§5. 同値関係

日常生活で使われる“関係”という言葉は数学では専門用語として使われる。例えば、等号 $=$, 不等号 $\leq$, 合同 $\equiv \pmod{m}$ は関係の一種である。中でも同値関係と順序関係が特に大切であるが、ここでは同値関係のみを扱う。同値関係で結ばれているもの同士を“同じもの”とみなすことにより、同値類や商集合の概念が得られる。

● 5-1：関係

X を空でない集合とする。X 上の (二項) **関係** (relation) とは、X の 2 元 x, y について、$x \sim y$ であるか、$x \sim y$ でないかのどちらか一方だけが成り立つような“$\sim$ のこと”をいう。正確には、直積集合 $X \times X$ の部分集合のことを指す。関係 R に対して、$x, y \in X$ が $(x, y) \in R$ を満たすとき、x と y の間に関係 R が成立するといい、xRy と表わす。

例 5-1-1 (1) $\mathbb{Q}$ 上の関係 $\{\ (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x \leq y\ \}$ を $\mathbb{Q}$ 上の**大小関係**という。

(2) 自然数 m に対し、$\mathbb{Z}$ 上の関係 $\{\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod{m}\ \}$ を $\mathbb{Z}$ 上の m を法とする**合同関係**という。

関係を定義したいとき、次のような書き方をよくする。

例 5-1-2 $\mathbb{R}$ 上の関係 R を次で定義する：$x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$xRy \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}.$$

この場合、$R = \{\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\ \}$ という $\mathbb{R}$ 上の関係を考えていることになる。

● 5-2：同値関係

集合 $X\ (\neq \emptyset)$ 上の関係 R が次の 3 条件を満たすとき、R は X 上の**同値関係** (equivalence relation) であるという。

(i) (**反射律**) 任意の $x \in X$ に対して、xRx である。

(ii) (**対称律**) 任意の $x, y \in X$ について、「xRy ならば yRx」である。

(iii) (**推移律**) 任意の $x, y, z \in X$ について、「「xRy かつ yRz」ならば xRz」である。

同値関係は記号 $\sim$ を用いて表わすのが普通である。以下、この慣例に従う。

例 5-2-1 (1) $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ ([例 5-1-1(1)]) は、同値関係ではない。なぜなら、$1 \leq 2$ であるのに $2 \leq 1$ ではないからである。

(2) m を自然数とする。$\mathbb{Z}$ 上の m を法とする合同関係 $\equiv \pmod{m}$ ([例 5-1-1(2)]) は、補題 4-1 により、$\mathbb{Z}$ 上の同値関係である。

(3) 成分が実数からなる (m, n)-行列全体 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上に関係 $\sim$ を、$A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に対して

$A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} B = PAQ$ となる正則行列 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ と正則行列 $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が存在する

によって定義する。$\sim$ は $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上の同値関係である。

演習 5-1* $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 上に関係 $\sim$ を、$(a, x), (b, y) \in X$ について

$$(a, x) \sim (b, y) \overset{\text{def}}{\iff} ay = bx$$

によって定義する。$\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ。

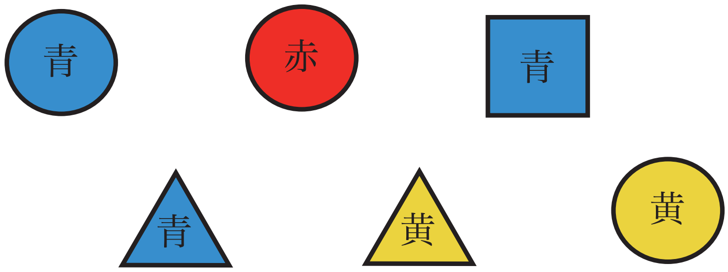
● **5 - 3 : 同値類**

空でない集合 X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする。このとき、各 $a \in X$ に対して、X の部分集合 $[a]$ を

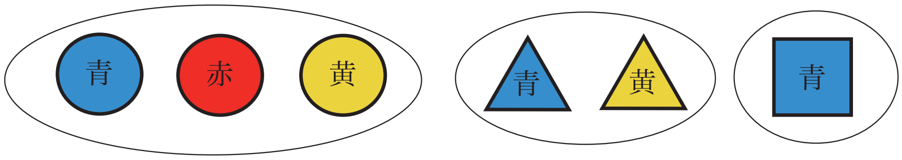
$$[a] := \{x \in X \mid x \sim a\}$$

によって定め、これを $\sim$ に関する a の**同値類** (equivalence class) という。X の部分集合 C が $\sim$ に関する同値類であるとは、ある $a \in X$ によって $C = [a]$ と表わされるときをいう。このような a を同値類 C の**代表元** (representative) という。

