

Temperley-Lieb 代数とその応用

—平成 21 年度筑波大学理工学群数学類、第一学群自然科学類 4 年生のために—

2010 年 1 月 14 日

2010 年 8 月 13 日修正

和久井 道久

このノートは、2009年12月16日から18日にかけて、筑波大学で行った集中講義の準備のために作成したものです。その年の夏休みに筑波大学の増岡彰さんから、学部生向けに集中講義をしてもらえないか、と依頼されたことが始まりです。授業のタイトルは、詳しい内容よりも先に決める必要があったので、増岡さんと相談の上、「結び目図式の代数」にしました(シラバス上の科目名は「数学特論A」でした)。内容をどうするかあれこれ考えた挙げ句、あまり予備知識を必要としない、Temperley-Lieb 代数の低次元トポロジーへの応用についてお話させていただくことに決めました。集中講義のお知らせに載せるための授業の説明は以下のように書きました。

「Temperley-Lieb 代数は交差のない平面グラフによって表示される環の一種です。Temperley-Lieb 代数は量子力学、代数学の分野をはじめ、低次元多様体論、グラフ理論、計算機科学、圏論、論理学など、様々な分野で使われています。この講義では、Temperley-Lieb 代数の基本的な性質を調べたのち、2次元特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の表現論との関わり、結び目理論、3次元多様体論、グラフ理論への応用などについて概説します。」

集中講義で教えることは初めての経験であったことと、授業の準備が充分にとれなかったことから、うまく伝えられるかどうか不安が大きかったのですが、増岡彰さん、川村一宏さん、内藤聡さん、石井敦さん、清水健一さんをはじめ大勢の先生方、院生・学生さんたちのあたたかい雰囲気の中、楽しく講義することができました。講義の間だけでなく、毎日、昼と夜の食事におつきあいくださったり、歓迎会を開いたりしてくださったり、大変あたたかいもてなしを受けました。特に、増岡彰さんにはホテルの手配、研究部屋の確保などの事務手続き上のことを含め、全面的にお世話になりました。ここに記して、皆様のご好意に感謝の意を表わしたいと思います。ありがとうございました。

このノートは、私が個人で使用するために作成したのですが、何かのお役に立てればと思い、公開することにしました。歴史的な事実や引用文献、概念の説明などにおいて正しくない記述、不適切な表現があるかもしれません。そのように思われる箇所がございましたら、email(wakui@ipcku.kansai-u.ac.jp) または手紙(〒564-8680 吹田市山手町3-3-35 関西大学システム理工学部) などでご連絡いただけましたら幸いです。

もくじ

- §1. Temperley-Lieb 代数
- §2. 結び目の Jones 多項式
- §3. 組み紐とブラケット多項式
- §4. 平面グラフのとその彩色
- §5. 量子交代化作用素 —Jones-Wenzl 幂等元—
- §6. 線形スケインと q -スピン・ネットワークの計算
- §7. 3次元多様体の状態和不変量

§1. Temperley-Lieb 代数

Temperley-Lieb 代数 [8, 23] は、統計物理における問題を解くために、1971 年に Temperley と Lieb により導入された。その後、1985 年に Temperley-Lieb 代数は Jones によって作用素環と組み紐表現の研究の中で再発見され、Jones 多項式と呼ばれる結び目不変量の発見をもたらした [9]。当初、Temperley-Lieb 代数は生成元と関係式によって定義されていたが、Kauffman によって図的な解釈が与えられ、直感的に理解しやすい対象となった [11]。この講義では、Kauffman 流の Temperley-Lieb 代数の定義を採用する。

Temperley-Lieb 代数の次元はカタラン数で与えられる。そこで、まず、カタラン数の定義とその幾何学的な意味について説明する。

● 1-1 : カタラン (Catalan) 数

$n \geq 0$ を整数とする。整数

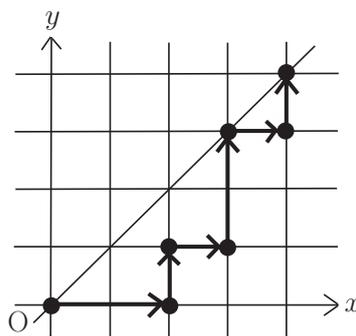
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

を n 次 Catalan 数 という。 $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, \dots$ である。Catalan 数についてはいろいろな解釈の仕方があるが、その 1 つを紹介しよう [10; Chapter 5]。

補題 1-1

n 次 Catalan 数 C_n は、格子 $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ 上を動く $(0, 0)$ から (n, n) へ至る許容道 (admissible path) であって、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ 内にあるものの総数に等しい。ここで、許容道とは、頂点が格子点上にある道であって、左から右へ進む辺と、下から上へ向かって進む辺が交互に現れるもののことをいう。

(証明)



$(0, 0)$ から (n, n) への許容道であって、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ 内にあるものの総数を数えよう。そのためには、全体をベクトル $(1, 0)$ 分だけ平行移動させて、 $(1, 0)$ から $(n+1, n)$ への許容道であって、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < x\}$ 内にあるものの総数を数えればよい。

$(1, 0)$ から $(n+1, n)$ への許容道の総数は、 $\binom{2n}{n}$ 個である。

∴)

$(1, 0)$ から $(n+1, n)$ へ許容道のルールに従って進むには、水平方向に単位ベクトル $(1, 0)$ 分を n 個だけ移動し、垂直方向に単位ベクトル $(0, 1)$ 分を n 個だけ移動する必要がある。逆に、このような移動は $(1, 0)$ から $(n+1, n)$ へ許容道を定める。したがって、 $(1, 0)$ から

$(n+1, n)$ へ許容道は、総計 $2n$ 個の単位辺 (= 長さ 1 の水平方向と垂直方向からなる辺) からなり、そのうち n 個が水平方向の単位辺になっているものである。したがって、その個数は、 $2n$ 個の単位辺うち、 n 個の水平方向の単位辺を選ぶ方法の分だけあるから、 $\binom{2n}{n}$ 個である。□

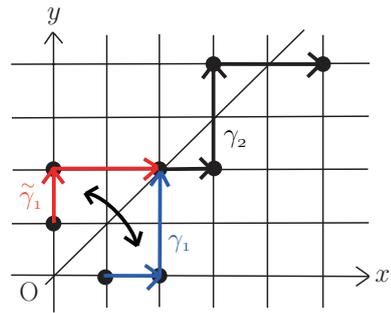
次に、 $(1, 0)$ から $(n+1, n)$ への許容道のうち、直線 $y = x$ と交わるものの個数を数える。

$S = \{ (1, 0) \text{ から } (n+1, n) \text{ への許容道であって、直線 } y = x \text{ と交わるもの全体} \}$,

$S' = \{ (0, 1) \text{ から } (n+1, n) \text{ への許容道の全体} \}$

とおく。 S と S' との間に全単射が存在する。これを示す。

$\gamma \in S$ を任意にとる。 γ と直線 $y = x$ との交点 (i, i) の中から、座標 i が最小であるものを選ぶ。 γ を $(1, 0)$ から (i, i) までの部分道 γ_1 と (i, i) から $(n+1, n)$ までの部分道 γ_2 の 2 つの部分に分ける。 γ_1 を直線 $y = x$ に関して線対称移動させたものを $\tilde{\gamma}_1$ とすると、 $\tilde{\gamma}_1$ は $(0, 1)$ から (i, i) への許容道になる。これに γ_2 をつなげて $(0, 1)$ から $(n+1, n)$ への許容道が得られる。この許容道を γ' とおく。写像 $f: S \rightarrow S'$, $f(\gamma) = \gamma'$ は全単射である。



∴)

$\delta \in S'$ を任意にとる。 δ は $(0, 1)$ から $(n+1, n)$ への許容道であるから、途中で必ず直線 $y = x$ と交わる。その交点 (i, i) の中で、座標 i が最小であるものを選ぶ。 δ を $(0, 1)$ から (i, i) までの部分道 δ_1 と (i, i) から $(n+1, n)$ までの部分道 δ_2 の 2 つの部分に分ける。 δ_1 を直線 $y = x$ に関して線対称移動させたものを $\tilde{\delta}_1$ とすると、 $\tilde{\delta}_1$ は $(1, 0)$ から (i, i) への許容道になる。これに δ_2 をつなげて $(1, 0)$ から $(n+1, n)$ への許容道が得られる。この許容道を δ' とおく。 δ' は直線 $y = x$ と交わるから S の元である。したがって、写像 $g: S' \rightarrow S$, $g(\delta) = \delta'$ が定義される。この g が f の逆写像を与える。□

よって、

$$\#S = \#S' = \binom{2n}{n+1}$$

とわかるから、 $(1, 0)$ から $(n+1, n)$ への許容道であって、 $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < x \}$ 内にあるものの総数は

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} = C_n$$

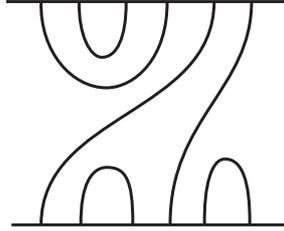
である。□

● 1-2 : 単純な平面図式

$n \geq 0$ を整数とする。単純 n -図式 (simple n -diagram) とは、 n 個の閉区間の $\mathbb{R} \times [0, 1]$ への埋め込みの像 D であって、以下の条件を満たすものをいう :

(SD1) $\partial D \subset \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ かつ $D - \partial D \subset \mathbb{R} \times (0, 1)$.

(SD2) $t = 0, 1$ に対して $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{t\}) = \{(1, t), (2, t), \dots, (n, t)\}$ であり、その各点において D は $\mathbb{R} \times \{t\}$ に横断的に交わる。



2つの単純 n -図式 D, D' が同値であるとは、単純 n -図式の条件を保ったまま、 D を連続的に変形して D' にすることができることをいう。より正確には、 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ 上の $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ を固定するイソトピー $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in [0, 1]}$ であって、

(i) $\varphi_0 = \text{id}$,

(ii) $\varphi_1(D) = D'$,

(iii) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\varphi_t(D)$ が単純 n -図式である

を満たすものが存在するときをいう。単純 n -図式の同値類の個数は有限である。その個数は次で与えられる。

定理 1-2

$n \geq 0$ を整数とする。このとき、単純 n -図式の同値類の個数は n 次 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ に等しい。

(証明)

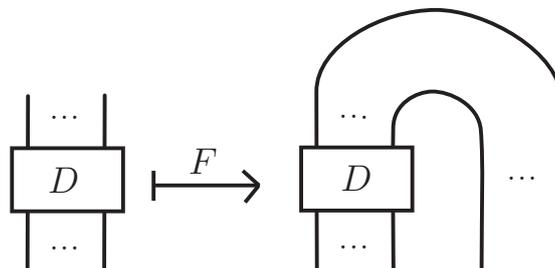
まず、単純 n -図式を単純 $(2n, 0)$ -図式に置き換えよう。ここで、単純 $(2n, 0)$ -図式とは、 n 個の閉区間の $\mathbb{R} \times [0, 1]$ への埋め込み D であって、単純 n -図式と同様の、以下の条件を満たすもののことをいう：

(i) $\partial D \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ かつ $D - \partial D \subset \mathbb{R} \times (0, 1)$.

(ii) $\#(\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})) = 2n$, かつ、 $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ の各点において D は $\mathbb{R} \times \{0\}$ に横断的に交わる。

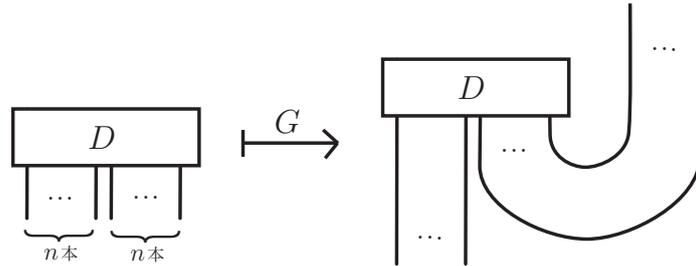
2つの単純 $(2n, 0)$ -図式が同値であることも単純 n -図式の場合と同様に定義する。

$SD_n, SD_{2n, 0}$ をそれぞれ単純 n -図式、単純 $(2n, 0)$ -図式の同値類全体からなる集合とする。次の図のようにして、全単射 $F : SD_n \rightarrow SD_{2n, 0}$ を構成することができる：



∴)

F の逆写像は次のように定義される写像 $G : SD_{2n,0} \rightarrow SD_n$ によって与えられる。



□

よって、 SD_n の元の個数を求めるには、 $SD_{2n,0}$ の元の個数を求めればよい。

今、各 $D \in SD_{2n,0}$ に対して、 $\{L, R\}$ をアルファベットとする語 w_D を次のように定義する。 $D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ は $2n$ 個の点からなっている。これらの点を左から順に p_1, \dots, p_{2n} とおく。各点 p_i は $\mathbb{R} \times [0, 1]$ 内の半円の端点になっているが、それがその半円の左側の端点であるとき L を、右側の端点であるとき R を対応させる。このような規則に基づいて各点 p_i に L または R を対応させて、それらを i が 1 のときから $2n$ のときまで順番にならべたものを w_D と定義する。語 w_D は次のような特徴を持っている。

- w_D は長さ $2n$ の語であり、そのうち、 n 個は文字 L からなる。
- w_D は **Dyck 語** である、すなわち、 w_D に並んでいる文字列を任意の場所で区切ると、最初の文字から区切られた部分まででできる部分語においては、文字 R の個数は文字 L の個数以下である。

このようにして、 SD_n から $\{L, R\}$ をアルファベットとする、長さ $2n$ の Dyck 語全体 Dyck_{2n} へ写像 $f : SD_{2n,0} \rightarrow \text{Dyck}_{2n}$ が得られる。 f は全単射である。

∴)

f が全射であることを示す。数学的帰納法によって示す。

I. $n = 1$ のとき明らかに f は全射である。

II. $n \geq 2$ とし、 $f : SD_{2(n-1),0} \rightarrow \text{Dyck}_{2(n-1)}$ は全射であることが証明されたとする。

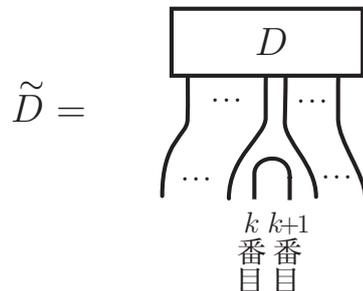
$$w = X_1 X_2 \cdots X_{2n-1} X_{2n} \quad (X_i \in \{L, R\}, i = 1, \dots, 2n)$$

を長さ $2n$ の Dyck 語とする。 w において n 番目に登場する L が X_k であるとする。 $1 \leq k < 2n$ であって、 X_k の右側には文字 L は登場しない。特に、 $X_{k+1} = R$ である。そこで、 X_k と X_{k+1} を半円の弧で結ぶ。

w から X_k, X_{k+1} を取り除いて得られる長さ $2(n-1)$ の語

$$w' = X_1 \cdots X_{k-1} X_{k+2} \cdots X_{2n}$$

は Dyck 語である。帰納法の仮定により、 $w_D = w'$ となる $D \in SD_{2(n-1),0}$ が存在する。このとき、 $\tilde{D} \in$



$SD_{2n,0}$ を右図のように定義する。すると、 $w_{\bar{D}} = w$ となる。よって、 n のときも $f: SD_{2n,0} \rightarrow \text{Dyck}_{2n}$ は全射である。
 f が単射であることも同様にして証明される。 □

よって、 $SD_{2n,0}$ の元の個数を求めるには、 $\{L, R\}$ をアルファベットとする、長さ $2n$ の Dyck 語の個数を求めればよい。

各 $w \in \text{Dyck}_{2n}$ に対して、 $(0,0)$ から (n,n) への許容道 γ_w を次のように対応させることができる：

$$w = X_1 X_2 \cdots X_{2n-1} X_{2n} \quad (X_i \in \{L, R\}, i = 1, \dots, 2n)$$

と書く。格子上の点 p_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$) を次のように帰納的に定義する。まず、 $p_0 = (0,0)$ とおく。 $X_1 = L$ のとき $p_1 = (1,0)$ と定め、 $X_1 = R$ のとき $p_1 = (0,1)$ と定める。 $1 \leq i < 2n$ とし、格子上の点 $p_i = (x_i, y_i)$ が定義されたとする。このとき、 p_{i+1} を $X_{i+1} = L$ のとき $p_{i+1} = (x_i + 1, y_i)$ と定め、 $X_{i+1} = R$ のとき $p_{i+1} = (x_i, y_i + 1)$ と定める。こうして得られる点 $p_0 = (0,0), p_1, \dots, p_{2n} = (n,n)$ を順番に線分をつないでいくと、 $(0,0)$ から (n,n) への許容道が得られる。これを γ_w とおく。 w は Dyck 語なので、許容道 γ_w は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ 内にある。 \mathcal{S} を $(0,0)$ から (n,n) への許容道であつて、 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ 内にあるもの全体からなる集合とすると、写像 $\phi: \text{Dyck}_{2n} \rightarrow \mathcal{S}$, $\phi(w) = \gamma_w$ が得られたことになる。写像 ϕ は全単射であることは容易にわかるから、補題 1-1 により、 $\#\text{Dyck}_{2n} = \#\mathcal{S} = C_n$ である。これで、 $\#SD_n = C_n$ となることが証明された。 □

d を不定元とする \mathbb{Q} 上の有理関数体を R とおく： $R = \mathbb{Q}(d)$. 単純 n -図式の同値類を基底とする R 上のベクトル空間を $(\text{TL})_n$ とおく (d を明記したときには $(\text{TL})_n[d]$ と書くこともある)。

例 1-3

(1) $n = 2$ のとき： $(\text{TL})_2$ の任意の元は次の形に書かれる元からなる：

$$a \left| \right. + b \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \quad (a, b \in R)$$

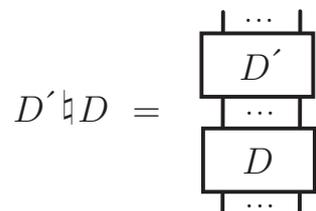
(2) $n = 3$ のとき： $(\text{TL})_3$ の任意の元は次の形に書かれる元からなる：

$$a_1 \left| \left| \right. + a_2 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \left| \right. + a_3 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + a_4 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + a_5 \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \quad (a_1, \dots, a_5 \in R)$$

単純 n -図式 D に対して、その同値類を $[D]$ で表わす。

2つの単純 n -図式 D, D' に対して、 $D' \natural D$ を D の上に D' を乗せて、高さを $1/2$ に縮めることによって得られる、 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ に埋め込まれたコンパクトな 1 次元多様体とする (右図参照)。

$D' \natural D$ は n 個の閉区間の埋め込みと有限個の単位円周の埋め込みからなる。 $D' \natural D$ の連結成分の中の、埋め込まれた単位



実は、Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ は次のような生成元と関係式で記述される代数である。

定理 1-4

$n \geq 0$ を整数とする。Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ は $1, e_1, \dots, e_{n-1}$ によって生成され、関係式 (1-3 a), (1-3 b), (1-3 c), (1-3 d) によって定義される代数と同型である。

この定理の証明は [10, 28] を参照。

Temperley-Lieb 代数は様々な数学と関係している [1, 4, 6, 14]。

- 統計力学
- グラフ理論
- 結び目理論
- 3次元多様体論
- 表現論
- 作用素環論
- 圏論
- 論理学

この講義では、Temperley-Lieb 代数の低次元トポロジーへの応用について話したい。

§2. 結び目の Jones 多項式

この節では、結び目の Jones 多項式を紹介する。Jones 多項式の定義の仕方は複数知られているが、ここでは最も初等的な方法—Kauffman によって導入されたブラケット多項式を用いる方法—を採用する [11,12]。この節には、Temperley-Lieb 代数は登場しない。次の節で、Jones 多項式と Temperley-Lieb 代数とが密接に結びついていることを説明する。

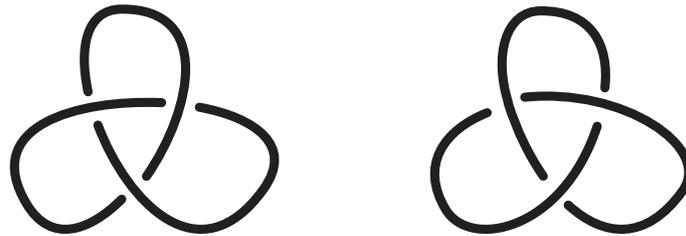
● 2-1 : 結び目・絡み目とその図式

結び目と絡み目の定義を述べよう。自然数 m に対して m 個の単位円周 $S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ の \mathbb{R}^3 への埋め込みの像を m -成分絡み目 (*link*) という。 m を絡み目の成分数といい、各連結成分を単に L の成分 (*component*) と呼ぶ。1-成分絡み目を結び目 (*knot*) という。絡み目は、それが有限個の線分を繋いでできているとき、折れ線絡み目 (*polygonal link*) と呼ばれる。この講義では、単に絡み目と呼ばば、折れ線絡み目を指すものと約束する。しかしながら、それを図示するときには、滑らかな曲線で表わすことが多い。

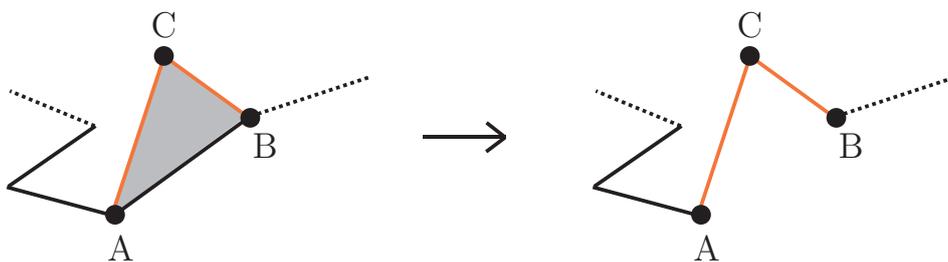
絡み目 L の各成分 L_i に、(多様体としての) 向きが指定されたものを向きづけられた絡み目 (*oriented link*) と呼ぶ。 L_i の向きは $f_i(S^1) = L_i$ となる埋め込み $f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ によって指定することができるが、図示するときには辺に矢印を付けて表わす。

結び目理論においては、次の問題は基本的である。

結び目理論における基本問題 2つの結び目 K_1 と K_2 が与えられたとき、それらが \mathbb{R}^3 において連続変形で移り合うか否かを判定する方法を見つけよ。例えば、次の2つの結び目 (**三葉結び目** と呼ばれる) は \mathbb{R}^3 内における連続変形で移り合うだろうか？



連続変形で移り合うことの意味を精密に述べよう。 L を m -成分絡み目とする。 L のある連結成分上の一辺 AB をとる。空間内に点 C を、三角形 $\triangle ABC$ と L とが辺 AB のみで交わるようにとる。このとき、 L における辺 AB を2辺 $AC \cup CB$ で置き換えることにより、 m -成分絡み目 L' が得られる。このように L から L' を作る操作、または、逆に L' から L を作る操作を絡み目に対する**初等変形**と呼ぶ。



m -成分絡み目 L_1, L_2 が**同値**であるとは、有限回の初等変形、および、絡み目の辺への中間点の追加・削除を行って、 L_1 から L_2 へ変形することができることをいう。向きづけられた m -成分絡み目 L_1, L_2 に対しても、同様にして、同値であるということを定義する。今度は、初等変形や辺への中間点の追加・削除を行う際に、その前後で変化を受けない部分の向きが同じとなるように、各成分に向きを入れながらこれらの変形を行う。

任意の絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ は、必要ならば適当に有限回初等変形を行うと、射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ に関して次を満たすようにすることができる：

- (LD1) L の各辺は π によって \mathbb{R}^2 の辺に写される。
- (LD2) L の相異なる2つの辺の π による像は高々1点で交わる。
- (LD3) L の端点を共有しない2つ辺は、 π による像において端点を共有しない。
- (LD4) L の相異なる3つの辺の π による像が1点を共有することはない(すなわち、 $\pi(L)$ は3重点を持たない)。

L が \mathbb{R}^3 の中において上の条件を満たす位置にあるとき、 L を図式を使って表示することができる。ここで、 L の**図式** (*diagram*) とは、(LD1), ..., (LD4) を満たすように初等変形を施した後の L' の射影図 $D = \pi(L')$ であって、その各交点に対して、交わっている2本の線分のうちどちらが z -軸に関して上にあつて、どちらが下にあるか、という「上下の」情報を付けたもののことをいう。この情報を図では、下図のように、線分に小さな切れ目を入れて表現する。



一般に、平面上に描かれたこのような図を**絡み目図式** (*link diagram*) と呼ぶ。

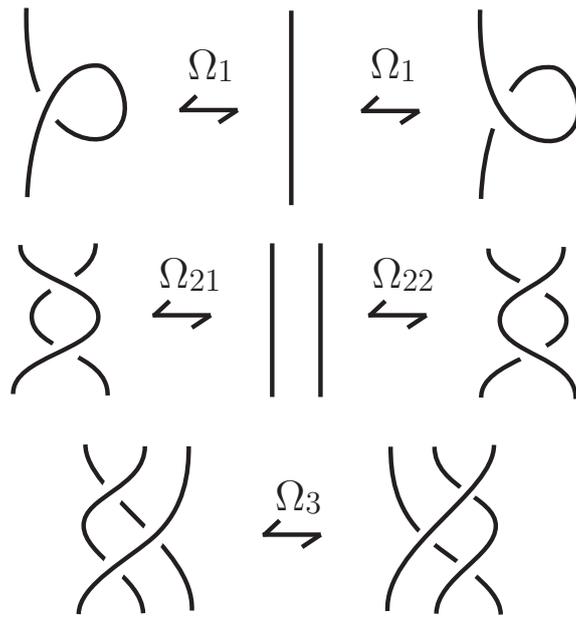
L に向きが与えられていれば、 L の図式の各成分にも向きが与えられる。すなわち、各成分に向きの情報(これを矢印で表わす)が付与された絡み目図式が得られる。これを**向きづけられた絡み目図式** (*oriented link diagram*) と呼ぶ。

(向きづけられた)絡み目図式があれば、それをもとに \mathbb{R}^3 内の(向きづけられた)絡み目を復元することができる。

● 2-2 : 絡み目図式の Reidemeister 移動

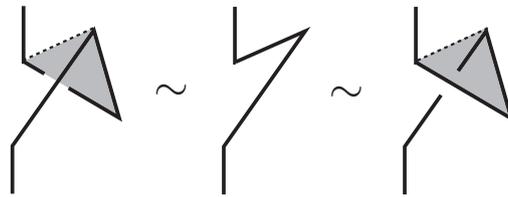
3次元空間 \mathbb{R}^3 内の絡み目は、絡み目図式という平面上に描かれた図を使って表示することができるので、絡み目を絡み目図式を通して研究することができる。しかし、射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ に関して条件 (LD1), ..., (LD4) を満たすような位置への変形の仕方は一通りではないし、その結果得られる図式も1つには定まらない。つまり、異なった絡み目図式が同値な絡み目を表わすことがある。では、どんなときに2つの絡み目図式は同値な絡み目を表わすのであろうか。その答えは、1930年頃、Reidemeister によって与えられた。その結果を紹介しよう。

