§4. 平面の方程式

この節では、ベクトルの直交条件を調べて、方程式 $ax+by+cz=d$ の幾何学的な意味、すなわち、平面の方程式について説明する。

● 4-1：ベクトルの長さ

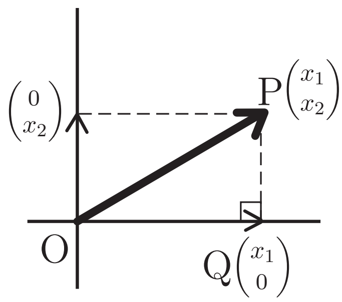
平面ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ とは、原点 O$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ と点 P$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことをいう。下図左の直角三角形 △OPQ にピタゴラスの定理を適用して、長さ $\|\mathbf{x}\|$ は

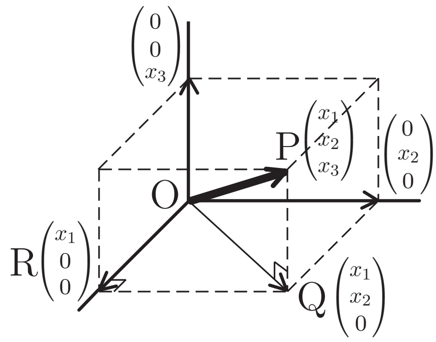
$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

で与えられることがわかる。

同様に、空間ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ の長さとは、原点 O$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ と点 P$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことをいう。$\mathbf{x}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ は、下図右の △OQR と △OPQ にピタゴラスの定理を用いて次の式で与えられることがわかる：

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$





この考え方を一般化して、n 次ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ を

(4-1 a) $$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

により定義する。

● 4-2：ベクトルの平行条件と平面

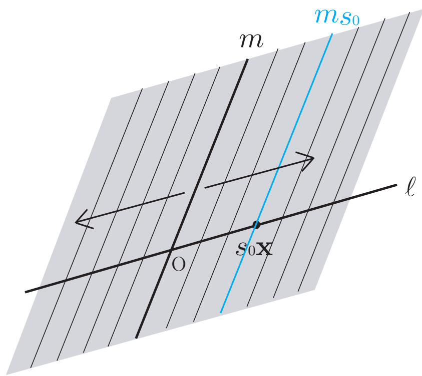
２つの n 次ベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ に対して、

(4-2 a) $$\mathbf{x}=t\mathbf{y}\quad \text{または}\quad \mathbf{y}=t\mathbf{x}$$

となる実数 t が存在するとき、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は**平行**である、あるいは、**一次従属**であるという。零ベクトル $\mathbf{0}$ は任意のベクトルと平行である。

n 次ベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ が平行でないとき、

(4-2 b) $$s\mathbf{x}+t\mathbf{y}\qquad (s,t\ \text{は実数})$$



の形で表わされる n 次ベクトルの全体は、原点を通る１つの平面をなす。このことを簡単に説明する。まず、実数 s_0 を固定して、

(4-2 c) $$s_0\mathbf{x} + t\mathbf{y} \qquad (t \text{ は実数})$$

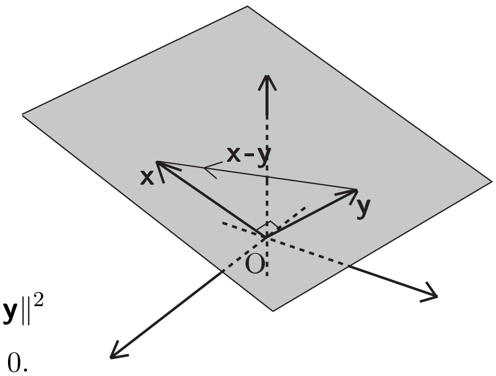
の形で表わされる n 次ベクトルの全体を考え、これを m_{s_0} で表そう。これは、点 $s_0\mathbf{x}$ を通り、$\mathbf{y}$ を方向ベクトルに持つ直線であり、原点を通り $\mathbf{y}$ を方向ベクトルに持つ直線 m を $\mathbf{x}$ 方向に沿って平行移動したものである。よって、(4-2 b) の形で表わされる n 次ベクトルの全体は、s_0 を 0 から $+\infty$ まで動かし、また、0 から $-\infty$ まで動かしたときの直線 m_{s_0} の全体に等しい。このようにして、(4-2 b) の形で表わされる n 次ベクトルの全体は原点を通る１つの平面であることがわかる。この平面を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ によって**張られる平面**と呼ぶ。

● 4-3： ベクトルの直交条件と内積

２つの n 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ がどのような条件を満たすとき、直交していると呼べるのかを考察しよう。

