

§10. 定積分の定義

積分は微分の「逆操作」として扱われることが多いが、ここでは、本来の定義に立ち戻って、(定)積分の概念を捉える。関数のグラフと x -軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ とで囲まれる「曲がった部分」の面積をどうやって求めればよいか? そのアイデアを知ると、定積分の定義が自然に理解できるようになる。

● 10-1 : 閉区間の分割

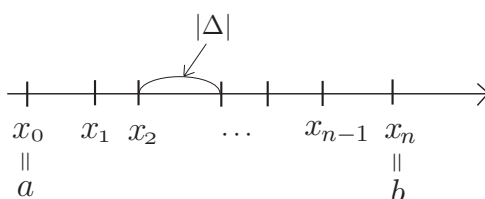
閉区間 $[a, b]$ の分割とは、 a から始まって b で終わる狭義単調増加な有限数列

$$(10-1 a) \quad \Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のことをいう。各 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) を分割 Δ の分点と呼び、

$$(10-1 b) \quad |\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

を分割 Δ の細かさと呼ぶ。ここで、 \max は最大なものを表わす記号である。

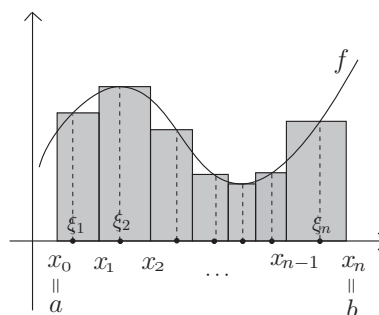


● 10-2 : リーマン和

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ を定義域に含む関数とする。 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ と、各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意に一点 ξ_i を取って作った有限数列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対して、実数

$$(10-2 a) \quad S(f; \Delta, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とそれにフィットする有限数列 ξ に関する $f(x)$ のリーマン和という。



例 10-2-1 $[0, 1]$ の分割として $\Delta : 0 < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} < 1$ をとり、それにフィットする有限数列 ξ として、 $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ をとる。このとき、 $f(x) = x$ ($x \in [0, 1]$) のリーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ は

$$\begin{aligned} S(f; \Delta, \xi) &= f(0)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

である。

● 10-3 : 分割の細分

閉区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ に、いくつか分点を追加することにより得られる $[a, b]$ の新しい分割のことを Δ の**細分**という。追加する分点が 1 個だけの場合には、 Δ の初等細分と呼ぶ。 Δ の任意の細分は、初等細分を有限回繰り返すことにより得ることができる。

● 10-4 : 定積分

$f(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ を含む関数とする。 $[a, b]$ の分割 Δ とそれにフィットする有限数列 ξ をとり、リーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ を考える。 $N \rightarrow \infty$ のとき $|\Delta^{(N)}| \rightarrow 0$ となるように Δ を細分していった $[a, b]$ の分割の列 $\Delta = \Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots$ を作り、各 $\Delta^{(N)}$ に対してそれにフィットする有限数列 $\xi^{(N)}$ を選んでリーマン和 $S(f; \Delta^{(N)}, \xi^{(N)})$ を作る時、リーマン和からなる数列 $\{S(f; \Delta^{(N)}, \xi^{(N)})\}_{N=1}^{\infty}$ が

- ① Δ の細分の仕方
- ② 各細分にフィットする有限数列の選び方
- ③ 最初の分割 Δ とそれにフィットする有限数列 ξ の取り方

によらずにある値 γ に限りなく近づいていくなれば、関数 $f(x)$ は $[a, b]$ 上で(リーマン) **積分可能**であるといひ、 γ を $\int_a^b f(x)dx$ によって表わす：

$$\gamma = \int_a^b f(x)dx.$$

例 10-4-1 $c \in \mathbb{R}$ への定数関数 $f(x) = c (x \in \mathbb{R})$ を考える。この場合、 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ とそれにフィットする有限数列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に関する $f(x)$ のリーマン和は、

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$$

となり、 Δ, ξ の選び方によらない。したがって、定数関数 $f(x) = c (x \in \mathbb{R})$ は、任意の閉区間 $[a, b]$ 上で積分可能あり、値は