2つの絡み目図式が、次の図に描かれている矢印の左側の部分と右側の部分だけが異なっており、それ以外の部分は同一であるとする(絡み目図式が向きづけられているときには、移動の前後で対応する成分の向きが同じになるものだけを考える)。



すると、このような2つの絡み目図式は同値な絡み目を表わすことが容易にわかる。

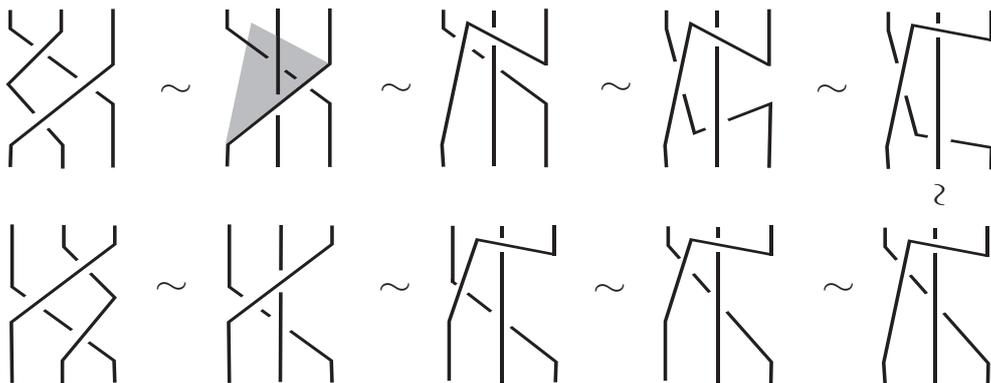
Ω_1 :



Ω_{21}, Ω_{22} :



Ω_3 :



絡み目図式に $\Omega_1, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_3$ のいずれかを施して、新しい絡み目図式を作る操作のことを **Reidemeister 移動** (*Reidemeister move*) という。同値な絡み目を表わす図式の変形は、Reidemeister 移動の他に**平面のイソトピー**と呼ばれる移動もある。これは、(向きづけられた)絡み目図式に対する以下の操作のことをいう。

- (i) \mathbb{R}^2 に含まれる三角形による初等変形。
- (ii) 辺の中間点の追加、削除。
- (iii) \mathbb{R}^2 に含まれる三角形 $\triangle ABC$ が $(\triangle ABC) \cap D = AB \cup MN$ (但し、 M は線分 AB 上にあり、 N は $BC \cup AC$ 上にあり、 A, B, C ではない) を満たすとき、 D の中の辺 AB を $AC \cup BC$ で置き換える。但し、新交点 N における上下の情報は M のものと同一とする。



D が向きづけられているときには、上記の操作の下で、その前後で変化を受けない部分の向きが同一となるように、新たに得られる絡み目図式に向きを入れる。上記の3種類の操作を有限回繰り返して、(向きづけられた)絡み目図式 D から(向きづけられた)絡み目図式 D' が得られるとき、(向きづけられた)2つの絡み目図式 D, D' は平面のイソトピーで移り合うと呼ばれる。

次の結果は古典的である。

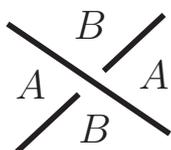
定理 2-1 (Reidemeister)

L, L' を \mathbb{R}^3 内の(向きづけられた)絡み目とし、 D, D' をそれぞれ L, L' の(向きづけられた)絡み目図式とする。このとき、 L と L' が同値であるための必要十分条件は、 D' が D から、Reidemeister 移動 I, II, III と平面のイソトピーを有限回施すことによって得られることである。

● **2-3 : ブラケット多項式の帰公式**

絡み目図式 D に3変数 A, B, d の多項式を対応させることができる。その方法を説明しよう [11,12]。

D の各交点のまわりで、次のように、領域に A または B で局所的に彩色する：交点を中心に D の上弧を反時計回りに回転させて下弧にかさねるとき、その回転の途中で上弧が通過する領域を A で彩色し、残りの領域を B で彩色する。



これを背景として、次の規則によって計算される絡み目図式 D の多項式 $\langle D \rangle$ を考える。

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{C} \rangle + B \langle \text{O} \rangle$$

但し、上式のブラケット $\langle \rangle$ の中身には絡み目図式の「断片」しか描かれていないが、これは描かれた部分だけが異なり、残りの部分は同一であるような3つの絡み目図式間の等式を表わしている。上の関係式を 90° 回転させて眺めると、次の関係式が得られる。

$$\langle \text{X} \rangle = B \langle \text{C} \rangle + A \langle \text{O} \rangle$$

また、絡み目図式 D と単純閉曲線とがある円板の内部と外部によって分離できるとき、それらの和集合 $D \amalg \bigcirc$ について、 $\langle \rangle$ は、

$$\langle D \amalg \bigcirc \rangle = d \langle D \rangle$$

という規則に従うものとする。そして、

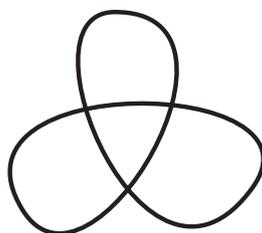
$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

という正規化の仕方を採用する。

上記のルールで、繰り返し計算を続けていくと、最後には A, B, d の整数係数の多項式が得られる。しかし、この方法では、交点の解消の仕方によって、最終的に得られる多項式が異なる可能性が否定できない。そこで、より直接的に、 $\langle D \rangle$ を定義しよう。そのために、絡み目図式のユニバースを考える。

● 2-4：絡み目図式のユニバースとその状態

D を絡み目図式とする。 D のユニバース (*universe*) とは、 D のすべての交点から上下の情報を取り去ったもの、すなわち、平面上に射影したもののことをいう。 D のユニバースは各頂点から4本の辺が伸びたグラフとみなされる。

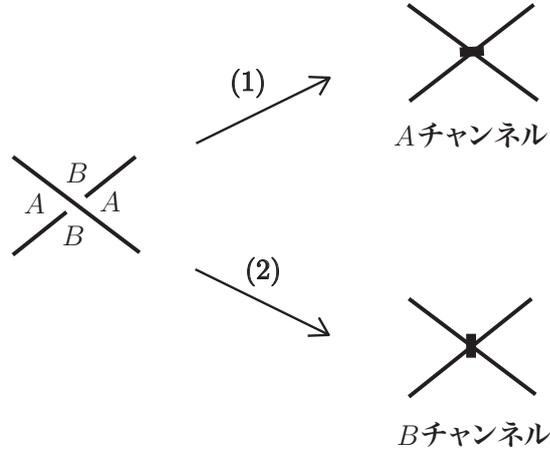


D のユニバースを U とおく。 U の状態 (*state*) とは、 U の各頂点に、平滑化するためのマーカーをおいたもののことをいう。各頂点においては次図の2種類のマーカーの置き方がある。



D の交点の個数を n とおくと、 D のユニバースの状態は全部で 2^n 個ある。

D の各頂点のまわりの領域に、前述のルールに従って、 A か B でラベルづけすることができる。 U の状態 S が1つ与えられたとする。 U の頂点におかれたマーカが A **チャンネル** であるとは、そのマーカと頂点のまわりへのラベルづけの関係が次図 (1) のようになっているときをいう。また、次図 (2) のようになっているときには、その頂点におかれたマーカは B **チャンネル** であるという。



U の状態 S に対して、

$i(S) = A$ チャンネルの個数,

$j(S) = B$ チャンネルの個数

$k(S) =$ 各頂点をマーカに沿って平滑化したときにできる連結成分の個数,

と定め、

$$\langle D \rangle = \sum_{S: \text{state of } U} A^{i(S)} B^{j(S)} d^{k(S)-1}$$

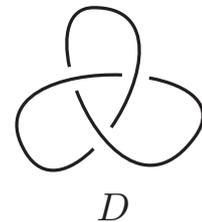
と定義する。この $\langle D \rangle$ が先に与えた帰公式を満たすことは容易に確かめることができる。 $\langle D \rangle$ を絡み目図式 D の (**Kauffman の**) **ブラケット多項式** と呼ぶ。

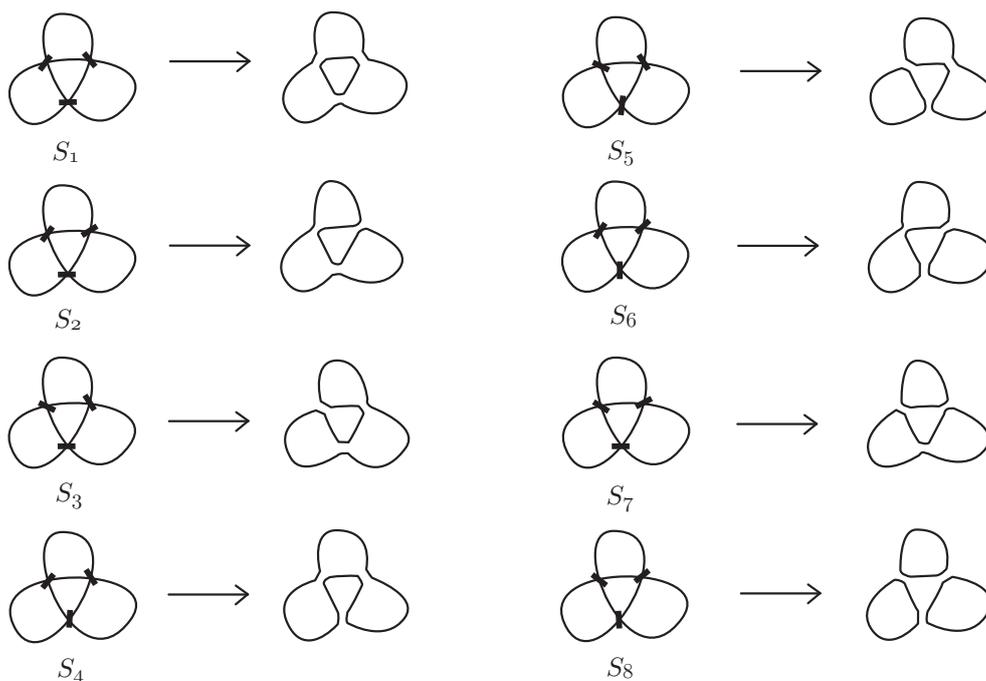
例 2-2 D を右図の結び目図式とする。

このとき、 D のユニバースとして 8 個の状態 S_1, \dots, S_8 が考えられる。

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \sum_{l=1}^8 A^{i(S_l)} B^{j(S_l)} d^{k(S_l)-1} \\ &= A^3 d + A^2 B + A^2 B + A^2 B + AB^2 d + AB^2 d + AB^2 d + B^3 d^2 \\ &= A^3 d + 3A^2 B + 3AB^2 d + B^3 d^2 \end{aligned}$$

となる。





● 2-5 : ブラケット多項式を用いた不変量の構成

(向きづけられた) 絡み目の (アンビエント・イソトピー) 不変量 (invariant) とは、各 (向きづけられた) 絡み目 L に対して、ある集合 S の元 $I(L)$ を対応させる規則 $I : \{(向きづけられた) 絡み目全体\} \rightarrow S$ であって、

$$L \text{ と } L' \text{ が同値} \implies I(L) = I(L')$$

を満たすものをいう。 I が絡み目の不変量であれば、 $I(L) \neq I(L')$ となる2つの絡み目 L と L' は同値になり得ない。したがって、絡み目の不変量は絡み目を区別する道具として使うことができる。

絡み目図式 D に対して3変数のブラケット多項式 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$ が定まるが、その値は Reidemeister 移動の下で変化するので、ブラケット多項式は絡み目の不変量を与えない。これが絡み目の不変量を与えるには、 A, B, d の間にどのような関係が必要であろうか。この問題を考察しよう。

補題 2-3

$$\langle \text{crossing} \rangle = AB \langle \text{no crossing} \rangle + (ABd + A^2 + B^2) \langle \text{cup} \rangle$$

(証明)

$$\begin{aligned} \langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{crossing with loop} \rangle + B \langle \text{crossing with loop} \rangle \\ &= A \{ A \langle \text{cup} \rangle + B \langle \text{cup} \rangle \} + B \{ A \langle \text{no crossing} \rangle + B \langle \text{cup} \rangle \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \langle \text{crossing} \rangle + ABd \langle \text{crossing} \rangle + BA \langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle + B^2 \langle \text{crossing} \rangle \\
&= AB \langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle + (ABd + A^2 + B^2) \langle \text{crossing} \rangle \quad \square
\end{aligned}$$

上の補題から、

$$\begin{aligned}
\langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle \text{ が Reidemeister 移動 II で不変} &\iff \begin{cases} AB = 1, \\ A^2 + B^2 + ABd = 0 \end{cases} \\
&\iff B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}
\end{aligned}$$

となる。

補題 2-4

$B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ のとき、 $\langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle$ は Reidemeister 移動 III で不変である。

(証明)

$$\begin{aligned}
\langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{crossing} \rangle + B \langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle, \\
\langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{crossing} \rangle + B \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle
\end{aligned}$$

ここで、

$$\langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle = \langle \text{parallel} \rangle = \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle$$

より、

$$\langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle$$

を得る。 □

Reidemeister 移動 I の下で、 $\langle \text{cap} \rangle \langle \text{cup} \rangle$ がどのように変化するかを観察しよう。

補題 2-5

$B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\langle \text{cup} \rangle &= (-A^3) \langle \text{cup} \rangle, \\
\langle \text{cup} \rangle &= (-A^3)^{-1} \langle \text{cup} \rangle
\end{aligned}$$

(証明)

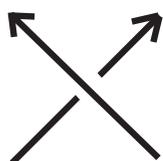
$$\begin{aligned}
 \langle \text{図1} \rangle &= (A \langle \text{図2} \rangle + B \langle \text{図3} \rangle) \\
 &= Ad \langle \text{図4} \rangle + B \langle \text{図5} \rangle \\
 &= (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \langle \text{図6} \rangle \\
 &= (-A^3) \langle \text{図7} \rangle
 \end{aligned}$$

もう1つの等式も同様にして証明される。 □

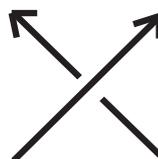
● 2-6 : ライジング数

L を向きづけられた絡み目とし、 D をその図式とする。上で観察したように、 $\langle D \rangle$ は、 $B = A^{-1}$ かつ $d = -A^2 - A^{-2}$ のとき、ほとんど絡み目の不変量になっている。唯一問題なのは Reidemeister 移動 I の下で不変でないことであるが、幸いなことに、Reidemeister 移動 I を行う前と後とは定数倍のずれしか生じない。 $\langle D \rangle$ に D によって決まる適当な定数を掛けて、このずれを解消することができれば、向きづけられた絡み目 L の (アンビエント・イソトピー) 不変量が得られる。ここでは、ライジング数 $wr(D)$ を用いることにより、それが実際に可能であることを示す。

D を向きづけられた絡み目図式とする。 D の交点 p が**正の交点** (positive crossing) であるとは、 p を中心に上弧を反時計回りに回転させて下弧に重ねるとき、弧の向きが同じ向きになるときをいう。そうでないとき、交点 p は**負の交点** (negative crossing) であるという。



負の交点



正の交点

D の各交点 p に、次の規則で符号 $\varepsilon(p)$ を対応させる：

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} +1 & (\text{交点が正のとき}), \\ -1 & (\text{交点が負のとき}). \end{cases}$$

これらの符号の総和を $wr(D)$ とおく：

$$wr(D) = \sum_{p: \text{crossing of } D} \varepsilon(p).$$

$wr(D)$ を D の**ライジング数** (writhe) と呼ぶ。

例 2-6 D を右図のような向きづけられた絡み目図式とすると、 $wr(D) = 3$ である。



$wr(D)$ は Reidemeister 移動 II, III の下で不変である。しかし、Reidemeister 移動 I の下では ± 1 だけ変化することに注意しよう。



● 2-7 : Jones 多項式

L を向きづけられた絡み目とし、 D のその図式とする。 D のブラケット多項式 $\langle D \rangle$ において $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ とおき、

$$f_L(A) := (-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle$$

と定義する。

定理 2-7 (Kauffman [11])

$f_L(A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ は L の図式の選び方によらない。すなわち、 $f_L(A)$ は向きづけられた絡み目 L の不変量である。さらに、変数 t を用意し、

$$V_L(t) = f_L(t^{-\frac{1}{4}})$$

と置き換えると、

$$V_{\bigcirc}(t) = 1$$

であり、 $V_L(t)$ は次の回帰公式を満たす。

$$t^{-1}V_{\text{cross}}(t) - tV_{\text{cross}}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{\text{uncross}}(t).$$

したがって、 $V_L(t)$ は L の Jones 多項式に一致する。

(証明)

まず、 $f_L(A)$ が向きづけられた絡み目の不変量であることを示す。すでに、 $f_L(A)$ が Reidemeister 移動 II と III で不変であることは確かめた。 $f_L(A)$ が Reidemeister 移動 I でも不変であることを示そう。 D' を D から Reidemeister 移動 I を 1 回施して得られる向きづけられた絡み目図式とする。

- 施した Reidemeister 移動 I が負の交点の除去 (あるいは挿入) であった場合：

$wr(D) = wr(D') - 1$ となる。また、補題 2-5 により、 $\langle D \rangle = (-A^3)^{-1} \langle D' \rangle$ となる。したがって、

$$(-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-wr(D')+1} \cdot (-A^3)^{-1} \langle D' \rangle = (-A^3)^{-wr(D')} \langle D' \rangle$$

となる。

- 施した Reidemeister 移動 I が正の交点の除去 (あるいは挿入) であった場合：

$wr(D) = wr(D') + 1$ となる。また、補題 2-5 により、 $\langle D \rangle = (-A^3) \langle D' \rangle$ となる。したがって、

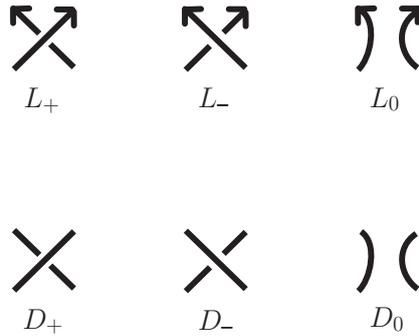
$$(-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-wr(D')-1} \cdot (-A^3) \langle D' \rangle = (-A^3)^{-wr(D')} \langle D' \rangle$$

となる。

以上から、 $f_L(A)$ は Reidemeister 移動 I でも不変である。したがって、 $f_L(A)$ は向きづけられた絡み目の不変量である。

$V_L(t) = f_L(t^{-\frac{1}{4}})$ に対する 2 つの公式の成立を確認する。

- $D = \bigcirc$ のとき、 $\text{wr}(D) = 0$, $\langle D \rangle = 1$ であるから、 $V_{\bigcirc}(t) = 1$ である。
- L_+, L_-, L_0 を一部分だけ下図のように違って、残りの部分は同一であるような \mathbb{R}^3 内の向きづけられた絡み目とする。 D_+, D_-, D_0 をそれぞれ L_+, L_-, L_0 の向きを忘れた絡み目図式とする。



さらに、 D_* を D_+, D_-, D_0 とは描かれた部分だけが異なる絡み目図式とする。



このとき、

$$f_{L_+}(A) = (-A^3)^{-\text{wr}(D_+)} \langle D_+ \rangle = (-A^3)^{-(\text{wr}(D_0)+1)} (A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_* \rangle),$$

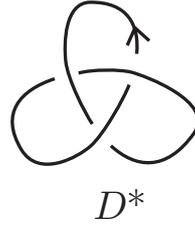
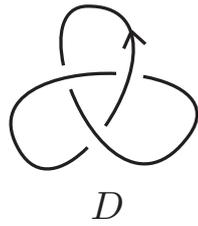
$$f_{L_-}(A) = (-A^3)^{-\text{wr}(D_-)} \langle D_- \rangle = (-A^3)^{-(\text{wr}(D_0)-1)} (A^{-1} \langle D_0 \rangle + A \langle D_* \rangle)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 & A^4 f_{L_+}(A) - A^{-4} f_{L_-}(A) \\
 &= A^4 (-A^3)^{-(\text{wr}(D_0)+1)} (A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_* \rangle) \\
 &\quad - A^{-4} (-A^3)^{-(\text{wr}(D_0)-1)} (A^{-1} \langle D_0 \rangle + A \langle D_* \rangle) \\
 &= (-A^3)^{-\text{wr}(D_0)} ((-A^{4-3+1} + A^{-4+3-1}) \langle D_0 \rangle + (-A^{4-3-1} + A^{-4+3+1}) \langle D_* \rangle) \\
 &= (-A^3)^{-\text{wr}(D_0)} (-A^2 + A^{-2}) \langle D_0 \rangle \\
 &= (-A^2 + A^{-2}) f_{L_0}(A)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A = t^{-\frac{1}{4}}$ を代入すれば、示したかった回帰公式が得られる。 □

例 2-8 三葉結び目 K とその鏡像 K^* の Jones 多項式を計算しよう。 K, K^* はそれぞれ次の図式 D, D^* によって表わされる。



$$\begin{aligned}
 \langle D \rangle &= A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle \\
 &= A (A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) + A^{-1} (A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle) \\
 &= A^2 \langle \text{circle with dot} \rangle + (2 + dA^{-2}) \langle \text{infinity} \rangle \\
 &= A^2 \cdot (-A^3) \langle \text{circle} \rangle + ((2 + dA^{-2}) \cdot (-A^3)^{-1}) \langle \text{circle} \rangle \\
 &= -A^5 + (2 - A^{-4} - 1)(-A^{-3}) \\
 &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$f_K(A) = (-A^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle = (-A^3)^{-3} (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

となる。 $t = A^{-4}$ と置き換えて

$$V_K(t) = t + t^3 - t^4$$

を得る。

D^* のブラケット多項式は D のブラケット多項式における A を A^{-1} に置き換えればよいから、 $\langle D^* \rangle = -A^{-5} - A^{-3} + A^{-7}$ となる。よって、 $f_{K^*}(A) = (-A^3)^3 (-A^{-5} - A^{-3} + A^{-7}) = A^4 + A^{12} - A^{16}$ である。したがってまた、

$$V_{K^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

を得る。以上から、 $V_{K^*}(t) \neq V_K(t)$ であることがわかる。このことは、 K とその鏡像 K^* が \mathbb{R}^3 内において連続変形で移りあえないことを意味する。□

注意： Jones 多項式とよく似た回帰公式を満たす絡み目の不変量に Alexander-Conway 多項式と呼ばれる不変量がある。この多項式は Jones 多項式よりも以前に発見されていた有用な不変量であるが、結び目の鏡像を区別しない。現在では、特に、量子群と呼ばれる代数系を背景に絡み目の不変量が沢山発見されている [33]。

Jones 多項式は様々な結び目や絡み目を区別することのできる有用な不変量であるが、完全ではない。すなわち、同値でない結び目 K_1, K_2 であって、それらの Jones 多項式が一致するものが存在する。しかしながら、次の問題は未だに未解決である。

未解決問題： $V_K(t) = 1$ となる結び目 K は自明な結び目に限るか？

§3. 組み紐とブラケット多項式

この節では、絡み目図式に対するブラケット多項式が組み紐群の Temperley-Lieb 代数への表現のトレースとして得られることを示す。

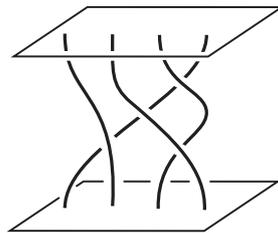
● 3-1 : 組み紐と組み紐群

n 本の紐からなる (幾何学的) 組み紐 (n -strand (geometric) braid) とは、 n 個の閉区間の $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ へ埋め込みの像 \mathbf{b} であって、次の条件を満たすものをいう：

(B1) 第3成分への射影 $\pi : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ により、 \mathbf{b} の各連結成分 (これは紐と呼ばれる) は $[0, 1]$ へ同相に写される。

(B2) $t = 0, 1$ に対して、 $\mathbf{b} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\}) = \{(1, 0, t), (2, 0, t), \dots, (n, 0, t)\}$ であって、その各点において \mathbf{b} は $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ に横断的に交わる。

条件 (B1) により、 \mathbf{b} の各紐は平面 $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ ($t \in [0, 1]$) とちょうど1点で交わる。



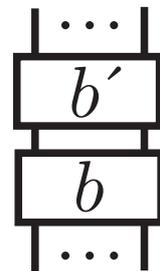
組み紐は、結び目や絡み目の場合と同様に、有限個の線分を繋いでできていると考える。 n 本の紐からなる2つの組み紐 \mathbf{b}, \mathbf{b}' が同値である、あるいは、イソトピックであるとは、有限回の初等変形、および、線分への中点の追加・削除を行って、 \mathbf{b} から \mathbf{b}' へ変形することができることをいう。

n 本の紐からなる組み紐の同値類全体からなる集合を B_n とおく。 B_n 上には次のようにして積を定義することができる： n 本の紐からなる組み紐 \mathbf{b}, \mathbf{b}' に対して、

$$[\mathbf{b}'][\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{l} \mathbf{b} \text{ の上に } \mathbf{b}' \text{ を乗せて高さを} \\ 1/2 \text{ に縮めて得られる組み紐} \end{array} \right].$$

この積に関して B_n は群をなす。この群を n 次組み紐群と呼ぶ。

組み紐群は対称群と密接な関係がある。 \mathbf{b} を n 本の紐からなる組み紐とする。 \mathbf{b} の下端の i 番目の点 $(i, 0, 0)$ から出発して紐の上を進んでいくと、 \mathbf{b} の上端にたどり着く。このたどり着いた点が $(\sigma(i), 0, 1)$ であったとすると、 n 次対称群 \mathfrak{S}_n の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ が得られる。このようにして、各 $\mathbf{b} \in B_n$ に対して $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を対応させる写像 $B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ が得られる。この写像は、簡単に確かめられるように、群準同型である。さらに、全射でもある (n 本の縦線からなるあみだくじを考えよ)。したがって、上の全射準同型の核を K_n とおくと、群としての同型 $B_n/K_n \cong \mathfrak{S}_n$ が得られる。 \mathfrak{S}_n は有限群であるが、 B_n は無限群であることに注意しよう。



● 3-2 : 組み紐図式

絡み目を図式で表わすことができたように、組み紐は組み紐図式を使って表現することができる。

n -組み紐図式 (n -strand braid diagram) とは、 n 個の閉区間の $\mathbb{R} \times [0, 1]$ へのはめ込みの像 D であって、以下の4条件が満たされるものをいう：

