§5. ガウスの消去法

ここでは、連立一次方程式を解くための有用なアルゴリズムとして知られるガウスの消去法について学ぶ。ガウスの消去法はあらゆる連立一次方程式の解を求めるときに有効であるが、この節では、解がただ 1 つの場合のみを扱う。

● 5 - 1 : 加減法

最初に、中学校で学んだ、未知数が 2 個で方程式が 2 個の場合の連立一次方程式の解法について復習する。連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \cdots\cdots ① \\ \ \ x-2y=2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を加減法で解こう。

まず、①式を 2 倍したものに、②式を 3 倍したものを加える。すると、y の項が消えて、x だけの式になり、$x=\frac{8}{7}$ とわかる。今度は、①式に、②式を -2 倍したものを加える。すると、x の項が消えて、y だけの式になり、$y=-\frac{3}{7}$ とわかる。

未知数が 3 個以上になると、加減法は使えないが、「ある式の定数倍を他の式に加える操作を行って、未知数の数を減らしていく」という考え方は、未知数が増えても使うことができる。

● 5 - 2 : 連立一次方程式を解くときの基本操作

一般に、$x_1, \cdots, x_n$ を未知数とする**連立一次方程式**とは、(1 個あるいは複数個の方程式からなる) 次の形をした方程式系のことをいう：

$$\text{(5 - 2 a)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \cdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

但し、$a_{ij}, b_i \ (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$ はある定数である。上記の m 個の方程式を同時に満たす数 $x_1, \cdots, x_n$ を求めることを、連立一次方程式 (5 - 2 a) を解くといい、組 $(x_1, \cdots, x_n)$ を連立一次方程式 (5 - 2 a) の**実数解**という。

連立一次方程式を解くときの基本は、次の 3 種類の操作を繰り返して、簡単な連立一次方程式に帰着させることである：

- ある式の定数倍を他の式に加える。
- 1 つの式の両辺に 0 でない数を掛ける。
- 2 つの式を入れ替える (例えば、第 i 式と第 j 式を入れ替える)。

大切なことは、これらの操作によって、連立一次方程式の解が変わらないことである。つまり、

$$\boxed{\text{最初に与えらた連立一次方程式}} \ \underset{\text{基本操作を施す}}{\overset{\text{基本操作を施す}}{\rightleftarrows}} \ \boxed{\text{新たに得られた連立一次方程式}}$$

を解く　　　　　　　　　　　　　　　　　を解く

例 5 - 2 - 1

$$\begin{cases} 2x+3y-\ z=1 \\ \ \ x-2y+3z=2 \\ 4x-\ y+\ z=0 \end{cases} \ \underset{\text{第 1 式を 2 倍して第 3 式に加える}}{\overset{\text{第 1 式の } -2 \text{ 倍を第 3 式に加える}}{\rightleftarrows}} \ \begin{cases} 2x+3y-\ z=\ \ 1 \\ \ \ x-2y+3z=\ \ 2 \\ \quad -7y+3z=-2 \end{cases}$$

● 5-3：ガウスの消去法の実例

次のような 3 つの未知数 x, y, z と 3 つの方程式からなる連立一次方程式

$$(☆1)\quad \begin{cases} x+2y+3z=1 & \cdots\cdots ① \\ x+3y+5z=2 & \cdots\cdots ② \\ 2x+y+10z=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を**ガウスの消去法**（掃き出し法）で解いてみよう。まず、x を消去するために、②に①の (-1) 倍を加え、③に①の (-2) 倍を加える。連立一次方程式 (☆1) を解くことは連立一次方程式

$$(☆2)\quad \begin{cases} x+2y+3z=1 & \cdots\cdots ① \\ \qquad y+2z=1 & \cdots\cdots ②' \\ \quad -3y+4z=1 & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

を解くことと同じである。ここで、この連立一次方程式の下の 2 つは x を含まない 2 つの未知数 y, z に関する連立方程式になっていることに注意する。今の方法を下の 2 つの方程式に繰り返す (③′ に②′ の 3 倍を加える) と、次の連立一次方程式 (☆3) が得られる。

$$(☆3)\quad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \qquad y+2z=1 \\ \qquad\quad 10z=4 \end{cases}$$

最初に与えられた方程式 (☆1) を解くことは、連立一次方程式 (☆3) を解くことと同じである。

連立一次方程式 (☆3) を解くことは簡単である。まず第 3 式から $z=\dfrac{2}{5}$ を得る。これを第 2 式に代入して、$y=1-2z=\dfrac{1}{5}$ を得る。最後に、得られた z と y の値を第 1 式に代入して、$x=1-2y-3z=-\dfrac{3}{5}$ を得る。こうして、与えられた連立方程式の解は $(x,y,z)=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ であることがわかる。

