§8. 逆関数の連続性と微分可能性

逆関数を持つ関数 $f(x)$ が連続あるいは微分可能であるとき、適当な条件の下で、その逆関数も連続あるいは微分可能となる。この節の前半では、これらの事実および逆関数の微分公式について説明し、応用として、逆三角関数の微分を計算する。後半では、対数関数、冪関数を定義し、その導関数を求める。

● 8 - 1 : 関数の値域

集合 S 上で定義された関数 $f(x)$ に対して、実数 x が S の中を自由に動くときに、関数 $f(x)$ の値が取り得る実数の範囲のことを関数 $f(x)$ の**値域**という。

例 8 - 1 - 1 関数 $f(x) = 2x^2 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ の値域は $[1, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$ である。

● 8 - 2 : 逆関数とは

関数 $f(x)$ $(x \in S)$ の値域を T とする。もし、T の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる $x \in S$ が唯一つならば、$y \in T$ を入力すると $x \in S$ を出力する関数が定まる。この関数を f の**逆関数**といい、f^{-1} で表わす (f^{-1} は「エフ インバース」と読む)。定義より、$x \in S$ と $y \in T$ に対して

(8 - 2 a)
$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

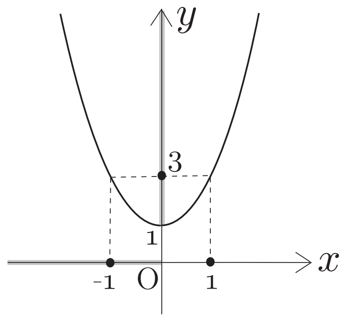
および

(8 - 2 b)
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in S), \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in T)$$

が成り立つ。

例 8 - 2 - 1 関数 $f(x) = 2x^2 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ を考える。

この値域 $[1, +\infty)$ の中から実数 3 を取ると、$f(x) = 3$ となる $x \in \mathbb{R}$ は $x = \pm 1$ の 2 個存在するので、$f(x)$ は逆関数を持たない。



今度は定義域を制限して、関数 $f_1(x) = 2x^2+1$ $(x \leq 0)$ を考える。このとき、f_1 の値域 $[1, +\infty)$ の中から任意に y を取ると、$y = f_1(x)$ となる $x \leq 0$ が唯一つ存在する。実際、

$$y = 2x^2 + 1 \qquad (x \leq 0)$$

を x について解いて、唯一の解

$$x = -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

を得る。したがって、f_1 は逆関数を持ち、その逆関数は次で与えられる。

$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{2}} \qquad (x \geq 1).$$

● 8-3：狭義単調関数

S 上で定義された関数 $f(x)$ が

(8-3 a) $$x_1, x_2 \in S,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{resp. } f(x_1) > f(x_2)\ )$$

を満たすとき、関数 $f(x)$ $(x \in S)$ は**狭義単調増加** (resp. **狭義単調減少**) であると呼ばれる。

狭義単調増加関数と狭義単調減少関数を総称して、**狭義単調関数**と呼ぶ。狭義単調関数は逆関数を持つ。

例 8-3-1 n を自然数とする。関数 $f(x) = x^n$ $(x \geq 0)$ は狭義単調増加なので、逆関数が存在する。その逆関数は各 $x \geq 0$ にその n 乗根を対応させる関数 $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(x \geq 0)$ である。

● 8-4：逆関数の連続性と微分可能性

狭義単調な連続関数の逆関数はまた狭義単調な連続関数となる。詳しくは次が成り立つ。

定理 8-4-1
閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続な狭義単調増加 (resp. 減少) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(y)$ は、閉区間 $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) 上で定義された連続な狭義単調増加 (resp. 減少) 関数である。

上の定理は実数の定義に直接関わるため、証明は略す。

定理 8-4-2 (逆関数定理)
$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数であるとし、すべての点 $a \in I$ において $f'(a) > 0$ (または $f'(a) < 0$) であると仮定する。このとき、$f(x)$ $(x \in I)$ の値域 J は開区間であり、逆関数 $f^{-1}(y)$ $(y \in J)$ が定義される。さらに、この逆関数は微分可能であって、点 $b = f(a)$ における微分係数は次式で与えられる：

