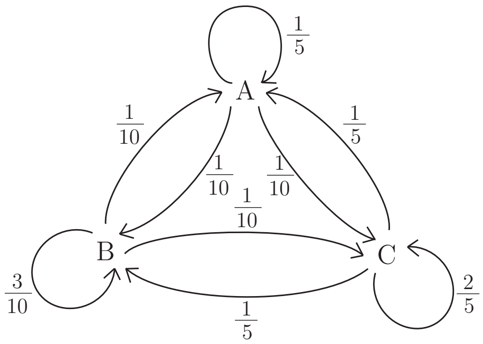
§1. 行列の定義

この授業でこれから半年で学ぶ主題は、連立一次方程式の理論と解法である。この講義で学ぶ数学の有用性を認識してもらうために、経済学におけるモデルを紹介する。経済学におけるモデルに関する部分は、細かいことを気にせずに“ ざっくりと ”理解してもらいたい。

● 1-1：連立一次方程式の実例 (レオンチェフ開モデル)

ある企業には A, B, C という 3 つの部門があり、A 部門は製品を生産するのに、A 部門、B 部門、C 部門から (総生産量に関わらず) 1 単位につき、それぞれ $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ 単位の投入が必要であり、B 部門は A 部門、B 部門、C 部門からそれぞれ $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ 単位の投入が必要がであり、C 部門は A 部門、B 部門、C 部門からそれぞれ $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}$ 単位の投入が必要であるとしよう。



A 部門、B 部門、C 部門のある期間における生産量をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とすると、

$$y_1 = x_1 - \Big(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3\Big),$$
$$y_2 = x_2 - \Big(\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3\Big),$$
$$y_3 = x_3 - \Big(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3\Big)$$

は、 A、B、C の各部門がその期間に外部に供給した量を表わしている。したがって、その期間の需要がどの程度あるのかをあらかじめ把握できるとき、すなわち、y_1, y_2, y_3 を既知としたとき、その期間内に各部門でどの程度の量の製品を生産すればよいかを知るには、連立一次方程式

$$\text{(1-1 a)}\qquad \begin{cases} \left(1-\frac{1}{5}\right)x_1 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_3 = y_1 \\ -\frac{1}{10}x_1 + \left(1-\frac{3}{10}\right)x_2 - \frac{1}{10}x_3 = y_2 \\ -\frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \left(1-\frac{2}{5}\right)x_3 = y_3 \end{cases}$$

を x_1, x_2, x_3 に関して解けばよい。

一般に、このような連立一次方程式を解くにはどうすればよいのか？この授業では、(行き当たりばったりではない) 組織的な方法 (逆行列、ガウスの消去法、行列式) を説明し、簡単な場合に計算できるようにする。

● 1-2：行列の定義

行列とは、

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (\pi), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように数を「長方形」の形に並べた「表」のことをいう。したがって、次のように並べたものは行列とは言わない。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} & & 9 & & \\ & 8 & & 1 & \\ 7 & & & & 2 \\ & 6 & & 3 & \\ & & 4 & & \end{array}$$

一般に、２つの自然数 $m,\ n$ に対して、mn 個の数を横に m 行、縦に n 列となるように「長方形」の形に整然と並べた「表」

$$\begin{array}{cc} \longleftarrow\ n\text{ 列}\ \longrightarrow & \\ \begin{pmatrix} a & b & \cdots & c \\ d & e & \cdots & f \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x & y & \cdots & z \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \uparrow \\ m \\ \text{行} \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

のことを (m,n)-**行列**、または、$m \times n$-行列といい、行数 m と列数 n を並べた組 (m,n) を行列の**サイズ**という。(n,n)-行列を n 次**正方行列**、$(n,1)$-行列を n 次列**ベクトル**、$(1,n)$-行列を n 次行**ベクトル**という。$(1,1)$-行列 (a) は数 a と同一視する。

数列に対しては第 n 番目の項を a_n のように表わすことが多いが、行列においては、行と列（横と縦）の両方向に数を並べるため、上から i 番目、左から j 番目に配置される数を表わすのに a_{ij} (i と j による二重添え字表示) を用いることが多い。すると、一般の (m,n)-行列は次のように表わされる。

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{第} & \text{第} & & \text{第} \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \text{列} & \text{列} & & \text{列} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{第 } 1 \text{ 行} \\ \leftarrow & \text{第 } 2 \text{ 行} \\ \vdots & \quad \vdots \\ \leftarrow & \text{第 } m \text{ 行} \end{array} \end{array} \tag{1-2 a}$$

この行列において第 i 行第 j 列に配置されている数 a_{ij} を (i,j)-**成分**といい、$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$, $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ をそれぞれ**第 i 行ベクトル、第 j 列ベクトル**と呼ぶ。

注意 1-2-1 (1-2 a) の (m,n)-行列を $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ のように書くこともある。さらに、考えている行列のサイズが明白な場合は、$(a_{ij})_{i,j}$ または (a_{ij}) と略記することもある。

例 1-2-2 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ のサイズは $(2,3)$ である。この行列の $(2,1)$-成分は 4 である。

正方行列に対して、第 (i,i)-成分を A の**対角成分**と呼ぶ。

例 1-2-3 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の対角成分は $1, 5, 9$ である。

