§9. Maclaurin 展開

この節では、関数を続けて 2 回、3 回、一般に、n 回微分することを考える。そして、微分可能な関数を多項式関数によって近似するための公式—Maclaurin 展開—を導き、その応用として近似値の計算を取り上げる。

● 9 - 1 : 高階導関数

開区間 I 上で定義された微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がさらに微分可能であるとき、$f(x)$ は 2 **回微分可能**であるといい、その導関数を $f''(x)$ または $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ で表わす：

(9 - 1 a)
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\bigl(f'(x)\bigr).$$

$f''(x)$ を $f(x)$ の**第 2 次導関数**または 2 **階導関数**と呼ぶ。

より一般に、$f(x)$ を n 回次々と続けて微分することができるとき、$f(x)$ は n **回微分可能**であるといい、その導関数を $f^{(n)}(x)$ または $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ で表わす。$f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の**第 n 次導関数**または n **階導関数**と呼ぶ。

(9 - 1 b)
$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\bigl(f^{(n-1)}(x)\bigr) \qquad (n \geq 2)$$

が成り立つ。

$f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束する。

例 9 - 1 - 1

(1) $(e^x)' = e^x$ だから、自然数 n に対して

(9 - 1 c)
$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

(2) $(\sin x)' = \cos x,\ (\sin x)'' = -\sin x,\ (\sin x)^{(3)} = -\cos x,\ (\sin x)^{(4)} = \sin x, \cdots$ であり、一般に、自然数 n に対して

(9 - 1 d)
$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m), \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m+1). \end{cases}$$

● 9 - 2 : 第 n 次 Maclaurin 展開

定理 9 - 2 - 1 (第 n 次 Maclaurin 展開)

$f(x)$ を 0 を含む開区間 I 上で定義された n 回微分可能な関数とする。このとき、任意の $x \in I$ について

(9 - 2 a)
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

となる実数 θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。関数 $f(x)$ を (9 - 2 a) のように表示することを $f(x)$ の**第 n 次マックローリン展開**といい、

(9 - 2 b)
$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

を**ラグランジュの剰余項**と呼ぶ。

上の定理の証明は最後にまわす。上の定理は、n 回微分可能な関数 $f(x)$ は

$$(n-1 \text{ 次多項式}) + R_n(x)$$

という形をしているということを言っている。もし、$R_n(x)$ が無視できるくらい小さければ

$$f(x) \fallingdotseq f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \tag{9-2 c}$$

のように近似することができる。この近似式については後ほどもう少し詳しく扱う。

例 9-2-2 以下の各 Maclaurin 展開において θ は $0 < \theta < 1$ を満たす実数を表わす。

(1) 指数関数、正弦関数、余弦関数の n 次 Maclaurin 展開は以下のようになる：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \tag{9-2 d}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m\frac{\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (n = 2m+1) \tag{9-2 e}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m\frac{\cos(\theta x)}{(2m)!}x^{2m} \quad (n = 2m) \tag{9-2 f}$$

(2) α を実数とする。任意の自然数 k に対して、

$$\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \qquad (x > -1)$$

であるから、

$${}_\alpha\mathrm{C}_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

とおくと、$(1+x)^\alpha$ の n 次 Maclaurin 展開

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + {}_\alpha\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1} + {}_\alpha\mathrm{C}_n(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n \tag{9-2 g}$$

が得られる。 □

● 9-3：近似式

$f(x)$ を、0 を含むある開区間 I 上で定義された n 回微分可能な関数とし、それを第 n 次 Maclaurin 展開したときのラグランジュの剰余項を $R_n(x)$ とする。このとき、$f(x)$ を $(n-1)$ 次式により与えられる関数

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

で近似したときの誤差 $|f(x) - p(x)|$ は $|R_n(x)|$ である。したがって、もし、十分小さい $r > 0$ をとったとき、ある実数 $\varepsilon > 0$ について

$$-r < x < r \implies |R_n(x)| < \varepsilon$$

となったとすると、任意の $x_0 \in (-r, r)$ に対して、$f(x_0)$ は開区間 $(p(x_0) - \varepsilon, p(x_0) + \varepsilon)$ に含まれる (つまり、$f(x_0)$ を $p(x_0)$ で近似したときの誤差は高々 $\pm\varepsilon$ 程度である)。

