

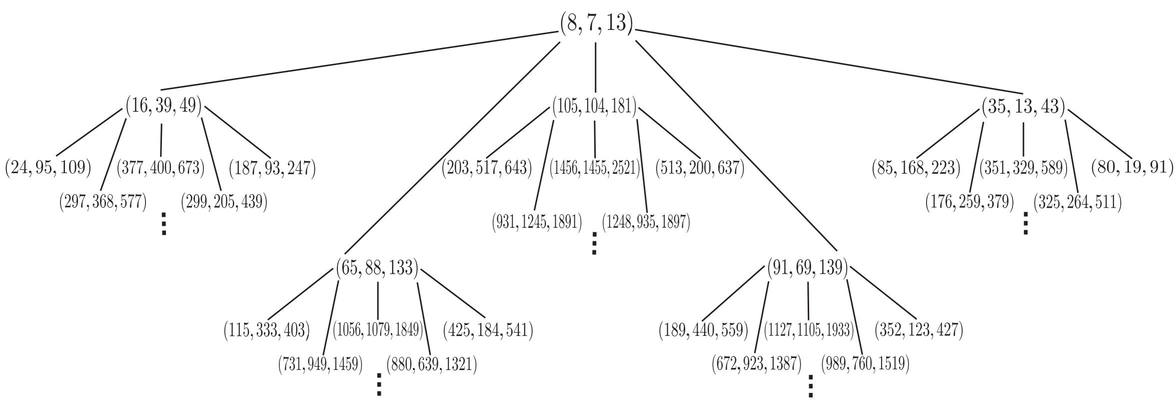
$$a'^2 + a'b' + b'^2 = 25 + 80 + 256 = 361 = 19^2 = c'^2$$

となり、確かに 120°のピタゴラス数である。残りの 4 つの変換も同様に確かめられる。
このようにして、120°のピタゴラス数は 5 つずつ無限に生み出していくことができる。

