

§9. 逆行列と行列式

この節では、行列式の余因子展開の応用として、正方行列が正則であるためには、その行列式が0でないことが必要十分であることを示す。

● 9-1 : 余因子

前節において、行列式の余因子展開を説明した。 n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の行列式は、次のように表わされるのであった。

- $|A|$ の第 i 行に関する余因子展開：

$$(9-1 a) \quad |A| = (-1)^{i+1} a_{i1} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行と第} \\ 1 \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| + (-1)^{i+2} a_{i2} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行と第} \\ 2 \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| \\ + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行と第} \\ n \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| .$$

- $|A|$ の第 j 列に関する余因子展開：

$$(9-1 b) \quad |A| = (-1)^{1+j} a_{1j} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } 1 \text{ 行と第} \\ j \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| + (-1)^{2+j} a_{2j} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } 2 \text{ 行と第} \\ j \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| \\ + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } n \text{ 行と第} \\ j \text{ 列を取り除いたもの} \end{array} \right| .$$

ここで、

$$(9-1 c) \quad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \times \left| \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 列を取り除いて} \\ \text{得られる } (n-1) \text{ 次正方行列} \end{array} \right|$$

とおく。これを A の (i, j) -成分に対する**余因子**という (\tilde{a} は「エイ ティルダ」と読む)。

(9-1 a), (9-1 b) を余因子を使って書き換えると、次のようになる。

定理 9-1-1

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の行列式 $|A|$ について次式が成り立つ：

- (1) $|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$ (第 i 行に関する余因子展開)
- (2) $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$ (第 j 列に関する余因子展開)

但し、 \tilde{a}_{ij} は A の (i, j) -成分に対する余因子である。

● 9-2 : 行列の正則性と行列式

正方行列が正則かどうかは、行列式を計算することにより判定することができる。この事実は第6節においてすでに、2次正方行列と3次正方行列について導いている。

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$(9-2 a) \quad A \text{ が正則 (つまり、逆行列を持つ)} \iff |A| = ad - bc \neq 0$$

であり、このとき、

$$(9-2 b) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例 9-2-2 a を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ -3 & a+5 & -3 \\ -3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ を考える。 A が正則でなくなるときの a の値を求めよう。そのために行列式を計算する。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ a-1 & a+5 & -3 \\ a-1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \quad (\because \text{第1列に足しあげる}) \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & a+5 & -3 \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \quad (\because \text{第1列から } a-1 \text{ をくくり出す}) \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & a+7 & -5 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} \quad (\because \text{①} \times (-1) + \text{②}, \text{①} \times (-1) + \text{③}) \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} a+7 & -5 \\ 2 & a \end{vmatrix} \quad (\because \text{第1列に関して余因子展開}) \\ &= (a-1)((a+7)a - (-5) \cdot 2) = (a-1)(a+2)(a+5) \end{aligned}$$

であるから、 A が正則でないのは $|A| = 0$ を解いて、 $a = 1, -2, -5$ のときである(逆に言えば、 a が $1, -2, -5$ 以外の値であれば、 A はすべて正則になる)。□

● 9-3 : 行列の積と行列式

正方行列の積と行列式との間には、次の定理に示すような、美しい関係がある。この定理は、[定理 9-2-1] を証明するために使われる。

定理 9-3-1

n 次正方行列 A と B との積 AB の行列式は A の行列式と B の行列式との積である。すなわち、

$$(9-3 a) \quad |AB| = |A||B|.$$

$n = 2$ の場合に、上の定理が成り立つことは簡単に確かめられる。 $n = 3$ の場合も、少し複雑になるが、同様の方法で証明することができる。しかし、一般の n に対して、[定理 9-3-1] を同様の方法で証明することは難しい。少し工夫が必要である。以下、その証明のあらすじを述べる。まず、 $B = (b_{ij})$ とおき、行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ を考える。この行列に対して、 $j = 1, \dots, n$ にわたり、第1列の b_{1j} 倍、第2列の b_{2j} 倍、 \dots 、第 n 列の b_{nj} 倍を第 $n+j$ 列に加える、という基本変形を行う。すると、行列 $\begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{pmatrix}$ が得られる。さらに、この行列に対して、第1行と第 $n+1$ 行を入れ替えて、第2行と第 $n+2$ 行を入れ替えて、 \dots 、第 n 行と第 $2n$ 行を入れ替えるという基本変形を行う。すると、 $\begin{pmatrix} -E_n & O \\ A & AB \end{pmatrix}$ という行列が得られる。したがって、

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E_n & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

が成り立つ。[例 9-1-1] により、最左辺は $|A||B|$ に、最右辺は、 $|-E_n| = (-1)^n$ により、 $|AB|$ に一致することから、[定理 9-3-1] の等式が得られる。

例 9-3-2 n 次正方行列 A が $A^T A = E_n$ を満たすとき、 $|A|$ の取り得る値は $1, -1$ である。

(証明)

等式 $A^T A = E_n$ の両辺の行列式をとると、 $|A^T A| = |E_n| = 1$ となる。左辺は、[定理 9-3-1] と行列式の性質 (Det5) より、 $|A^T A| = |A^T| \cdot |A| = |A|^2$ となるから、 $|A|^2 = 1$ を得る。よって、 $|A| = \pm 1$ である。 \square

● 9-4 : [定理 9-2-1] の証明

A が逆行列を持つと仮定し、 X をその逆行列とする。 $AX = E_n$ である。この両辺の行列式をとると、[定理 9-3-1] から

$$|A||X| = |AX| = |E_n| = 1$$

となる。特に、 $|A| \neq 0$ がわかる。(上式から、ついでに $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ となることもわかる。)

