

§11. 微積分学の基本定理

微積分学の基本定理とは、「微分」「積分」とが互いに逆操作であるということを主張する定理であり、これを用いて積分を具体的に計算することができる。この節では、まず、定積分の性質を述べ、積分の平均値の定理を示す。この定理を用いて微積分学の基本定理を示す。

● 11-1 : 定積分の性質

連続関数の定積分は以下の性質を持つ。

定理 11-1-1

$f(x), g(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数とする。このとき、

(1) (線形性)

$$(i) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$(ii) \text{任意の } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して、} \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

(2) (単調性) 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば、

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(3) (加法性) $a < c < b$ を満たす任意の実数 c に対して、

$$(11-1 a) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

次の事実が [定理 11-1-1] から導かれる。定義域の中に閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数 $f(x), g(x)$ が、任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ であり、さらに、ある 1 点 $x_0 \in [a, b]$ において $f(x_0) < g(x_0)$ を満たすならば、

$$(11-1 b) \quad \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

となる。これを示すには、関数 $h(x) = g(x) - f(x)$ ($x \in [a, b]$) に対して

$$\int_a^b h(x) dx > 0$$

となることを示せばよい。 $h(x)$ は $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) > 0$ を満たす連続関数なので、 x_0 に十分近い $x \in [a, b]$ に対して $h(x) > 0$ となる。すなわち、 $r > 0$ を十分に小さくとれば、

$$x \in [x_0 - r, x_0 + r] \implies h(x) > 0$$

となる。閉区間 $[x_0 - r, x_0 + r]$ における関数 $h(x)$ の最小値を m とおくと $m > 0$ となるので、定積分の単調性と加法性により次の不等式を得る：

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) dx &= \int_a^{x_0-r} h(x) dx + \int_{x_0-r}^{x_0+r} h(x) dx + \int_{x_0+r}^b h(x) dx \\ &\geq \int_a^{x_0-r} 0 dx + \int_{x_0-r}^{x_0+r} m dx + \int_{x_0+r}^b 0 dx = 2mr > 0. \end{aligned}$$

● 11-2 : 定積分の定義の拡張

これまで、 $a < b$ のときのみ積分 $\int_a^b f(x) dx$ を考えたが、 $a > b$ や $a = b$ の場合にも積分 $\int_a^b f(x) dx$ を考えることができる。これらは次のように定義される。

$$a > b \text{ のとき、 } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

このように定義すると、等式 (11-1 a) は (a, b, c) の大小関係に無関係に) すべての実数 a, b, c について成り立つ。

● 11-3 : 積分の平均値の定理

微積分学の基本定理を証明するには、次の積分の平均値の定理が必要である。

定理 11-3-1 (積分の平均値の定理)

連続関数 $f(x)$ の定義域が閉区間 $[a, b]$ を含むとき、

$$(11-3 a) \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。

(証明)

$f(x)$ は連続なので、 $[a, b]$ において最大値 M と最小値 m を持つ。

$m \leq f(x) \leq M$ がすべての $x \in [a, b]$ について成り立つから、 $[a, b]$ 上で積分して不等式

$$(11-3 b) \quad (b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

を得る。

• $m < M$ ならば、 $f(x)$ は定数関数ではない。したがって、ある $x_1 \in [a, b]$ において $m < f(x_1)$ となり、ある $x_2 \in [a, b]$ において $f(x_2) < M$ となる。このことと (11-1 b) により、(11-3 b) よりも強い不等式

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx < M$$

が成立する。ここで中間値の定理を適用すると、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

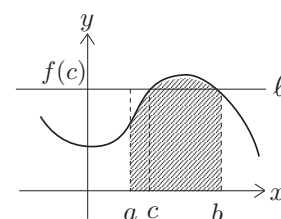
を満たす $c \in (a, b)$ の存在がいえる。

• $m = M$ ならば、

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = M = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

となるから、 $c \in (a, b)$ として $c = \frac{a+b}{2}$ をとることができる。 □

注意 11-3-2 : 関数 $f(x)$ のグラフが右図のようになっているとき、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は斜線部分の面積を表わしていると考えられる。積分の平均値の定理は、グラフの‘凹凸を平均化’するように、 x -軸に平行な直線 ℓ をうまくとれば、斜線部分の面積は直線 ℓ と x -軸、および直線 $y = a, y = b$ で囲まれる長方形の面積に等しくなる、ということを主張している。



● 11-4 : 微積分学の基本定理

微分と積分は定義の仕方が全く違うにも関わらず、実は互いに逆操作になっている。

$$f(x) \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \longmapsto F'(x) = f(x)$$

(元に戻る)

$$f(x) \longmapsto f'(x) \longmapsto F(x) = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

(定数項のずれを除くと元に戻る)

定理 11-4-1 (微積分学の基本定理)

$f(x)$ を开区間 I 上で定義された連続関数とし、 $c \in I$ を固定する。このとき、関数

$$(11-4 a) \quad F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad (x \in I)$$

は微分可能であり、その導関数 $F'(x)$ は $f(x)$ に一致する： $F'(x) = f(x) \quad (x \in I)$ 。

(証明)

$a \in I$ を任意にとり、 $F(x)$ が点 a で微分可能であることを示す。 $x \in I, x \neq a$ に対して、

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \left(\int_c^x f(x)dx - \int_c^a f(x)dx \right) = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(x)dx$$