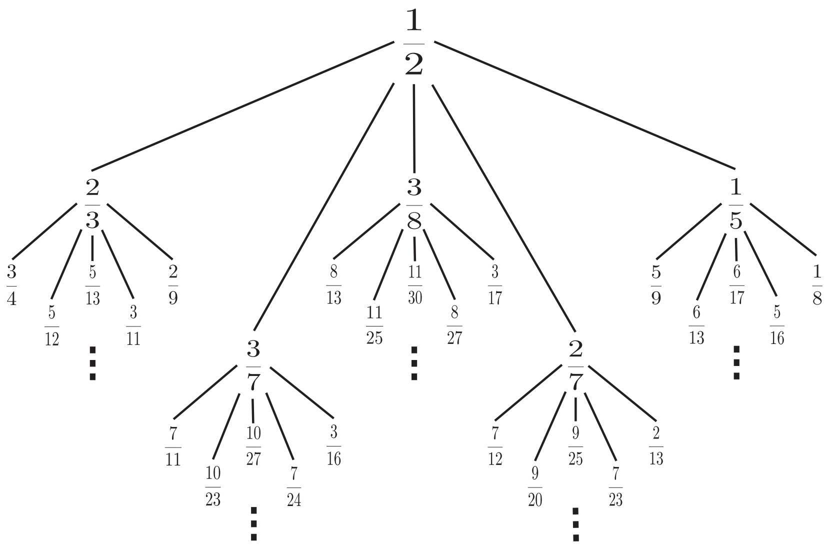
§2. 120°のピタゴラス数の木とそのパラメータの木

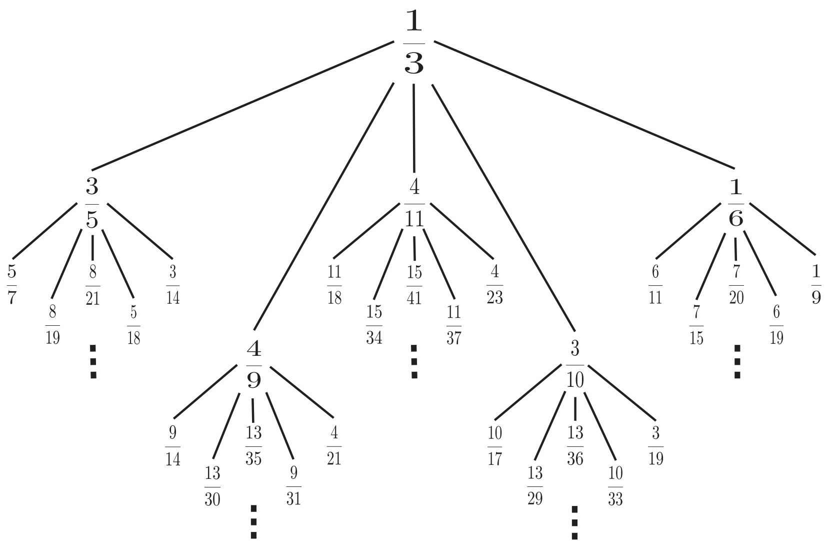
ピタゴラス変換により関連づけられるピタゴラス数を線で結ぶことにより、$(3, 5, 7)$ と $(8, 7, 13)$ から始まる次のような 2 種類の 5 進木が得られる。これらの 5 進木のそれぞれを **120°のピタゴラス数の木** (Pythagorian triples tree) と呼ぶ。





各ピタゴラス数 (a, b, c) をパラメータ $\dfrac{n}{m}$ におきかえると、次の 2 種類の木が得られる。





ピタゴラス数 (a, b, c) とパラメータ $\dfrac{n}{m}$ の間の変換は以下に示すとおりである。

- ピタゴラス数 (a, b, c) からパラメータ $\dfrac{n}{m}$ への変換

$t = \dfrac{y}{1+x},\ x = \dfrac{a}{c},\ y = \dfrac{b}{c}$ より、$t = \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}} = \dfrac{b}{c+a}$. また、$t = \dfrac{n}{m}$ であるから、

$$\frac{b}{c+a} = \frac{n}{m}$$

となる。しかし、約分する必要があるため、$b = n,\ c + a = m$ とは限らない。

（例）ピタゴラス数 $(3, 5, 7)$ からパラメータ $\dfrac{1}{2}$ への変換

$$\frac{b}{c+a} = \frac{5}{7+3} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- パラメータ $\dfrac{n}{m}$ からピタゴラス数 (a, b, c) への変換

120° のピタゴラス数の公式より、次で与えられる：

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn + n^2,\ c = m^2 + mn + n^2.$$

§3. Stern-Brocot tree と 120°のピタゴラス数

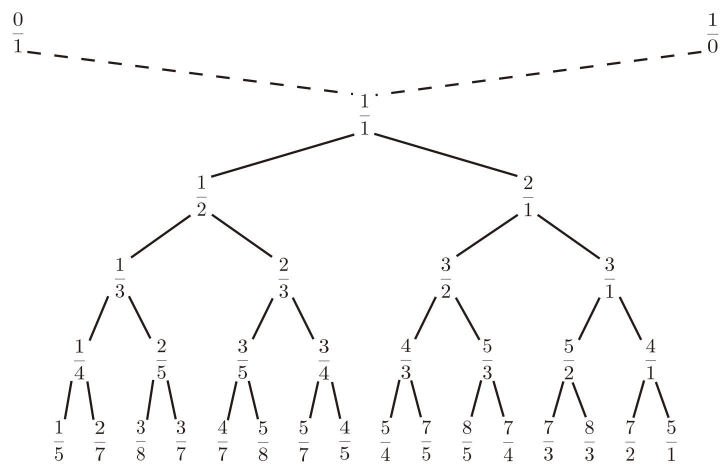
ここでは［2］を参考に、Stern-Brocot tree から変形して作られる 120°のピタゴラス数に対応する木について説明する。Stern-Brocot tree は有理数の Farey 和を用いて構成される。