(8-4 a) $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

逆関数が微分可能であることは認めた上で、逆関数の微分公式 (8-4 a) を導こう。逆関数の定義により、

$$y = (f \circ f^{-1})(y) \qquad (y \in J)$$

が成り立つ。この両辺を y で微分する。合成関数の微分公式により、

$$\begin{array}{ccc} y' & = & \big((f \circ f^{-1})(y)\big)' \\ \| & & \| \\ 1 & & f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))' \end{array}$$

を得る。よって、

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

である。この式に $y = b$ を代入すれば、$f^{-1}(b) = a$ より、(8-4 a) となる。

例 8-4-3

(1) 正弦関数 $\sin x$ は定義域を閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限すると、狭義単調増加な連続関数である。よって、関数 $\sin x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ は狭義単調増加で連続な逆関数を持つ。その逆関数を Sin^{-1} または arcsin と表わし、**逆正弦関数**と呼ぶ。Sin^{-1}, arcsin は「アーク・サイン」と読む。逆関数の定義より、Sin^{-1} の定義域は、関数 $\sin x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ の値域 $[-1, 1]$ であり、任意の $y \in [-1, 1]$ に対して、$x = \mathrm{Sin}^{-1}(y)$ とおくと

$$\sin x = y, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

が成立する。例えば、$\mathrm{Sin}^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Sin}^{-1}(0) = 0$, $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ である。

開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の中の任意の実数 a において、

$$\sin'(a) = \cos a > 0$$

であるから、逆関数定理により、関数 $\mathrm{Sin}^{-1}(y)$ $(y \in (-1, 1))$ は微分可能である。さらに、その導関数は、$x = \mathrm{Sin}^{-1}(y)$ とおくことにより、

(8-4 b) $$(\mathrm{Sin}^{-1}(y))' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad (y \in (-1, 1))$$

により与えられることがわかる。

(2) 正弦関数と同様に、関数 $\cos x$ $(x \in [0, \pi])$ は逆関数 $\mathrm{Cos}^{-1}(y)$ $(y \in [-1, 1])$ を持ち、$[-1, 1]$ において連続、$(-1, 1)$ において微分可能で、

(8-4 c) $$(\mathrm{Cos}^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad (y \in (-1, 1))$$

となる。$\mathrm{Cos}^{-1}(y)$ $(y \in [-1, 1])$ を**逆余弦関数**と呼ぶ。Cos^{-1} は「アーク・コサイン」と読む。Cos^{-1} を arccos と表わすこともある。

(3) 関数 $\tan x$ $(x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ は微分可能であり、任意の $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して $\tan'(a) = 1 + \tan^2 a > 0$ を満たすから、微分可能な逆関数を持つ。この逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}(y)$ $(y \in \mathbb{R})$ で表わし、**逆正接関数**と呼ぶ。Tan^{-1} は「アーク・タンジェント」と読む。Tan^{-1} を arctan と表わすこともある。逆関数の微分法により

(8-4 d) $$(\mathrm{Tan}^{-1}(y))' = \frac{1}{1 + y^2} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

● 8-5 : 対数関数

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)' = e^x > 0$ より、指数関数

$$\exp x = e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

は微分可能な逆関数を持つ。その逆関数を $\log x$ と書き、**対数関数**という。

どんなに大きな正の実数 a に対しても、$a < (2^n <) e^n$ となる自然数 n が存在するので、中間値の定理より指数関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ の値域、すなわち、$\log x$ の定義域は $(0, +\infty)$ である。

$x > 0$ に対して、逆関数の定義により、

(8-5 a) $$y = \log x \iff e^y = x$$

という関係がある。したがって、

(8 - 5 b) $$e^{\log x} = x \qquad (x > 0)$$

が成り立つ。指数法則から、

(8 - 5 c) $$\log(xy) = \log x + \log y \quad (x, y > 0)$$

が成立することがわかる ($\because\ e^{\log(xy)} = xy = e^{\log x}e^{\log y} = e^{\log x + \log y}$). また、逆関数の微分公式により、

(8 - 5 d) $$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

となる。実際、(8 - 5 b) の両辺を x で微分して、

$$\begin{array}{ccc} (e^{\log x})' & = & x' \\ \| & & \| \\ e^{\log x} \cdot (\log x)' & & 1 \\ \| & & \\ x \cdot (\log x)' & & \end{array}$$

