§5. 写像の概念とその記法

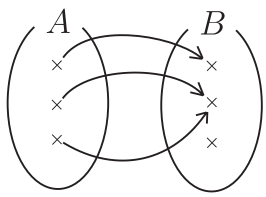
ある集合を別の集合と関連づけたいとき、2 つの集合を比較したいとき、あるいは、1 つの集合の中で元を別の元に移動させたいとき、写像が使われる。ここでは、その基本的な考え方と写像の表現方法を学ぶ。

● 5 - 1 : 写像の定義

A, B を 2 つの空でない集合とする。A に属する各々の元に対して、B の元を 1 つずつ定める対応規則のことを A から B への**写像** (map, mapping) という。このような対応規則を f とおくとき、写像は記号で

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{または} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

と書き表わされる。A を写像 f の**定義域** (domain) または**始域**といい、B を**終域** (codomain) という。



写像 f の下で $a \in A$ に $b \in B$ が対応するとき、「a は f によって b に**写される**」あるいは「f は a を b に**写す**」といい、この b を $f(a)$ と書き表わす。$f(a)$ は f による a の**像** (image) と呼ばれる。授業では、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ \Cup & & \Cup \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

のように書き表わすこともある。

関数 (function) という言葉も写像と同義で使われるが、関数という言葉を使うのは、終域が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ などの数の集合である場合が多い。また、上では写像を表わす文字として f を用いたが、すでに意味が確定している A, B 以外の文字であれば何でもよい。例えば、文字 g や f_1 などを用いてもよい。

例 5 - 1 - 1 (1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ とおく。A の元 $1, 2, 3$ に対して、それぞれ B の元 $4, 5, 6$ を対応させる規則は、A から B への 1 つの写像を定める。A の元 $1, 2, 3$ に対して、それぞれ B の元 $6, 5, 5$ を対応させる規則もまた、A から B への写像 1 つの写像を定める。

(2) f を、各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 \in \mathbb{R}$ を対応させる規則とすると、この f は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像（関数）$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を定める。

(3) 集合 A の元の個数を数えるという行為は、A から自然数全体からなる集合 $\mathbb{N}$ への写像を作ることに他ならない。

例 5 - 1 - 2 (1) $A\ (\neq \varnothing)$ を集合とするとき、A の各元 a に対して A の中の同じ元 a を対応させる A から A への写像を考えることができる。この写像を A 上の**恒等写像** (identity map) といい、id_A または 1_A によって書き表わす。

(2) A, B を2つの空でない集合とし、b_0 を B の元とするとき、A に属するどの元に対しても b_0 を対応させることによって、A から B への写像を定義することができる。このような写像を**定値写像** (constant map) という。

一般論を展開する際の抽象的な議論では、「$f: A \longrightarrow B$ を写像とする」のように書かれることがよくある。このように書かれているときは、「A に属する各々の元 a に対して、B のある元 (これを $f(a)$ で表わす) を対応させる規則が f によって (具体的に書かれてはいないけれども) 1つ与えられている」と思う必要がある。しかし、写像を具体的に定義したいときには、定義域と終域とともに、元の対応規則も明記しなければならない。

例 5-1-3 (1) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ から有理数の集合 $\mathbb{Q}$ への写像であって、各自然数に対して、その逆数を対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

写像 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を $f(n) = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ によって定義する。

(2) [例 5-1-1(1)] の写像 f を写像の表現形式に則って定めると次のようになる：

写像 $f: A \longrightarrow B$ を $f(1) = 6,\ f(2) = f(3) = 5$ によって定義する。

(3) [例 5-1-1(2)] の写像 f を写像の表現形式に則って定めると次のようになる：

写像 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義する。

(4) 集合 A $(\neq \varnothing)$ 上の恒等写像 id_A は [例 5-1-2(1)] において定義されたが、これを写像の表現形式に則って定義すると次のようになる：

A 上の恒等写像 $\mathrm{id}_A: A \longrightarrow A$ は $\mathrm{id}_A(a) = a$ $(a \in A)$ によって定義される。

1つの「式」で写像の定義式を表現しきれないときには、場合分けして表現する。

例 5-1-4 自然数の集合 $\mathbb{N}$ から自分自身への写像であって、各自然数 n に対して、それが偶数のときには $n-1$ を対応させ、奇数のときには n を対応させる写像を定めたいときには、次のように書き表わす：

(♯3) 写像 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を次で定義する。$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \text{ が偶数のとき}), \\ n & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$

● 5-2：写像の相等

写像は次の3つを指定することにより定まる。

① 定義域となるべき集合 A,
② 終域となるべき集合 B,
③ 定義域 A の中の各元に対して終域 B の元を1つずつ定める対応規則.

そこで、2つの写像 $f: A \longrightarrow B$ と $g: A' \longrightarrow B'$ が**等しい**ことを、次の3条件が成り立つときであると定める。

❶ $A = A'$ (定義域が等しい),
❷ $B = B'$ (終域が等しい),
❸ すべての $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ (元の対応規則が等しい).