2 つの既約分数 $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{r}{s}$ が **Farey ネイバー**であるとは、$rq-ps=1$ であるときをいう。$q=0$ のときには $p=1$ にとり、$\infty=\dfrac{1}{0}$ も既約分数として扱う。既約分数 $\dfrac{p}{q},\ \dfrac{r}{s}$ に対して

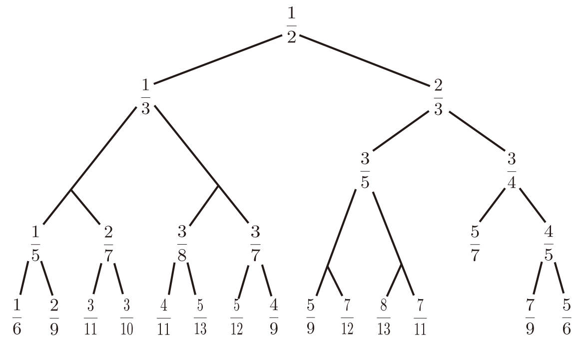
$$\frac{p}{q}\oplus\frac{r}{s}:=\frac{p+r}{q+s}$$

と定めると、これは再び既約分数になる。これを $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{r}{s}$ の **Farey 和**と呼ぶ。任意の有理数 F に対して、$F=\dfrac{p}{q}\oplus\dfrac{r}{s}$ を満たす Farey ネイバー $\dfrac{p}{q},\ \dfrac{r}{s}$ がただ 1 組存在する。Farey ネイバーの組 $\left(\dfrac{p}{q},\ \dfrac{r}{s}\right)$ を F の**親**と呼ぶ。

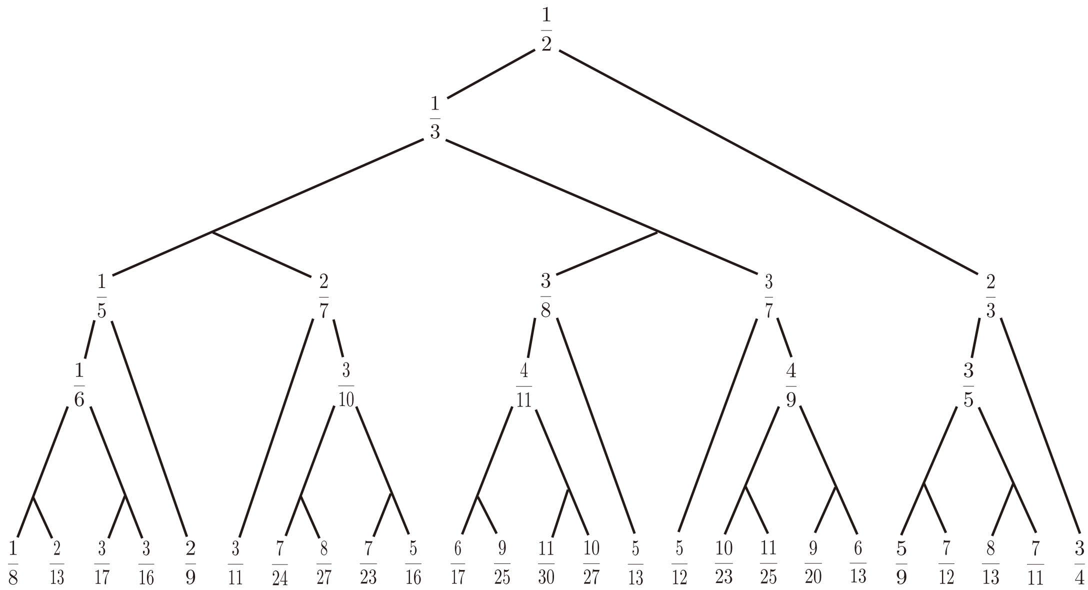
Stern-Brocot tree とは、$\dfrac{0}{1}$ と $\dfrac{1}{0}$ から出発して、次々と Farey 和を付け加えていき、Farey 和とその親のうち近い方の親とを線で結ぶ（ただし、$\dfrac{0}{1},\ \dfrac{1}{0}$ およびそれらから延びる線を削除する）ことにより得られる、$\dfrac{1}{1}$ から始まる二進木のことをいう。