- (BD1) 第2成分への射影 $\pi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ により、 D の各紐 (= はめ込まれた n 個の閉区間のうちの1つ) は $[0, 1]$ へ同相に写される。
- (BD2) $t = 0, 1$ に対して、 $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{t\}) = \{(1, t), \dots, (n, t)\}$ であって、その各点において D は $\mathbb{R} \times \{t\}$ に横断的に交わる。
- (BD3) 任意2つの紐は高々有限個の交点を持ち、各交点では横断的に交わる。また、3つ以上の紐が1点で交わることはない。
- (BD4) 2つの紐の各交点には、どちらの紐が「上」を通り、どちらの紐が「下」を通るかという「上下」の情報が付与されている。

組み紐図式も折れ線の和集合として扱う。

n 本の紐からなる組み紐図式 D に対して次の操作を行うと新たに n 本の紐からなる組み紐図式が得られる。

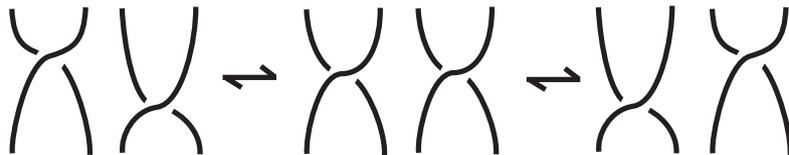
- (i) $\mathbb{R} \times (0, 1)$ に含まれる三角形 $\triangle ABC$ による初等変形。但し、 AB が D の一部分になっているときには、 C の第2座標は A の第2座標と B の第2座標の間に位置するものとする。
- (ii) 辺に中間点を追加または削除する。
- (iii) $\mathbb{R} \times (0, 1)$ に含まれる三角形 $\triangle ABC$ が $(\triangle ABC) \cap D = AB \cup MN$ (但し、 M は線分 AB 上にあり、 N は $BC \cup AC$ 上にあり、 A, B, C ではない) を満たすとき、 D の中の辺 AB を $AC \cup BC$ で置き換える。但し、 C の第2座標は A の第2座標と B の第2座標の間に位置するものとし、新交点 N における上下の情報は M のものと同一とする。

上記の3種類の操作を有限回繰り返して、組み紐図式 D から組み紐図式 D' が得られるとき、2つの組み紐図式 D, D' は**イソトピック**であると呼ばれる。これは、組み紐図式の条件を保ったまま、 D を連続変形して D' にすることができるという条件に他ならない。

n 本の紐からなる組み紐図式同値類全体からなる集合を BD_n とおく。 BD_n 上には組み紐の積と同様の方法で積を定義することができる：

$$[D'] [D] = [D \text{ の上に } D' \text{ を乗せて高さを } 1/2 \text{ に縮めて得られる組み紐図式}] .$$

例えば、次の組み紐図式は同値である (実は、組み紐図式同値な変形としては、このようなタイプのものしかない)。

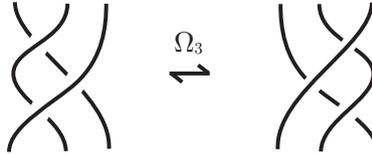


組み紐図式に対する次の2種類の変形を考えよう。

- Reidemeister 移動 II : Ω_{21}, Ω_{22}



- Reidemeister 移動 III : Ω_3



Reidemeister 移動 II を施す前と後の組み紐図式は同値ではないので、 \mathcal{BD}_n は群にはならない (逆元の存在が言えない)。しかし、次が成り立つ。

定理 3-1 (Reidemeister)

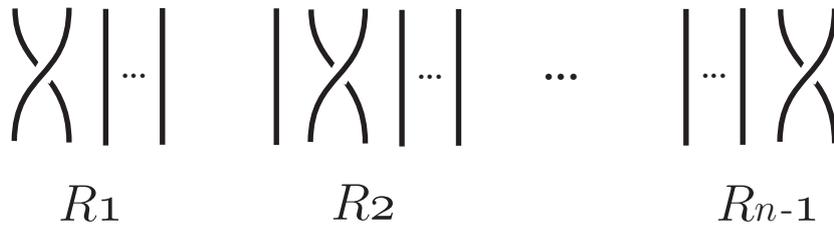
n 次組み紐群 B_n は \mathcal{BD}_n の商集合

$$\mathcal{BD}_n / (\Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_3)$$

と 1 対 1 に対応する。

● **3-3 : 組み紐群の生成元と関係式**

次の図式で表わされる組み紐 R_1, \dots, R_{n-1} を考える。



群 B_n は

$$\sigma_1 = [R_1], \dots, \sigma_{n-1} = [R_{n-1}]$$

によって生成され、次の関係式を持つことがわかる。

(3-3 a) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2),$

(3-3 b) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2)$

(3-3 a) は**組み紐関係式** (*braid relation*) と呼ばれる。

実は、 B_n の任意の関係式は上の 2 つの関係式の帰結である。すなわち、次が成り立つ。

定理 3-2

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2), \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \end{array} \right\rangle$$

定理 3-1, 3-2 の証明は [10] を参照。

● **3-4 : 組み紐群の Temperley-Lieb 代数への表現**

絡み目図式に対するブラケット多項式の定義の仕方をヒントにして、組み紐図式 D に対して Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ の元 $\rho(D)$ を次のように定義する。この節では、Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ を、 A を不定元とする Laurant 多項式環 $R = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を係数環にとったものとする。但し、 $d = -A^2 - A^{-2}$ とする。

まず、 n 本の紐からなる組み紐図式の生成元に対して

$$\begin{aligned} \rho \left(\left(\dots \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right| \dots \right) \right) &= A \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \dots + A^{-1} \left| \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right| \dots \\ \rho \left(\left(\dots \left| \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right| \dots \right) \right) &= A^{-1} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \dots + A \left| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right| \dots \end{aligned}$$

と定義する。組み紐群の生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を描かれている図そのものによって組み紐図式とみなすと、上の等式は

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_i) &= A \mathbf{1}_n + A^{-1} U_i, \\ \rho(\sigma_i^{-1}) &= A^{-1} \mathbf{1}_n + A U_i \end{aligned}$$

と書くことができる。より一般に、組み紐図式 D を

$$D = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \quad (\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, k)$$

と表わすとき、

$$\rho(D) = \rho(\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}) \cdots \rho(\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k})$$

によって定義する。右辺は Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ における積であり、この積を展開すれば、 $(TL)_n$ の基底の A -係数の線形結合で表わすことができる。但し、 $d = -A^2 - A^{-2}$ とする。

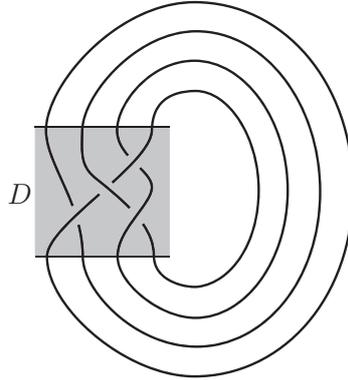
組み紐図式の表現 $\rho : D \mapsto \rho(D)$ は組み紐群の表現 $\rho : \mathbf{b} \mapsto \rho(\mathbf{b})$ を導く。すなわち、 B_n の元 \mathbf{b} を組み紐図式 D で表わすとき、 $\rho(\mathbf{b}) \in (TL)_n$ が $\rho(\mathbf{b}) = \rho(D)$ によって矛盾なく定義される。実際、次が成り立つ。

- $\rho(\sigma_i) \rho(\sigma_i^{-1}) = \mathbf{1}_n = \rho(\sigma_i^{-1}) \rho(\sigma_i)$
- $\rho(\sigma_i) \rho(\sigma_j) = \rho(\sigma_j) \rho(\sigma_i) \quad (|i-j| \geq 2)$
- $\rho(\sigma_i) \rho(\sigma_{i+1}) \rho(\sigma_i) = \rho(\sigma_{i+1}) \rho(\sigma_i) \rho(\sigma_{i+1})$

● **3-5 : 組み紐の閉包と Temperley-Lieb 代数のトレース**

組み紐図式から次のようにして絡み目図式を作ることができる。

n 本の紐からなる組み紐図式 D の上端の n 個の点と下端の n 個の点を次図のように「素直に」接着して、絡み目図式 D^\wedge を作ることができる。



こうして得られる D^\wedge を D の閉包 (closure) という。

同様の操作を組み紐 b に対しても行うことができる。組み紐の場合には、閉包 b^\wedge は絡み目になる。そして、組み紐 b を組み紐図式 D で表わしたとき、絡み目 b^\wedge は絡み目図式 D^\wedge によって表わされる。

閉包の操作を今度は Temperley-Lieb 代数の元に対して行ってみよう。Temperley-Lieb 代数の元を表わす単純 n -図式 D は、 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ へ埋め込まれた有限個の単純曲線であるから、閉包をとると、有限個の単純閉曲線が現れる。これは単純 0-図式ともできる。このとき、 D の閉包 D^\wedge は Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_0$ の元として、

$$D^\wedge = d^{k(D^\wedge)} (= \text{Tr}(D))$$

となる。ここで、 $k(D^\wedge)$ は D^\wedge 中の単純閉曲線の個数を表わす。写像

$$\tilde{\text{Tr}} : (\text{TL})_n \longrightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

を

$$\tilde{\text{Tr}}([D]) = d^{k(D^\wedge)-1}$$

によって定義する。このとき、次が成り立つ。

命題 3-3

任意の組み紐図式 $D \in \text{BD}_n$ に対してその閉包 D^\wedge のブラケット多項式は

$$\langle D^\wedge \rangle = \tilde{\text{Tr}}(\rho(D))$$

によって与えられる。すなわち、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \text{BD}_n & \xrightarrow{\rho} & (\text{TL})_n \\ \wedge \downarrow \text{(閉包をとる)} & & \downarrow \tilde{\text{Tr}} \\ \mathcal{LD} & \xrightarrow{\langle \rangle \text{ ブラケット多項式}} & \mathbb{Z}[A, A^{-1}] \end{array}$$

但し、 \mathcal{LD} は絡み目図式全体からなる集合を表わす。

任意の向きづけられた絡み目 L に対して、向きを込めて $L = \mathbf{b}^\wedge$ となる組み紐 \mathbf{b} が存在する (Alexander)。但し、 \mathbf{b} には下端から上端に向かって向きが与えられているものとする。

系 3-4

向きづけられた絡み目 L に対して、 $L = \mathbf{b}^\wedge$ となる組み紐 \mathbf{b} をとる。このとき、 L の Jones 多項式は

$$V_L(t) = (-t^{\frac{3}{4}})^{\text{wr}(\mathbf{b})} \tilde{\text{Tr}}(\rho(\mathbf{b}))$$

と表わされる。但し、右辺は $A = t^{-\frac{1}{4}}$ において計算したものを表わしており、 $\text{wr}(\mathbf{b})$ は組み紐のライジング数 (= \mathbf{b} に下端から上端に向かって向きを与えたときのライジング数) である。

§4. 平面グラフとその彩色

この節では、地図の4色問題の話題を取り上げる。与えられた「地図」における各国 (= 領域) を、境界線を挟む2つの国は異なった色で塗るというルールの下で、塗り分けるには最低何色あればよいであろうか。5色あれば十分であることは、比較的簡単にわかり、また、3色では塗り分けることのできない地図があることもわかる。では、どんな地図も4色で塗り分けることができるのだろうか？この問題を(地図の)4色問題という。4色問題の歴史的事実は [20, 24, 31] に詳しい。Kauffman [13], Kauffman と Saleur [15], Kauffman と Thomas [16] により、4色問題はある語の Temperley-Lieb 代数における非零元の存在と同値になることが知られている。残念ながらこの講義においては、彼らの結果をすべて紹介することはできないが、Temperley-Lieb 代数と4色問題との深い関わり的一端を説明したい。

グラフやその彩色の定義など、グラフ理論における用語や結果を説明することから始めよう [20, 32]。

● 4-1 : グラフとは

集合 S ($\neq \emptyset$) の元 a, b の非順序対 (unordered pair) を記号 $\{a, b\}$ で表わす。正確には、非順序対とは直積集合 $S \times S$ 上の次のような同値関係 \sim による商集合の元のことをいう：

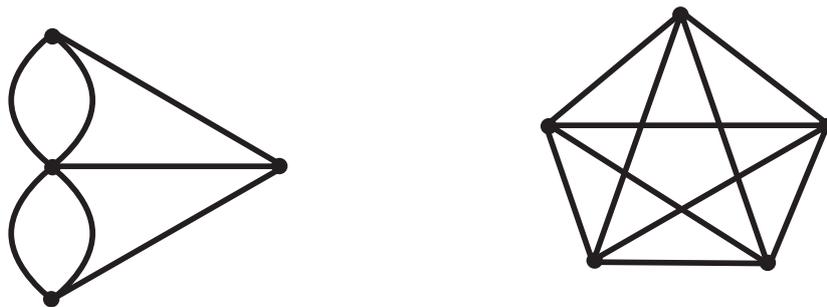
$$(a, b) \sim (a', b') \iff \{a, b\} = \{a', b'\} \text{ as sets.}$$

S の元の非順序対全体からなる集合を $\text{Uop}(S)$ で表わすことにする。

定義 4-1

空でない有限集合 V と (空でもよい) 有限集合 E および写像 $\Phi : E \rightarrow \text{Uop}(V)$ との組 (V, E, Φ) を **グラフ** (graph) という。 V, E をそれぞれそのグラフの **頂点集合**, **辺集合** といい、 V, E の元をそれぞれ **頂点** (vertex)、**辺** (edge) という。 $e \in E$ に対して、 $\Phi(e) = \{u, v\}$ となる $u, v \in V$ を辺 e の **端点** という。

グラフ $G = (V, E, \Phi)$ において、 $\Phi(e) = \{v, v\}$ となる辺 $e \in E$ を **ループ** (loop) という。また、 $\Phi(e_1) = \Phi(e_2)$ となる $e_1, e_2 \in E$ が存在するとき、 G は **多重辺を持つ** (with multiple edges) と呼ばれる。ループと多重辺を持たないグラフを **単純グラフ** (simple graph) と呼ぶ。



グラフの中には、頂点だけで辺がないものも考える。 n 個の頂点からなる、辺がないグラフを **空 n -グラフ** (empty n -graph) という。

グラフ $G = (V, E, \Phi)$ の2つの頂点 u, v が隣接している (*adjacent*) とは、 u, v を結ぶ辺が存在する、すなわち、 $\Phi(e) = \{u, v\}$ となる $e \in E$ が存在するときをいう。 e がループのとき、その端点 v, v は隣接している。

グラフ G の頂点と辺が交互に並ぶ有限列

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$$

であって、 $\Phi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ ($i = 1, \dots, k$) を満たすものを v_0 を始点とし、 v_k を終点とする歩道 (*walk*) と呼ぶ。グラフ G が連結 (*connected*) であるとは、任意の頂点 u, v に対して、 u を始点とし、 v を終点とする歩道が存在するときをいう。

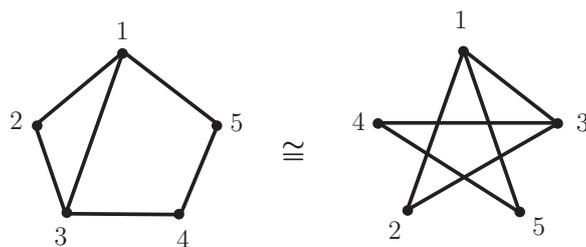
$G = (V, E, \Phi)$ をグラフとする。 G の頂点 $v \in V$ の次数 (*degree*) とは、 v から伸びている辺の個数のことをいう。但し、辺がループの場合には、 v から伸びている辺の個数を2と数える。 v の次数を $\deg(v)$ で表わす。

● 4-2 : グラフの同型

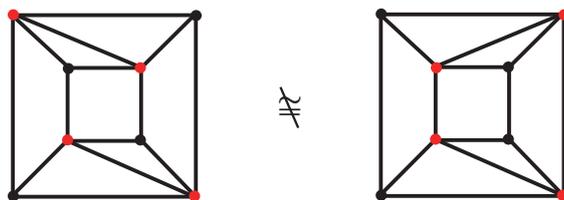
2つのグラフ $G = (V, E, \Phi)$, $G' = (V', E', \Phi')$ が同型であるとは、隣接関係を保つ全単射 $\sigma : (V, E) \rightarrow (V', E')$ が存在するときをいう。ここで、 σ が隣接関係を保つとは、任意の $e \in E$, $u, v \in V$ に対して

$$\Phi(e) = \{u, v\} \iff \Phi'(\sigma(e)) = \{\sigma(u), \sigma(v)\}$$

が成り立つときをいう。このような σ のことをグラフ G, G' の間の同型射といい、 $\sigma : G \rightarrow G'$ で表わす。



同型なグラフ



同型でないグラフ

右側のグラフでは、次数4の頂点は2つの次数4の頂点に隣接しているが、左側のグラフではそうになっていない。したがって、上図の2つのグラフは同型ではない。

● 4-3 : 平面グラフ

平面 P の部分集合の組 $e = (|e|, \dot{e})$ が P 上の**単純弧** (*simple arc*) であるとは、 $|e| = f([0, 1])$ となる連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow P$ であって、 $(0, 1)$ 上単射で、かつ、 $\dot{e} = \{f(0), f(1)\}$ となるものが存在するときをいう。

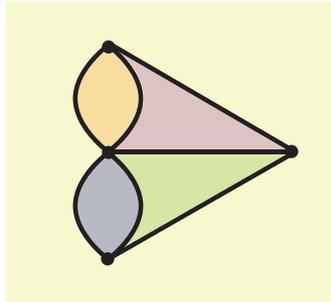
K が平面 P 上の**平面グラフ** (*plane graph*) であるとは、 P 中の有限個の点の集合 V と P 上の有限個の単純弧の集合 E との組 (V, E) であって、

- (i) 任意の $e \in E$ に対して $\dot{e} \subset V$,
- (ii) 相異なる $e_1, e_2 \in E$ が共通部分を持つならば、 $|e_1| \cap |e_2| = \dot{e}_1 \cap \dot{e}_2$

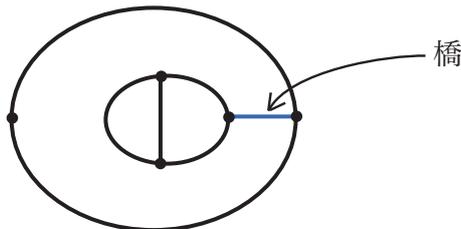
を満たすものをいう。 E の各元 e を平面グラフ K の**辺**と呼び、 \dot{e} をその**端点**と呼ぶ。平面グラフは $\Phi : E \rightarrow \text{Uop}(V)$ を $\Phi(e) = \dot{e}$ と定めることにより、グラフとみなすことができる。平面グラフ $K = (V, E)$ に対して

$$|K| = V \cup \bigcup_{e \in E} |e| \subset P$$

とおくと、 $|K|$ はそれを境界線として平面 P をいくつかの**領域**に分ける。分けられたその各々の領域を K の**領域** (*region*) という。 K の領域の中には、唯一有界でない領域が存在する。これを**無限領域** (*infinite region*) と呼ぶ。



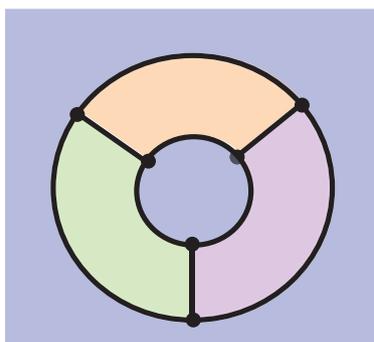
K が平面グラフのとき、その辺 e が**橋** (*bridge*) であるとは、 $(|K| - |e|) \cup \dot{e}$ が連結でないときをいう。これは、 $K = (V, E)$ から辺 e を取り除いて得られるグラフ $K \setminus e = (V, E - \{e\})$ において e の端点 u, v が歩道で結ばれないことと同値である。



● 4-4：平面グラフの面彩色

平面グラフ K の2つの領域 R, R' が隣接しているとは、 R と R' に挟まれている K の辺が存在するときをいう。 K が橋 e を持つとき、境界線上に e を含む領域 R は自分自身と隣接する。

平面グラフ K が k -面彩色可能 (k -face-colorable) であるとは、隣接している2つの K の領域が同じ色にならないように、 k 色で彩色することができることをいう。また、 K の各領域へのこのような色の割り当てを k -面彩色 (k -face-coloring) と呼ぶ。より正確には、写像 $c: \{K \text{ の領域全体} \} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ であって、隣接する2つの領域 R, R' に対して $c(R) \neq c(R')$ となるものを K の k -面彩色と呼ぶ。 K が橋を持つとき、ある領域 R について、 R, R が隣接するから、 K には k -面彩色が存在しない。したがって、 K は k -面彩色可能ではない。



上図のように、面の塗り分けのために4色全部必要な平面グラフがある。実は、4色あれば充分であるというのが有名な4色定理である。すなわち、

定理 4-2 (4色定理)

橋のない任意の平面グラフは4面彩色可能である。

4色定理の証明は1977年に Appel と Haken によって与えられた。しかし、その証明は、膨大なグラフのリストを作り、かなりハードにコンピュータを用いるものであった [2]。そのため、その正しさを「手」で確認できる別証明が与えられることが望まれる。この節の後半では、Kauffman と Saleur によって指摘された、Temperley-Lieb 代数と4色定理との関わりを解説する [13, 15]。

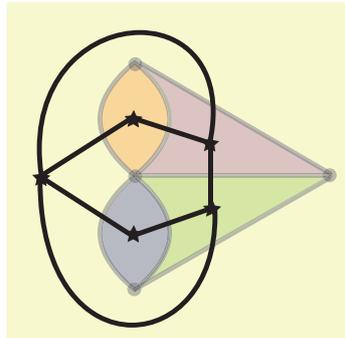
● 4-5：平面グラフの双対グラフ

平面グラフ $K = (V, E)$ から、**双対グラフ** (*dual graph*) と呼ばれる平面グラフ $K^* = (V^*, E^*)$ を次のステップで構成することができる。

まず、 K の各領域 R から内点 \hat{R} を1点選ぶ。

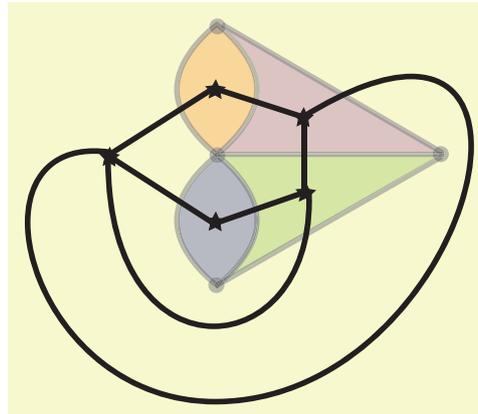
次に、 K の領域 R_1 と R_2 ($R_1 = R_2$ でも可) が辺 e で隣接しているとき、2点 \hat{R}_1 と \hat{R}_2 を、 e と一点で横断的に交わるように、単純弧 \hat{e} で結ぶ。

このとき、 $V^* = \{\hat{R} \mid R \text{ は } K \text{ の領域}\}$ 、 $E^* = \{\hat{e} \mid e \in E\}$ と定める。



K^*

平面グラフ K における頂点、辺、領域が双対グラフ K^* における領域、辺、頂点と 1 対 1 に対応している。



実は、 K に対して K^* は一意的ではない (上図参照)。双対グラフが一意的に定まるようにするためには、平面グラフを球面 S^2 上のグラフとして考えるとよい。平面グラフを S^2 上のグラフと考えると、すべての領域は有限領域となり、領域の 1 つだけを無限領域として特別扱いする必要もなくなる。そこで、以下、 S^2 上のグラフとして同型な平面グラフ、すなわち、平面グラフの頂点集合、辺集合、領域の集合の間の全単射を誘導するような同相写像 $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ が存在する平面グラフは同じ平面グラフとみなす。この約束の下で、双対グラフ K^* の双対グラフ K^{**} は平面グラフとして K に同型となる。

補題 4-3

K を平面グラフ、 K^* をその双対グラフとする。このとき、

$$e \text{ が } K \text{ の橋 (resp. ループ)} \iff \hat{e} \text{ が } K^* \text{ のループ (resp. 橋)}$$

(証明)

e が K の橋ならば、 e の左側と右側の領域 R, R' は同じ領域である。

\therefore)

もし、 R と R' が異なっていれば、少なくとも一方は有界領域である。 R を有界領域とする。また、 $e = e_1$ とし、その端点を u_0, u_1 とおく。 R を1周する K 内の歩道を

$$u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, e_l, u_l = u_0$$

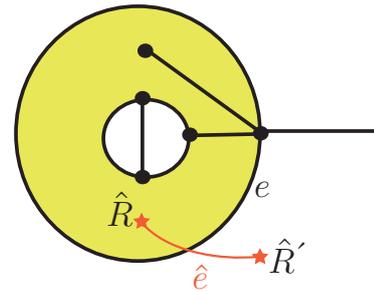
とする。このとき、

$$u_0, e_l, u_{l-1}, e_{l-1}, \dots, e_2, u_1$$

は u_0 から u_1 への $K \setminus e$ における歩道である。このことは e が K の橋であることに反する。□

このとき、 \hat{e} はループになる。

今度は e が K のループであるとする。このとき、 \hat{e} は K^* の橋になる。これを示す。ループ e の内部にあって、 e を境界の一部に含む K の領域を R とおき、 e の外部にあって、 e を境界の一部に含む K の領域を R' とおく。 \hat{R}, \hat{R}' は \hat{e} の端点である。 \hat{R} と \hat{R}' を結ぶ K^* における任意の歩道 W は途中で必ず \hat{e} を通過しなければならない。なぜならば、 \hat{R} はループ e の内部にあり、 \hat{R}' は e の外部にあるからである。したがって、 K^* から \hat{e} を取り除いて得られる平面グラフ $K^* \setminus \hat{e}$ においては、 \hat{R} と \hat{R}' を歩道で結ぶことはできない。よって、 \hat{e} は K^* の橋である。

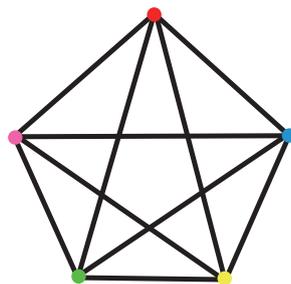


「 \Leftarrow 」については、上の議論で K の代わりに K^* を用いればよい。□

● 4-6 : グラフの (点) 彩色

平面グラフの面彩色を双対グラフで見ると、頂点の彩色に置き換わる。そこで、グラフの点彩色について定義しよう。面彩色は領域を彩色するため平面グラフに対してしか定義することができないが、頂点に彩色するのであれば、任意のグラフに対して定義可能である。このことが点彩色を考える大きな利点である。