を得る。

● 8 - 6 : 一般の指数関数の微分可能性

$a > 0$ に対して、

(8 - 6 a) $$a^x = \exp(x \log a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。実際、$b = \log a$ とおくと、$e^b = a$ となるので、

$$a^x = (e^b)^x = e^{bx} = \exp(xb) = \exp(x \log a)$$

を得る。

(8 - 6 a) より、a を底とする指数関数 $\exp_a(x) = a^x$ $(x > 0)$ は微分可能であることがわかる。その導関数は、合成関数の微分公式により、次式で与えられる：

(8 - 6 b) $$(a^x)' = (\log a)a^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

● 8 - 7 : 冪関数

$\alpha \in \mathbb{R}$ を固定して、次のような関数 $g(x)$ を考える：

(8 - 7 a) $$g(x) = x^\alpha \qquad (x > 0).$$

この関数を**冪関数**という。冪関数は、$\alpha > 0$ のとき狭義単調増加関数、$\alpha < 0$ のとき狭義単調減少関数になる。また、合成関数の微分公式により、冪関数は微分可能であり、その導関数は、

(8 - 7 b) $$(x^\alpha)' = \bigl(\exp(\alpha \log x)\bigr)' = \exp(\alpha \log x) \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \quad (x > 0)$$

によって与えられる。この公式から、例えば、

(8 - 7 c) $$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

が導かれる。

2026 年 5 月 28 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 8 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f(x)$ を集合 S 上で定義された関数とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
関数 $f(x)$ $(x \in S)$ の値域とは?	p.	
関数 $f(x)$ $(x \in S)$ が狭義単調増加関数であるとは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な記号や数字・文字を入れなさい。

- 関数 $f(x)$ $(x \in S)$ の逆関数は、f の $\boxed{}$ の任意の要素 y に対して $\boxed{}$ を満たす $x \in S$ が $\boxed{}$ であるときに定義される。f の逆関数を f^{-1} により表わす。f^{-1} の定義域は f の $\boxed{}$ である。
- 関数 $f(x)$ $(x \in S)$ が逆関数 $f^{-1}(y)$ $(y \in T)$ を持つとすると、次が成り立つ：
  (1) $x \in S$ と $y \in T$ に対して
  $$f(x) = y \iff \boxed{} = f^{-1}(y).$$
  (2) $(f \circ f^{-1})(y) = \boxed{}$ $\quad (y \in T) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$
- 開区間 I 上で定義された微分可能な関数 $f(x)$ は、すべての $a \in I$ において $\boxed{} > 0$ を満たすならば、微分可能な逆関数を持つ。その導関数は f の導関数から公式
  $$(f^{-1})'(y) = \boxed{} \quad (\text{但し、} y = f(x) \text{ とする})$$
  により求めることができる。上式は $(*)$ の両辺を $\boxed{}$ して導くことができる。
- 対数関数 $\log x$ $(x > 0)$ は $\boxed{}$ の逆関数である。したがって、
  (1) $x > 0$ と $y \in \mathbb{R}$ に対して
  $$y = \log x \iff \boxed{} = x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\sharp)$$
  が成り立つ。特に、$e^{\log x} = \boxed{}$ であり、$\log(e^y) = \boxed{}$ である。
  (2) $(\sharp)$ と指数法則より、任意の $a, b > 0$ に対して $\log(ab) = \boxed{}$ であり、$\log 1 = \boxed{}$ である。
  (3) 対数関数は微分可能であり、その導関数は $(\log x)' = \boxed{}$ $(x > 0)$ で与えられる。
- a^x $(a > 0,\ x \in \mathbb{R})$ は指数関数 $\exp$ と対数関数 $\log$ を用いて $a^x = \boxed{}$ のように表わすことができる。したがって、$a > 0$ を底とする指数関数 a^x $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能である。その導関数は合成関数の微分公式を使って求めることができる。
- 任意の実数 α に対して関数 $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ は微分可能であり、その導関数は $f'(x) = \boxed{}$ $(x > 0)$ により与えられる。

Q3. 第 8 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。