この木のうち、$\dfrac{1}{2}$ を頂点とする左半分において、それぞれの分数を $\dfrac{n}{m}$ とするとき、120°のピタゴラス数の公式における (m,n) の条件を満たさないものを除く。すると、次のような二進木が得られる。



さらに、次のように、除いた部分を直線で結び、除いた行の下の 4 つの分数と除いた行の対称の枝の上の分数の行をそろえる。



このとき、頂点の $\frac{1}{2}$ と、行をそろえた $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{5}$ とは、パラメータ $\frac{n}{m}$ におけるピタゴラス変換の関係と同じである。この 6 つの分数の 1 つ下の行にある $\frac{1}{3}$ と $\frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{4}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{6}$ もピタゴラス変換の関係になっている。しかし、同様に $\frac{2}{3}$ を頂点とするとき、それに対応する 5 つの分数 $\frac{3}{4}, \frac{7}{11}, \frac{8}{13}, \frac{7}{12}, \frac{5}{9}$ は、$\frac{3}{4}$ のみがピタゴラス変換の関係になる。$\frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{5}$ を頂点としたときも同様である。

ここで、頂点の分数が

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$$

であるとき、行列

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

を対応させる。このとき、各変換後の行列を次のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} q & s \\ 2q-p & 2s-r \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} r+s & p+q \\ 3r+2s & 3p+2q \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} p+q & r+s \\ 2p+3q & 2r+3s \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} s & q \\ r+3s & p+3q \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} p & r \\ 3p+q & 3r+s \end{pmatrix}$$

これを用いることによって、ピタゴラス変換を行うことができる。ここでは例でみる（一般の場合は次節で説明する）。

（例 1）$\frac{1}{2}$ の変換：$\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$ であるから、$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. それぞれ代入すると、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{3} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{2} = \frac{3}{7} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{7} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

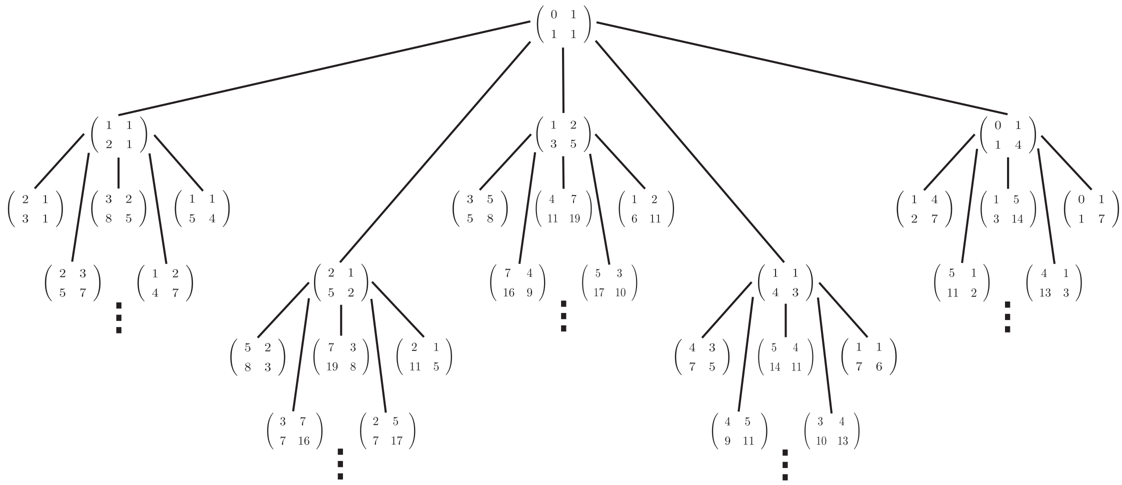
よって、このような行列と Farey 和を用いることによって、パラメータのピタゴラス変換と同じ対応を得ることができた。