グラフ G が k -彩色可能 (k -colorable) であるとは、隣接する2つの頂点が同じ色にならないように、 G の各頂点を k 色で彩色することができることをいう。 G の各頂点へのこのような色の割り当てを k -彩色 (k -coloring) と呼ぶ。より正確には、写像 $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ であって、隣接する2つの頂点 v, v' に対して $c(v) \neq c(v')$ となるものを G の k -彩色と呼ぶ。 G がループを持てば、 G の k -彩色は存在しない ($\because v, v$ という形の隣接する頂点が存在する)。したがって、ループを持つグラフは k -彩色可能ではない。



K_5 の彩色

命題 4-4

K を平面グラフとする。このとき、

$$K \text{ が } k\text{-彩色可能} \iff K \text{ の双対グラフ } K^* \text{ が } k\text{-面彩色可能.}$$

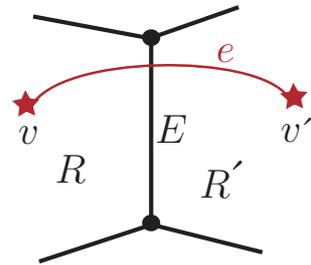
したがって、次の3つは同値である。

- ① ループがない任意の平面グラフは k -彩色可能である。
- ② 橋がない任意の平面グラフは k -面彩色可能である。
- ③ 任意の単純な平面グラフは k -彩色可能である。

(証明)

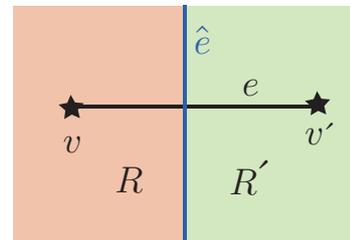
• K が k -(点) 彩色可能であるとし、 $c : V(K) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ をその k -彩色とする。Region(K^*) を K^* の領域全体からなる集合とし、 $\tilde{c} : \text{Region}(K^*) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ を $\tilde{c}(R) = c(v)$ で定義する。但し、 v は R (の内部) に含まれる K の頂点である。 \tilde{c} は K^* の k -面彩色となる。これを示す。

$R, R' \in \text{Region}(K^*)$ を隣接する (相異なる) 領域とする。 $v, v' \in V(K)$ をそれぞれ R, R' に含まれる K の頂点とする。 R と R' は K^* の辺 E を境界線の一部として隣接しているとする。 $E = \hat{e}$ ($e \in E(K)$) とかくことができる。 E と e は横断的に交わるから、その交点付近の様子は右図のようになっている (e は交点から R の内部へ伸びており、また、 R' の内部へ伸びている)。このことから、 e は v と v' を端点に持つことがわかる。すなわち、 v, v' は K の隣接する頂点である。 c は k -彩色であるから、 $c(v) \neq c(v')$ である。よって、 $\tilde{c}(R) = c(v) \neq c(v') = \tilde{c}(R')$ を得る。こうして、 \tilde{c} は K^* の k -面彩色であることがわかった。



• K^* が k -面彩色可能であるとし、 $\lambda : \text{Region}(K^*) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ をその k -面彩色とする。写像 $\tilde{\lambda} : V(K) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ を $\tilde{\lambda}(v) = \lambda(R)$ によって定義する。但し、 R は v を (内部) に含む K^* の面である。

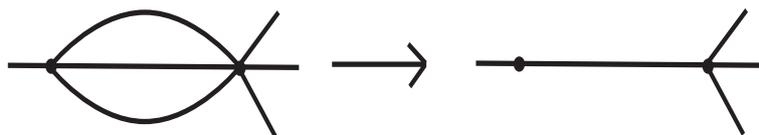
今、 $v, v' \in V(K)$ を隣接する (相異なる) 頂点とし、 e をそれらを端点とする K の辺とする。このとき、 K^* の辺 \hat{e} は v を (内部) に含む K^* の面 R と v' を (内部) に含む K^* の面 R' を分ける境界線上にある。したがって、 R, R' は隣接している。 λ は k -面彩色であるから、 $\lambda(R) \neq \lambda(R')$ である。よって、 $\tilde{\lambda}(v) = \lambda(R) \neq \lambda(R') = \tilde{\lambda}(v')$ を得る。こうして、 $\tilde{\lambda}$ は K の k -彩色であることがわかった。



次に、①, ②, ③ が同値であることを示す。①と②の同値性は前半部分で示したことから従う。

①と③の同値性を示す。「① \implies ③」は明らかに成立する。「③ \implies ①」を示す。

平面グラフ K がループを持たないとき、 k -彩色可能であることを示せばよい。 K が単純であるとすると、仮定により、 k -彩色可能である。 K が単純でないとする、 K は多重辺を含む。そこで、 K において多重辺になっている部分は、1本の辺だけを残して残りの辺を取り去る。



このようにして得られる平面グラフを K' とおくと、 K' は単純な平面グラフである。また、頂点集合について $V(K) = V(K')$ が成立し、 K の任意の相異なる頂点 v, v' に対して

v と v' とが K において隣接する $\iff v$ と v' とが K' において隣接する
 が成り立つ。仮定により、 K' は k -彩色可能であるから、 K もまた k -彩色可能である。 \square

● 4-7 : グラフの彩色多項式

$q \in \mathbb{N}$ とする。グラフ G に対して、その頂点を k 色 (以下) で彩色する方法の総数を $P_G(k)$ で表わすことにする。グラフ G がループを持つとき、 G の k -彩色は存在しないから、 $P_G(k) = 0$ となる。また、 G が空 n -グラフのとき、 $P_G(k) = k^n$ である。



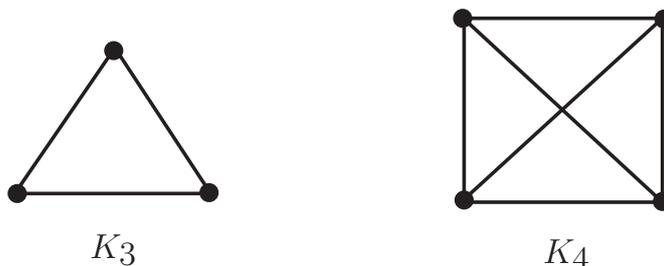
上図のような平面グラフ G_1, G_2 に対しては

$$P_{G_1}(k) = k(k-1), \quad P_{G_2}(k) = k(k-1)^2$$

となる。($\because G_1$ において、左側の頂点への彩色の仕方は k 通りあり、左側の頂点の彩色を 1 つ決めたとき、右側の頂点の彩色の仕方は $k-1$ 通りある。同様に、 G_2 において、真ん中の頂点への彩色の仕方は k 通りあり、真ん中の頂点の彩色を 1 つ決めたとき、両端の頂点への彩色の仕方はそれぞれ $k-1$ 通りある。) 完全グラフ K_3, K_4 に対しては

$$P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2), \quad P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

となる。



注意 : グラフ G と自然数 k に対して、

$$P_G(k) > 0 \iff G \text{ は } k\text{-彩色可能}$$

となる。したがって、4色定理は、「ループのない任意の平面グラフ K に対して $P_K(4) > 0$ となる」ことと同値である。

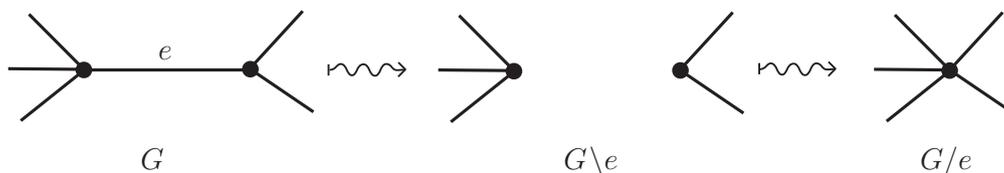
演習 次の各グラフ G に対して $P_G(k)$ を計算せよ。

(1) $G = T_n$ (n 個の点のある木)

(2) $G = K_n$ (n 次完全グラフ)

(答え) $P_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$, $P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$

$G = (V, E, \Phi)$ をグラフとし、 e をその辺とする。このとき、 G から辺 e を取り除き、さらに、 e の端点を同一視しすることにより、新たにグラフを作ることができる。このグラフを G から辺 e を縮約 (contraction) することによって得られるグラフと呼び、 G/e で表わす。



V 上の同値関係 \sim を

$$v \sim u \iff v = u \text{ または } \{v, u\} = \Phi(e)$$

と定め、 $\bar{V} = V/\sim$ とおく。写像 $\bar{\Phi} : E - \{e\} \rightarrow \text{Uop}(\bar{V})$ を

$$\bar{\Phi}(x) = \pi(\Phi(x)) \quad (x \in E - \{e\})$$

によって定義する。但し、 $\pi : V \rightarrow \bar{V}$ は自然な射影である。このとき、 $G/e = (\bar{V}, E - \{e\}, \bar{\Phi})$ である。一方、 G から辺 e を消去することによって得られるグラフを $G \setminus e$ と表わす： $G \setminus e = (V, E - \{e\}, \Phi|_{E - \{e\}})$ 。

e がループならばグラフとして $G/e \cong G \setminus e$ となる。

命題 4-5

$G = (V, E, \Phi)$ をグラフとし、 e をその辺とする。このとき、グラフの k -彩色の総数に関して次の関係式が成り立つ：

$$P_G(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G/e}(k).$$

(証明)

$\Phi(e) = \{u, v\}$ とする。

• $u = v$ のとき e はループである。よって、 $P_G(k) = 0$ となる。また、 e はループなので、グラフとして $G/e \cong G \setminus e$ となるから、 $P_{G \setminus e}(k) = P_{G/e}(k)$ である。よって、命題の等式が成り立つ。

• $u \neq v$ のときを考える。 c を $G \setminus e$ の k -彩色とする。

$c(u) \neq c(v)$ であれば、 c は G の k -彩色を定義するが、 G/e の k -彩色を誘導しない。

$c(u) = c(v)$ であれば、 c は G/e の k -彩色を誘導するが、 G の k -彩色を定義しない。よって、

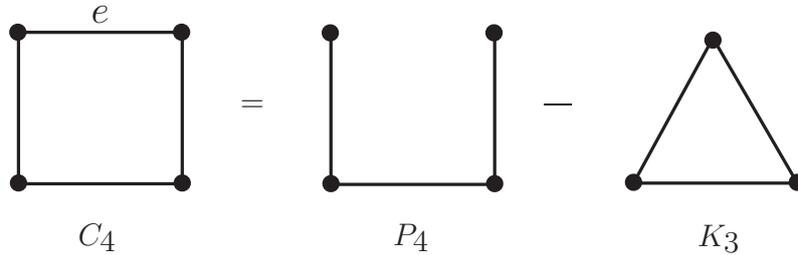
$$\begin{aligned} \{G \setminus e \text{ の } k\text{-彩色全体}\} &= \{G \text{ の } k\text{-彩色全体}\} \cup \{G/e \text{ の } k\text{-彩色全体}\}, \\ \{G \text{ の } k\text{-彩色全体}\} \cap \{G/e \text{ の } k\text{-彩色全体}\} &= \emptyset \end{aligned}$$

となっている。よって、 $P_{G \setminus e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$ である。 □

例 4-6 C_4 を長さ 4 の閉路とする。このとき、

$$P_{C_4}(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$$

である。実際、 e を C_4 の 1 つの辺とすると、



$$\begin{aligned}
 P_{C_4}(k) &= P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
 &= k(k-1)\{(k-1)^2 - (k-2)\} = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k
 \end{aligned}$$

となる。

より一般に、長さ n の閉路 C_n について

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

が成り立つ。

系 4-7

グラフ $G = (V, E, \Phi)$ の k -彩色の総数 $P_G(k)$ は k に関する整数係数の多項式である。もし、 G にループがなければ、 $P_G(k)$ は $n := |V|$ 次のモニックな多項式となる。

(証明)

G にループがある場合には $P_G(k) = 0$ である。以下、ループのないグラフ G に対して、

(4-7 a) $P_G(k)$ が $n := |V|$ 次のモニックな整数係数多項式となる

ことを示す。辺の個数に関する帰納法で証明する。

I. グラフ G の辺の個数が 0 個のとき、 $P_G(k) = k^n$ であり、(4-7 a) は成り立つ。

II. $m > 0$ とし、辺の個数が $m-1$ 個のループのないグラフに対して (4-7 a) が正しいと仮定する。 G を辺の個数が m 個のループのないグラフとする。 e を G の辺とする。 G にはループがないから、 G から e を削除して得られるグラフ $G \setminus e$ にもループがない。しかも、 $G \setminus e$ の辺の個数は $m-1$ である。帰納法の仮定により、 $P_{G \setminus e}(k)$ は n 次のモニックな多項式となる。但し、 n は G の頂点の個数である (G の頂点の個数と $G \setminus e$ の頂点の個数は等しいことに注意)。より正確には、 n 次のモニックな整数係数多項式 $P'(q)$ が存在して、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $P'(k) = P_{G \setminus e}(k)$ となる。

次に、 G から辺 e を縮約して得られるグラフ G/e を考える。 G/e の辺の個数は $m-1$ であるが、 G/e はループを持つかもしれない。

● G/e がループを持つ場合: 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $P_{G/e}(k) = 0$ であるから、 $P_G(k) = P_{G \setminus e}(k)$ となる。したがって、 q を不定元とする多項式 $P(q)$ を $P(q) := P'(q)$ によって定めると、 $P(q)$ は n 次のモニックな整数係数多項式であって、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $P(k) = P'(k) = P_{G \setminus e}(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G/e}(k) = P_G(k)$ となる。

● G/e がループを持たない場合: 帰納法の仮定により、 $P_{G/e}(k)$ は $n-1$ 次のモニックな整数多項式である、すなわち、 $n-1$ 次のモニックな整数係数多項式 $P''(q)$ が存在して、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $P''(k) = P_{G/e}(k)$ となる。このとき、

$$P(q) := P'(q) - P''(q)$$

と定めると、 $P(q)$ は n 次のモニックな整数多項式となり、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$P(k) = P'(k) - P''(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G/e}(k) = P_G(k)$$

となる。これで、帰納法が完成した。 □

系 4-7 により、グラフ G に対して整数係数多項式 $P_G(q) \in \mathbb{Z}[q]$ であって、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $P_G(k)$ が G に対する k -彩色の総数となるものが存在する。(注: このような多項式は G に対して一意的である。なぜならば、一般に n 次の多項式 $f(q), g(q)$ が $n+1$ 個の異なる値 k_1, \dots, k_n, k_{n+1} において $f(k_i) = g(k_i)$ ($i = 1, \dots, n, n+1$) となれば多項式として $f(q) = g(q)$ となるからである。) この多項式 $P_G(q)$ をグラフ G の**彩色多項式** (*chromatic polynomial*) と呼ぶ [20, 32]。

● 4-8: グラフの2色多項式

G をグラフとする。次の3つの式で定義される q, v の多項式 $Z_G(q, v)$ を G の**2色多項式** (*dichromatic polynomial*) と呼ぶ。

(DCP1) 1個の頂点だけからなるグラフの多項式は q である:

$$Z(\bullet) = q$$

(DCP2) グラフ G の辺の端点にならないように、頂点を1個付加えると、値は q 倍される:

$$Z(\bullet \amalg G) = qZ(G)$$

(DCP3) グラフ G に対して1つの辺を選び、その辺をとり除いて得られるグラフ G_1 とその辺を縮約して得られるグラフ G_2 を作る。このとき、

$$Z(G) = Z(G_1) + vZ(G_2)$$

となる。模式的に書けば、

$$Z(\text{---}) = Z(\text{---}) + vZ(\text{---})$$

となる。

例 4-8

$$Z(\text{---}) = Z(\bullet \quad \bullet) + vZ(\bullet) = q^2 + vq$$

$$\begin{aligned} Z(\triangle) &= Z(\text{---}) + vZ(\text{---}) \\ &= Z(\text{---}) + vZ(\text{---}) + v\left(Z(\text{---}) + vZ(\bigcirc)\right) \\ &= qZ(\text{---}) + 2vZ(\text{---}) + v^2(Z(\bullet) + vZ(\bullet)) \\ &= (q + 2v)(q^2 + vq) + v^2(q + vq) \\ &= q^3 + 3vq^2 + 3v^2q + v^3q \end{aligned}$$

2色多項式の公理と命題 4-5 から直ちに次の結果を得る。

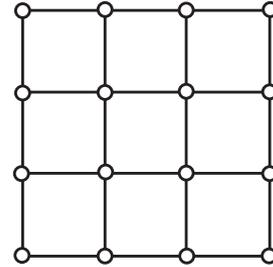
定理 4-9

グラフ G の 2色多項式 $Z_G(q, v)$ において、 $v = -1$ を代入した $Z_G(q, -1)$ はグラフ G の彩色多項式 $P_G(q)$ に一致する。

● 4-9 : ポッツ模型の分配関数

ここでは、ポッツ模型の分配関数を使って、実際にグラフの 2色多項式が構成できることを示す [15, 30]。グラフと言っても様々なタイプのものがあるが、この小節でイメージして欲しいものは頂点が格子状に整然と並んだグラフである。

$G = (V, E, \Phi)$ をグラフとする。 $q \in \mathbb{N}$ とする。グラフの頂点を粒子と考え、各粒子は q 個の異なる状態をとりうるものとする。簡単のため、粒子の取り得る状態を $1, \dots, q$ で表わす。すると、グラフ G における粒子全体の状態は、写像 $c: V \rightarrow \{1, \dots, q\}$ によって表現することができる。このような写像 c を G の q -状態と呼ぶ。



G の q -状態 c が 1 つ与えられたとする。各辺 $e \in E$ に対して、**カップリング** (coupling) と呼ばれる実数 $\varepsilon(e) \geq 0$ が定まっているとし、 $\Phi(e) = \{u, v\}$ のとき、

$$W(e; c) = \begin{cases} \varepsilon(e) & \text{if } c(u) = c(v), \\ 1 & \text{if } c(u) \neq c(v) \end{cases}$$

と定める。 $W(e; c)$ を **ウエイト** と呼ぶ。このとき、

$$Z_G(q, \varepsilon) := \sum_{c: q\text{-状態}} \prod_{e \in E} W(e; c)$$

をカップリング ε を伴うグラフ G 上の q -状態 Potts 模型の分配関数と呼ぶ。

命題 4-10 (Kauffman-Saleur [15])

カップリング ε を伴ったグラフ G 上の q -状態 Potts 模型の分配関数 $Z_G = Z_G(q, \varepsilon)$ は次の関係式を満たす。

- (i) $Z_{\bullet} = q$.
- (ii) $Z_{\bullet \amalg G} = qZ_G$.
- (iii) グラフ G の1つの辺 e_0 を任意にとり、 e_0 をとり除いて得られるグラフ G_1 と e_0 を縮約して得られるグラフ G_2 を作る。このとき、

$$Z_G = Z_{G_1} + (\varepsilon(e_0) - 1)Z_{G_2}$$

となる。但し、 G_1, G_2 の辺に対するカップリングは G のカップリング ε から e_0 に対するカップリングを取り除いて得られるものとする。

上の命題より、 G のカップリング ε が任意の辺 $e \in E$ に対して定数となっているとき、 q -状態 Potts 模型の分配関数 $Z_G(q, \varepsilon)$ は G の $q, \varepsilon - 1$ を変数とする2色多項式に一致する。

(命題 4-10 の証明)

(i) 1点のみからなるグラフ \bullet には辺が存在しないから、 q -状態 c に対して $\prod_{e \in E} W(e; c) = 1$ となる (積記号 \prod の規約に基づく)。よって、 $Z_{\bullet} = \sum_{c: q\text{-状態}} 1 = q$ となる。

(ii) 1点 \bullet がグラフ G から孤立している場合、 $\tilde{G} = \bullet \amalg G$ の辺集合は G の辺集合 E に等しい。また、 \tilde{G} の q -状態全体からなる集合を点 \bullet の状態に応じて q 個のグループに分けて考えると

$$Z_{\bullet \amalg G} = \sum_{i=1}^q \sum_{c: G \text{ の } q\text{-状態}} \prod_{e \in E} W(e; c) = \sum_{i=1}^q Z_G = qZ_G$$

となることがわかる。

(iii) e_0 の端点を u, v とおく。

グラフ G の q -状態全体からなる集合を $\text{State}_q(G)$ とおき、

$$\text{State}_{q,0}(G) = \{ c \in \text{State}_q(G) \mid c(u) = c(v) \},$$

$$\text{State}_{q,1}(G) = \{ c \in \text{State}_q(G) \mid c(u) \neq c(v) \}$$

とおく。このとき、

$$Z_G = \sum_{c \in \text{State}_{q,0}(G)} \prod_{e \in E} W(e; c) + \sum_{c \in \text{State}_{q,1}(G)} \prod_{e \in E} W(e; c)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \text{State}_{q,0}(G)} \prod_{e \in E} W(e; c) &= \sum_{c \in \text{State}_{q,0}(G)} \prod_{e \in E - \{e_0\}} W(e; c) W(e_0; c) \\ &= \sum_{c \in \text{State}_{q,0}(G)} \prod_{e \in E - \{e_0\}} W(e; c) \varepsilon(e_0) \\ &= \varepsilon(e_0) Z_{G_2} \end{aligned}$$

である。一方、任意の $c \in \text{State}_{q,1}(G)$ に対して $c(u) \neq c(v)$ であるから、 $W(e_0, c) = 1$ である。よって、

$$\prod_{e \in E} W(e; c) = \prod_{e \in E - \{e_0\}} W(e; c)$$

と書ける。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \text{State}_{q,1}(G)} \prod_{e \in E} W(e; c) &= \sum_{c \in \text{State}_{q,1}(G)} \prod_{e \in E - \{e_0\}} W(e; c) \\ &= Z_{G_1} - \sum_{c \in \text{State}_{q,0}(G)} \prod_{e \in E - \{e_0\}} W(e; c) \\ &= Z_{G_1} - Z_{G_2} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $Z_G = \varepsilon(e_0)Z_{G_2} + (Z_{G_1} - Z_{G_2}) = Z_{G_1} + (\varepsilon(e_0) - 1)Z_{G_2}$ が証明された。□

● 4-10 : ブラケット多項式と2色多項式

ここでは、再び3変数のブラケット多項式 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$ を考える。2つの変数 q, v を用意して、 A, B, d が $A = q^{-\frac{1}{2}}v$, $B = 1$, $d = q^{\frac{1}{2}}$ の場合を考える。このようにおいたときのブラケット多項式を $[D]$ で表わし、^{かく}角ブラケット多項式 (square bracket polynomial) と呼ぶことにする [30]。但し、

$$[\bigcirc] = q^{\frac{1}{2}}$$

という正規化の仕方を採用する。

ブラケット多項式 $\langle D \rangle$ の再帰的定義により、角ブラケット多項式 $[D] \in \mathbb{Z}[q, v]$ は次の再帰関係式を満足する。

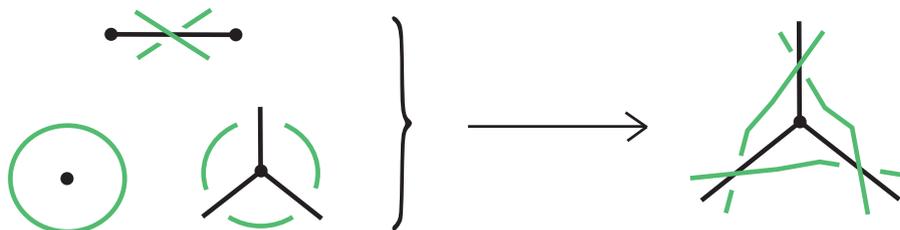
$$\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] = q^{-\frac{1}{2}}v \left[\begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right].$$

また、絡み目図式 D と単純閉曲線とがある円板の内部と外部によって分離できるとき、それらの和集合 $D \amalg \bigcirc$ について、

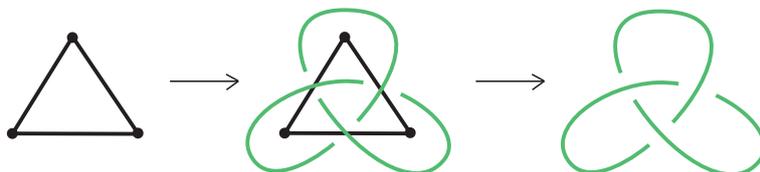
$$[D \amalg \bigcirc] = q^{\frac{1}{2}}[D]$$

である。注意しなければならないことは、角ブラケット多項式 $[D]$ は絡み目の不変量とは言えないため、(平面のイソトピーで移動してもよいが、) Reidemeister 移動を行って計算することはできないということである。与えられた図式のまま、交点を平滑化して行って、計算しなければならない。

この角ブラケット多項式はグラフの2色多項式と密接に関連している。このことを説明するために、平面グラフから交代絡み目図式を作る方法を述べよう [12, 13]。



K を平面グラフとする。その各辺に対して、上図左のように上下の情報のついた交差する2線分を対応させる。ここで、上下の情報は A チャンネル内を K の辺が通過するようにつけるものとする。また、各頂点のまわりに、その点を中心とした円周を描き、もし、その頂点からいくつかの辺が伸びていれば、描いた円周を辺との交点の付近で小さな弧に区切る。これらの弧の端点と、 K の辺に対応して描かれた2線分の端点を各領域内で (交点が生じないように) 折れ線で繋ぎあわせる。こうして得られる絡み目図式を $D(K)$ とおき、**交代内側絡み目図式** (*alternating medial link diagram*) と呼ぶ。

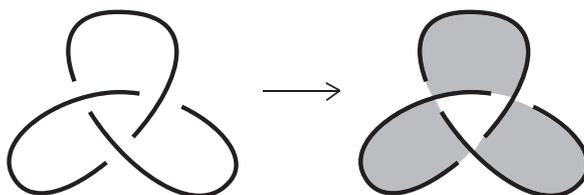


注意: 平面グラフ K の交代内側絡み目図式 $D(K)$ は次の特徴を持つ: 各成分について、その上のある一点から出発して一周して戻ってくるとき、上交点と下交点が交互に現れる。これは、平面グラフ K の1つの頂点 v のまわりを見たとき、それに隣接する各領域 R において、 $D(K)$ の弧が R の外部から内部へ上交点 (resp. 下交点) を通って入れば、 R の外部へ出るときに下交点 (resp. 上交点) を通ることからわかる。

また、絡み目図式 $D(K)$ の各領域に白か黒を塗り、次のルールで彩色しよう。

- (i) 交点において A チャンネルとなる領域を黒で彩色する。
- (ii) 無限領域を白で彩色する。

すると、 $D(K)$ の領域は白と黒の市松模様となる。



定理 4-11 (Kauffman)

