§1. 集合の元と部分集合

ここでは、集合の表現方法、自然数や実数などの数の集合を表わす記号とその意味について学習したのち、部分集合と集合の相等の定義を学ぶ。さらに、集合に対する代表的な演算 ($\cap$, $\cup$, $-$, $\times$) の定義を学ぶ。

● 1 - 1 : 素朴な集合の定義とその表記方法

集合 (set) とは、“もの”の集まりであって、その集まりがどのような“もの”からなるかが「客観的に規定されているもの」をいう。集合 A に対して、それを構成している個々の“もの”を A の **元**(げん)(element) または**要素**という。

例 1 - 1 - 1 次はいずれも集合である。

(1) 数 $1, 2, 3, 4$ からなる集まり

(2) 3 で割って 2 余る自然数の集まり

これに対して、次はどちらも集合でない。

(3) きれいな形の図形の集まり

(4) 充分に大きな数の集まり

集合は中括弧 { } を使って書き表わす。書き表わし方には次の 2 通りの方法がある。

① 元を書き並べる方法（**外延的記法**と呼ばれる）

例えば、$1, 2, 3, 4$ という 4 つの数からなる集合は $\{1, 2, 3, 4\}$ のように書き表わす。

元を書き並べる順番は気にしない。$\{2, 3, 1, 4\}$, $\{4, 1, 3, 2\}$, $\{1, 2, 4, 3\}$ はすべて $1, 2, 3, 4$ からなる集合を表わす。また、同じ元を 2 回以上書いても構わない。例えば、$\{2, 3, 1, 4, 4\}$ も $1, 2, 3, 4$ からなる集合を表わしている。

② 条件を書き記す方法（**内包的記法**と呼ばれる）

正の偶数全体からなる集合は、$\{\, x \mid x$ は正の偶数である $\}$ のように書き表わす。一般に、〇〇〇という条件を満たすもの全部からなる集合を書き表わしたいときには、

$$\{\, x \mid x \text{ は〇〇〇を満たす} \,\} \quad \text{あるいは} \quad \{\, x \mid x \text{ は〇〇〇である} \,\}$$

という書き方をする。“ | ”の代わりに“ : ”や“ ; ”が使われることもある。

x が集合 A の元であることを x は A に**属する** (x belongs to A) または A は x を (元として) **含む**といい、$x \in A$ または $A \ni x$ と書き表わす。逆に、x が集合 A の元でないことを $x \notin A$ または $A \not\ni x$ のように書き表わす。

例 1 - 1 - 2 A を偶数全体からなる集合としたとき、$2 \in A$ であるが $1 \notin A$ である。

x と y がともに集合 A の元であることを、記号で $x \in A,\ y \in A$ や $A \ni x,\ A \ni y$ のように表わすが、これを $x, y \in A$ または $A \ni x, y$ と略記する。同様に、x, y, z がともに集合 A の元であることを $x, y, z \in A$ や $A \ni x, y, z$ と略記する。もっと個数が増えた場合も同様の略記の仕方をする。

注意 1 - 1 - 3 (内包的記法のバリエーション) 全体となる集合 X があり、その元の中で、〇〇〇という条件を満たすもの全体からなる集合を考えたい場合がある。このようなときには、

$$\{\, x \in X \mid x \text{ は〇〇〇を満たす} \,\}$$

という書き方をする。これは、

$$\{\, x \mid x \in X、かつ、x\ は○○○を満たす \,\}$$

と同じ集合を表わす。このとき、条件における「かつ」は「,」を使って省略することができる。例えば、集合 X を偶数全体からなる集合としたとき、X の元であって、3 で割り切れるものだけを集めて作った集合は、$\{\, x \in X \mid x\ は\ 3\ で割り切れる \,\}$ のように書き表わす。

● 1-2：数の集合の記法

数の集合に関しては、習慣的に次の記号が使われる。

$\mathbb{N} = \{$ 自然数 (natural number) の全体 $\} = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{$ 整数 (integer) の全体 $\} = \{\cdots\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

$\mathbb{Q} = \{$ 有理数 (rational number) の全体 $\} = \{\, \frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{Z}$ かつ $s \neq 0 \,\}$

$\mathbb{R} = \{$ 実数 (real number) の全体 $\}$

$\mathbb{C} = \{$ 複素数 (complex number) の全体 $\} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\,\}$ (但し、i は虚数単位)

整数全体からなる集合を $\mathbb{Z}$ で表わし、有理数全体からなる集合を $\mathbb{Q}$ で表わすのは、それぞれ、数を意味するドイツ語 Zahl と商を意味する英語 quotient の頭文字に由来している。

