

$$(10-2 a) \quad F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{1 \cdots 0}^r & & & \overbrace{O \cdots O}^{n-r} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hline & & & O & & \\ & & & & O & \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array}$$

$F_{m,n}(r)$ ($r = 0, 1, \dots, \min\{m, n\}$) を (m, n) -行列 A の (階数) 標準形と呼ぶ。

例 10-2-2 $(3, 2)$ -行列の標準形は $F_{3,2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_{3,2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F_{3,2}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の3つである。

例 10-2-3 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、途中まで (階段型にするまで) は行基本変形で変形し、最後に列基本変形を行うことにより、次のようにして標準形が得られる。

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} \times \frac{1}{3}]{\textcircled{2} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{4}]{\begin{array}{l} \textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{3} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{4}]{\begin{array}{l} \textcircled{2} \times (-2) + \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{4} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

● 10-3 : [定理 10-2-1] の証明

(m, n) -行列 A ($\neq O$) に、行基本変形に加えて (必要ならば) 「列の入れ替え」を有限回施すと、次の形をした階段行列 B に変形されることがわかる。

$$(10-3 a) \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ & & O & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & b_{rr} & b_{rr+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

但し、 $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ は 0 でない。次に B の各 i 行を $1/b_{ii}$ 倍して次の形の行列に変形する。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ & & O & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

次に、第1列の $-c_{12}$ 倍を第2列に加え、 \dots 、第1列の $-c_{1n}$ 倍を第 n 列に加えて、さら

に、第2列の $-c_{23}$ 倍を第3列に加え、 \dots 、第2列の $-c_{2n}$ 倍を第 n 列に加える \dots 。この変形を繰り返せば、最後に標準形が得られる。□

● 10-4 : 列基本変形と基本行列

行列に行基本変形を施す操作は基本行列を左から掛けることにより実現されるが、列基本変形を施す操作は基本行列を右から掛けることにより実現される。

列基本変形	右から掛ける基本行列
第 j 列に第 i 列の t ($\neq 0$) 倍を加える	$P_n(j, i; t)$
第 i 列を t ($\neq 0$) 倍する	$Q_n(i; t)$
第 i 列と第 j 列を入れ換える	$R_n(i, j)$

ここで、 $P_n(i, j; t)$, $Q_n(i; t)$, $R_n(i, j)$ は以下の行列である。

$$(10-4 a) \quad P_n(i, j; t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ \hline & & & t & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots \text{第 } i \text{ 行目} \\ \dots\dots \text{第 } j \text{ 行目} \end{array}$$

$$(10-4 b) \quad Q_n(i; t) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{O} & & t & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \dots\dots \text{第 } i \text{ 行目}$$

$$(10-4 c) \quad R_n(i, j) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ \hline & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots\dots \text{第 } i \text{ 行目} \\ \dots\dots \text{第 } j \text{ 行目} \end{array}$$

例 10-4-1 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ta_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ta_{21} + a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、 A に第1列の t 倍を第3列に加える列基本変形を施すことは、 A に右から基本行列 $P_3(3, 1; t)$ を掛けることにより実現される。□

[定理 10-2-1] から次の定理を得る。

定理 10-4-2

どんな (m, n) -行列 A に対しても、 $r = \text{rank } A$ とおくと、 $PAQ = F_{mn}(r)$ となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する。

(証明)

[定理 10-2-1] により、 A に行基本変形と列基本変形を有限回施して標準形 $F_{mn}(r)$ にすることができるから、行基本変形を行うところではそれに対応する基本行列を左から掛けて、列基本変形を行うところでは対応する基本行列を右から掛けていけば、 $F_{mn}(r)$ が得られる。よって、行基本変形と列基本変形のそれぞれに対応する基本行列の積を P, Q とおくと、 $PAQ = F_{mn}(r)$ となる。基本行列は正則であるから、それらの積である P, Q はどちらも正則である。□

定理 10-4-3

n 次正方行列 A に対して次の3つは互いに同値である：

- (1) $\text{rank } A = n$.
- (2) A は正則である。
- (3) $|A| \neq 0$.