なので、積分の平均値の定理により、

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(x)dx = f(\xi_x)$$

となる ξ_x が x と a の間に存在することがわかる。ここで、 $x \rightarrow a$ とすると $\xi_x \rightarrow a$ であり、さらに、 f は連続なので $f(\xi_x) \rightarrow f(a)$ となる。したがって、

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| = |f(\xi_x) - f(a)| \rightarrow 0$$

が成り立つ。故に、 $F(x)$ は a で微分可能であって、 $F'(a) = f(a)$ となる。 □

● 11-5 : 原始関数

开区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ の**原始関数**とは、 I 上で定義された微分可能な関数 $F(x)$ であって、 $F'(x) = f(x)$ を満たすもののことをいう。

例 11-5-1 自然数 n に対して $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$ であるから、関数 $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$ は関数 $f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R})$ の原始関数である。また、 C を勝手な実数とするととき、

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right)' = x^n$$

であるから、関数 $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (x \in \mathbb{R})$ も関数 $f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R})$ の原始関数である (原始関数のその他の例については、教科書 p.32 を参照)。

上の例で見たように、関数 $f(x)$ の原始関数は 1 つではない。しかしながら、2 つの原始関数の差は定数の違いしかない。すなわち、

(11-5 a) $F_1(x), F_2(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数ならば、差 $F_1(x) - F_2(x)$ は定数関数である。

∴)

関数 $F(x) := F_1(x) - F_2(x)$ を微分すると、

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となる。ラグランジュの平均値の定理から、开区間 I 上で $F(x)$ は定数関数である、すなわち、 $F(x)$ の値はある 1 点 $a \in I$ における値に等しい： $F(x) = F(a)$ ($x \in I$). \square

● 11-6 : 微積分学の基本定理を利用した定積分の計算

$f(x)$ を开区間 I 上で定義された連続関数とする。 $c \in I$ を固定して、関数 $G(x)$ ($x \in I$) を

$$G(x) = \int_c^x f(t)dt \quad (x \in I)$$

と定める。微積分学の基本定理により、 $G(x)$ は微分可能で、 $G'(x) = f(x)$ を満たす。したがって、 $G(x)$ は $f(x)$ の 1 つの原始関数である。

今、 $F(x)$ を $f(x)$ の勝手な原始関数とすれば、差 $G(x) - F(x)$ は定数であるから、

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

のように書くことができる。よって、任意の $a, b \in I$ に対して

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \\ &= -\int_c^a f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \\ &= -G(a) + G(b) \\ &= -(F(a) + C) + (F(b) + C) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

を得る。以上のことから、开区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ に対して、原始関数、つまり、微分すると $f(x)$ になる関数が求められると、定積分が次の公式で求められることがわかった：任意の $a, b \in I$ に対して

$$(11-6 a) \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

例 11-6-1 $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。冪関数 $f(x) = x^\alpha$ ($x > 0$) の原始関数の 1 つは

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1 \text{ のとき}) \\ \log x & (\alpha = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって、 $a, b > 0$ に対して、

$$(11-6 b) \quad \int_a^b x^\alpha dx = F(b) - F(a) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) & (\alpha \neq -1 \text{ のとき}), \\ \log\left(\frac{b}{a}\right) & (\alpha = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

注意 11-6-2 積分の計算では、 $F(b) - F(a)$ をしばしば記号 $[F(x)]_a^b$ で表わす。

数学を学ぶ(微分積分1) 第11回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 連続関数の定積分は線形性、単調性、加法性という3つの性質を持ちます。この3つの性質を、 $f(x), g(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数として、下に記述しなさい。

- 線形性:

- 単調性: $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$) のとき

- 加法性: 任意の $c \in (a, b)$ に対して

Q2. $f(x)$ を开区間 I 上で定義された連続関数とします。次の に適当な記号や数字・文字を入れなさい。

- $a < b$ であるような $a, b \in I$ に対して、

$\int_b^a f(x)dx$ は $\int_a^b f(x)dx$ を用いて $\int_b^a f(x)dx = \text{$ のように定義され、

$\int_a^a f(x)dx$ は $\int_a^a f(x)dx = \text{$ と定義される。

この約束により、 a, b, c がどんな大小関係であっても、Q1の加法性の公式が成り立つ。

- 関数 $f(x)$ の原始関数とは、 $\text{$ $= f(x)$ を満たす微分可能な関数 $F(x)$ ($x \in I$) のことをいう。 $f(x)$ の原始関数は1つではないが、2つの原始関数の差は $\text{$ である。
- 微積分学の基本定理により、 $c \in I$ を1つとると、 $f(x)$ の1つの原始関数が

$$G(x) = \text{$$
 ($x \in I$)

によって与えられる。このことと上の2項目により、 $a, b \in I$ に対して定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値が、 $f(x)$ の勝手な原始関数 $F(x)$ を使って次のように求められる。

$$\int_a^b f(x)dx = \text{$$

- 関数 $F(x) = \text{Tan}^{-1}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) を微分すると $f(x)$ に一致したとする。このとき、 $\int_{-1}^1 f(x)dx = \text{$ である。

Q3. $f(x)$ を开区間 I 上で定義された連続関数とします。 $a, b \in I$ に対して定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値を求めるにはどのようにすればよいですか? その解決方法・方針を下の枠内に書きなさい。

Q4. 第11回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。