K を平面グラフとし、 $D(K)$ をその交代内側絡み目図式とする。 N を K の頂点の個数とすると、 K の2色多項式 $Z_K(q, v)$ は $D(K)$ の角ブラケット多項式 $[D(K)]$ を用いて、次のように計算される:

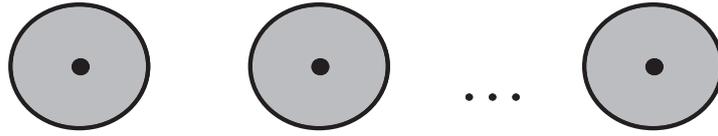
$$Z_K(q, v) = q^{\frac{N}{2}} [D(K)].$$

(証明)

K の辺の個数に関する帰納法で証明する。

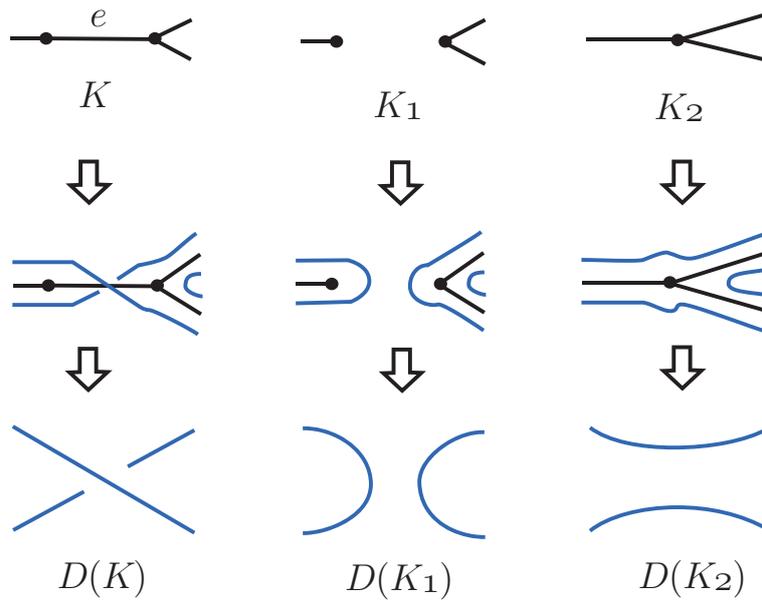
I. K が辺を持たないとき:

$D(K)$ は N 個の成分からなる自明な絡み目である。



したがって、 $[D(K)] = q^{\frac{N}{2}}$ となる。一方、2色多項式の公理 (DCP1), (DCP2) から $Z_K(q, v) = q^N$ である。故に、 $Z_K(q, v) = q^N = q^{\frac{N}{2}} [D(K)]$ である。

II. $m \geq 1$ とし、辺の個数が $m - 1$ 個の平面グラフに対しては定理の等式が成り立つと仮定する。 K を辺の個数が m 個の平面グラフとし、 e をその1つの辺とする。 K_1 を K から辺 e を取り除いて得られる平面グラフとし、 K_2 を K から e を縮約して得られる平面グラフとする。



K_1, K_2 の辺の個数はどちらも $m - 1$ 個であるから、帰納法の仮定により、

$$Z_{K_1}(q, v) = q^{\frac{N}{2}} [D(K_1)], \quad Z_{K_2}(q, v) = q^{\frac{N-1}{2}} [D(K_2)]$$

となる。ここで、 N は K の頂点の個数である。角ブラケット多項式の帰納公式により、

$$[D(K)] = q^{-\frac{1}{2}} v [D(K_2)] + [D(K_1)]$$

となることがわかる。よって、

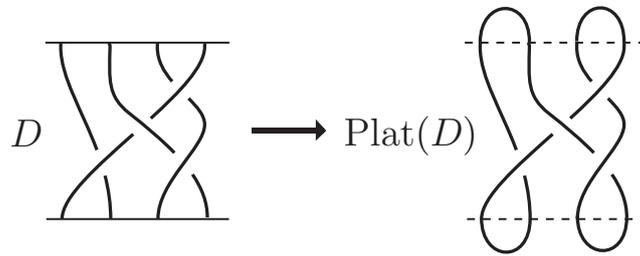
$$\begin{aligned} q^{\frac{N}{2}} [D(K)] &= q^{\frac{N}{2}} (q^{-\frac{1}{2}} v [D(K_2)] + [D(K_1)]) \\ &= q^{\frac{N-1}{2}} v [D(K_2)] + q^{\frac{N}{2}} [D(K_1)] \\ &= v Z_{K_2}(q, v) + Z_{K_1}(q, v) \\ &= Z_K(q, v) \quad (\because \text{DCP3}) \end{aligned}$$

を得る。これで、帰納法が完成し、定理は証明された。 □

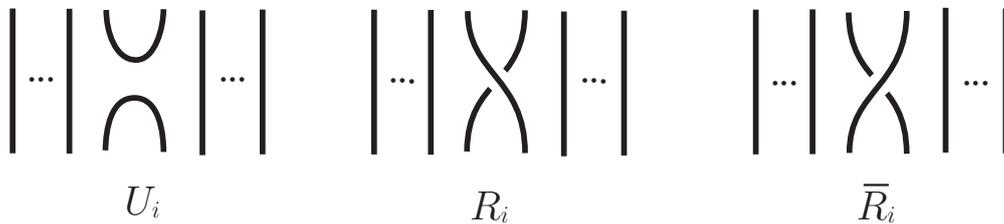
注意： 2色多項式 $Z_K(q, v)$ を計算するために、定理の公式を使うことはできるが、直接計算した方が易しい。

● 4-11 : 絡み目図式のプラット表示

D を上端部分と下端部分にそれぞれ $2m$ 個の端点がある組み紐図式、より一般に、タングル図式とする (定義は下記参照)。このとき、次のようにして、絡み目図式 $\text{Plat}(D)$ を作ることができる。絡み目図式 $\text{Plat}(D)$ を D のプラット閉包 (*plat closure*) と呼ぶ。



任意の絡み目図式は、必要ならば平面のイソトピーで動かして、あるタングル図式のプラット閉包で表わすことができる。

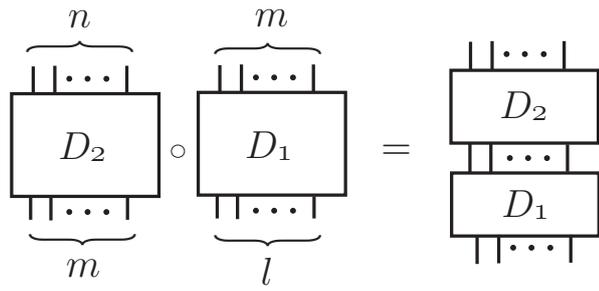


しかも、それは上の基本的ピースを合成して、プラット閉包した形として表わされる。これを説明する。

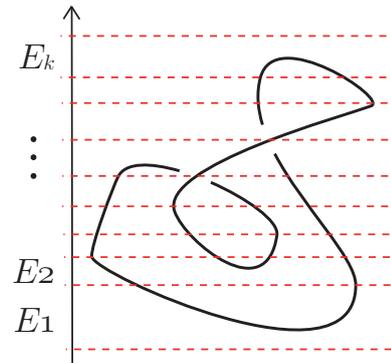
(m, n) -**タングル図式** (*tangle diagram*) とは、有限個の閉区間と有限個の円周の $\mathbb{R} \times [0, 1]$ へのはめ込みの像 D であって、次の条件を満たすものをいう。

- (TD1) D の中の閉区間の端点の像となる点の全体は $\{(1, 0), \dots, (m, 0)\} \cup \{(1, 1), \dots, (n, 1)\}$ に一致する。
- (TD2) D の中で閉区間の像になっている部分は、その端点の像において境界 $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ と横断的に交わる。
- (TD3) D 上には高々有限個の交点があり、各交点では2つの曲線が横断的に交わる (特に、3重点は存在しない)。
- (TD4) D の各交点において、交わる2曲線のどちらが上側を通り、下側を通るのか、という上下の情報が付与されている (図で表示するときには、一方の曲線に切れ目を入れて表現する)。

タングル図式の合成を定義しよう。 D_1 を (l, m) -タングル図式、 D_2 を (m, n) -タングル図式とする。このとき、合成 $D_2 \circ D_1$ を D_1 の上部に D_2 を乗せて、 D_1 の上端点と D_2 の下端点を素直につなげたものとして定義する。

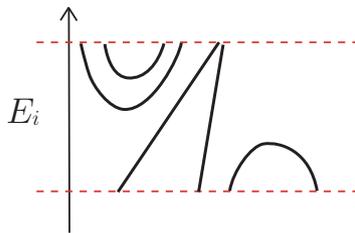


まず、絡み目図式 D は平面のイソトピーで動かして、 $\mathbb{R} \times (0, 1)$ 内にあるようにし、第二成分を高さ関数と考える。この高さ関数に関する極大点と極小点が高々有限個となるように、 D を平面のイソトピーで動かす。さらに、 D の“折り返し点”(= 第 1 成分が増加から減少、または、減少から増加に変化する点) を有限個となるようにし、 D の交点、および、折り返し点はすべて異なる高さにあるようにする。交点または折り返し点を通り、 y 軸に垂直な直線で D を区切る。 l に垂直な隣りあう直線で区切られた領域を下から順に E_1, \dots, E_k と名付ける。



各 E_i 内には互いに交わらない有限個の D の弧が含まれた状態になっている。しかもそれらの弧は次図で与えられる形を細かく折れ線にしたもののいずれかの形をしている。 E_i 内の弧全体を $\text{Arc}(E_i)$ とおくと、 $\text{Arc}(E_i)$ 上に順序 $<$ が次のように入る： $A, B \in \text{Arc}(E_i)$ に対して

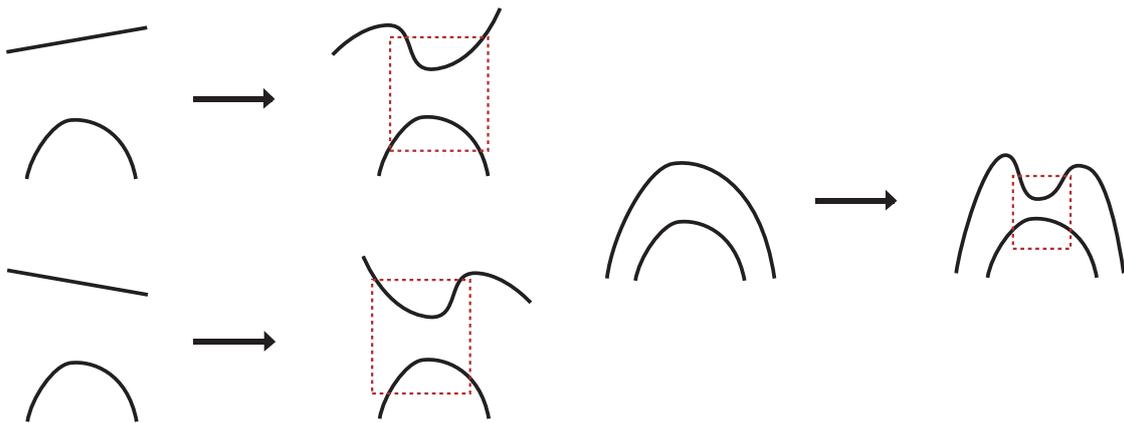
$$A < B \iff \exists (x, y_1) \in A, (x, y_2) \in B \text{ s.t. } y_1 < y_2.$$



さらに、 $i < j$ に対して、 $\text{Arc}(E_i)$ 内の任意の弧 A と $\text{Arc}(E_j)$ 内の任意の弧 B に対して $A < B$ と約束する。このようにすると、 $\bigcup_{i=1}^k \text{Arc}(E_i)$ に順序 $<$ が入る。

さて、 D の弧の中で上の順序に関して極小のものを考える。それを A とおく。 A の中の任意の極大点 p を考える。 p の上方部に D の弧がある場合、 p にもっとも近い弧を B とする。 $A < B$ である。 p の上方部に位置する B 上の点が極小点である場合、 p とその極小点によって、対ができています。そうでない場合には、次図の操作を行い、 A の極大点 p と対になるような B の極小点を 1 つ作る。

この操作をすべての A の極大点に対して行えば、上方部に D の弧があるような A の中の任意の極大点に対して、 $A < B$ であるようなある弧 B の上に、その極大点と対になるような極小点を作ることができる。今行った操作を $<$ に関して小さいものから順番に行っていくと、



最終的に得られる絡み目図式 D' においては、すべての極大点について次のいずれかの状況が起こっている。

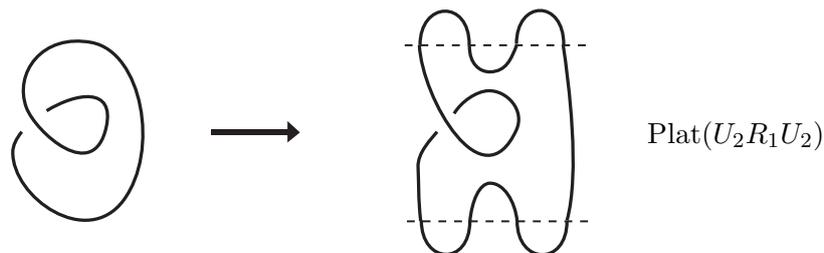
- その極大点の上方部には D' の弧が存在しない。
- その極大点の上方部に、それと対になる D' の極小点が存在する。

D' は D から平面のイソトピーを施すことによって得られており、 D' の「対ができていない」極小点はもともと D にあった極小点からなる。そこで、今度は D' の弧の中で順序 $<$ に関して極大のものをとり、その弧の上の極小点であって、極大点と対ができていないものに対して、先程と同じような変形を行い、極大点を作っていく。これを繰り返していくと、最終的に、得られる絡み目図式 D'' においては、次の状況になっている：

- その極大点の上方部には D'' の弧が存在しない。
- その極小点の下方部には D'' の弧が存在しない。
- 上記以外の極大点と極小点については対になっている。

上記の条件は D'' が基本的ピース U_i, R_i, \bar{R}_i を合成して、プラット閉包した形であることを意味している。

例 4-12



$n \in \mathbb{N}$ とし、

$$\{d, U_1, \dots, U_{n-1}, R_1, \dots, R_{n-1}, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_{n-1}\}$$

をアルファベットとする語全体を \mathcal{W}_n とおく。 \mathcal{W}_n は語の並置によって積を導入することにより、モノイドの構造を持つ。 \mathcal{W}_n 上の次の関係 \sim で生成される同値関係を考える。

$$\begin{aligned} U_i U_{i\pm 1} U_i &\sim U_i, \\ U_i U_j &\sim U_j U_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ R_i U_j &\sim U_j R_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ \bar{R}_i U_j &\sim U_j \bar{R}_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ U_i^2 &\sim d U_i, \\ d U_i &\sim U_i d, \quad d R_i \sim R_i d, \quad d \bar{R}_i \sim \bar{R}_i d \end{aligned}$$

これらの関係式による商モノイドを $\overline{\mathcal{W}}_n$ と表わす。

上で観察したように、任意の絡み目図式 D から、 $\overline{\mathcal{W}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{W}}_{2n}$ の元を作ることができる。この語を $w[D]$ で表わすことにする。

$$\mathcal{LD} = \{ \text{絡み目図式の全体} \}$$

とおくとき、2つの写像

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}} &\longrightarrow \mathcal{LD}, \quad w \longmapsto \text{Plat}(w) = \overbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}^{k \text{ 個}} \amalg \text{Plat}(w') \quad (\text{但し、} w = d^k w', w' \text{ は } d \text{ を含まない語}), \\ \mathcal{LD} &\longrightarrow \overline{\mathcal{W}}, \quad D \longmapsto w[D] \end{aligned}$$

が定まる。これらの写像は次を満たす。

- 任意の $w \in \overline{\mathcal{W}}$ に対して $w[\text{Plat}(w)] = w$.
- 任意の $D \in \mathcal{LD}$ に対して $\text{Plat}(w[D])$ は D に平面のイソトピーで移る。

● 4-12 : 4色問題と Temperley-Lieb 代数

$d = 2$ の場合に Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n$ を考える (角ブラケット多項式において、 $q = 4$, $v = -1$ のときに相当する)。このとき、準同型 $\rho : \mathcal{W}_n \longrightarrow (\text{TL})_n$ が次のように定義される。

$$\rho(U_i) = U_i, \quad \rho(R_i) = -\frac{1}{2} \mathbf{1}_n + U_i, \quad \rho(\bar{R}_i) = \mathbf{1}_n - \frac{1}{2} U_i, \quad \rho(d) = 2.$$

∴)

$$\begin{aligned} \rho(U_i) \rho(U_{i\pm 1}) \rho(U_i) &= \rho(U_i), \\ \rho(U_i) \rho(U_j) &= \rho(U_j) \rho(U_i) \quad (|i-j| \geq 2), \\ \rho(R_i) \rho(U_j) &= \rho(U_j) \rho(R_i) \quad (|i-j| \geq 2), \\ \rho(\bar{R}_i) \rho(U_j) &= \rho(U_j) \rho(\bar{R}_i) \quad (|i-j| \geq 2), \\ \rho(U_i) \rho(U_i) &= \rho(d) \rho(U_i), \\ \rho(d) \rho(U_i) &= \rho(U_i) \rho(d), \quad \rho(d) \rho(R_i) = \rho(R_i) \rho(d), \quad \rho(d) \rho(\bar{R}_i) = \rho(\bar{R}_i) \rho(d) \end{aligned}$$

を満たしていることが簡単に確かめられる。 □

準同型 $\rho: \mathcal{W}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ は準同型 $\rho: \overline{\mathcal{W}}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ を導くことに注意する。

補題 4-13

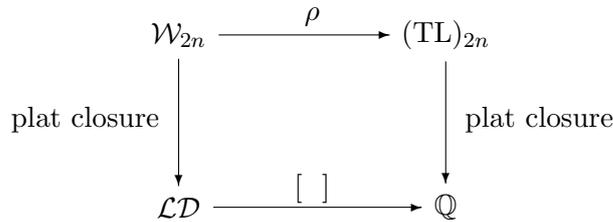
K を平面グラフとし、 N をその頂点の個数とする。このとき、

$$P_K(4) = 2^N \text{Plat}(\rho(w[D(K)]))$$

が成り立つ。ここで、 $P_K(q)$ はグラフ K の彩色多項式である。

(証明)

$P_K(4) = Z_K(4, -1)$ であり、 $[\]$ を $q = 4, v = -1$ のときの角ブラケット多項式とすると、 $Z_K(4, -1) = 4^{\frac{N}{2}} [D(K)] = 2^N [D(K)]$ が成り立つ。よって、 $\text{Plat}(\rho(w[D(K)])) = [D(K)]$ を示せばよい。つまり、任意の絡み目図式 D に対して $\text{Plat}(\rho(w[D])) = [D]$ を示せばよい。これを示す。次の図式は可換である。



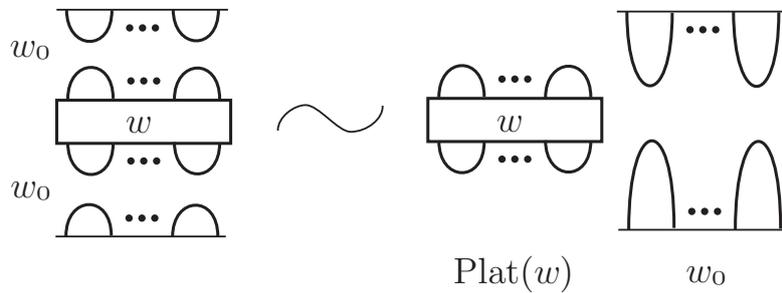
∴)

$w_0 := U_1 U_3 \cdots U_{2n-1}$ とおく。

$w \in \mathcal{W}_{2n}$ とする。このとき、

$$w_0 w w_0 \sim \text{Plat}(w) \otimes w_0$$

が成り立つ。ここで、右辺の \otimes は $\text{Plat}(w)$ と w_0 との並置を表わす (次図参照)。



このとき、 $(\text{TL})_{2n}$ の元として

$$\rho(w_0) \rho(w) \rho(w_0) = \rho(\text{Plat}(w)) \otimes \rho(w_0)$$

となる。ここで、 $\rho(\text{Plat}(w))$ は“分解規則”

$$\rho(R_i) = -\frac{1}{2} \mathbf{1}_{2n} + U_i,$$

$$\rho(\bar{R}_i) = \mathbf{1}_{2n} - \frac{1}{2} U_i$$

と

$$\rho(d^k w') = 2^k \rho(w') \quad (w' \text{ は } d \text{ を含まない語})$$

に従って計算していくと、スカラーになることに注意する。このスカラーは、上の計算規則から、 $\text{Plat}(w)$ の角ブラケット多項式において $q = 4$, $v = -1$ を代入したもの $[\text{Plat}(w)]$ に一致する。したがって、 $(\text{TL})_{2n}$ の元として

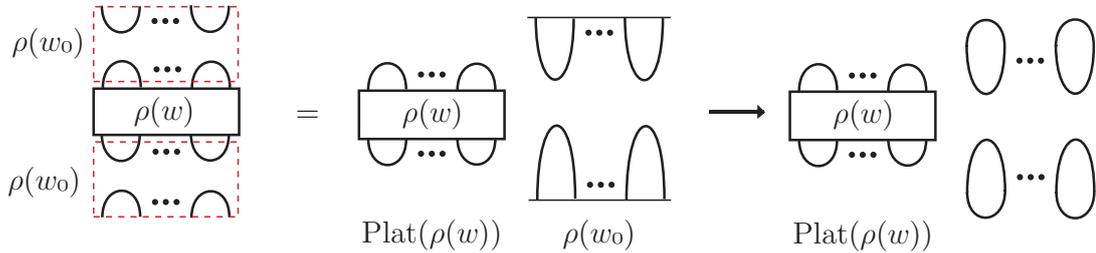
$$\rho(w_0)\rho(w)\rho(w_0) = [\text{Plat}(w)]\rho(w_0)$$

が成り立つ。この両辺のプラット閉包をとると、

$$\text{Plat}(\text{右辺}) = [\text{Plat}(w)]\text{Plat}(\rho(w_0)) = [\text{Plat}(w)]\text{Plat}(U_1 \cdots U_{2n-1}) = [\text{Plat}(w)]2^n,$$

$$\text{Plat}(\text{左辺}) = \text{Plat}(\rho(w_0)\rho(w)\rho(w_0)) \stackrel{(*)}{=} \text{Plat}(\rho(w))2^n$$

となる。ここで、(*) は次の図からわかる：



故に、 $\text{Plat}(\rho(w)) = [\text{Plat}(w)]$ を得る。 □

よって、任意の $D \in \mathcal{LD}$ に対して

$$\text{Plat}(\rho(w[D])) = [\text{Plat}(w[D])] = [D]$$

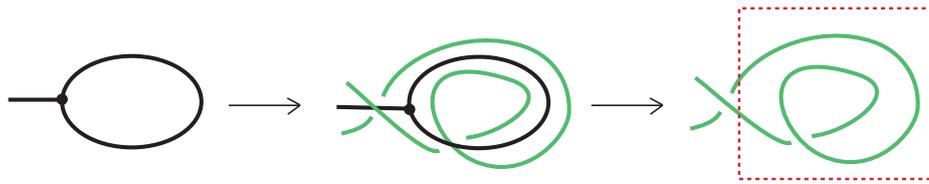
となる。ここで、最後の等号は $\text{Plat}(w[D])$ が D と平面のイソトピーで移り合うことと、角ブラケット多項式が平面のイソトピーの不変量であることによる。 □

上の補題から、平面グラフ K に対して、次の言い換えが得られる。

$$\begin{aligned} K \text{ は 4-彩色可能} &\iff P_K(4) > 0 \\ &\iff P_K(4) \neq 0 \\ &\iff \text{Plat}(\rho(w[D(K)])) \neq 0 \end{aligned}$$

このことから、Temperley-Lieb 代数を通して 4 色問題を解決するには、 $w \in \mathcal{W}_{2n}$ が与えられたとき、 w がループを持たないある平面グラフ K によって $w \sim w[D(K)]$ となるための条件を求めることが重要であることがわかる。

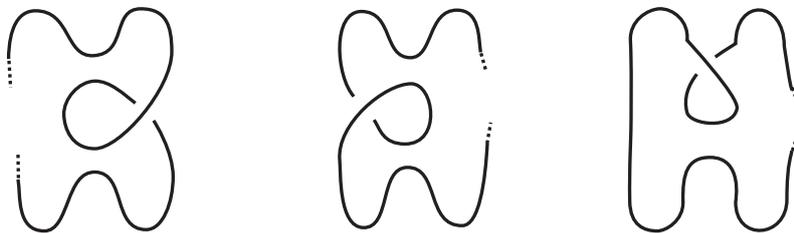
K を平面グラフとする。 K がループを持ったとすると、 K から得られる絡み目図式 $D(K)$ のループ付近の様子は、次図のようになる。



ここで、赤い破線で囲まれた部分 (グラフのループに由来する部分) に着目する。この赤線部分をプラット閉包の形で表わすと、次のようになることがわかる。



これはまた、次のように表わされる。



このように、平面グラフ K がループを持ったとすると、 K から得られる絡み目図式 $D(K)$ を \mathcal{W}_{2n} に属する語の閉包で表わしたとき、その語の途中に

$$\bar{R}_i U_i, \quad U_i \bar{R}_i, \quad U_i R_{i+1} U_i, \quad U_i R_{i-1} U_i \quad (i \text{ は偶数})$$

の形が必ず含まれることがわかる。逆に、平面グラフ K から得られる絡み目図式 $D(K)$ を \mathcal{W}_{2n} に属する語の閉包で表わしたとき、その語の途中に上記のいずれかが含まれているとすると、平面グラフはループを持つ。したがって、平面グラフ K に対して次の2つは同値である。

- (i) K はループを持つ。
- (ii) 絡み目図式 $D(K)$ を \mathcal{W}_{2n} に属する語の閉包で表わしたとき、その語の途中に

$$\bar{R}_i U_i, \quad U_i \bar{R}_i, \quad U_i R_{i+1} U_i, \quad U_i R_{i-1} U_i \quad (i \text{ は偶数})$$

の形が含まれる。

\mathcal{W}_{2n} に属する語 w が**ループフリー** (loop-free) であるとは、 w が

$$\bar{R}_i U_i, \quad U_i \bar{R}_i, \quad U_i R_{i+1} U_i, \quad U_i R_{i-1} U_i \quad (i \text{ は偶数})$$