例 9-3-1 $\sqrt{5}$ の近似値を

$$\sqrt{5} = 2\Big(1 + \frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

と書けることを利用して求めよう。

$(1+x)^{\frac{1}{2}}$ $(x>-1)$ の 3 次 Maclaurin 展開は

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-3}x^3\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \quad (0<\theta<1)\end{aligned}$$

である。ここで、

$$2\left|\frac{1}{16}\left(1+\frac{\theta}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right| < 2\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{512}=0.0019\ldots\ldots,$$

$$2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4^3}=2+\frac{15}{4^3}=2.234\ldots\ldots$$

なので、$\sqrt{5}$ は

$$2.232=2.234-0.002<\left(2+\frac{15}{4^3}\right)-\frac{1}{512}<\sqrt{5}<\left(2+\frac{15}{4^3}\right)+\frac{1}{512}<2.235+0.002=2.237$$

の範囲内にある。これより、$\sqrt{5}$ の小数点以下 2 桁は 2.23 であることがわかる。

● 9 - 4：第 n 次 Taylor 展開

関数 $g(x)=f(x+a)$ を第 n 次 Maclaurin 展開することにより次の定理が得られる。

定理 9 - 4 - 1 (第 n 次 Taylor 展開)

$f(x)$ を実数 a を含む開区間 I 上で定義された n 回微分可能な関数とする。このとき、任意の $x\in I$ について

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2\\ &\quad +\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\end{aligned} \tag{9-4 a}$$

となる実数 $c=c(x)$ が a と x の間に存在する。表示 (9 - 4 a) を $f(x)$ の a のまわりでの**第 n 次 Taylor 展開**という。

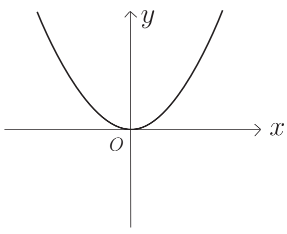
● 9 - 5：第 2 次導関数と関数の極値

2 次関数 $y=cx^2$ のグラフは右図のようになり、

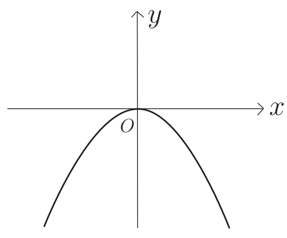
(i) $c>0$ のとき $x=0$ で極小

(ii) $c<0$ のとき $x=0$ で極大

である。ここで、定数 c の正負は第 2 次導関数の $x=0$ における値 $y''=2c$ の正負と一致することに注意しよう。次の定理はこの事実の一般化と考えられる。



c>0



c<0

定理 9 - 5 - 1

開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ は 2 回微分可能であって、かつ、第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続であるとする。このとき、点 $a \in I$ について、

(1) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば、$f(x)$ は a で極小である。

(2) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば、$f(x)$ は a で極大である。

(**証明**)

(1) a のまわりで $f(x)$ を第 2 次 Taylor 展開すると、任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

となる実数 c が x と a の間に存在する。$f'(a) = 0$ より、上の等式は

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

と書ける。仮定により第 2 次導関数 $f''(x)$ は a で連続なので、$f''(a) > 0$ ということから「a に十分近い任意の x について $f''(x) > 0$」が導かれる。したがって、x が a に十分近ければ、$f''(c) > 0$ となるので、$f(x) - f(a) > 0$ となる。故に、$f(x)$ は a で極小である。

(2) も同様にして証明される。 □

● 9 - 6 : [定理 9 - 2 - 1] の証明

(☆) $$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (F(x) \text{ は剰余項})$$

(★) $$G(x) = \frac{x^n}{n!}$$

とおく。

$$F(0) = F'(0) = F^{(2)}(0) = \cdots = F^{(n-1)}(0) = 0,$$
$$G(0) = G'(0) = G^{(2)}(0) = \cdots = G^{(n-1)}(0) = 0$$