逆が成り立つことを示す。 $|A|$ を第 i 行に関して余因子展開すれば

$$(\star) \quad |A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

となる。一方、 $i \neq k$ なる i と k に対しては

$$(\star\star) \quad a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{kn} = 0$$

となる(実際、この等式は、行列 A の第 k 行目を第 i 行目で置き換えた行列 A' を考え、行列式 $|A'|$ を第 k 行に関して余因子展開すると得られる)。

さて、等式 (\star) と $(\star\star)$ を i と k を 1 から n まで動かしたもののすべてを考えると、それらは行列を用いて次のようにひとまとめに書くことができる：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

と置けば、上式は

$$A\tilde{A} = |A|E_n$$

と書き表わすことができる。 $|A|$ の列に関する余因子展開を考えて、同様にして、

$$\tilde{A}A = |A|E_n$$

を得る。

よって、 $|A| \neq 0$ ならば、 $X = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ と置くことによって、 $AX = XA = E_n$ が成り立つ。 \square

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre9-1. (行列式と行列の正則性)

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a-12 & -5 & 5 \\ 11 & a+4 & -11 \\ -7 & -7 & a \end{pmatrix}$ が正則でないのは、 a がどんな値のときか？そのような a の値をすべて求めよ。

pre9-2. (行列の積と行列式)

(1) 4次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} a^2 + d^2 & ac & bd & ad \\ ac & a^2 + c^2 + d^2 & ad & ac \\ bd & ad & b^2 + d^2 & ab + cd \\ ad & ac & ab + cd & a^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

の行列式を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ c & d & a & 0 \\ 0 & 0 & d & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$ と転置行列 A^T との積を考えることにより求めよ。

(2) n 次正方行列 A が $A^2 = -A$ を満たしているとする。行列式 $|A|$ の取り得る値を求めよ。

ヒントと略解 (最初は見ずに解答してください)

pre9-1. [例 9-2-2] を参照。 $|A| = 0$ となるときの a の値を求めればよい。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-12 & -5 & 5 \\ 11 & a+4 & -11 \\ -7 & -7 & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & a-7 & -11 \\ -7 & a-7 & a \end{vmatrix} \quad (\text{③} \times 1 + \text{②}) \\ &= (a-7) \begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & 1 & -11 \\ -7 & 1 & a \end{vmatrix} \quad (\text{第2列から } (a-7) \text{ を括り出す}) \\ &= (a-7) \begin{vmatrix} a-12 & 0 & 5 \\ 11 & 1 & -11 \\ -18 & 0 & a+11 \end{vmatrix} \quad (\text{②} \times (-1) + \text{③}) \\ &\quad (\text{第2列に関して余因子展開}) \dots\dots \\ &= (a-7)^2(a+6) \end{aligned}$$

となる。したがって、 A が正則でないような a の値は $-6, 7$ である。

pre9-2. [例 9-3-2] を参照。

(1) 計算により、 $AA^T = X$ となることがわかる。したがって、この両辺の行列式をとって、

$$|A|^2 = |A||A^T| = |AA^T| = |X|$$

を得る。

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = ad(ad - bc)$$

であるから、 $|X| = |A|^2 = a^2d^2(ad - bc)^2$ である。

(2) $A^2 = -A$ の両辺の行列式をとると、 $|A|^2 = |A^2| = |-A|$ を得る。右辺の行列式は、(Det2) を n 回適用して、 $(-1)^n|A|$ になることがわかる。よって、 $|A|^2 = (-1)^n|A|$ である。 $x = |A|$ とおいて、 x について解くことにより、 $|A| = 0, (-1)^n$ であることがわかる。

線形代数1・第9回(2026年6月4日)演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

| | ページ | 意味 |
|--|-----|----|
| n 次正方行列 A の (i, j) -成分に対する余因子とは？ | P. | |

Q2. 次の に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の (i, j) -成分に対する余因子を \tilde{a}_{ij} とおくと、

$$\tilde{a}_{11} = \text{}, \quad \tilde{a}_{12} = \text{}, \quad \tilde{a}_{21} = \text{}, \quad \tilde{a}_{22} = \text{}$$

である。

- 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の (i, j) -成分に対する余因子を \tilde{a}_{ij} とおく。 A が

正則のとき、 A の逆行列は行列式 $|A|$ および余因子 \tilde{a}_{ij} を用いて

$$A^{-1} = \text{$$

によって与えられる。ここで、各余因子 \tilde{a}_{ij} は以下のように計算される。

$$\tilde{a}_{11} = \text{}, \quad \tilde{a}_{21} = \text{}, \quad \tilde{a}_{31} = \text{},$$

$$\tilde{a}_{12} = \text{}, \quad \tilde{a}_{22} = \text{}, \quad \tilde{a}_{32} = \text{},$$

$$\tilde{a}_{13} = \text{}, \quad \tilde{a}_{23} = \text{}, \quad \tilde{a}_{33} = \text{$$

- n 次正方行列 A, B に対して、行列式 $|AB|, |A|, |B|$ の間には等式 が成り立つ。特に、正則行列 A に対しては $|A^{-1}| = \text{$ が成り立つ。

Q3. $\begin{pmatrix} a-1 & -2 & 2 \\ -3 & a+5 & -3 \\ -7 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ のように、行列の成分の中に未知の定数 a が含まれる場合、その行列が正則でなくなるような a の値を求めるためにはどうすればよいか。1つの解決方法・方針を示しなさい。

Q4. 第9回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。