の形を含む語 w' に同値にならないときをいう。

平面グラフ K に対して

K がループを持たない \iff 絡み目図式 $D(K)$ から定まる語 $w[D(K)]$ がループフリーが成立する。

偶数 i に対して

$$\rho(\bar{R}_i)\rho(U_i) = \left(\mathbf{1}_n - \frac{1}{2}U_i\right)U_i = U_i - \frac{1}{2}U_i^2 = U_i - U_i = 0,$$

$$\rho(U_i)\rho(\bar{R}_i) = U_i\left(\mathbf{1}_n - \frac{1}{2}U_i\right) = U_i - \frac{1}{2}U_i^2 = U_i - U_i = 0,$$

$$\rho(U_i)\rho(R_{i\pm 1})\rho(U_i) = U_i\left(-\frac{1}{2}\mathbf{1}_n + U_{i\pm 1}\right)U_i = -\frac{1}{2}U_i^2 + U_iU_{i\pm 1}U_i = -U_i + U_i = 0$$

となる。したがって、 $w \in \mathcal{W}_{2n}$ がループフリーでないならば、 $\rho(w) = 0$ になる。よって、 $w \in \mathcal{W}_{2n}$ に対して

$$\rho(w) \neq 0 \implies w \text{ はループフリー}$$

が成立する。

以上で得られた結果をまとめると、平面グラフ K に対して、次の言い換え図式が得られる。

$$K \text{ はループを持たない} \iff w[D(K)] \text{ はループフリー}$$

$$\iff \rho(w[D(K)]) \neq 0,$$

$$K \text{ は 4-彩色可能} \iff \text{Plat}(\rho(w[D(K)])) \neq 0$$

$w \in \mathcal{W}_{2n}$ に対して、

$$\text{Plat}(\rho(w)) \neq 0 \implies \rho(w) \neq 0$$

は正しい ($\because \rho(w_0)\rho(w)\rho(w_0) = \text{Plat}(\rho(w))\rho(w_0)$ および $P(\rho(w)) \in \mathbb{Q}$ に注意すれば、 $\rho(w) = 0$ から $\text{Plat}(\rho(w)) = 0$ が従う)。したがって、

$$K \text{ はループを持たない} \iff \rho(w[D(K)]) \neq 0$$

$$\iff \text{Plat}(\rho(w[D(K)])) \neq 0$$

$$\iff K \text{ は 4-彩色可能}$$

が成立する。よって、4色定理

$$K \text{ はループを持たない} \iff K \text{ は 4-彩色可能}$$

を認めれば、次が正しいことがわかる。

定理 4-14

(平面グラフに由来する) $w \in \mathcal{W}_{2n}$ に対して

$$\rho(w) \neq 0 \implies \text{Plat}(\rho(w)) \neq 0$$

もし、4色定理を使わずに

$$w \text{ はループフリー} \implies \text{Plat}(\rho(w)) \neq 0$$

を示すことができれば、Temperley-Lieb 代数を使った4色定理の証明が可能になる。これに関しては、Kauffman と Saleur は [15; Theorem 6.4] において、

$$w \text{ はループフリー} \iff \rho(w) \neq 0$$

が成り立つことを「証明している」。しかしながら、Kauffman と Thomas [16] によると、その主張と証明に欠陥があり、ループフリーの定義に若干の修正が必要のようである (詳細は確かめられなかった)。さらに、Kauffman と Thomas の修正が正しかったとしても、 $w \in \mathcal{W}_{2n}$ が平面グラフに由来するとき、 $\rho(w) \neq 0$ が $\text{Plat}(\rho(w)) \neq 0$ を導くかどうかという問題も残されている (ように思う)。

§5. 量子交代化作用素—Jones-Wenzl 冪等元—

この節では、 q -スピン・ネットワークの計算や 3 次元多様体の状態和不変量を定義する際の基礎となる、量子交代化作用素の定義とその性質について述べる [4,6,14,17]。量子交代化作用素は対称群の群環における交代化作用素の「量子化」と考えられる。このことを実感するために、古典的な対象物である、対称群の群環における交代化作用素について説明しよう。

● 5-1 : 対称群の群環における交代化作用素

$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ を n 次対称群 \mathfrak{S}_n の群環とする。すなわち、 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ は、形式的に

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} r_\sigma \sigma \quad (r_\sigma \in \mathbb{Q})$$

の形に書かれる元からなり、これに和、スカラー倍、積を次のように入れたものである。

和 : $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} r_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} r'_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (r_\sigma + r'_\sigma) \sigma$

スカラー倍 : $c \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} r_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (cr_\sigma) \sigma$

積 : $\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} r_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} r'_\tau \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} (r_\sigma r'_\tau) \sigma \tau$

$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ は単位元を持つ代数になる。 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ の次の元を考える。

$$\text{sym}_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma, \quad \text{alt}_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \sigma) \sigma.$$

$\text{sym}_n, \text{alt}_n$ をそれぞれ**対称子** (*symmetrizer*)、**交代子** (*antisymmetrizer*) と呼ぶ。例えば、対称子を n 変数多項式に作用させると、対称式を作り出すことができる。もう少し具体的に述べれば、 $n = 3$ のとき、 x, y, z に関する多項式 xy^2 があつたとする。これは対称式ではないが、

$$\text{sym}_3 \cdot (xy^2) = \frac{1}{6} (xy^2 + yx^2 + zy^2 + xz^2 + yz^2 + zx^2)$$

は対称式となる。このように対称とは限らないものから対称なものを生み出す装置が対称子であり、交代 (つまり、2 つの変数を入れ替えると符号が変わる) とは限らないものから交代なものを生み出す装置が交代子である。(もちろん、このことだけに留まらず、対称子や交代子は対称群の表現論において基本的かつ重要な役割りを果たす。詳細は服部昭・著『群の表現』などの書物を参照。)

対称子、交代子は**冪等元** (*idempotent*) であるという重要な性質を持っている。

(5-1 a) $(\text{sym}_n)^2 = \text{sym}_n, \quad (\text{alt}_n)^2 = \text{alt}_n.$

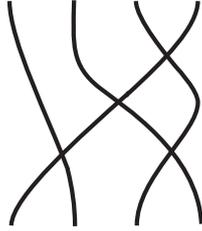
$\text{sym}_n, \text{alt}_n$ をそれぞれ次のような図式で表わす。



このとき、性質 (5-1 a) は次のように図式で表現することができる。

$$\begin{array}{c} | \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \blacksquare \\ | \end{array} \qquad \begin{array}{c} | \\ \square \\ \square \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \square \\ | \end{array}$$

\mathfrak{S}_n の元を組み紐に習って次のような図式で表現しよう。



但し、今度は、図式の間に関係式を導入しておく。

$$\text{crossing} \rightarrow \text{two parallel lines}$$

この関係式のおかげで、 \mathfrak{S}_n の元を図式で矛盾なく表現することができるようになる。例えば、 $\text{alt}_2, \text{alt}_3$ は次のように表現することができる。

$$\begin{array}{c} | \\ \square \\ | \end{array} = \frac{1}{2!} \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} | \\ \square \\ | \end{array} = \frac{1}{3!} \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} | \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} \right)$$

● 5-2 : $A = -1$ の場合の Temperley-Lieb 代数と対称群の表現

A を不定元とする有理関数体 $\mathbb{Q}(A)$ の部分環 $R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ (但し、 $d = -A^2 - A^{-2}$ とする) を係数環とする Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n$ を考える。対称群 \mathfrak{S}_n は $A = -1$ の場合の Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n = (\text{TL})_n[-2]$ と密接に関係している。以下、 $A = -1$ とする。このとき、命題 3-3 で与えられた積を保つ写像 $\rho : \mathcal{BD}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ について

$$(5-2 a) \qquad \rho(\sigma_i) = -\mathbf{1}_n - U_i = \rho(\sigma_i^{-1})$$

が成り立つ。よって、 $\rho : \mathcal{BD}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ は n 次対称群 \mathfrak{S}_n からの写像、 $\bar{\rho} : \mathfrak{S}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ を導く。等式 (5-2 a) は次のような図式の等式で表現することができる。

$$\rho \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \\ | \\ | \end{array} \right) = - \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} - \begin{array}{c} | \\ | \\ \cup \\ | \\ | \end{array}$$

$\rho: \mathcal{BD}_n \rightarrow (\text{TL})_n$ を線形に拡張することにより、代数準同型 $\bar{\rho}: \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] \rightarrow (\text{TL})_n$ が定義される。 $\bar{\rho}(\text{alt}_n)$ に対しては次のような著しい性質がある。

$$(5-2 \text{ b}) \quad U_i \bar{\rho}(\text{alt}_n) = \bar{\rho}(\text{alt}_n) U_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

∴)

$s_i = (i \ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ とおく。 \mathfrak{S}_n の元 σ の最短表示とは、 σ を s_1, \dots, s_{n-1} たちの語で表わしたとき、最も長さが短くなるもののことをいう。 W_i を

$$W_i := \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ は一番最後が } s_i \text{ で終わるような最短表示を持つ} \}$$

によって定義する。すると、 $\sigma \in W_i$ は $\sigma = ws_i$ ($w \in \mathfrak{S}_n$) のように書くことができる。このとき、 w は一番最後が s_i で終わるような最短表示は持たない。何故ならば、そのような最短表示を w が持ったとすると、 ws_i が最短表示ではなくなるからである。

$$W'_i := \{ w \in \mathfrak{S}_n \mid ws_i \in W_i \}$$

とおく。 $\mathfrak{S}_n = W_i \cup W'_i$ かつ $W_i \cap W'_i = \emptyset$ が成り立つ。したがって、

$$\text{alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{w \in W'_i} (\text{sgn } w) w - \sum_{w \in W_i} (\text{sgn } w) ws_i$$

と表わすことができる。よって、

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\text{alt}_n) U_i &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in W'_i} (\text{sgn } w) \rho(w) U_i - \frac{1}{n!} \sum_{w \in W_i} (\text{sgn } w) \rho(ws_i) U_i \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in W'_i} (\text{sgn } w) \rho(w) U_i - \frac{1}{n!} \sum_{w \in W_i} (\text{sgn } w) \rho(w) \rho(s_i) U_i \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\rho(s_i) U_i = (-\mathbf{1}_n - U_i) U_i = -U_i - U_i^2 = -U_i - dU_i = -U_i - (-2)U_i = U_i$$

であるから、 $\bar{\rho}(\text{alt}_n) U_i = 0$ とわかる。

同様に、 s_i で始まるような最短表示を持つものと持たないものの2つに分割して考えることにより、 $U_i \bar{\rho}(\text{alt}_n) = 0$ となることを示すことができる。□

● 5-3 : Jones-Wenzl 冪等元

今度は B_n の $R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ 係数の群環 $R[B_n]$ を考えて、対称群の場合の交代化作用素の類似物が Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n$ の中に定義できることを示す。ここでは、係数環は R で $d = -A^2 - A^{-2}$ の場合の Temperley-Lieb 代数について考察する。命題 3-3 の積を保つ写像 $\rho: B_n \rightarrow (\text{TL})_n$ を線形に拡張して、代数準同型 $\rho: R[B_n] \rightarrow (\text{TL})_n$ が得られる。 B_n は \mathfrak{S}_n と違って無限群であるから、交代化作用素 $\text{alt}_n \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ の類似物を $R[B_n]$ の中に作ることは難しい。しかし、 \mathfrak{S}_n の B_n への適当な「持ち上げ」をとることにより、その類似物を $(\text{TL})_n$ の中に作るができる。その構成法を説明しよう [13, 14]。

以下、記号が繁雑になることを避けるため、 $R[B_n]$ の元を ρ を通して $(TL)_n$ の元とみなす。
 例えば、

$$\begin{aligned}\sigma_i &= A\mathbf{1}_n + A^{-1}U_i \in (TL)_n, \\ \sigma_i^{-1} &= A^{-1}\mathbf{1}_n + AU_i \in (TL)_n\end{aligned}$$

と考える。

各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して組み紐図式 $D_\sigma \in \mathcal{BD}_n$ を以下のように帰納的に定義する。

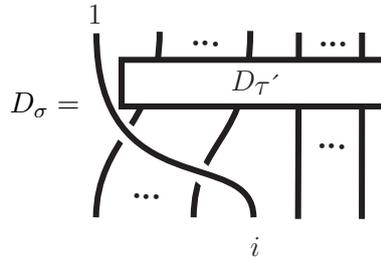
I. $n = 2$ のとき： $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$D_{1_2} = \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right|, \quad D_{(1\ 2)} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}.$$

II. 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ に対して組み紐図式 $D_\tau \in \mathcal{BD}_{n-1}$ が定義されたとする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし、 $\sigma(i) = 1$ であるとする。 $\tau = \sigma(1\ i)$ とおくと、 $\sigma = \tau(1\ i)$ と書くことができる。 $\tau(1) = 1$ なので、 τ は $\{2, \dots, n-1\}$ 上の置換を引き起こす。 $\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ を

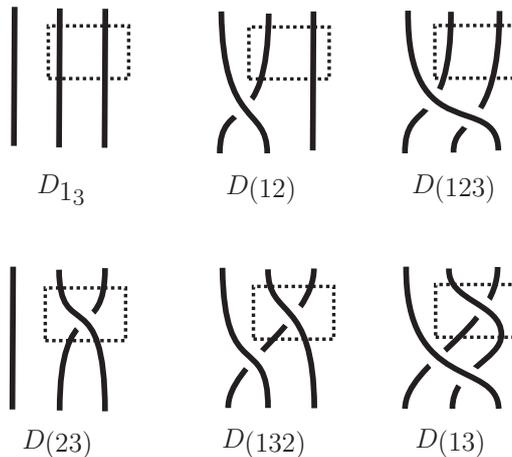
$$\tau'(j) = \tau(j+1) - 1 \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

によって定義する。このとき、 $D_\sigma \in \mathcal{BD}_n$ を



と定める。

例 5-1 $n = 3$ のとき、 D_σ ($\sigma \in \mathfrak{S}_3$) は次の通りである。



各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$T(\sigma) := (D_\sigma \text{ における交点の個数})$$

と定める。このとき、次のように定義される $R[B_n]$ の元 g_n を考える。

$$g_n := \frac{1}{[n]!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A^{-3})^{T(\sigma)} D_\sigma.$$

ここで、

$$[n]! := \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - A^{-4k}}{1 - A^{-4}} \right)$$

である。 $[n]! = \prod_{k=1}^n (1 + A^{-4} + (A^{-4})^2 + \dots + (A^{-4})^{k-1})$ と表わすことができるので、 A に -1 (あるいは 1) を代入すると、 $[n]!$ は通常の階乗 $n!$ に一致する。 $[n]!$ を n の量子階乗 (quantum factorial) という。

例 5-2

$$g_2 = \left| \left| -\frac{1}{d} \bigcup \right. \right.$$

$$g_3 = \left| \left| \left| -\frac{d}{d^2-1} \left\{ \bigcup \bigcup \right. + \left| \bigcup \right. \right\} + \frac{1}{d^2-1} \left\{ \bigcup \bigcup + \bigcup \bigcup \right\} \right. \right.$$

命題 5-3

$g_n \in (\text{TL})_n$ ($n = 1, 2, \dots$) は次の性質を持つ。

- (i) $g_n^2 = g_n$.
- (ii) $g_n U_i = U_i g_n = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$).

構成的な定義を与えたものの、以下の節で命題 5-3 の結果は使わない。というのも、 g_n は次の定理のように帰納的に構成されるものに一致するからである [8, 27]。

定理 5-4

次の 2 条件を満たす 0 でない元 $f_n \in (\text{TL})_n$ が一意的に存在する：

- (i) $f_n^2 = f_n$.
- (ii) $f_n U_i = U_i f_n = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$).

f_n を量子交代化作用素 (quantum antisymmetrizer) または Jones-Wenzl 冪等元 (Jones-Wenzl idempotent) と呼ぶ。

Jones-Wenzl 冪等元 $f_n \in (\text{TL})_n$ ($n = 1, 2, \dots$) は次の漸化式によって帰納的に定義することができる： $f_1 = \mathbf{1}_1$,

$$(5-3 a) \quad f_n = f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1}.$$

但し、

$$\Delta_k = (-1)^{k+1} \frac{A^{2k} - A^{-2k}}{A^2 - A^{-2}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

であり、自然に $(\text{TL})_n \subset (\text{TL})_{n+1}$ とみなしている。

注意：この講義で用いる Δ_k は、Kauffman と Lins の本 [14] や Lickorish の本 [17] では Δ_{k-1} と書かれているものに相当する。

(定理 5-4 の証明)

• f の一意性：

$(\text{TL})_n$ の任意の元は $\mathbf{1}_n, U_1, \dots, U_{n-1}$ の有限個の積の R -線形結合で表わされる。したがって、 $f, g \in (\text{TL})_n$ が 0 ではなく (i), (ii) を満たしているすると、

$$\begin{aligned} f &= r \mathbf{1}_n + \mathcal{U}, \\ g &= r' \mathbf{1}_n + \mathcal{U}' \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、 $r, r' \in R$ であり、 $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \text{Span}_R \{ U_{i_1} \cdots U_{i_k} \mid k \geq 1, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n-1 \}$ である。

$$f = f^2 = f(r \mathbf{1}_n + \mathcal{U}) = r f \quad (\because \text{(ii)})$$

であり、 $f \neq 0$ かつ R は整域であるから、 $r = 1$ とわかる。同様にして $r' = 1$ とわかる。このとき、

$$\begin{aligned} f &= f + f \mathcal{U}' = f(\mathbf{1}_n + \mathcal{U}') \\ &= f g = (\mathbf{1}_n + \mathcal{U}) g = g + \mathcal{U} g = g \end{aligned}$$

となる。よって、(i),(ii) を満たす 0 でない $(\text{TL})_n$ の元は一意的である。

• n に関する帰納法で、定理のように帰納的に定義される f_n ($n = 1, 2, \dots$) は

- (i)_n $f_n^2 = f_n$.
- (ii)_n $f_n U_i = U_i f_n = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$).
- (iii)_n $(U_n f_n)^2 = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} U_n f_n, (f_n U_n)^2 = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} f_n U_n$ in $(\text{TL})_{n+1}$.

を満たすことを示す。

I. $n = 1$ のとき：(i)₁, (ii)₁ は自明に成り立つ。(iii)₁ が満たされていることを確かめる。 $(\text{TL})_2$ において $f_1 = \mathbf{1}_2$ となるから、

$$\begin{aligned} (U_1 f_1)^2 &= (U_1)^2 = d U_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} U_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} U_1 f_1, \\ (f_1 U_1)^2 &= (U_1)^2 = d U_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} U_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} f_1 U_1 \end{aligned}$$

II. f_{n-1} が (i)_{n-1}, (ii)_{n-1}, (iii)_{n-1} を満たしていると仮定する。

(i)_n について :

$$\begin{aligned}
f_n^2 &= \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) \\
&= f_{n-1}^2 - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1}^2 - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1}^2 U_{n-1} f_{n-1} + \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n^2} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1}^2 U_{n-1} f_{n-1} \\
&= f_{n-1} - 2 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} + \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n^2} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \quad (\because (i)_{n-1}) \\
&= f_{n-1} - 2 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} + \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_n^2} f_{n-1} (U_{n-1} f_{n-1})^2 \\
&= f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \quad (\because (iii)_{n-1}) \\
&= f_n
\end{aligned}$$

(ii)_n について : $i = 1, \dots, n-2$ に対して

$$\begin{aligned}
f_n U_i &= \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) U_i \\
&= f_{n-1} U_i - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} U_i = 0 \quad (\because (ii)_{n-1}), \\
U_i f_n &= U_i \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) \\
&= U_i f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} U_i f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

となる。また、 $i = n-1$ に対して

$$\begin{aligned}
f_n U_{n-1} &= \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) U_{n-1} \\
&= f_{n-1} U_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} U_{n-1} \\
&= f_{n-1} U_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} (f_{n-1} U_{n-1})^2 \\
&= 0 \quad (\because (iii)_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{n-1} f_n &= U_{n-1} \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) \\
&= U_{n-1} f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} U_{n-1} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \\
&= U_{n-1} f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} (U_{n-1} f_{n-1})^2 \\
&= 0 \quad (\because (iii)_{n-1})
\end{aligned}$$

(iii)_n について : まず、

$$f_n f_{n-1} = f_{n+1} = f_{n-1} f_n$$

であることに注意する。

(\because)

$$\begin{aligned}
f_n f_{n-1} &= \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) f_{n-1} \\
&= f_{n-1}^2 - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1}^2 \\
&= f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \\
&= f_n
\end{aligned}$$

である。同様にして、 $f_{n-1} f_n = f_n$ が証明される。 \square

$f_{n-1} \in (\text{TL})_{n-1}$ であるから、 f_{n-1} を $(\text{TL})_{n+1}$ の元としてみなすと、 f_{n-1} は $\mathbf{1}_n, U_1, \dots, U_{n-2}$ たちの積の R -線形結合で表わされる。 U_i ($i = 1, \dots, n-2$) と U_n とは可換であるから、

$$f_{n-1} U_n = U_n f_{n-1} \quad \text{in } (\text{TL})_{n+1}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
(U_n f_n)^2 &= U_n \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) U_n f_n \\
&= U_n f_{n-1} U_n f_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} U_n f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} U_n f_n \\
&= U_n U_n f_{n-1} f_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_n U_{n-1} U_n f_{n-1} f_n \\
&= d U_n f_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_n f_n \\
&= d U_n f_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} U_n f_{n-1} f_n \\
&= \frac{d \Delta_n - \Delta_{n-1}}{\Delta_n} U_n f_n
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
d \Delta_n - \Delta_{n-1} &= (-1)^{n+1} \frac{-(A^2 + A^{-2})(A^{2n} - A^{-2n})}{A^2 - A^{-2}} - (-1)^n \frac{A^{2(n-1)} - A^{-2(n-1)}}{A^2 - A^{-2}} \\
&= (-1)^n \frac{A^{2n+2} - A^{-2n-2}}{A^2 - A^{-2}} \\
&= \Delta_{n+1}
\end{aligned}$$

であるから、 $(U_n f_n)^2 = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} U_n f_n$ が示された。同様にして

$$\begin{aligned}
 (f_n U_n)^2 &= f_n U_n \left(f_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} \right) U_n \\
 &= f_n U_n f_{n-1} U_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n U_n f_{n-1} U_{n-1} f_{n-1} U_n \\
 &= f_n f_{n-1} U_n U_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n f_{n-1} U_n U_{n-1} U_n f_{n-1} \\
 &= d f_n U_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n U_n f_{n-1} \\
 &= d f_n U_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n f_{n-1} U_n \\
 &= d f_n U_n - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n U_n \\
 &= \frac{d \Delta_n - \Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_n U_n \\
 &= \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} f_n U_n
 \end{aligned}$$

を得る。これで、帰納法が完成した。 □

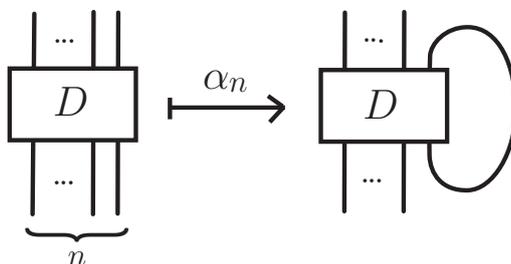
● 5-4 : Jones-Wenzl 冪等元のトレース

命題 3-3 で与えられている正規化されたトレース $\tilde{\text{Tr}} : (\text{TL})_n \rightarrow R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ を考える (注: $(\text{TL})_n$ の係数環は $R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ としている)。便宜上、 $n = 0$ のときにも $\tilde{\text{Tr}} : (\text{TL})_0 \rightarrow R$ を考える。この写像は任意の単純 0-図式 D に対して、

$$\tilde{\text{Tr}}([D]) = d^{k(D)-1}$$

によって定義されている。ここで、 $k(D)$ は D における単純閉曲線の個数を表わす。

$n = 1, 2, \dots$ に対して $\alpha_n : (\text{TL})_n \rightarrow (\text{TL})_{n-1}$ を次のように定義される R -線形写像とする：任意の単純 n -図式 D に対して



このとき、図式

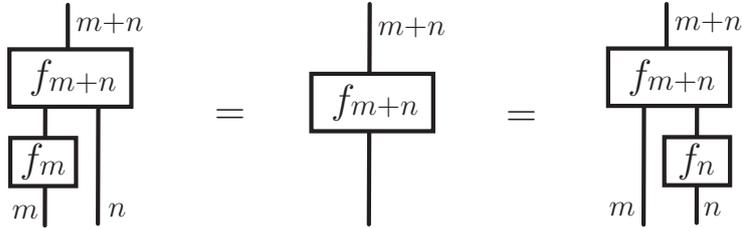
$$\begin{array}{ccc}
 (\text{TL})_n & \xrightarrow{\alpha_n} & (\text{TL})_{n-1} \\
 \tilde{\text{Tr}} \searrow & & \swarrow \tilde{\text{Tr}} \\
 & R &
 \end{array}$$

は可換である。

● 5-5 : Jones-Wenzl 冪等元の性質

補題 5-6

$m, n \geq 0$ とする。 $(\text{TL})_{m+n}$ の元として等式



が成り立つ。

(証明)

左側の等号の成立を示す。定理 5-4 の証明から、

$$f_m = \mathbf{1}_m + \mathcal{U} \quad (\mathcal{U} \in \text{Span}_R\{ U_{i_1} \cdots U_{i_k} \mid k \geq 1, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m-1 \})$$

と表わされる。自然な埋め込み $\iota: (\text{TL})_m \rightarrow (\text{TL})_{m+n}$ による $f_m \in (\text{TL})_m$ の像は、

$$\iota(f_m) = \mathbf{1}_{m+n} + \iota(\mathcal{U})$$

となる。ここで、 $\iota(\mathcal{U}) \in \text{Span}_R\{ U_{i_1} \cdots U_{i_k} \mid k \geq 1, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m-1 \}$ である。但し、今度の U_j は $(\text{TL})_{m+n}$ における U_j を表わしている。定理 5-4 から $f_{m+n} U_i = 0$ ($i = 1, \dots, m+n-1$) であるから、

$$f_{m+n} \iota(f_m) = f_{m+n} (\mathbf{1}_{m+n} + \iota(\mathcal{U})) = f_{m+n} \mathbf{1}_{m+n} = f_{m+n}$$

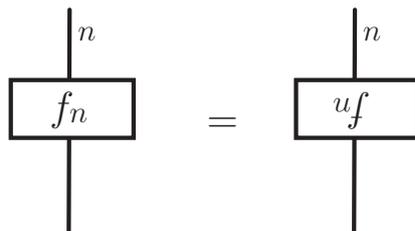
となる。これで、補題の左側の等式が証明された。右側の等式も同様に証明される。今度は ι の代わりに

$$j(U_1) = U_m, \dots, j(U_{n-1}) = U_{m+n-1}$$

によって定義される埋め込み $j: (\text{TL})_n \rightarrow (\text{TL})_{m+n}$ を考えることになる。 \square