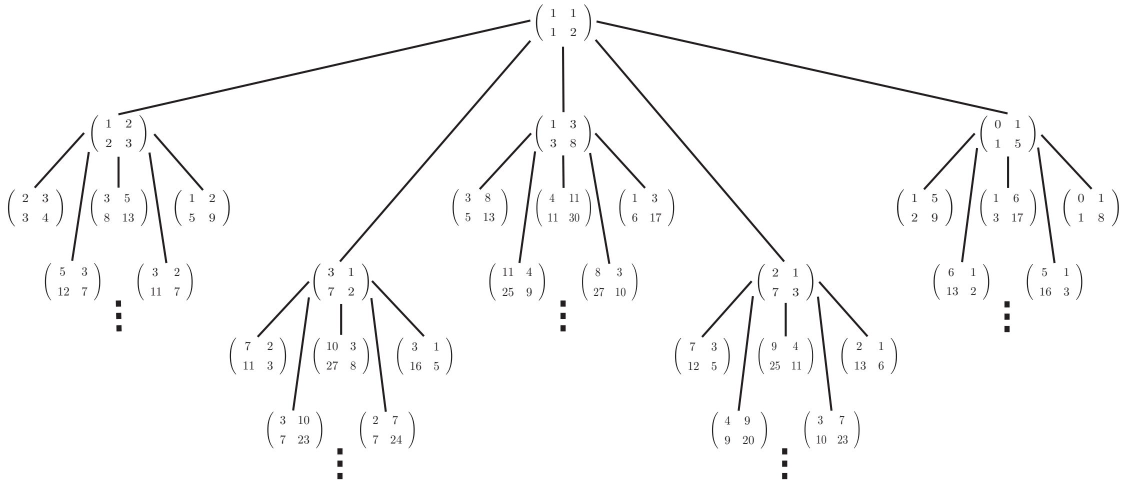
（例 2）$\frac{2}{3}$ の変換：$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1}$ であるから、$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. それぞれ代入すると、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{3} \oplus \frac{1}{1} = \frac{3}{4} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{3}{8} \oplus \frac{2}{5} = \frac{5}{13}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{11} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$$

よって、このような行列と Farey 和を用いることによって、パラメータのピタゴラス変換と同じ対応を得ることができた。120° のピタゴラス数に対応するパラメータの分数のなす 2 種類の 5 進木は、次のような行列の 5 進木に書き換えられる。





§4. 各変換の対応

これまで、120° のピタゴラス数 (a,b,c), パラメータ $\dfrac{n}{m}$, 行列 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ のピタゴラス変換の間に 1 対 1 対応

$$(a,b,c) \longleftrightarrow \frac{n}{m} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

があることをみてきた。この対応がピタゴラス変換と両立していることは、前節で具体例を用いて、確認したが、ここで A〜E 変換すべてが一般的に対応していることを示していく。

まず、120° のピタゴラス数 (a,b,c) の A〜E 変換を一般的に表していく。各変換行列より、

$$A\text{ 変換}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-4b+4c \\ a-3b+4c \\ -6b+7c \end{pmatrix} \quad B\text{ 変換}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+3b+4c \\ a+4b+4c \\ 6b+7c \end{pmatrix}$$

$$C\text{ 変換}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+3b+4c \\ 3a+4b+4c \\ 6a+6b+7c \end{pmatrix} \quad D\text{ 変換}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+b+4c \\ 3a-b+4c \\ 6a+7c \end{pmatrix}$$