● 1-3：部分集合

集合 B が集合 A の**部分集合** (subset) であるとは、B に属するどの元も A の元になっているときをいう。これは、論理記号の「$\Rightarrow$」を借用すると、

$$集合\ B\ が集合\ A\ の部分集合である \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{“}\, x \in B \ \Rightarrow\ x \in A \,\text{”}$$

と書き表わすことができる。集合 B が集合 A の部分集合であることを、$B \subset A$ あるいは $A \supset B$ のように書き表わし、「B は A に**含まれる** (B is contained in A)」または「A は B を**含む**」と読む。逆に、B が A の部分集合でないことを $B \not\subset A$ あるいは $A \not\supset B$ と書き表わす。

例 1-3-1　3つの集合 $A = \{1, 3, 6\},\ B = \{1, 2, 4, 6\},\ C = \{1, 2, 3, 6\}$ を考える。

(1) $A \subset C$ である。なぜならば、A に属するどの元（つまり、1, 3, 6 のいずれについて) もすべて C の元になっているからである。

(2) $B \not\subset C$ である。なぜならば、B に属する元 4 は C に属さないからである。

例 1-3-2　$a < b$ を満たす実数 a, b に対して、$\mathbb{R}$ の部分集合 $[a, b],\ (a, b)$ を

$$[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}, \qquad (a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$$

によって定め、それぞれ**閉区間** (closed interval)、**開区間** (open interval) と呼ぶ。

部分集合の定義より、どのような集合 A に対しても、A は A 自身を部分集合として含む、すなわち、$A \subset A$ である。また、どのような集合も、元をまったく持たない集合、すなわち、**空集合** (empty set) を部分集合として含む (と約束する)。空集合は記号 $\varnothing$ により表わす。よって、任意の集合 A に対して、$\varnothing \subset A$ が成り立つ。

注意：空集合 $\varnothing$ を $\{\varnothing\}$ のように書いてはいけない！集合 $\{\varnothing\}$ は $\varnothing$ という元を持っている集合であり、空集合とは異なる。$\varnothing$ はそれ自体で1つも元を持たない集合を表わしている。

● 1 - 4 : 集合族と冪集合

元が集合であるような集合を**集合族** (family of sets) と呼ぶ。

例 1 - 4 - 1 $\{\ \{1,2\},\ \{3\},\ \mathbb{R}\ \}$ は集合族であるが、$\{\ \{1,2\}, 3,\ \mathbb{R}\ \}$ は集合族ではない。
$\{\varnothing\}$ と $\varnothing$ とは異なると説明したが、同様に、$\{\{1\}\}$ と $\{1\}$ も異なる。

集合 X に対して、その部分集合をすべて元として持つ集合を 2^X で表わす：

$$2^X := \{\ A \mid A \subset X\ \}.$$

この集合族を X の**冪集合** (power set) といい、2^X の部分集合を X の**部分集合族**という。

例 1 - 4 - 2 閉区間を元とする集合 $\left\{\ \left[-1+\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n}\right]\ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合族である。

● 1 - 5 : 集合の相等

２つの集合 A と B が「含む・含まれるの関係」にあるとき、つまり、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき、A と B は**等しい**といい、$A = B$ と書き表わす。また、A と B が等しくないことを $A \neq B$ と書き表わす。

例 1 - 5 - 1 ２つの集合

$A = \{\ x \mid x$ は単語 osaka に使われているアルファベット $\}$,

$B = \{\ x \mid x$ は単語 tokyo に使われているアルファベット $\}$

について、$A \neq B$ である。なぜならば、$\mathrm{s} \in A$ であるのに、$\mathrm{s} \notin B$ であるからである。

例 1 - 5 - 2 $A = \{\ 3m + 2n \mid m, n \in \mathbb{Z}\ \}$ と定めるとき、$A = \mathbb{Z}$ である。

(証明)

① $A \subset \mathbb{Z}$ と② $\mathbb{Z} \subset A$ の２つを示せばよい。

①の証明：A の定義より、A のすべての元は整数である。よって、$A \subset \mathbb{Z}$ が成り立つ。

②の証明：$r \in \mathbb{Z}$ を任意にとる。r は

$$r = 3 \cdot r + 2 \cdot (-r)$$

と書き表わすことができる。$m = r,\ n = -r$ とおくと、これらは確かに整数なので、$r = 3m + 2n \in A$ がわかる。よって、$\mathbb{Z} \subset A$ も示された。 □

● 1 - 6 : 共通集合と和集合と差集合

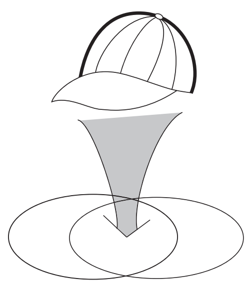
２つの集合 $A,\ B$ が与えられたとき、新たに３つの集合 $A \cap B,\ A \cup B,\ A - B$ を