(証明)

「(2) \iff (3)」は [定理 9-2-1] による。「(1) \iff (3)」を示す。

[定理 10-4-2] により、 $PAQ = F_{nn}(r)$ となる n 次正則行列 P, Q が存在する。ここで、 $r = \text{rank } A$ である。よって、次を得る：

$$|P| \cdot |A| \cdot |Q| = |PAQ| = |F_{nn}(r)| = \begin{cases} 0 & (r < n \text{ のとき}), \\ 1 & (r = n \text{ のとき}). \end{cases}$$

P, Q は正則であるから、 $|P| \neq 0, |Q| \neq 0$ である。よって、(1) と (3) は同値である。□

例 10-4-4 a を定数とし、3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ を考える。 $|A|$ を計算すると、

$|A| = (1 + 2a)(1 - a)^2$ であることがわかる。よって、

- $a \neq 1, -\frac{1}{2}$ ならば、 $|A| \neq 0$ であるから、[定理 10-4-3] により、 $\text{rank } A = 3$ である。
- $a = 1$ のときと $a = -\frac{1}{2}$ のときは、それぞれ個別に A を行基本変形し、階段型にすることにより、階数を求めることができる。結果は次のようになる：

$$\text{rank } A = \begin{cases} 3 & (a \neq 1, -\frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ 2 & (a = -\frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

□

線形代数1 事前練習用演習問題

pre10-1. (行列の標準形と階数)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

について、

(1) A に有限回行基本変形を施して、階段型にし、 $\text{rank } A$ を求めよ。(2) A の標準形を求めよ。(答えのみは不可。どのような基本変形を施して標準形が得られたのかがわかるように変形の過程を書くこと。)

pre10-2. (正方行列の階数と行列式)

 a を実数の定数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ -2 & a-5 & 0 & -a \\ 1 & 3-a & a-3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ。

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre10-1. [例 10-1-2] と [例 10-2-3] を参考に解答する。始めはガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を行って階段型にし、次に、列基本変形を行い、標準形にする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{3}]{\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 10 + \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

よって、 $\text{rank } A = 3$ である。

(2) 上で得た階段型行列の各行を、段が降りる所の数が1になるように定数倍してから、以下のように列基本変形を施すことで、標準形が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} \times \frac{1}{100}]{\textcircled{2} \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{4}]{\begin{matrix} \textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \times (-7) + \textcircled{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-12) + \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = F_{3,4}(3)$$

pre10-2. [例 10-4-4] を参考に解くことができる。

 $|A|$ を行列式の性質を用いて、工夫して計算すると、

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ -2 & a-5 & 0 & -a \\ 1 & 3-a & a-3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \dots = (a-3)^2(1-a)$$

となることがわかる。したがって、 $a \neq 1, 3$ ならば $|A| \neq 0$ であるから、 $\text{rank } A = 4$ である。

$a = 1, 3$ のとき、個別に $\text{rank } A$ を計算する。

- $a = 1$ のとき、行基本変形により、

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、 $\text{rank } A = 3$ である。

- $a = 3$ のとき、行基本変形により、

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、 $\text{rank } A = 3$ である。

以上より、

$$\text{rank } A = \begin{cases} 4 & (a \neq 1, 3 \text{ のとき}) \\ 3 & (a = 1, 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

線形代数1・第10回(2026年6月11日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 下の表を完成させなさい。第1行には階数の値を、第2行には対応する標準形を書き、第3行には次の3次正方行列たちを階数ごとにグループ分けした結果を書きなさい(どの行列がどのグループに属しているのかがわかるように、書き方を工夫すること)。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

階数	
標準形	
行列	

Q2. $(2,3)$ -行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ にある列基本変形を行って行列 B が得られたとしよう。このとき、 B は A にどのような基本行列 P を A に掛けたものに一致するか。 A に施す列基本変形が次の表に掲げられている各場合に、 A の左右どちらから P を掛けるかということとともに、 B と P を記入して、表を完成させなさい。

列基本変形	B	P	左 or 右
第2列の t 倍を第3列に加える			
第1列を t 倍する			
第1列と第2列を入れ替える			

Q3. 与えられた行列 A の標準形を求めるための手順を書きなさい。

Q4. 第10回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。