(10-4 a)
$$\int_a^b cdx = c(b - a)$$

である。

定理 10-4-2

$[a, b]$ 上で連続な関数は積分可能である。 $[a, b]$ 上で連続でなくても、不連続な点が有限個であれば、やはり、積分可能である。

● 10-5 : 最大値・最小値の存在定理

$f(x)$ を集合 S を定義域とする関数とする。 x が S の中を動くときに、関数 $f(x)$ が取り得る最大 (resp. 最小) の値を $f(x)$ の**最大値** (resp. **最小値**) と呼ぶ。

関数やその定義域によっては最大値・最小値が存在しない場合もある。

例 10-5-1 関数 $f(x) = 2x$ ($x \in \mathbb{R}$) は最大値も最小値も持たないが、任意の閉区間 $[a, b]$ に対して、関数 $g(x) = 2x$ ($x \in [a, b]$) は最大値 $2b$ と最小値 $2a$ を持つ。

定理 10-5-2

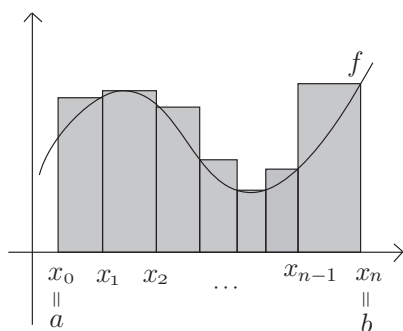
連続関数は閉区間 $[a, b]$ 上で (必ず) 最大値と最小値を持つ。

● 10-6 : 過剰和と不足和

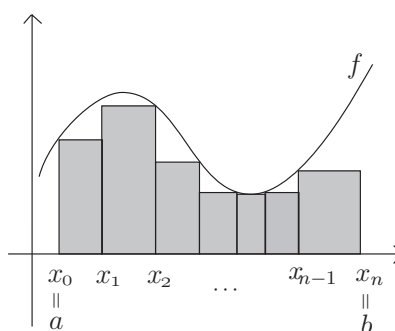
$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ を含むある集合上で定義された連続関数とし、 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ を考える。 $f(x)$ の各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) における最大値、最小値をそれぞれ M_i, m_i とし、

$$(10-6 a) \quad S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

とおく。 $S_{\Delta}(f), s_{\Delta}(f)$ をそれぞれ分割 Δ に関する $f(x)$ の過剰和、不足和という。



過剰和 $S_{\Delta}(f)$



不足和 $s_{\Delta}(f)$

● 10-7 : 定積分の評価

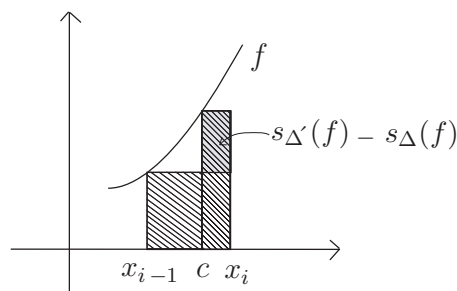
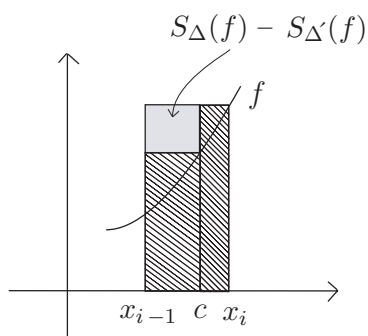
連続関数 $f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ における最大値と最小値をそれぞれ M, m とおくと、閉区間 $[a, b]$ の分割 Δ に対して、常に、

$$m(b-a) \leq s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq M(b-a)$$

が成り立つ。一般に、 Δ' が Δ の初等細分であれば、

$$(10-7 a) \quad s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f)$$

が成り立つ (次図参照)。



したがって、 $\Delta^{(0)} = \Delta$ とおき、 $\Delta^{(0)}$ にその隣り合う分点の中点を加えて細分 $\Delta^{(1)}$ を作り、 $\Delta^{(1)}$ にその隣り合う分点の中点を加えて細分 $\Delta^{(2)}$ を作り …… のように次々と細分を作っていくと、

$$m(b-a) \leq s_{\Delta^{(0)}}(f) \leq s_{\Delta^{(1)}}(f) \leq \cdots \leq s_{\Delta^{(N)}}(f) \leq \cdots$$

$$\cdots \leq S_{\Delta^{(N)}}(f) \leq \cdots \leq S_{\Delta^{(1)}}(f) \leq S_{\Delta^{(0)}}(f) \leq M(b-a)$$