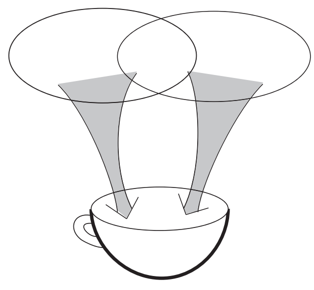
$$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\ \},$$

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \text{ または } x \in B\ \},$$

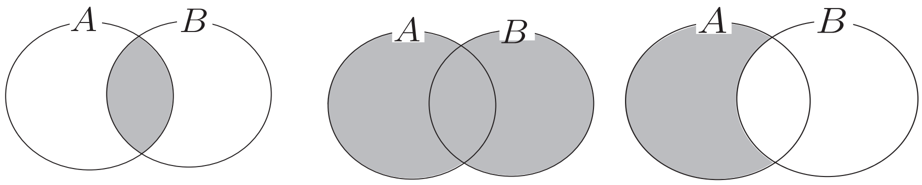
$$A - B = \{\ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\ \}$$

のように作ることができる。$A \cap B$ は、A と B の両方に属するもの全体、$A \cup B$ は、A と B のうちの少なくとも一方に属するもの全体、$A - B$ は A に属する元のうち、B には属さないもの全体からなる集合である。$A \cap B$ を A と B の**共通集合** (intersection) といい、$A \cup B$ を A と B の**和集合** (union)





といい、$A-B$ を を A から B を引いた**差集合** (difference) という。記号 $\cap$ は「キャップ」または「インターセクション」と読み、記号 $\cup$ は「カップ」または「ユニオン」と読み、記号 $-$ はいつものように「マイナス」または「引く」と読む。$A-B$ を $A\setminus B$ と記す流儀もある。



例 1-6-1 集合 $A=\{\ x\in\mathbb{N}\mid x\ は偶数\ \},\ B=\{\ x\in\mathbb{N}\mid x\ は\ 3\ の倍数\ \}$ に対して、
$A\cap B=\{\ x\in\mathbb{N}\mid x\ は\ 6\ の倍数\ \}$,
$A\cup B=\{\ x\in\mathbb{N}\mid x\ は偶数かまたは\ 3\ の倍数\ \}$,
$A-B=\{\ x\in\mathbb{N}\mid x\ は\ 6\ の倍数でない偶数\ \}$.

● 1-7：直積集合

2 つの空でない集合 $A,\ B$ が与えられたとき、A の元 a と B の元 b から組 (a,b) を作ることができる。$a\in A,\ b\in B$ から作られる組 (a,b) と $a'\in A,\ b'\in B$ から作られる組 (a',b') が**等しい**とは、$a=a'$ かつ $b=b'$ であるときをいい、このことを $(a,b)=(a',b')$ と書き表わす。すなわち、

$$(a,b)=(a',b')\ \overset{\text{def}}{\iff}\ a=a'\ \text{かつ}\ b=b'.$$

組 (a,b) を考えるときには元の並び方の順番が大切なので、それを強調して、(a,b) のことを a と b との**順序対** (ordered pair) とも呼ぶこともある。

A の元と B の元との順序対をすべて集めて得られる集合を $A\times B$ と書き表わす：

$$A\times B=\{\ (a,b)\mid a\in A\ \text{かつ}\ b\in B\ \}.$$

この集合を A と B の**直積集合** (direct product) という。

例 1-7-1 $A=\{1,2\},\ B=\{1,2,3\}$ について

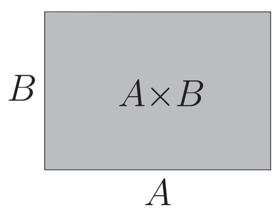
$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

$A,\ B$ のどちらか一方が空集合のときには $A\times B=\varnothing$ と定めることで、すべての集合 A,B に対して直積集合 $A\times B$ が定義される。

$A=B$ のときには、直積集合 $A\times B$ を A^2 と書くことがある。特に、A が数の集合のときこの記法はよく使われる。例えば、$\mathbb{R}^2$ は直積集合

$$\mathbb{R}^2=\{\ (a,b)\mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\ \}$$

を表わす。直積集合 $\mathbb{R}^2$ は、$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に座標が (a,b) で与えられる座標平面上の点 P を対応させることにより、座標平面と同一視できる。この考え方を一般の集合にも適用して、集合 A,B の直積集合 $A\times B$ を図示するときには長方形で表わすことが多い。直積集合のヴェン図としてこのような図を利用すると、次が成立することは容易に理解できる。



例 1-7-2 集合 A_1,B_1,A_2,B_2 に対して
(1) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.
(2) $(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)=\big((A_1-A_2)\times B_1\big)\cup\big(A_1\times(B_1-B_2)\big)$.