このとき、$f = g$ と書き表わす。等しくないときには、$f \neq g$ と書き表わす。

例 5-2-1 (1) 写像 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ によって定義されていて、写像 $g:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}$ が $g(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{Q})$ によって定義されているとき、これらの定義域は等しくないので、写像としては $f\neq g$ である。

(2) X $(\neq\varnothing)$ を集合とし、A $(\neq\varnothing)$ をその部分集合とする。このとき、各 $a\in A$ に対して同じ a を (今度は X の元とみて) 対応させる A から X への写像 i が定まる：

$$i:A\longrightarrow X,\ i(a)=a \qquad (a\in A)$$

このように定義される写像 i を**包含写像** (inclusion) という。包含写像は $i:A\hookrightarrow X$ のように表わすことがある。$A=X$ でなければ、包含写像は A 上の恒等写像 id_A と等しくない。

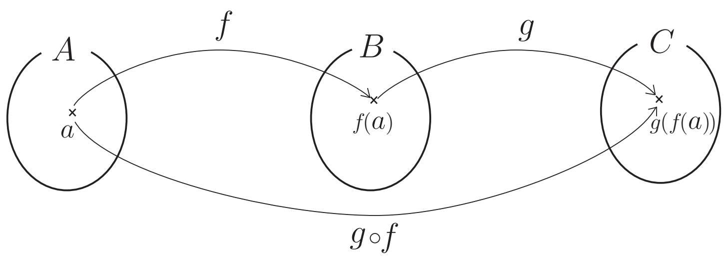
上の例のように、たとえ写像を定める定義式が同じであっても、定義域や終域が等しくなければ、写像として等しくない。

● 5-3：写像の合成

写像 $f:A\longrightarrow B$ と $g:B\longrightarrow C$ が与えられたとき、元 $a\in A$ をまず f で B の元 $f(a)$ に写し、その元 $f(a)$ をさらに g で C の元 $g(f(a))$ に写すことにより、A から C への写像を定義することができる（次図参照)。このようにして得られる A から C への写像を f と g の**合成写像** (composite map) といい、$g\circ f:A\longrightarrow C$ または単に $g\circ f$ と書き表わす。つまり、$g\circ f$ とは

$$(g\circ f)(a)=g(f(a)) \quad (a\in A)$$

によって定義される A から C への写像のことをいう。



例 5-3-1 $f:\{\bigcirc,\ \triangle,\ \square\}\longrightarrow\{$ア, イ, ウ, エ$\}$ を

$$f(\bigcirc)=\text{イ},\quad f(\triangle)=\text{ア},\quad f(\square)=\text{ウ}$$

によって与えられる写像とし、$g:\{$ア, イ, ウ, エ$\}\longrightarrow\{1,\ 2,\ 3\}$ を

$$g(\text{ア})=1,\quad g(\text{イ})=2,\quad g(\text{ウ})=2,\quad g(\text{エ})=3$$

によって与えられる写像とする。このとき、合成写像 $g\circ f$ は

- 定義域が $\{\bigcirc,\ \triangle,\ \square\}$,
- 終域が $\{1,\ 2,\ 3\}$,
- 元の対応規則が $(g\circ f)(\bigcirc)=2,\ (g\circ f)(\triangle)=1,\ (g\circ f)(\square)=2$

によって与えられる写像である。

例 5-3-2

$$h(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}-\{0\})$$

によって定義される写像 $h:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ は 2 つの写像

$$f:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{x}\quad(x\in\mathbb{R}-\{0\}),$$
$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad g(x)=\sin x\quad(x\in\mathbb{R})$$

の合成写像 $g\circ f$ に等しい。 □

補題 5-3-3
写像の合成に関して、次が成り立つ。
(1) 任意の写像 $f:A\longrightarrow B$ について、$f\circ \mathrm{id}_A=f,\ \mathrm{id}_B\circ f=f.$
(2) 任意の 3 つの写像 $f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow C,\ h:C\longrightarrow D$ について、

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f).$$

上の補題の証明は演習問題とする。(2) から、有限個の写像の合成において、合成をとる順番は気にしなくてよいことがわかる。したがって、写像の合成を記述する際には、$h\circ g\circ f$ のように、括弧をつけずに書いて構わない。

● 5-4： 写像のグラフ

写像 $f:A\longrightarrow B$ の**グラフ** (graph) とは、直積集合 $A\times B$ の部分集合

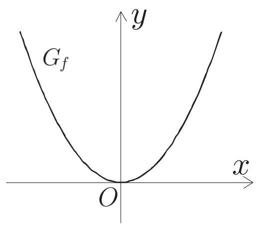
$$G_f:=\{\ (a,f(a))\mid a\in A\ \}$$

のことをいう。

例 5-4-1 関数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ のグラフ G_f は

$$G_f=\{\ (a,a^2)\mid a\in\mathbb{R}\ \}$$

によって与えられる $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分集合である。右図はこれを (x,y)-平面に図示したものである。



写像 $f:A\longrightarrow B$ のグラフ G_f は次の条件を満たす。

「任意の $a\in A$ に対して、$(a,b)\in G_f$ を満たす $b\in B$ が唯一存在する。」

逆に、$A\times B$ の (空でない) 部分集合 G が条件

$(*)$ 「任意の $a\in A$ に対して、$(a,b)\in G$ を満たす $b\in B$ が唯一存在する。」

を満たしているとすると、各 $a\in A$ に $(a,b)\in G$ となるような $b\in B$ を対応させることにより、写像 $f:A\longrightarrow B$ が定まる。したがって、次が成立する。

定理 5-4-2
2 つの集合 $A,\ B$ に対して、次は同値である。
(i) A から B への写像を与える。
(ii) $A\times B$ の部分集合 G であって、条件 $(*)$ を満たすものを与える。

上の定理は、集合 A から B への写像は、直積集合 $A\times B$ の $(*)$ を満たす部分集合として定義することができる、ということを意味している。この見方により、集合 A から B への写像を、直積集合 $A\times B$ を経由して調べる手段が得られたことになる。