となる ($N \rightarrow \infty$ のとき $|\Delta^{(N)}| \rightarrow 0$ となっていることに注意)。このことから、単調増加数列 $\{s_{\Delta^{(N)}}(f)\}_{n=0}^{\infty}$ は上に有界であり、単調減少数列 $\{S_{\Delta^{(N)}}(f)\}_{n=0}^{\infty}$ は下に有界であることがわかる。よって、極限

$$s(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_{\Delta^{(N)}}(f), \quad S(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{\Delta^{(N)}}(f)$$

が存在し、さらに、 $s_{\Delta^{(N)}}(f) \leq S_{\Delta^{(N)}}(f)$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) より、 $s(f) \leq S(f)$ が成り立つ。

$f(x)$ は $[a, b]$ 上で積分可能であるから、実際は、

$$(10-7b) \quad s(f) = S(f) = \int_a^b f(x) dx$$

となる。よって、任意の分割 Δ と自然数 N に対して、不等式

$$(10-7c) \quad s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta^{(N)}}(f) \leq s(f) = \int_a^b f(x) dx = S(f) \leq S_{\Delta^{(N)}}(f) \leq S_{\Delta}(f)$$

が成立する。

例 10-7-1 $[0, 1]$ の分割として、 $\Delta : 0 < \frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < 1$ をとる。このとき、関数 $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) の Δ に関する過剰和と不足和はそれぞれ次のようになる。

$$S_{\Delta}(f) = f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + f\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + f(1)\left(1 - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{15}{32},$$

$$s_{\Delta}(f) = f(0)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{32}$$

よって、

$$\frac{7}{32} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{15}{32}$$

がわかる。

数学を学ぶ（微分積分1）第10回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
閉区間 $[a, b]$ の分割とは？	p.	
$[a, b]$ の分割 Δ の細かさ $ \Delta $ とは？	p.	
$[a, b]$ の分割 Δ の細分とは？	p.	

Q2. $f(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ が含まれるような関数とします。

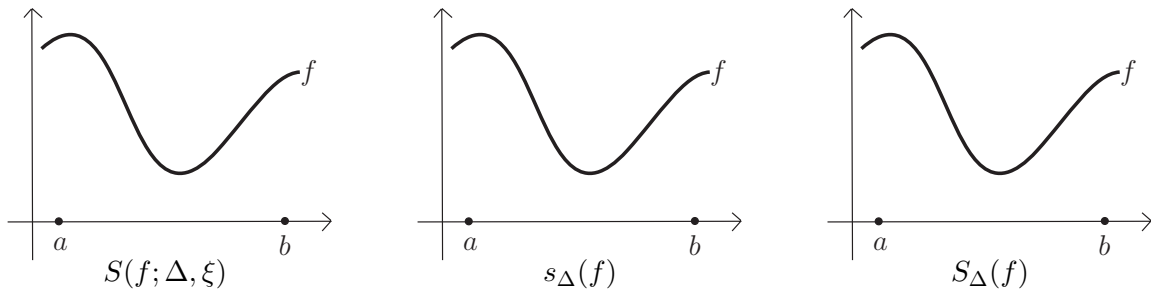
(1) $[a, b]$ の分割 Δ とそれにフィットする有限数列 ξ に関する $f(x)$ のリーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ とは何ですか。下の枠内に定義を書きなさい。

(2) $f(x)$ が $[a, b]$ 上で(リーマン)積分可能であるとき、 $\int_a^b f(x)dx$ は、何を「細かく」していったときの、どんな実数列の極限として定義されますか？簡単に説明しなさい。

(3) 一般にどんな関数が $[a, b]$ 上で積分可能ですか。

Q3. $f(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ が含まれるような連続関数、 Δ を $[a, b]$ の分割とします。

(1) f のグラフが下の曲線で与えられるとき、リーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$, 不足和 $s_{\Delta}(f)$, 過剰和 $S_{\Delta}(f)$ の例を図示しなさい(下図に直接書き込んでください)。但し、 Δ の分点は5個以上からなるようにとり、3つの違いが明確になるように工夫して図示すること。



(2) 不足和 $s_{\Delta}(f)$ と過剰和 $S_{\Delta}(f)$ と定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の間に成立する大小関係を書きなさい。

Q4. 第10回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。