$n = 2$ のときには、ピタゴラスの定理から
$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$
が成り立つときに限って $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交することがわかる。

一般の n の場合には、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ によって張られる平面について同様の考察を行えばよい (右図参照) ので、次の言い換えが成立する：



(4-3 a)
$$\begin{aligned} \mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する} &\iff \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ &\iff x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0. \end{aligned}$$

２つの n 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、

(4-3 b) $$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \left(= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \text{ とも書ける} \right)$$

とおき、これを $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との**内積**という。内積の記号を使うと、(4-3 a) は

(4-3 c) $$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する} \iff \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = 0$$

と書き換えられる。

例 4-3-1 ３次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ に対し、$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$, $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = -24$. □

３次ベクトルの場合には、次の外積を用いることで、２つのベクトルに直交するベクトルを求めることができる。

補題 4-3-2

3 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して、$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ x_3y_1 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との**外積**と呼ぶ。$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の両方に直交する 3 次ベクトルである。

(**証明**)

計算により、$\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y},\ \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y},\ \mathbf{y} \rangle = 0$ であることが確かめられる。 □

例 4-3-3 3 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対して $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ となるから、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に直交するベクトルとして $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ が見つかる。また、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に直交する任意の 3 次ベクトルはこの定数倍である。 □

$n = 3$ のとき、任意の平面は $\mathbf{0}$ でないベクトルを 1 つ与えることによって指定することができる。

定理 4-3-4

$\mathbf{a}$ を $\mathbf{0}$ でない 3 次ベクトルとする。このとき、$\mathbf{a}$ に垂直な 3 次ベクトルの全体は 1 つの平面をなす。

(**証明**)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ であるから、a, b, c のうちの少なくとも 1 つは 0 ではない。例えば、$c \neq 0$ のときを考える。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \tag{4-3 d}$$

とおくと、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0$ を満たす平行でない 2 つの 3 次ベクトルである。

連立一次方程式を解くことにより、任意の 3 次ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ は、

$$\mathbf{p} = \frac{q(a^2+c^2) - b(ap+cr)}{c(a^2+b^2+c^2)}\mathbf{x} + \frac{p(b^2+c^2) - a(bp+cr)}{c(a^2+b^2+c^2)}\mathbf{y} + \frac{ap+bq+cr}{a^2+b^2+c^2}\mathbf{a}$$

と表わされることがわかる。すると、

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{a} \rangle = 0 \iff \text{ある実数 } s, t \text{ に対して } \mathbf{p} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

となるので、$\mathbf{a}$ に垂直な 3 次ベクトルの全体は $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が張る平面になる。$a \neq 0$ の場合、$b \neq 0$ の場合も同様の考察で、$\mathbf{a}$ に垂直な 3 次ベクトルの全体は $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が張る平面になる。 □

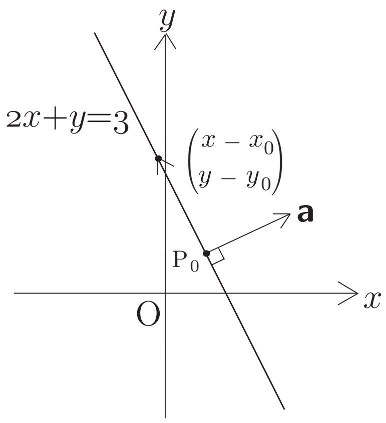
例 4-3-5 3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な 3 次ベクトルの全体は、上の定理の証明中の (4-3 d) により、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ によって張られる平面である。 □

● 4-4：平面の方程式

(x, y)-座標平面において、方程式 $2x + y = 3$ は直線を表わす。今、$2x_0 + y_0 = 3$ を満たす実数 $x_0,\ y_0$ を一組とる (例えば、$x_0 = y_0 = 1$) と、方程式 $2x+y = 3$ を

$$(*) \qquad 2(x - x_0) + (y - y_0) = 0$$

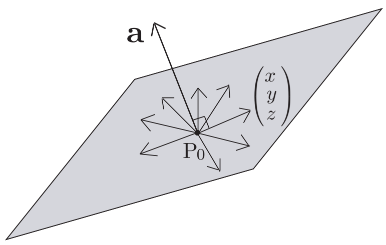
のように変形することができる。この等式は 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ が直交することを表わしている。したがって、



$$\begin{aligned} &(\text{方程式 } 2x + y = 3 \text{ が表わす直線}) \\ &= (\text{点 } \mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ を通り、ベクトル } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に垂直な直線}) \end{aligned}$$