であるから、コーシーの平均値の定理を繰り返し用いて、

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \quad (c_1 \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間のある数}),$$

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1)-F'(0)}{G'(c_1)-G'(0)} = \frac{F^{(2)}(c_2)}{G^{(2)}(c_2)} \quad (c_2 \text{ は } c_1 \text{ と } 0 \text{ の間のある数}),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{F^{(n-1)}(c_{n-1})}{G^{(n-1)}(c_{n-1})} = \frac{F^{(n-1)}(c_{n-1})-F^{(n-1)}(0)}{G^{(n-1)}(c_{n-1})-G^{(n-1)}(0)} = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} \quad (c_n \text{ は } c_{n-1} \text{ と } 0 \text{ の間のある数})$$

と表わすことができる。$G^{(n)}(x) = 1,\ F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ であるから、

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)}G(x) = f^{(n)}(c_n)\frac{x^n}{n!}$$

となる。c_n は 0 と x の間の数なので、$c_n = \theta x$ $(0 < \theta < 1)$ のように書ける。これで、第 n 次 Maclaurin 展開の式が得られた。 □

2026 年 6 月 4 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 9 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f(x)$ を 0 を含む開区間 I 上で定義された何回でも微分可能な関数とします。次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉や数式・記号を入れなさい。

- $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ をさらに微分することにより得られる関数を $f(x)$ の $\boxed{\quad\quad}$ といい、これを $f''(x)$ または $\boxed{\quad}$ により表わす。一般に、$f(x)$ を n 回続けて微分することにより得られる関数を $f(x)$ の $\boxed{\quad\quad}$ といい、これを $f^{(n)}(x)$ または $\boxed{\quad}$ により表わす。便宜上、$n=0$ のときも $f^{(n)}(x)$ を考え、$f^{(0)}(x) = \boxed{\quad}$ と約束する。
- 冪関数 $(1+x)^\alpha$ $(x>-1)$、指数関数、正弦関数、余弦関数の第 n 次導関数はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}, \quad (e^x)^{(n)} = \boxed{\quad\quad}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \boxed{\quad\quad\quad}, \quad (\cos x)^{(n)} = \boxed{\quad\quad\quad}$$

- $f(x)$ の第 5 次 Maclaurin 展開は、$R_5(x)$ をラグランジュの剰余項として、

$$f(x) = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}\, x + \boxed{\quad}\, x^2 + \boxed{\quad}\, x^3 + \boxed{\quad}\, x^4 + R_5(x)$$

である。ここで、$R_5(x) = \boxed{\quad\quad\quad}$ である。

- 任意の実数 α と自然数 k に対して ${}_\alpha\mathrm{C}_k = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$ および ${}_\alpha\mathrm{C}_0 = 1$ と定める。冪関数 $(1+x)^\alpha$ $(x>-1)$ の第 n 次 Maclaurin 展開は、これらの記号を用いて次のように表わされる：

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \boxed{\quad\quad}\, x^k + \boxed{\quad\quad\quad}\, x^n$$

- $R_n(x)$ を $f(x)$ の第 n 次 Maclaurin 展開におけるラグランジュの剰余項とする。このとき、任意の $x \in I$ に対して $f(x)$ と $(n-1)$ 次式により与えられる関数

$$p(x) := \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

との差の絶対値は $|R_n(x)|$ に等しい。したがって、$r>0$ を十分小さくとったとき、条件「$-r<x<r$ を満たすすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $|R_n(x)| < \varepsilon$ である」を満たす定数 ε が見つかれば、開区間 $(-r, r)$ 内の任意の実数 x_0 に対して $f(x_0)$ は $\boxed{\quad} - \varepsilon$ と $\boxed{\quad} + \varepsilon$ との間にある。

Q2. 第 9 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。