ガウスの消去法は

(I) 方程式を (☆3) のような“階段型”の連立一次方程式に変形する過程

(Ⅱ) “階段型”の連立一次方程式 (☆3) を「代入操作」によって解く過程

の 2 つの部分に分けられる。I の過程を**前進部分**と呼び、Ⅱ の過程を**後退代入**と呼ぶ。

一般の連立一次方程式 (5-2 a) に対しても、必要に応じて「枢軸の選択」(後述する) を行いながら、ガウスの消去法により解を求めることができる。

● 5-4：加減法とガウスの消去法の違い―枢軸―

ガウスの消去法の前進部分において式を単純化していくときに行われる 1 つ 1 つの操作の下では、加減法と違って、固定された式 (これを**枢軸**または単に**軸**という) が必ずあることに注意しよう。軸として選んだ式の定数倍をそれよりも下の式に加える、という操作を繰り返して連立一次方程式を階段型に変形していく過程が前進部分である。例えば、上で述べたガウスの消去法の実例において、(☆1) から (☆2) を得る過程では第 1 式①が軸になっており、(☆2) から (☆3) を得る過程では第 2 式②′ が軸になっている。

例 5-4-1 連立一次方程式

$$(★1)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

において、ガウスの消去法を適用しようとすると、第 1 式の x の係数が 0 なので、第 1 式の定数倍を第 2 式、第 3 式に加えるという操作を行って、第 2 式、第 3 式における x の係数を 0 に

することはできない。このような場合には**枢軸の選択**を行い、２つの式を入れ替える。今の場合、第１式と第２式を交換して、連立一次方程式

$$(\bigstar 2)\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\ \ y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

を作る。この連立一次方程式の第１式を軸にとり基本変形を行うと、第２式、第３式における x の係数を 0 にすることができる。

$$(\bigstar 1) \longrightarrow (\bigstar 2) \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\ \ y + 2z = 2 \\ \ \ -3y - 5z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\ \ y + 2z = 2 \\ \qquad\quad\ \ z = 7 \end{cases}$$

● 5-5： 拡大係数行列による連立一次方程式の表示

連立一次方程式 (5-2 a) に対して、行列

$$(5\text{-}5\text{ a})\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

をそれぞれ連立一次方程式 (5-2 a) の**係数行列**、**定数項ベクトル**といい、係数行列の右に定数項ベクトルを並置した行列 $(A\ \mathbf{b})$ を**拡大係数行列**という。$(A\ \mathbf{b})$ を $(A \mid \mathbf{b})$ と書くことが多い。

● 5-6： 連立一次方程式を解くときの基本操作と拡大係数行列に対する行基本変形

連立一次方程式に対して３つの基本操作

- ある式の定数倍を他の式に加える。
- １つの式の両辺に 0 でない数を掛ける。
- ２つの式を入れ替える (例えば、第 i 式と第 j 式を入れ替える)。

を施すことは、拡大係数行列に次の３種類の変形を施すことに対応している。

(Row1) ある行の定数倍を他の行に加える

(Row2) ある行に 0 でない数を掛ける

(Row3) ２つの行を入れ替える (例えば、第 i 行と第 j 行を入れ替える)

これら３種類の変形を行列に対する**行基本変形**という。この授業では、

- 第 i 行の t 倍を第 j 行に加えるという行基本変形を記号 $ⓘ \times t + ⓙ$ により、
- 第 i 行を $t\ (\neq 0)$ 倍する行基本変形を記号 $ⓘ \times t$ により、
- 第 i 行と第 j 行を入れ替える行基本変形を記号 $ⓘ \leftrightarrow ⓙ$ により表わす。

例 5-6-1 連立一次方程式

$$(\#)\qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

の拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$ に行基本変形を施すと、次のようになる：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[①\times 1+③]{①\times(-2)+②} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times 3+③} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

よって、

$$(\#) \text{ を解く} \iff \text{連立一次方程式} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \quad - y - 2z = -4 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases} \text{を解く}$$

となる。右辺の連立一次方程式を後退代入で解いて、解 $z = 1,\ y = 2,\ x = -1$ を得る。 □

注意：行基本変形において、2 番目の矢印の上が ②$' \times 3 +$ ③$'$ にはなっていないことに注意する。これは、(連立一次方程式の各式に①, ②といった名前をつけるのとは違い、) 行基本変形における ⓘ や ⓙ は操作を表わしているためである。

● 5 - 7 : 階段行列と階数

どのような行列 A に対しても、ガウスの消去法の前進部部分に当たる基本変形を有限回施すと、次のような形の行列にすることができる。

(5 - 7 a)
$$B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & & & & \\ & a_{2j_2} & & & \\ & & & \ddots & \\ & \text{O} & & & \\ & & & & a_{rj_r} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