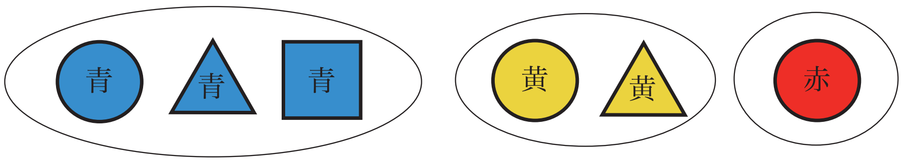
集合に同値関係を導入し、同値類を考える理由はどこにあるのだろうか。ここで、その意味や考え方を説明しよう。集合 X の元をある視点の下でいくつかの仲間 (グループ) に分けたいとき、X 上に同値関係を導入する。同値関係で結ばれる X の元同士を同じ仲間とみなす。同値類とはそのようにして生じる 1 つ 1 つのグループのことである。例えば、ここに、青色で○の形、青色で△の形、青色で□の形、黄色で○の形、黄色で三角の形、赤色で○の形をしたビスケットがあったとする。



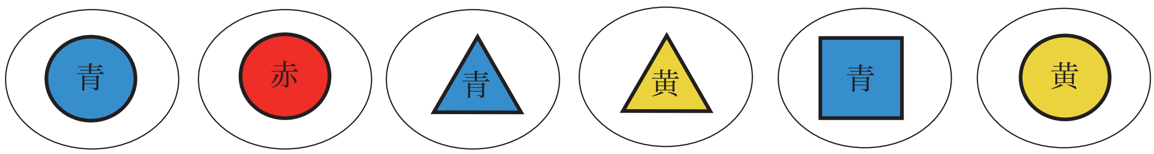
これらのビスケットを形に着目して、丸いもの、三角のもの、四角のものに分けてみる。すると、1 つのグループ分け (類別) が得られたことになる。



このグループ分けでは、形が区別の対象であって、色はどうでもよいという視点で行った。次に、6 つのビスケットを色に着目して、青いもの、黄色いもの、赤いものに分けてみよう。



このようにしても、1 つのグループ分けが得られる。もっと細かく、色と形の両方に着目して分けることもできる。今度は、1 つ 1 つが独立したグループ分けになる。



このように、集合 X 上に同値関係を与えるということは、ある観点から X の元の間で、これとこれとは同じものとみなす、これとこれとは違うものとみなす、といった判断を行うための条件を与えることを意味する。

同値類については、次の定理が基本的である。この定理は、同値類同士は共通部分を持たないか、もしくは共通部分があったとすれば完全に一致してしまうということを主張している。

定理 5-3-1

$\sim$ を集合 X $(\neq \varnothing)$ 上の同値関係とする。$x, y \in X$ について、次の 3 つは同値である。

① $x \sim y$　　② $[x] \cap [y] \neq \varnothing$　　③ $[x] = [y]$

(**証明**)

「③ ⇒ ② ⇒ ① ⇒ ③」の順番で示す。

③ ⇒ ②：反射律により $x \in [x]$ であるから、$[x] = [y]$ ならば $x \in [x] \cap [y]$ である。よって、$[x] \cap [y] \neq \varnothing$ である。

② ⇒ ①：$[x] \cap [y] \neq \varnothing$ なので、元 $z \in [x] \cap [y]$ が存在する。$z \in [x]$ より $z \sim x$ であり、対称律により $x \sim z$ である。一方、$z \in [y]$ より $z \sim y$ である。したがって、$x \sim z$ かつ $z \sim y$ が成り立つ。推移律を使うと、$x \sim y$ がいえる。

① ⇒ ③：この証明は演習問題として残しておく。 □

演習 5-2* 上の定理の「① ⇒ ③」を証明せよ。

● 5-4：商集合

$\sim$ を集合 X $(\neq \varnothing)$ 上の同値関係とするとき、X の同値類全体からなる集合を $X/\!\sim$ によって表わし、$\sim$ による X の**商集合** (quotient set)、または、**剰余集合** (residue set) という：

$$X/\!\sim\, = \{\ [a] \mid a \in X\ \}.$$

例 5-4-1 m を 2 以上の自然数とし、$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\sim$ として合同関係 $\equiv \pmod m$ を考える。このとき、$\sim$ に関する a の同値類は $[a]_m = \{\ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod m\ \}$ であり、商集合 $\mathbb{Z}/\!\sim$ は前節で導入された $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に他ならない。