● 1 - 3 : 行列の相等

２つの行列が等しいとは、数を並べた表として同じであるときをいう。すなわち、(m, n)-行列 $A = (a_{ij})$ と (m', n')-行列 $B = (b_{ij})$ について、

(1 - 3 a)
$$A = B \iff \begin{cases} \bullet\ m = m' \text{ かつ } n = n' \\ \bullet\ a_{ij} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

<u>**例 1 - 3 - 1**</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は行列のサイズが違うので、等しくない。

● 1 - 4 : ベクトルの板書・ノートでの表記

ベクトルは、物理的・幾何的には、有向線分であって、大きさ (= 長さ) と向きが同じものを同一視したものとして扱われる。そのため、高校数学においては $\vec{\mathbf{x}}$ のように矢印をつけて表わすが、大学では矢印をつけずに文字を太字にして表わすことが多い。これは、ベクトルを「数」の一般化とみなして扱う代数的立場に基づいている。この授業でもその立場でベクトルを扱うので、幾何や図形と関連する場合を除き、ベクトルは (小文字の) 太字で表わす。但し、太字を板書やノートに記すときには、文字を二重化することで表現する (原則として文字の左側を２重にして表わす)。

𝕒 𝕓 𝕔 𝕕 𝕖 𝕩 𝕪 𝕫 𝕨

● 1 - 5 : 行列とベクトルの積

３次正方行列 $A = (a_{ij})$ と ３ 次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の積 $A\mathbf{x}$ を

(1 - 5 a)
$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

により定める。すると、連立一次方程式の実例 (レオンチェフ開モデル) の最後のところで導いた連立一次方程式 (1 - 1 a) は、次のように表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ここで、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を、例えば、

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

のように変化させていったときの $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の値の変化の様子を見るには、

$$A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3\ A\mathbf{b}_4)$$

と約束しておくと、１つの式で表わすことができて便利である。具体的に書けば、

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 30 & 20 & 10 \\ 10 & 20 & 10 & 30 \\ 30 & 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 14 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 18 \\ 12 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。このようにして、行列同士に積を定義することができる。行列の積に関しては次回詳しく説明する。

例 1-5-1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ に対して

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{1}{3} \\ 7 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 + 9 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

である。

より一般に、

(m, n)-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と n 次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して、

m 次列ベクトル $A\mathbf{x}$ が次式により定義される。

(1-5 b)
$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$A\mathbf{x}$ を行列 A と列ベクトル $\mathbf{x}$ との**積**という。

注意：勝手な行列 A と列ベクトル $\mathbf{x}$ に対して積 $A\mathbf{x}$ が定義されるわけではない。積 $A\mathbf{x}$ は A の列数と $\mathbf{x}$ の行数が一致するときにのみ定義される。

例 1-5-2 ２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と２次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して、積 $A\mathbf{x}$ は

(1-5 c)
$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

によって定義される。

例えば、$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して、$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

例 1-5-3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \end{pmatrix}.$

No.1 2024 年 4 月 11 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre1-1. (行列と連立一次方程式)

(1) 連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

を、行列とベクトルの積を用いた等式で表わせ。

(2) 次の等式を、x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする連立一次方程式の形で表わせ。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 0 & -6 \\ 3 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pre1-2. (行列とベクトルの積)

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の積 $A\mathbf{x}$ を計算せよ。

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ の積 $B\mathbf{y}$ を計算せよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre1-1. 第 1 - 5 節の前半部分や [例 1 - 5 - 1] を参照すれば、容易に答えられる。ここでは答えのみを記す。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{cases} \quad\ \ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 \qquad\ + 4x_3 + 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad\ - 6x_4 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 \qquad\ = 1 \end{cases}$

pre1-2. [例 1 - 5 - 1], [例 1 - 5 - 2], [例 1 - 5 - 3] を参照すれば、容易に答えられる。ここでは答えのみを記す。

(1) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{10} \end{pmatrix}.$

(2) $B\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$

線形代数１・第１回 (2024 年 4 月 11 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第１回学習内容チェックシート 2024 年 4 月 11 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
(m,n)-行列とは？	p.	
n 次正方行列とは？	p.	
n 次列ベクトルとは？	p.	
行列 A, B について $A=B$ であるとは？	p.	

Q2. 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して、積 $A\mathbf{x}$ を計算し、その結果を下の枠内に書きなさい：

$$A\mathbf{x} = \boxed{}$$

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、記号等を入れなさい。

- ベクトルは $\boxed{}$ で表わす。例えば、ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ をノートに書くときには、順に $\boxed{}$ のように書く。
- 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ のサイズは $\boxed{}$ であり、$(3,2)$-成分は $\boxed{}$ である。

  また、この行列の第 3 行は $\boxed{}$ という行ベクトルであり、第 3 列は $\boxed{}$ という列ベクトルである。
- (m,n)-行列 A と l 次列ベクトル $\mathbf{x}$ について積 $A\mathbf{x}$ を考えることができるのは、$\boxed{}$ のときに限る。このとき、 $A\mathbf{x}$ は $\boxed{}$ 次列ベクトルである。

Q4. 第 1 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。