補題 5-7

$n \geq 0$ とする。 $(\text{TL})_n$ の元として等式



が成り立つ。但し、右辺は、図形として f_n を 180° 回転したものを表わす。

(証明)

$r: (\text{TL})_n \rightarrow (\text{TL})_n$ を

$$r(U_i) = U_{n-i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

によって定義される反代数準同型とする。 $r(f_n) = f_n$ となることを示す。

$$r(f_n)^2 = r(f_n^2) = r(f_n)$$

であり、 $i = 1, \dots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned} r(f_i)U_i &= r(f_i)r(U_{n-i}) = r(U_{n-i}f_n) = r(0) = 0, \\ U_i r(f_i) &= r(U_{n-i})r(f_i) = r(f_n U_{n-i}) = r(0) = 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $r(f_i) \in (\text{TL})_n$ は定理 5-4 の条件 (i), (ii) を満たす。また、 r は線形同型写像であるから、 $f_n \neq 0$ より $r(f_n) \neq 0$ である。定理 5-4 により、 $r(f_n) = f_n$ であることがわかる。 \square

● 5-6 : 命題 5-3 の証明

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 σ の語表示 w_σ を帰納的に次のように定義する。

I. $n = 1$ および $n = 2$ のとき、 $w_\sigma = \sigma$ 。

II. $n > 2$ とし、任意の $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ に対して語 w_τ が定義されたとする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし、 $\sigma(i) = 1$ によって $i \in \{1, \dots, n\}$ を定義する。 $\tau = \sigma(1 i)$ とおき、 $\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ を $\tau'(j) = \tau(j+1) - 1$ ($j = 1, \dots, n-1$) によって定める。帰納法の仮定により、語 $w_{\tau'}$ が定まる。この語において

$$s_j \mapsto s_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-2)$$

と置き換えて得られる s_2, \dots, s_{n-1} をアルファベットする語を $\tilde{w}_{\tau'}$ とおく。 w_σ を次のように定める：

$$w_\sigma = \begin{cases} \tilde{w}_{\tau'} & (i = 1 \text{ のとき}), \\ \tilde{w}_{\tau'} s_1 s_2 \cdots s_{i-1} & (i > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

補題 5-8

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 $T(\sigma)$ は σ の長さに一致する。したがって、語 w_σ は σ の簡約表示である。

(証明)

$w_\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ のとき $D_\sigma = \sigma_{i_1}^{-1} \cdots \sigma_{i_r}^{-1}$ となる。

D_σ において、その下端の左から数えて第 i 番目から伸びている紐を D_σ の第 i 紐と呼ぶことにする。

D_σ は次の特徴を持っている：「 $1 \leq i < j \leq n$ となる任意の (i, j) について、 D_σ の第 i 紐と第 j 紐は $\sigma(i) < \sigma(j)$ のときは交わらず、 $\sigma(i) > \sigma(j)$ のときは 1 回だけ交わる。」

∴)

数学的帰納法で証明する。

I. $n = 2$ のとき「 」の中の主張は自明に成り立つ。

II. 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ に対して「 」の中の主張は正しいと仮定する。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする。 $\sigma(k) = 1$ であるとする。 $\tau = \sigma(1 k)$ と定めて、 $\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ を $\tau'(j) = \tau(j+1) - 1$ ($j = 1, \dots, n-1$) によって定義する。

σ の任意の語表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ に対して組み紐図式 $D = \sigma_{i_1}^{-1} \cdots \sigma_{i_r}^{-1}$ を考える。このとき、

$$r = \sum_{(i,j) \in \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < j \leq n\}} (\text{第 } i \text{ 紐と第 } j \text{ 紐との交点の個数})$$

となる。

$1 \leq i < j \leq n$ となる整数の組 (i, j) であつて、 $\sigma(i) > \sigma(j)$ となるものをとる。 D の第 i 紐は下端の第 i 番目と上端の第 $\sigma(i)$ 番目を結んでおり、 D の第 j 紐は下端の第 j 番目と上端の第 $\sigma(j)$ 番目を結んでいるから、中間値の定理により、少なくとも 1 箇所で交点を持たなければならない。よつて、

$$\begin{aligned} r &\geq \sum_{(i,j) \in \left\{ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{array} \right\}} (\text{第 } i \text{ 紐と第 } j \text{ 紐との交点の個数}) \\ &\geq \sum_{(i,j) \in \left\{ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{array} \right\}} 1 \\ &= T(\sigma) \end{aligned}$$

を得る。よつて、 D_σ の交点数 $T(\sigma)$ は σ のあらゆる語表示の中で最小の長さとも一致する。したがつてまた、 w_σ は σ の簡約表示である。□

命題 5-9 ([10; p.159, Lemma 4.11])

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の 2 つの簡約表示 w, w' は次の 2 つの有限回の操作で移り合う。

- (i) $s_i s_{i+1} s_i$ を $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ で置き換える、または、 $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ を $s_i s_{i+1} s_i$ で置き換える。
- (ii) $|i - j| > 1$ のとき、 $s_i s_j$ を $s_j s_i$ で置き換える。

この命題を用いて命題 5-3 を証明する。

(命題 5-3 の証明)

(ii) を先に示す。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を σ の簡約表示とすると、命題 5-9 より、 \mathcal{BD}_n の元として $D_\sigma = \sigma_{i_1}^{-1} \cdots \sigma_{i_r}^{-1}$ が成立することに注意しよう。

$i \in \{1, \dots, n-1\}$ を任意にとり、固定し、

$$W_i = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ は一番最後が } s_i \text{ で終わるような簡約表示を持つ} \}$$

とおく。 $W'_i = \{ w \in \mathfrak{S}_n \mid w s_i \in W_i \}$ とおくと、 $\mathfrak{S}_n = W_i \cup W'_i$ かつ $W_i \cap W'_i = \emptyset$ が成立する。よつて、

$$g_n = \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{T(w)} D_w + \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W_i} (A^{-3})^{T(ws_i)} D_{ws_i}$$

と表わすことができる。ここで、各 $w \in W'_i$ に対して、 ws_i は簡約されているから、 $T(ws_i) = T(w) + 1$ である。さらに、証明の冒頭部分で述べた事実を使えば、

$$g_n = \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{T(w)} D_w + \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{T(w)+1} D_w \sigma_i^{-1}$$

と表わされることがわかる。

$$\sigma_i^{-1}U_i = (A^{-1}\mathbf{1}_n + AU_i)U_i = A^{-1}U_i + AU_i^2 = A^{-1}U_i + dAU_i = (A^{-1} + dA)U_i$$

であるから、

$$\begin{aligned} g_n U_i &= \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{\text{T}(w)} D_w U_i + \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{\text{T}(w)+1} D_w \sigma_i^{-1} U_i \\ &= \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{\text{T}(w)} D_w U_i + \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{\text{T}(w)+1} (A^{-1} + dA) D_w U_i \\ &= \frac{1}{[n]!} \sum_{w \in W'_i} (A^{-3})^{\text{T}(w)} (1 + A^{-3}(A^{-1} + dA)) D_w U_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。同様にして、 $U_i g_n = 0$ となることがわかる。

(i) を示す。

$$g_n = c\mathbf{1}_n + \mathcal{U} \quad \left(\begin{array}{l} c \in R, \\ \mathcal{U} \text{ は 少なくとも 1 つの } U_i \text{ を含む} \\ U_1, \dots, U_{n-1} \text{ たちの有限個の積の } R \text{ 線形結合} \end{array} \right)$$

と表わす。このとき、(ii) により、

$$g_n^2 = g_n(c\mathbf{1}_n + \mathcal{U}) = cg_n$$

となる。したがって、 $g_n^2 = g_n$ を示すには、 g_n における $\mathbf{1}_n$ の係数が 1 であることを示せばよい。各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $D_\sigma \in (\text{TL})_n$ における $\mathbf{1}_n$ の係数 λ_σ を求めよう。 λ_σ は、 D_σ の各交点を $\sigma_i^{-1} = A^{-1}\mathbf{1}_n + AU_i$ に置き換えて積を展開したときの、展開式における $\mathbf{1}_n$ の係数のことであるから、

$$\lambda_\sigma = (A^{-1})^{\text{T}(\sigma)}$$

となる。よって、

$$(g_n \text{ における } \mathbf{1}_n \text{ の係数}) = \frac{1}{[n]!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A^{-3})^{\text{T}(\sigma)} \lambda_\sigma = \frac{1}{[n]!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A^{-4})^{\text{T}(\sigma)}$$

となる。したがって、証明を完成させるためには、

$$(5-6 \text{ a}) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A^{-4})^{\text{T}(\sigma)} = [n]!$$

となることを証明すればよい。

n に関する数学的帰納法で証明する。

I. $n = 1$ のとき (5-6 a) は自明に成り立つ。

II. $n - 1$ のとき (5-6 a) は正しいと仮定する。

$k \in \{1, \dots, n\}$ に対して、 $S_k = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = 1 \}$ とおく。 $S_1 \cup \dots \cup S_n = \mathfrak{S}_n$ であり、 $k \neq l$ ならば $S_k \cap S_l = \emptyset$ である。

写像 $\phi: S_1 \rightarrow \mathfrak{S}_{n-1}$ を $\tau \in S_1$ に対して $\tau'(j) = \tau(j+1) - 1$ ($j = 1, \dots, n-1$) によって定義される $\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ を対応させる写像とする。 ϕ は全単射である。今、 $k = 2, \dots, n$ とし、任

意に $\sigma \in S_k$ をとる。 σ は

$$\sigma = \tau(1 k) \quad (\tau \in S_1)$$

の形に一意的に表わされる。よって、 σ は

$$\sigma = \phi^{-1}(\tau')(1 k) \quad (\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1})$$

の形に一意的に表わされる。このとき、 $T(\sigma) = (k-1) + T(\tau')$ となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A^{-4})^{T(\sigma)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}} (A^{-4})^{(k-1)+T(\tau')} \\ &= \sum_{k=1}^n (A^{-4})^{k-1} \sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_{n-1}} (A^{-4})^{T(\tau')} \\ &= \sum_{k=1}^n (A^{-4})^{k-1} [n-1]! \\ &= (1 + A^{-4} + \cdots + (A^{-4})^{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + A^{-4} + \cdots + (A^{-4})^{k-1}) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 + A^{-4} + \cdots + (A^{-4})^{k-1}) \\ &= [n]! \end{aligned}$$

を得る。よって、(5-6 a) は n のときにも正しい。

これで、命題は証明された。

□

§6. 線形スケインと q -スピン・ネットワークの計算

これまで、絡み目図式や組み紐図式に対してブラケット多項式を計算するとき、ブラケットを明示しないで行うことがしばしばあった。すると、あたかも絡み目同士や組み紐同士を足したり引いたり、 $R = \mathbb{Q}(d)[A, A^{-1}]$ の元を掛けたりしている感覚を持ったことであろう。線形スケインとはこの感覚を「現実化」した概念である。この節では、考える空間も平面 \mathbb{R}^2 に限定せず、円板やアニュラスなど、様々な曲面上で絡み目図式や組み紐図式を扱う。さらに、絡み目図式や組み紐図式に留まらず、これらを含むより広いクラスの幾何学的対象—タングル図式—を考える。考える対象を広げることにより、図式同士(および曲面同士)を、これまで以上に自由に合成することが可能となる。様々な曲面上で線形スケインを考えることは、 q -スピン・ネットワークと呼ばれるある種のネットワークを計算したり、その性質を調べたりする際に非常に有効である [14, 17]。

● 6-1 : 曲面の線形スケイン空間

F を向きづけられた曲面(境界を持っていてもよい)とし、 Ξ を F の境界 ∂F 上の点からなる有限集合とする(空集合でもよい)。定義上、 F は向きづけられた曲面であればなんでもよいが、2次元球面 S^2 , 円板 D^2 , アニュラス $S^1 \times [0, 1]$, 帯 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ などを念頭においている。 (F, Ξ) における**タングル図式**(*tangle diagram*)とは、有限個の閉区間と有限個の円周の F へのはめ込みの像 D であって、次の条件を満たすものをいう。

- (i) D 中の閉区間の端点の像となる点の全体は Ξ に一致する。
- (ii) D 中で閉区間の像になっている部分は、その端点の像において境界 ∂F と横断的に交わる。
- (iii) D 上には高々有限個の交点があり、各交点では2つの曲線が横断的に交わる(特に、3重点は存在しない)。
- (iv) D の各交点において、交わる2曲線のどちらが上側を通り、下側を通るのか、という上下の情報が付与されている(図で表示するときには、一方の曲線に切れ目を入れて表現する)。

2つのタングル図式 D, D' が同値であるとは、タングル図式の条件を保ったまま F 上で D から D' へ連続的に変形することができることをいう。正確には、 F 上のイソトピー $\varphi : F \times [0, 1] \rightarrow F$, $\varphi(x, t) = \varphi_t(x)$ であって、以下の条件を満たすものが存在するときをいう：

- (i) $\varphi_0 = \text{id}_F$.
- (ii) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して φ_t は同相写像である。
- (iii) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\varphi_t(D)$ は (F, Ξ) におけるタングル図式である。
- (iv) $\varphi_1(D) = D'$.
- (v) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して φ_t は ∂F 上恒等写像である。

$\text{Tang}(F, \Xi)$ によって (F, Ξ) におけるタングル図式同値類の全体からなる集合を表わすことにする。 $R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ とおく。但し、 $d = -A^2 - A^{-2}$ である。このとき、 $\mathcal{S}(F, \Xi)$ を、 $\text{Tang}(F, \Xi)$ の元によって R 上自由に生成される R -加群を次の関係式で割って得られる商加群とする。

- $D \amalg \bigcirc = (-A^2 - A^{-2})D,$
- $\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = A \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) + A^{-1} \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right).$

但し、 \bigcirc は F 上で 1 点とホモトープとなるような任意の図式 (の同値類) を表わしている。 $S(F, \Xi)$ を (F, Ξ) の線形スケイン (linear skein) と呼ぶ。

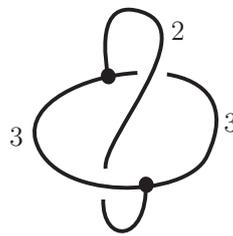
ブラケット多項式が Reidemeister 移動 II, III と平面のイソトピーの下で不変であったから、関係式を使って交点の解消を行っていくときにも、Reidemeister 移動 II, III と平面のイソトピーを使ってタングル図式を変形させながら計算することができる。

$F = \mathbb{R} \times [0, 1]$ の境界上の点からなる集合 Ξ として、 $\Xi_n = \{(0, 1), \dots, (0, n)\} \cup \{(1, 1), \dots, (1, n)\}$ を考える。このとき、線形スケイン $S(\mathbb{R} \times [0, 1], \Xi_n)$ は Temperley-Lieb 代数 $(TL)_n$ に他ならない。

● 6-2 : q -スピン・ネットワーク

一般に、各辺に重み (これは自然数で表わされることが多い) のついた有向グラフはネットワークと呼ばれる [32]。各辺に割り当てられた数字は、グラフが交通網をモデルに作られている場合には 1 時間あたりの最大交通量を表わしていたり、グラフが電気回路をモデルに作られている場合には安全に通過可能な最大の電流量を表わしたりする。これらの状況においては、グラフのある頂点から別の頂点に 1 時間あたり通過させることができる車の最大台数を求めたり、電気回路に流すことのできる安全な最大の電流量を知る、つまり、「ネットワークを計算する」ことが問題となる。重みが自然数で与えられているネットワークの場合、各辺を重みの数の分だけ増やした多重辺で置き換えて扱うことも多い。その意味で、多重辺を持つ有向グラフのことをネットワークと呼ぶこともある。

この講義で扱うネットワークは、各辺の重みが自然数で与えられている、向きを考えないネットワークであり、各頂点が次数 3 のグラフ (= 3 価グラフと呼ばれる) の空間 \mathbb{R}^3 への埋め込みの射影図になっているものである。



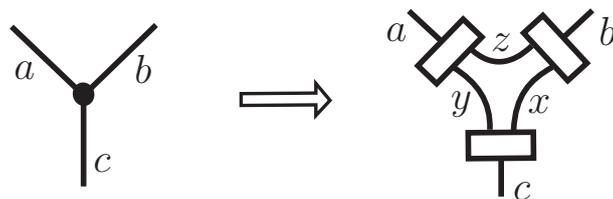
さらに、各頂点について、その頂点に隣接する 3 つの辺 (ループがあってもよい) に対する重み a, b, c について $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ がすべて 0 以上の偶数であるとする。このような重みが各辺に割り当てられた 3 価空間グラフの図式を q -スピン・ネットワークと呼ぶ。

q -スピン・ネットワーク K に対して、次の操作を行ってネットワークの値を計算することができる。

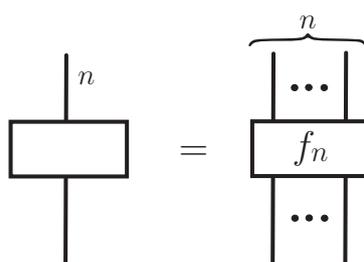
(Step1) K の各頂点について、その頂点に隣接する 3 つの辺に対する重みが a, b, c であるとき、

$$x = (b + c - a)/2, \quad y = (c + a - b)/2, \quad z = (a + b - c)/2$$

とおき、次図のように、Jones-Wenzl 冪等元 f_a, f_b, f_c を各辺に挟んで絡み目図式 (すなわち、 $\text{Tang}(\mathbb{R}^2)$ の元) D を作る。但し、右側における各辺の数字はその数の分だけ

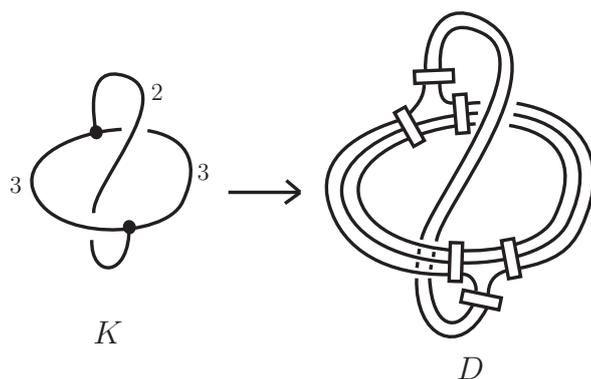


平行に辺が出ていることを表わし、また、



である。今後、Jones-Wenzl 冪等元 f_n を図示するときには、上図のように箱の中を空白にしておくことが多い。

(Step2) 得られた絡み目図式 D に対して、ブラケット多項式を計算する (すなわち、線形スケイン $S(\mathbb{R}^2)$ において $D = \lambda \bigcirc$ となる $\lambda \in R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ を求める)。



補題 5-7 により、Jones-Wenzl 冪等元の “挿入方向” を 180° 変えても問題は生じない (得られる絡み目図式 D は同じものになる) ことに注意しよう。

補題 6-1

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対して次の 2 つは同値である。

- (i) $b + c - a, c + a - b, a + b - c$ は偶数である。
- (ii) $a + b + c$ は偶数である。

(証明)

(i) \implies (ii) :

$b+c-a, c+a-b, a+b-c$ がすべて偶数であるとする、 $a+b+c = (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c)$ も偶数である。

(ii) \implies (i) :

$a+b+c$ が偶数であるとする。このとき、 $b+c-a = (a+b+c) - 2a$ も偶数である。同様に、 $c+a-b, a+b-c$ も偶数である。 \square

0以上の整数の3つ組 (a, b, c) であつて、次の2条件を満たすものを許容的 (admissible) と呼ぶ：

- ① $a+b+c$ は偶数である。
- ② $b+c-a \geq 0, c+a-b \geq 0, a+b-c \geq 0$.

● 6-3 : q -スピン・ネットワークの局所変形 — ひねりの解消

q -スピン・ネットワークを計算する際に便利な公式を与えよう。

捻りによる q -スピン・ネットワークへの効果は次の命題で与えられる。

命題 6-2

(a, b, c) を許容的な 0 以上の整数の 3 つ組とする。 $\mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c})$ の元として、

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{hook} \\ / \quad \backslash \\ b \quad c \end{array} &= (-1)^{\frac{b+c-a}{2}} A^{\frac{b(b+2)+c(c+2)-a(a+2)}{2}} \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{trivalent} \\ / \quad \backslash \\ b \quad c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{hook} \\ \backslash \quad / \\ b \quad c \end{array} &= (-1)^{\frac{a-b-c}{2}} A^{\frac{a(a+2)-b(b+2)-c(c+2)}{2}} \begin{array}{c} a \\ | \\ \text{trivalent} \\ / \quad \backslash \\ b \quad c \end{array} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\Xi_{a,b,c}$ は D^2 の境界上に図のように指定された $a+b+c$ 個の点の集合を表わす。

この命題を証明するために、補題を 2 つ用意する。

補題 6-3

$(TL)_n$ の元として

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array} = A^{ab} \begin{array}{c} | \\ n \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array}, \quad \begin{array}{c} a \quad b \\ / \quad \diagdown \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array} = A^{-ab} \begin{array}{c} | \\ n \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array}$$

が成り立つ。但し、 a, b は $a+b=n$ を満たす 0 以上の整数とする。

(証明)

σ_i を次のような $(TL)_n$ の元とする :

$$\sigma_i = \left| \dots \left| \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right| \dots \right|$$

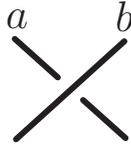
このとき、 $(TL)_n$ の元として、

$$\sigma_i = A\mathbf{1}_n + A^{-1}U_i$$

が成り立つ。 $f_n U_i = U_i f_n = 0$ であるから、

$$(6-3 a) \quad \sigma_i f_n = A f_n = f_n \sigma_i$$

となる。今、図式



には ab 個の正の交点があるから、(6-3 a) を用いて

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array} = A^{ab} \begin{array}{c} | \\ n \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array}$$

となることがわかる。もう 1 つの等式も同様にして証明される。 □

補題 6-4

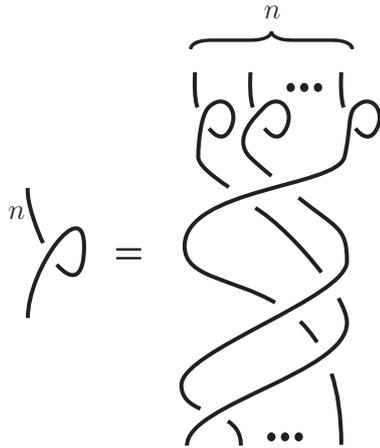
$(TL)_n$ の元として

$$\begin{array}{c} \text{loop} \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array} = (-1)^n A^{n(n+2)} \begin{array}{c} | \\ n \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{loop} \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array} = (-1)^n A^{-n(n+2)} \begin{array}{c} | \\ n \\ \boxed{f_n} \\ | \\ n \end{array}$$

が成り立つ。

(証明)

左辺の等式を示す。 n 本の平行線を右ねじの進む方向に 1 回転捻ったものは、平面のイソトピーによって、次のように変形することができる。



これは

$$D = \overbrace{\left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \vdots \\ | \quad | \quad | \end{array} \right)}^n \quad C = \overbrace{|\rho \cdots \rho| \rho}^n$$

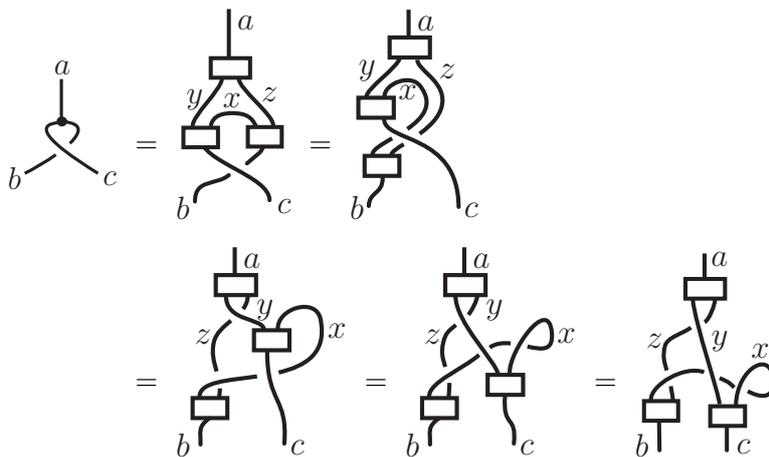
とおくとき、合成 $C \circ \overbrace{D \circ \cdots \circ D}^{n \text{ 個}}$ に一致する。 $\overbrace{D \circ \cdots \circ D}^{n \text{ 個}}$ は $n(n-1)$ 個の正の交点からなるから、補題 6-3 の証明と同様に考えて

$$\boxed{f_n} = (-A^3)^n A^{n(n-1)} f_n = (-1)^n A^{n(n+2)} f_n$$

を得る。右辺の等式も同様にして証明される。 □

(命題 6-2 の証明)

$x = (b+c-a)/2$, $y = (c+a-b)/2$, $z = (a+b-c)/2$ とおく。 $\mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c})$ の元として、次の等式が成り立つ。



補題 6-3 と補題 6-4 により、

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a \\ \square \\ \begin{array}{l} z \quad y \quad x \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \\ b \quad c \end{array} \end{array} = (-1)^{\frac{b+c-a}{2}} A^{x(x+2)+xz-yz+xy} \begin{array}{c} a \\ \square \\ \begin{array}{l} z \quad y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \\ b \quad c \end{array} \end{array} \\
 & = (-1)^{\frac{b+c-a}{2}} A^{x(x+2)+xz-yz+xy} \begin{array}{c} a \\ | \\ \begin{array}{l} \diagdown \quad \diagup \\ b \quad c \end{array} \end{array}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 & x(x+2) + xz - yz + xy \\
 &= \frac{b+c-a}{2} \left(\frac{b+c-a}{2} + 2 \right) + \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} - \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} + \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \\
 &= (b+c-a) + \frac{b^2+c^2+a^2-2ab-2ac+2bc}{4} + \frac{b^2-(c-a)^2}{4} - \frac{a^2-(b-c)^2}{4} + \frac{c^2-(b-a)^2}{4} \\
 &= (b+c-a) + \frac{b^2+c^2-a^2}{2}
 \end{aligned}$$

これで命題の最初の等式が証明された。2 番目の等式も同様にして示される (あるいは、2 番目の等式の左辺の図式が 1 番目の等式の左辺の鏡像になっていることから、 A を A^{-1} に置き換えることで、1 番目の等式から得られる)。□