但し、$0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ であり (注：$\min\{m, n\}$ は m, n のうちで小さい方を表わす)、$a_{1j_1} \neq 0,\ a_{2j_2} \neq 0, \cdots, a_{rj_r} \neq 0$ である。上の行列において、第 1 行から第 r 行までは、行番号が増えるにつれて、左端から連続して並ぶ 0 の個数が増え、第 $r+1$ 行より下の行はすべて 0 になっている。このような形をした行列を**階段型**と呼ぶ。階段型行列 B は次の特徴を持つ：B において左上から右下へ延びるジグザグの線は、0 でない数に出会うたびに一段ずつ下がり、ある行まで到達するとあとは右端まで横に進む。下がるときは 1 段ずつだが、横方向へは 0 でない数に出会うまでいくつ進んでも構わない。A に行基本変形をどのような順番で施して階段型にしても、“段数” r はみな同じになる (この事実は第 12 節で示される)。r を A の**階数** (**ランク**) といい、$\mathrm{rank}\, A$ で表わす。なお、零行列 O はそれ自体で階段型と考え、$\mathrm{rank}\, \mathrm{O} = 0$ である。

<u>**例 5 - 7 - 1**</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は階段型である。一方、$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ は階段型ではない。なぜなら、C は第 1 列から第 2 列に進む所で “2 段降りている” からである：$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. しかし、第 2 行の $-\frac{1}{2}$ 倍を第 3 行に加えると、階段型行列 $C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が得られる。同様に、$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は階段型でないが、第 1 行と第 3 行を入れ替えてから、第 2 行の $-\frac{1}{2}$ 倍を第 3 行に加えると、階段型行列 $D' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が得られる。階数を求めると、$\mathrm{rank}\, B = 2,\ \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, C = \mathrm{rank}\, D = 3$ である。 □

No.5 2024 年 5 月 9 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre5-1. (ガウスの消去法)

次の連立一次方程式をガウスの消去法によって解け（連立一次方程式を解く過程は、拡大係数行列の変形によって記述してよい)。

$$\begin{cases} x+2y+\ \ z-3w=\ \ 2 \\ 3x+6y+4z-3w=-1 \\ -x+\ \ y+5z+6w=-5 \\ -2x+4y+4z+5w=-3 \end{cases}$$

pre5-2. (階段行列と階数)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

について、

(1) A に有限回行基本変形を施して、階段型にせよ。

(2) $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre5-1. 第 5 - 3 節と [例 5 - 6 - 1] を参考に解答を作成する。

与えられた連立一次方程式の拡大係数行列を求めると、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 6 & -5 \\ -2 & 4 & 4 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

である。これにガウスの消去法に基づいた行基本変形を行い、階段型にする。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 6 & -5 \\ -2 & 4 & 4 & 5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{①}\times 2+\text{④}]{\substack{\text{①}\times(-3)+\text{②} \\ \text{①}\times 1+\text{③}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{③}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 8 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{②}\times\frac{1}{3}} \cdots\cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & -61 \end{array}\right)$$

よって、

与えられた連立一次方程式を解く

$$\Longleftrightarrow \quad \text{連立一次方程式} \begin{cases} x+2y+\ \ z-\ \ 3w=\ \ \ 2 & \cdots\cdots \text{①} \\ \qquad y+2z+\ \ \ w=\ -1 & \cdots\cdots \text{②} \\ \qquad\qquad z+\ 6w=\ -7 & \cdots\cdots \text{③} \\ \qquad\qquad\quad 51w=-61 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases} \text{を解く}$$

となる。この連立一次方程式を後退代入で解く。④より $w=-\frac{61}{51}$. これを ③に代入して $z=\frac{9}{51}$. 以下同様にして、y, x の順に値を求めることができる。

以上により、与えられた連立一次方程式の解は $(x,y,z,w)=(-\frac{74}{51},-\frac{8}{51},\frac{9}{51},-\frac{61}{51})$ である。

pre5-2. (1)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[①\times3+③]{①\times(-4)+②} \cdots\cdots \xrightarrow{②\times(-8)+③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行基本変形で得られた最後の階段型行列において、0 でない数を含む行数を数えて、$\operatorname{rank} A = 3$ である。

線形代数１・第５回 (2024 年５月９日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面１枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第５回学習内容チェックシート 2024 年 5 月 9 日

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ____________________________

Q1. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- ガウスの消去法は、

$$\begin{cases} \text{(I) 与えられた連立一次方程式を “階段型” の連立一次方程式に変形する過程} \\ \text{(II) その “階段型” の連立一次方程式を「代入操作」によって解く過程} \end{cases}$$

の２つの部分に分けられる。前者をガウスの消去法の $\boxed{}$ といい、後者を $\boxed{}$ という。(I) の過程で行われる１つ１つの操作の下では、加減法と違って、$\boxed{}$ と呼ばれる固定された式が必ずある。

- x, y, z を未知数とする連立一次方程式

(♣)
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

の係数行列、定数項ベクトル、拡大係数行列はそれぞれ

$$\boxed{}, \quad \boxed{}, \quad \boxed{}$$

である。

Q2. 連立一次方程式を解く際の３つの基本操作と、それに対応する３つの行基本変形を記入して、次の表を完成させなさい。

連立一次方程式を解く際の基本操作	行基本変形

Q3. 次の表中の各行列が階段型か否かを答えなさい (階段型であるものに ◯ をそうでないものに × を記入しなさい)。さらに、階数も求めなさい。

	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
階段型						
階数 (ランク)						

Q4. 第５回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。