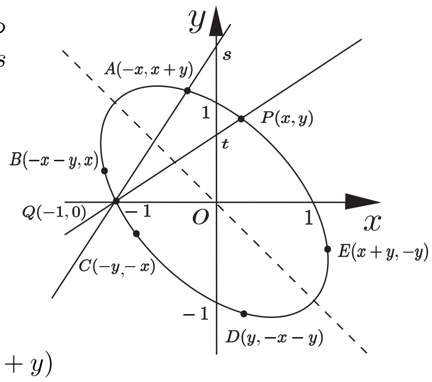
$$E\text{ 変換}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+b+4c \\ -4a-b+4c \\ -6a+7c \end{pmatrix}$$

よって、各変換後の 120° のピタゴラス数を a, b, c を用いて表すと、

$$A\ (-a-4b+4c,\ a-3b+4c,\ -6b+7c),\quad B\ (-a+3b+4c,\ a+4b+4c,\ 6b+7c)$$
$$C\ (4a+3b+4c,\ 3a+4b+4c,\ -6b+7c),\quad D\ (4a+b+4c,\ 3a-b+4c,\ 6a+7c)$$
$$E\ (-3a+b+4c,\ -4a-b+4c,\ -6a+7c)$$

となる。

次に、パラメータ $\dfrac{n}{m}$ の A〜E 変換を一般的に表していく。そのために、楕円の話に遡る。



パラメータ t とは直線 PQ と y 軸との交点の y 座標であった。 ここで、直線 AQ,...,EQ と y 軸との交点の y 座標を s とするとき、s は t を用いて次のように表すことができる。

$A\quad s=\dfrac{1}{t}\qquad B\quad s=-\dfrac{t+1}{t}$

$C\quad s=-t-1\qquad D\quad s=-\dfrac{1}{t+1}$

$E\quad s=-\dfrac{t}{t+1}$

証明は以下のとおりである。

$$\mathrm{P}(x,y)\longleftrightarrow\mathrm{A}(-x,x+y)$$

点 P の x 座標 x は t を用いて $\dfrac{1-t^2}{1+t+t^2}$ と表すことができたので、$x=\dfrac{1-t^2}{1+t+t^2},\ -x=\dfrac{1-s^2}{1+s+s^2}$ より、$\dfrac{1-t^2}{1+t+t^2}=-\dfrac{1-s^2}{1+s+s^2}$.

これを解くと、

$$s=\frac{1}{t},\ -\frac{t+2}{2t+1}$$

グラフより、$s>0$, また、$0<t<1$ であるから、

$$s=\frac{1}{t}.$$

同様に、点 B〜E のパラメータ s も t を用いて表すことができる。

パラメータ $t=\dfrac{n}{m}$ の変換後のパラメータを $t'=\dfrac{n'}{m'}$ とすると、$m'=m-2n,\ n'=-n$ より、

$$t'=\frac{n'}{m'}=\frac{-n}{m-2n}=\frac{n}{2n-m}=\frac{1}{2-\frac{m}{n}}=\frac{1}{2-\frac{1}{t}}$$

よって、この式の t に各変換の s を代入することで、パラメータ $\dfrac{n}{m}$ の各変換を一般的に表すことができる。例えば、A 変換の場合は $s=\dfrac{1}{t}$ であるから、

$$\frac{n'}{m'}=\frac{1}{2-\frac{1}{s}}=\frac{1}{2-t}=\frac{1}{2-\frac{n}{m}}=\frac{m}{2m-n}$$

同様に、他の変換も求めることができ、以下のようにまとめられる。

$$A\quad \frac{m}{2m-n}\qquad B\quad \frac{m+n}{2m+3n}\qquad C\quad \frac{m+n}{3m+2n}\qquad D\quad \frac{m}{3m+n}\qquad E\quad \frac{n}{m+3n}$$