演習 5-3 [例 5-2-1(3)] で与えられている $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上の同値関係 $\sim$ を考える。商集合 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})/\!\sim$ は有限集合であることを示せ。また、その元の個数を求めよ。

● 5-5：類別

$\sim$ を集合 X $(\neq \varnothing)$ 上の同値関係とするとき、商集合 $\mathscr{S} := X/\!\sim$ は X の部分集合族 (つまり、X の部分集合を要素とするような空でない集合) である。この部分集合族は次の 3 つの条件を満たしていることが同値関係の定義と [定理 5-3-1] によりわかる：

❶ $\forall x \in X,\ \exists C \in \mathscr{S}$ s.t. $x \in C$.

❷ $C, C' \in \mathscr{S},\ C \neq C' \quad \Rightarrow \quad C \cap C' = \varnothing$.

❸ $\forall C \in \mathscr{S},\ C \neq \varnothing$.

したがって、X は互いに交わらない空でない部分集合たちの和集合として $X = \bigcup_{C \in \mathscr{S}} C$ のように表わされる。X を互いに交わらない空でない部分集合たちの和集合に表わすことを、X を**類別**するという。

定理 5-5-1

集合 X $(\neq \varnothing)$ 上に同値関係 $\sim$ を定義することと X を類別すること (つまり、❶, ❷, ❸を満たす X の部分集合族 $\mathscr{S}$ を与えること) とは同値である。

(**証明**)

X 上に同値関係 $\sim$ が与えられたとする。$\mathscr{S} := X/\sim$ が X の類別を与えることを示す。

❶ 任意に $x \in X$ をとると、反射律より $x \sim x$ であるから $x \in [x]$ である。

❷ 異なる 2 元 $C, C' \in \mathscr{S}$ をとる。$C = [x],\ C' = [x']$ となる $x, x' \in X$ が存在する。$[x] = C \neq C' = [x']$ であるから、[定理 5-3-1] の②と③の同値性により、$C \cap C' = [x] \cap [x'] = \varnothing$ である。

❸ 任意に $C \in \mathscr{S}$ をとると $C = [x]$ $(x \in X)$ と表わすことができる。このとき、反射律より $x \in [x] = C$ であるから $C \neq \varnothing$ である。

よって、$\mathscr{S}$ は X の類別を定める。

逆に、X の部分集合族 $\mathscr{S}$ が X の類別を定めているとする。このとき、X 上の関係 $\sim$ を次のように定める：$x, y \in X$ に対して

$$x \sim y \iff x, y \in C \text{ を満たす } C \in \mathscr{S} \text{ が存在する}.$$

$\sim$ は X 上の同値関係であることを示す。

(i) (反射律) 任意の $x \in X$ に対して、❶より $x \in C$ となる $C \in \mathscr{S}$ が存在する。$x, x \in C$ であるから、$\sim$ の定め方より $x \sim x$ である。

(ii) (対称律) $x, y \in X$ は $x \sim y$ を満たしているとする。$\sim$ の定め方より $x, y \in C$ となる $C \in \mathscr{S}$ が存在する。$y, x \in C$ より $y \sim x$ となる。

(iii) (推移律) $x, y, z \in X$ が $x \sim y,\ y \sim z$ を満たしているとする。$x, y \in C$ となる $C \in \mathscr{S}$ と $y, z \in C'$ となる $C' \in \mathscr{S}$ が存在する。$y \in C \cap C'$ であるから $C \cap C' \neq \varnothing$ である。❷の対偶より $C = C'$ となる。よって、$x, z \in C$ となるので、$x \sim z$ が成り立つ。

(i), (ii), (iii) より、$\sim$ は X 上の同値関係である。 $\square$

例 5-5-2 m を 2 以上の自然数とし、各 $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ に対して $C_r := \{\ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ は } m \text{ で割ると余りが } r\ \}$ とおく。$\mathscr{S} = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}$ は $\mathbb{Z}$ に類別を定義する。この類別から定まる同値関係 $\sim$ は次で与えられる：

$$x \sim y \iff \exists r \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ s.t. } x, y \in C_r.$$

この同値関係 $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の m を法とする合同関係 $\equiv \pmod m$ に他ならない。 $\square$

演習 5-4 m, n を自然数とし、$k = \min\{m, n\}$ とおく。各 $r \in \{0, 1, \ldots, k\}$ に対して

$$C_r = \{\ A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank} A = r\ \}$$

とおく。$\mathscr{S} = \{\ C_0, C_1, \ldots, C_k\ \}$ は $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に類別を定めることを示せ。