という言い換えが成立する。

次に、(x, y, z)-座標空間において、方程式 $2x - y + 3z = 1$ が何を表わすのかを考えよう。先程と同様に、$2x_0 - y_0 + 3z_0 = 1$ を満たす実数 $x_0,\ y_0,\ z_0$ の組を 1 つとる (例えば、$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0$) 。



$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 2x_0 - y_0 + 3z_0 = 1 \end{cases}$$

の辺々を引くことにより、方程式 $2x - y + 3z = 1$ は

$$(**) \qquad 2(x - x_0) - (y - y_0) + 3(z - z_0) = 0$$

のように変形される。$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき、方程式 $2x - y + 3z = 1$ の実数解が表わす点を $\mathrm{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、等式 $(**)$ は $\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{\mathrm{PP}_0} \rangle = 0$ と表わされる。したがって、方程式 $2x - y + 3z = 1$ は、(x, y, z)-座標空間において、点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を通り、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面を表わす。 □

<u>**例 4-4-1**</u> (x, y, z)-座標空間において、3 点 $\mathrm{A} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む平面の方程式を求めよう。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ より、3 点 A, B, C を通る平面は、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直で、点 A を通る平面である。よって、その方程式は $5(x - 3) + 3(y + 2) + 2(z - 1) = 0$ すなわち、$5x + 3y + 2z = 11$ である。 □

No.4 2024年5月2日

線形代数1事前練習用演習問題

pre4-1. (ベクトルの直交条件)

(1) 2 つの 3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交するような $\mathbf{0}$ でない 3 次ベクトルを 1 つ求めよ。

(2) 座標空間において、3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な原点を通る平面は、どのような 2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ によって張られる平面になるか？そのような $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を具体的に 1 組挙げよ。

pre4-2. (平面の方程式)

(1) (x, y, z)-座標空間において、方程式 $4x + y - 3z = 0$ を満たす実数の組 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の全体はどのような幾何学的対象を表わしているか。理由をつけて答えよ。

(2) (x, y, z)-座標空間において、点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ を通り、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre4-1. [例 4-3-3] と [例 4-3-5] により求めることができる。

(1) 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交する 3 次ベクトルである。公式に当てはめて計算すると、$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ であるから、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交する $\mathbf{0}$ でない 3 次ベクトルとして、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が見つかる。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおくと、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = 0$ であることが確かめられ、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は平行ではない。よって、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ によって張られる平面はちょうど $\mathbf{a}$ に垂直な原点を通る平面に一致する。

pre4-2. 第 4-4 節を参考に解くことができる。

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ とおくと、$4x + y - 3z = 0$ は $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$ と表わすことができる。方程式 $4x + y - 3z = 0$ の実数解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は、それによって定まる (x, y, z)-座標空間上の点を P とおくと、原点 O に関して、$\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表わされるから、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$ は $\langle \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \mathbf{a} \rangle = 0$ と書き換えられる。よって、方程式 $4x + y - 3z = 0$ は原点を通り、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面を表わす。

(2) (x, y, z)-座標空間において点 P_0 を通り、ベクトル $\mathbf{a}$ に垂直な平面上の任意の点を $\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、$\langle \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}, \mathbf{a} \rangle = 0$ となる。左辺の内積を計算することにより、求める方程式は $x+2y-9z = -1$ であることがわかる。

線形代数１・第４回 (2024 年 5 月 2 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第４回学習内容チェックシート 2024 年 5 月 2 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
ベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ が平行であるとは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- n 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、長さ $\|\mathbf{x}\|$ および内積 $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle$ は

  $$\|\mathbf{x}\| = \boxed{}, \qquad \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \boxed{}$$

  により定義される。$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が直交するとは、$\boxed{} = 0$ となることである。
- 3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \boxed{}$$

  により与えられる。外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は 2 つのベクトル $\boxed{}, \boxed{}$ に垂直である。
- 空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が平行でないとき、$s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ (s, t は実数) の形で表わされるベクトルの全体は 1 つの $\boxed{}$ をなす。これを $\boxed{}$ と呼ぶ。
- a, b, c, d を実数の定数とする。$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ を満たす点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を (x, y, z)-座標空間内に 1 つとると、方程式 $ax + by + cz = d$ を満たす任意の点 $\mathrm{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}$ はベクトル $\mathbf{a} = \boxed{}$ に垂直になる。したがって、a, b, c が同時に 0 でなければ、方程式 $ax + by + cz = d$ は (x, y, z)-座標空間において点 P_0 を通り、ベクトル $\mathbf{a}$ に垂直な $\boxed{}$ を表わす。
- (x, y, z)-座標空間において、点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通り、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は

  $$\boxed{} = 0$$

  である。

Q3. 第 4 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。