以上のように、全てのピタゴラス変換を求めることができたため、ここからはそれぞれが対応していることを証明していく。

• 120° のピタゴラス数 (a,b,c) とパラメータ $\dfrac{n}{m}$ の対応

120° のピタゴラス数の公式より、

$$\begin{cases} a=m^2-n^2 \\ b=2mn+n^2 \\ c=m^2+mn+n^2 \end{cases}$$

とする。この連立方程式を m^2, mn, n^2 に関して解くと、

$$m^2=\frac{a-b+2c}{3},\ mn=\frac{a+2b-c}{3},\ n^2=\frac{-2a-b+2c}{3}$$

となる。これを用いて計算すると、A 変換の場合、

$$\begin{aligned} a' &= m'^2 - n'^2 = (2m-n)^2 - (m)^2 \\ &= 3m^2 - 4mn + n^2 \\ &= 3\frac{a-b+2c}{3} - 4\frac{a+2b-c}{3} + \frac{-2a-b+2c}{3} \\ &= -a - 4b + 4c \\ b' &= 2m'n' + n'^2 = 2(2m-n)(m) + (m)^2 \\ &= 5m^2 - 2mn \\ &= 5\frac{a-b+2c}{3} - 2\frac{a+2b-c}{3} \\ &= a - 3b + 4c \\ c' &= m'^2 + m'n' + n'^2 = (2m-n)^2 + (2m-n)(m) + (m)^2 \\ &= 7m^2 - 5mn + n^2 \\ &= 7\frac{a-b+2c}{3} - 5\frac{a+2b-c}{3} + \frac{-2a-b+2c}{3} \\ &= -6b + 7c \end{aligned}$$

となり、120° のピタゴラス数 (a,b,c) の A 変換とパラメータ m,n の A 変換が対応していることが確認できた。また、B〜E 変換も同様に確認することができる。よって次の定理が成り立つ。

定理 1(c.f.[1,p.215])

$X = A,B,C,D,E$ に対して、(a,b,c) に X 変換を施して得られる組を (a',b',c') とおくと、(a',b',c') に対応する分数は次の分数で与えられる。

$$A : \frac{m}{2m-n} \qquad B : \frac{m+n}{2m+3n} \qquad C : \frac{m+n}{3m+2n} \qquad D : \frac{m}{3m+n} \qquad E : \frac{n}{m+3n}$$

- パラメータ $\frac{n}{m}$ と行列 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ の対応

§3 より、

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$$

であり、行列 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ の A 変換は $\begin{pmatrix} q & s \\ 2q-p & 2s-r \end{pmatrix}$ であるから、

$$\frac{n'}{m'} = \frac{q}{2q-p} \oplus \frac{s}{2s-r} = \frac{q+s}{(2q-p)+(2s-r)} = \frac{q+s}{2(q+s)-(p+r)} = \frac{m}{2m-n}$$

となり、パラメータ $\frac{n}{m}$ の A 変換と行列 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ の A 変換が対応していることが確認できる。また、B〜E 変換も同様に確認することができる。よって、次の定理が成り立つ。

定理 2

$X = A,B,C,D,E$ に対して、$\frac{n}{m}$ に X 変換を施して得られる分数を $\frac{n'}{m'}$ とおくと、$\frac{n'}{m'}$ に対応する行列は次の行列で与えられる。

$$A : \begin{pmatrix} q & s \\ 2q-p & 2s-r \end{pmatrix},\ B : \begin{pmatrix} r+s & p+q \\ 3r+2s & 3p+2q \end{pmatrix},\ C : \begin{pmatrix} p+q & r+s \\ 2p+3q & 2r+3s \end{pmatrix},$$

$$D : \begin{pmatrix} s & q \\ r+3s & p+3q \end{pmatrix},\ E : \begin{pmatrix} p & r \\ 3p+q & 3r+s \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] 小林吹代『ピタゴラス数を生み出す行列の話』ベレ出版, 2008.

[2] N.Zimhoni「A forest of Eisensteinian triangles」, Amer. Math. Monthly 127(2020), no.7, 629-637