● 6-4 : θ -ネット

$n \geq 1$ に対して $\Delta_n!$ を

$$\Delta_n! = \Delta_n \Delta_{n-1} \cdots \Delta_2 \Delta_1$$

によって定義する。また、便宜上、

$$\Delta_0! = \Delta_{-1}! = 1$$

と定める。整数 $x, y, z \geq 0$ に対して $\text{Net}(x, y, z) \in R = (\mathbb{Q}(d))[A, A^{-1}]$ を

$$\text{Net}(x, y, z) = \begin{array}{c} x \\ \circ \\ \begin{array}{l} \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \quad \square \\ y \quad z \end{array} \end{array}$$

によって定義する。 $\text{Net}(x, y, z)$ の値は次式で与えられる：

補題 6-5

$$\text{Net}(x, y, z) = \frac{\Delta_{x+y+z+1}! \Delta_x! \Delta_y! \Delta_z!}{\Delta_{y+z}! \Delta_{z+x}! \Delta_{x+y}!}$$

(証明)

$\rho(y, z)$ を次図で表わされる $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times [0, 1], \Xi_{y+z-2, y+z})$ の元とする。但し、 $\Xi_{y+z-2, y+z} = \{(0, 1), \dots, (0, y+z-2)\} \cup \{(1, 1), \dots, (1, y+z)\}$ である。

$$\rho(y, z) = \begin{array}{c} y \quad z-1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-1}} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-2 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

このとき、 $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times [0, 1], \Xi_{y+z-2, y+z})$ の元として次の等式が成立することがわかる。但し、 C_1, \dots, C_{z-2} は適当な R の元である。

$$\begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{\rho(y, z)} \\ | \\ y+z-2 \end{array} = (-1)^{z-1} \frac{\Delta_y}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad 1 \\ | \quad | \\ \boxed{\rho(y, 1)} \\ | \quad \cup \quad | \\ y-1 \quad \quad \quad z-1 \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array} + C_1 \begin{array}{c} y \quad 1 \quad z-2 \\ | \quad | \quad | \\ \cup \quad \quad \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array} + C_2 \begin{array}{c} y \quad 1 \quad 1 \quad z-3 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \cup \quad \cup \quad \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array} + \dots + C_{z-1} \begin{array}{c} y \quad z-2 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \cup \quad \quad \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array}$$

∴)

次の公式と補題 5-6 を繰り返し使えば、上の等式が得られる。

$$\begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{\rho(y, z)} \\ | \\ y+z-2 \end{array} = \begin{array}{c} y \quad z-1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-1}} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-2 \quad \quad \quad 1 \end{array} = -\frac{\Delta_{y+z-2}}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad z-2 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-3 \quad \quad \quad 1 \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array} + \begin{array}{c} y \quad z-2 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-2 \quad \quad \quad 1 \end{array} \\ = -\frac{\Delta_{y+z-2}}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad z-1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{\rho(y, z-1)} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-3 \quad \quad \quad 1 \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ y+z-2 \end{array} + \begin{array}{c} y \quad z-2 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad \cup \quad | \\ y+z-2 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$f_z U_i = 0$ ($i = 1, \dots, z-1$) より、次の等式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{---} z \\ | \\ \boxed{f_z} \\ | \\ \boxed{\rho(y,z)} \\ | \\ y+z-2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array} \\
 &= (-1)^{z-1} \frac{\Delta y}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ \boxed{\rho(y,1)} \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad | \\ y+z-2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array} \\
 &= (-1)^{z-1} \frac{\Delta y}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ \boxed{f_y} \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad | \\ y+z-2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array} \\
 &= (-1)^{z-1} \frac{\Delta y}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{f_y} \quad \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad | \\ y+z-2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

同様にして、次の等式が得られる。

$$\begin{array}{c} y+z-2 \\ | \\ \cup \\ 1 \\ | \\ \boxed{f_{y+z-1}} \\ | \\ \boxed{f_z} \\ | \\ y \quad z \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array} = (-1)^{z-1} \frac{\Delta y}{\Delta_{y+z-1}} \begin{array}{c} y+z-2 \\ | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ \boxed{f_y} \quad \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ y \quad z \end{array}$$

したがって、

$$\begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-1}} \\ | \quad | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ y+z-2 \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-1}} \\ | \quad | \\ \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ y \quad z \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ 1 \end{array} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta_{y+z-1}} \right)^2 \begin{array}{c} y \quad z \\ | \quad | \\ \boxed{f_y} \quad \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ y+z-2 \\ | \quad | \\ \boxed{f_{y+z-2}} \\ | \quad | \\ \cup \\ 1 \\ | \quad | \\ \boxed{f_y} \quad \boxed{f_z} \\ | \quad | \\ y \quad z \end{array}$$

を得る。この両辺を $-A^2 - A^{-2}$ で割ると、

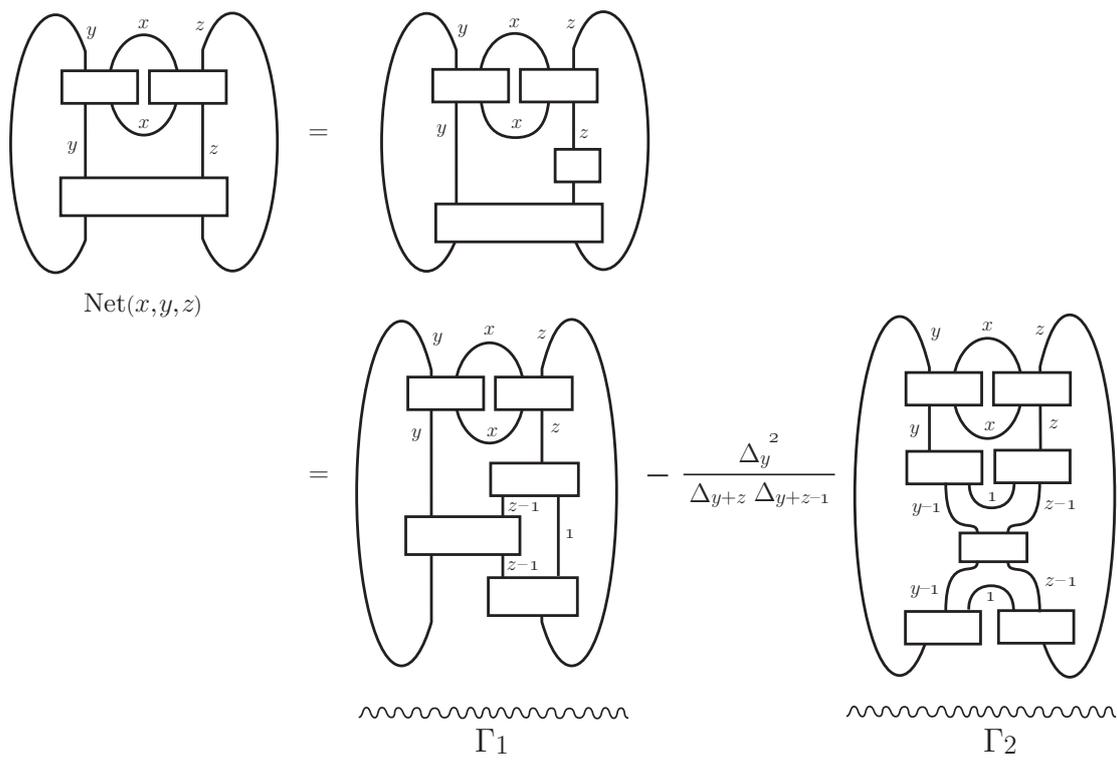
$$= \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_{y+z-1}} \right)^2$$

となる。よって、

$$= - \frac{\Delta_{y+z-1}}{\Delta_{y+z}}$$

$$= - \frac{\Delta_y^2}{\Delta_{y+z} \Delta_{y+z-1}}$$

を得る。故に、

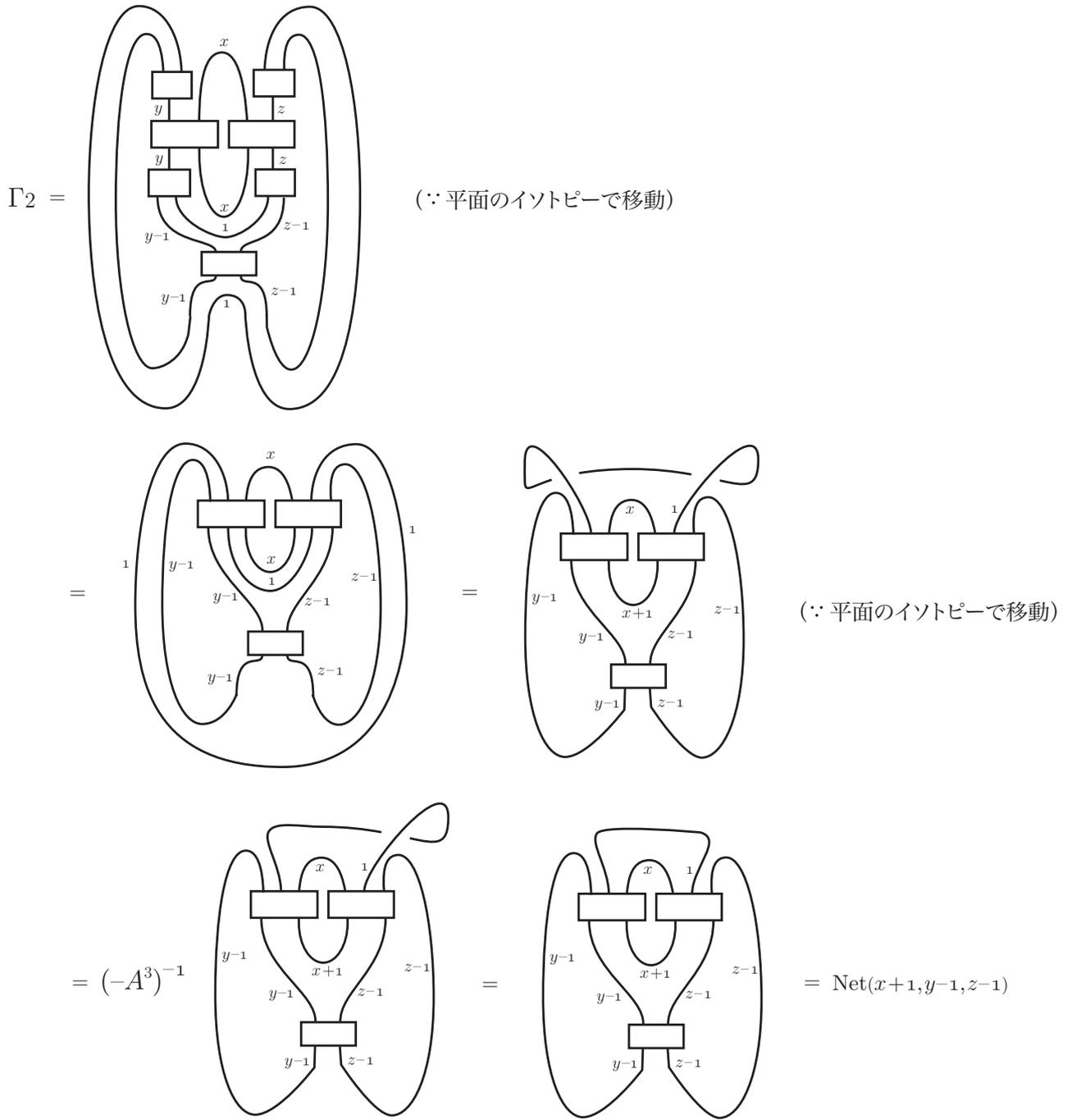


である。ここで、

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 = & \text{Diagram 1} && (\because \text{平面のイソトピーで移動}) \\
 = & \text{Diagram 2} & = & \text{Diagram 3} \\
 = & \frac{\Delta_{x+z+1}}{\Delta_{x+z}} \text{Diagram 4} & = & \frac{\Delta_{x+z+1}}{\Delta_{x+z}} \text{Net}(x, y, z-1)
 \end{aligned}$$

The diagrams illustrate a sequence of isotopies in the plane.
 Diagram 1 shows a complex arrangement of three horizontal bars and two large loops labeled y and x .
 Diagram 2 shows a rearrangement of these elements.
 Diagram 3 shows a further simplification where the loops are more clearly defined.
 Diagram 4 is a simplified version of Diagram 3, representing the final stage of the isotopy.

であり、



である。こうして、漸化式

$$\text{Net}(x, y, z) = \text{Net}(x, y, z-1) \frac{\Delta_{x+z+1}}{\Delta_{x+z}} - \text{Net}(x+1, y-1, z-1) \frac{(\Delta_y)^2}{\Delta_{y+z}\Delta_{y+z-1}}$$

を得る。

補題の等式が成り立つことを z に関する数学的帰納法で証明する。

- $z = 0$ のとき: $\text{Net}(x, y, 0) = \Delta_{x+y}$ となることを示せばよい。

$$\text{Net}(x, y, 0) = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2}$$

であるから、

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4}$$

となることを示せばよい。これは、図式を次図のように平面のイソトピーで変形し、補題 2-5 を用いることによりわかる (帰納法で証明できる)。

$$\begin{aligned} \text{Diagram 5} &= \text{Diagram 6} \\ &= \text{Diagram 7} = \dots = \text{Diagram 8} \end{aligned}$$

• $z-1$ のとき補題の等式は成り立つと仮定する。このとき、先の漸化式より、

$$\begin{aligned} \text{Net}(x, y, z) &= \text{Net}(x, y, z-1) \frac{\Delta_{x+z+1}}{\Delta_{x+z}} - \text{Net}(x+1, y-1, z-1) \frac{(\Delta_y)^2}{\Delta_{y+z} \Delta_{y+z-1}} \\ &= \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_x! \Delta_y! \Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z-1}! \Delta_{z+x-1}! \Delta_{x+y}!} \cdot \frac{\Delta_{x+z+1}}{\Delta_{x+z}} - \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_{x+1}! \Delta_{y-1}! \Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z-2}! \Delta_{z+x}! \Delta_{x+y}!} \cdot \frac{(\Delta_y)^2}{\Delta_{y+z} \Delta_{y+z-1}} \\ &= \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_x! \Delta_y! \Delta_z!}{\Delta_{y+z}! \Delta_{z+x}! \Delta_{x+y}!} \left(\frac{\Delta_{y+z} \Delta_{x+z+1} - \Delta_{x+1} \Delta_y}{\Delta_z} \right) \end{aligned}$$

となるから、 z のときにも成り立つことを示すには、

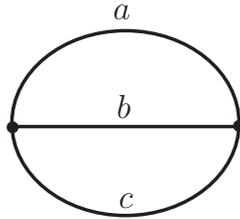
$$\Delta_{x+y+z+1}\Delta_z = \Delta_{y+z}\Delta_{x+z+1} - \Delta_{x+1}\Delta_y$$

となることを証明すればよい。これは以下のように計算すれば確かめられる。

$$\begin{aligned} \Delta_{y+z}\Delta_{x+z+1} - \Delta_{x+1}\Delta_y &= (-1)^{y+z+1} \frac{A^{2(y+z)} - A^{-2(y+z)}}{A^2 - A^{-2}} \cdot (-1)^{x+z+2} \frac{A^{2(x+z+1)} - A^{-2(x+z+1)}}{A^2 - A^{-2}} \\ &\quad - (-1)^{x+2} \frac{A^{2(x+1)} - A^{-2(x+1)}}{A^2 - A^{-2}} \cdot (-1)^{y+1} \frac{A^{2y} - A^{-2y}}{A^2 - A^{-2}} \\ &= (-1)^{x+y+1} \frac{A^{2(x+y+2z+1)} - A^{2(y-x-1)} - A^{2(x-y+1)} + A^{-2(x+y+2z+1)}}{(A^2 - A^{-2})^2} \\ &\quad - (-1)^{x+y+1} \frac{A^{2(x+y+1)} - A^{2(x-y+1)} - A^{2(-x+y-1)} + A^{-2(x+y+1)}}{(A^2 - A^{-2})^2} \\ &= (-1)^{x+y+1} \frac{A^{2(x+y+2z+1)} - A^{2(x+y+1)} + A^{-2(x+y+2z+1)} - A^{-2(x+y+1)}}{(A^2 - A^{-2})^2} \\ &= (-1)^{x+y+z+2} \frac{A^{2(x+y+z+1)} - A^{-2(x+y+z+1)}}{A^2 - A^{-2}} \cdot (-1)^{z+1} \frac{A^{2z} - A^{-2z}}{A^2 - A^{-2}} \\ &= \Delta_{x+y+z+1}\Delta_z \end{aligned}$$

以上で、補題 6-5 の証明が終わった。 □

$a, b, c \in \mathbb{N}$ とする。次の図で与えられる q -スピン・ネットワークを $\theta(a, b, c)$ で表わし、 θ -ネットと呼ぶ。



補題 6-5 の系として次を得る。

系 6-6

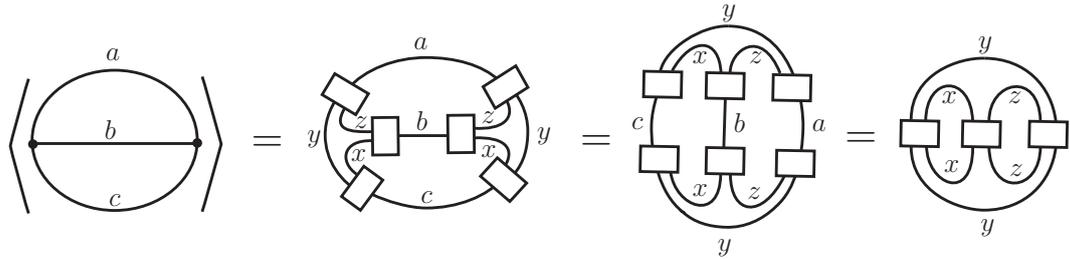
θ -ネットの値 $\langle \theta(a, b, c) \rangle$ は

$$\langle \theta(a, b, c) \rangle = \text{Net}(x, y, z)$$

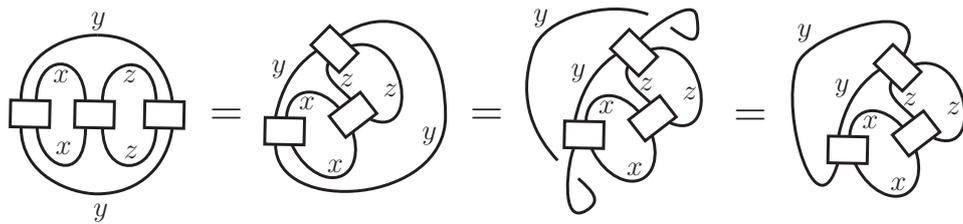
である。但し、 $x = (b + c - a)/2$, $y = (c + a - b)/2$, $z = (a + b - c)/2$ とする。

(証明)

定義により



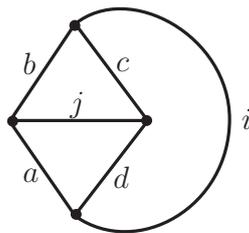
ここで、平面のイソトピーと補題 6-2 を使って、次の等式を得る。



よって、 $\langle \theta(a, b, c) \rangle = \text{Net}(y, x, z) = \text{Net}(x, y, z)$ である。 □

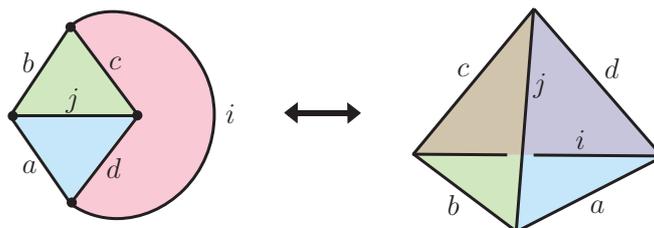
● 6-5 : 四面体ネット

次の図式で与えられる q -スピン・ネットワークを $\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}$ で表わし、四面体ネット (tetrahedron net) と呼ぶ。



この q -スピン・ネットワークの値はここでは紹介しない。[14; p.88–91] を参照。

なお、上の図式で与えられる q -スピン・ネットワークを四面体ネットと呼ぶ理由は、このグラフが次図の対応により四面体に対応していることに由来している。



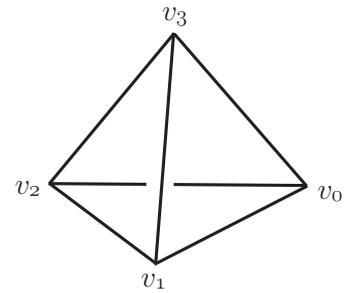
命題 6-7

四面体ネットは四面体の合同変換に関して不変である。

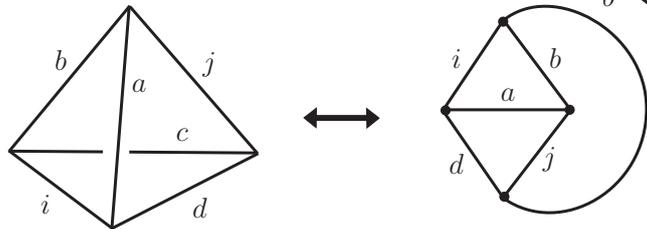
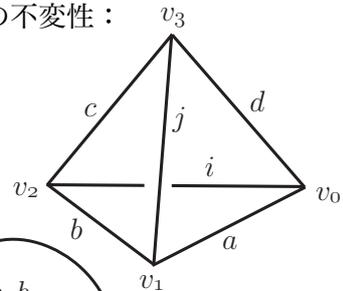
(証明)

四面体 $\sigma = |v_0v_1v_2v_3|$ を考える。このとき、四面体 σ を動かさない回転として、次の12種類が考えられる。

- (i) 恒等変換
- (ii) 1つの頂点とその頂点を含まない3つの頂点のなす三角形の重心を通る直線のまわりの $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 回転
- (iii) 対辺の中点を通る直線のまわりの π 回転

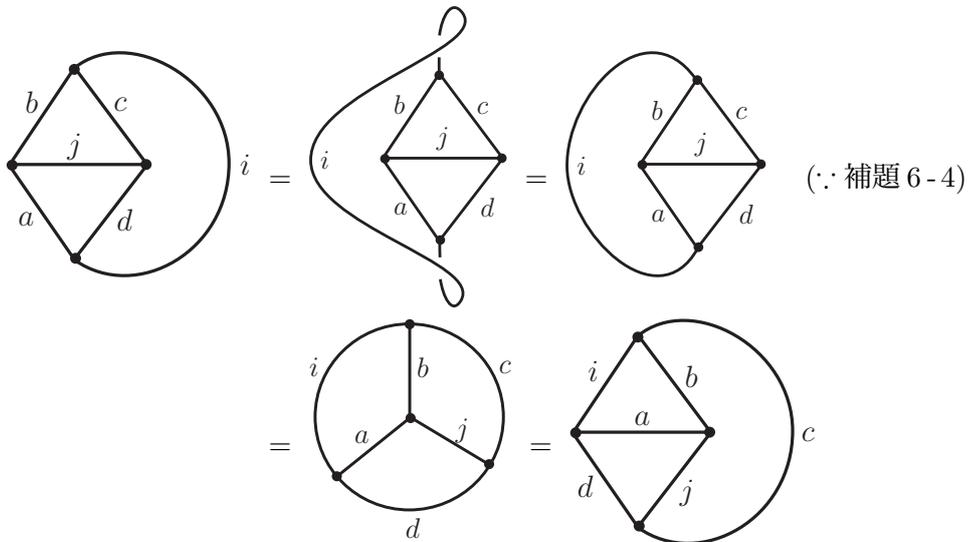


• v_0 と $\triangle v_1v_2v_3$ の重心を通る直線の回りの $\frac{\pi}{3}$ 回転の下での不変性：
 σ の各辺に右図のように0以上の整数 a, b, c, d, i, j をのせ、それを v_0 と $\triangle v_1v_2v_3$ の重心を通る直線の回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転させる。すると、下図左のようになる。それを四面体ネットに翻訳すると、下図右のようになる。

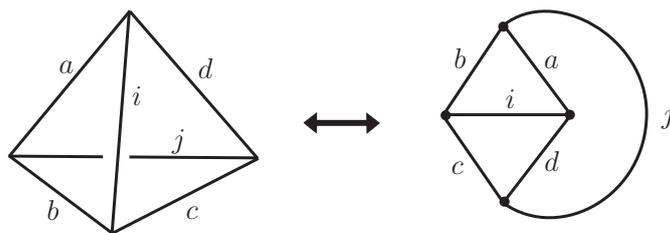


$$\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} = \text{Tet} \begin{bmatrix} d & i & c \\ b & j & a \end{bmatrix}$$

となることを示す。これは次のようにしてわかる。

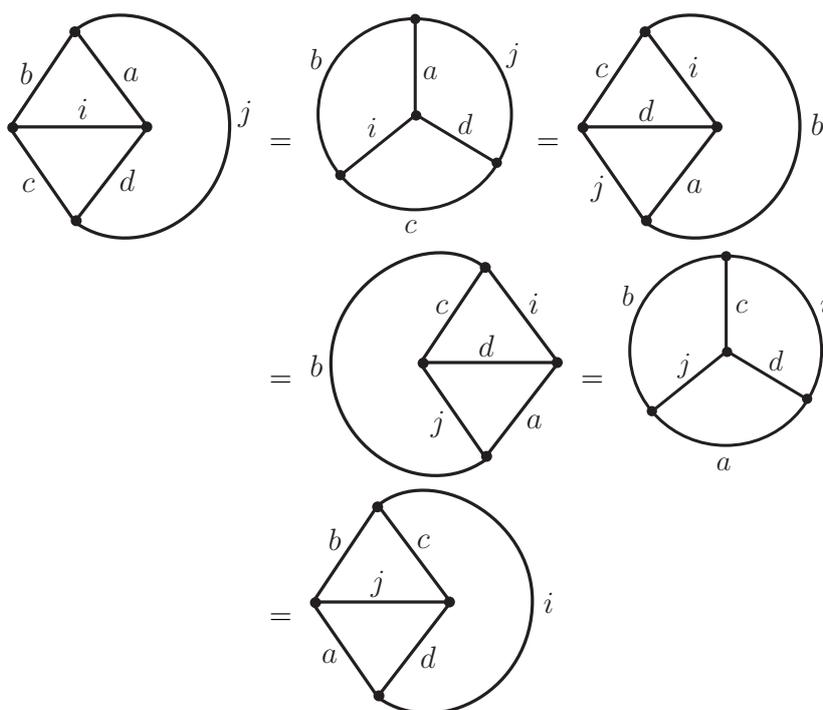


• v_1v_2 の中点と v_0v_3 の中点を通る直線の回りの π 回転の下での不変性：
 辺に彩色された σ を v_1v_2 の中点と v_0v_3 の中点を通る直線の回りに π 回転させる。すると、下図左のようになる。それを四面体ネットに翻訳すると、下図右のようになる。



$$\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} = \text{Tet} \begin{bmatrix} c & b & j \\ a & d & i \end{bmatrix}$$

となることを示す。これは次のようにしてわかる。

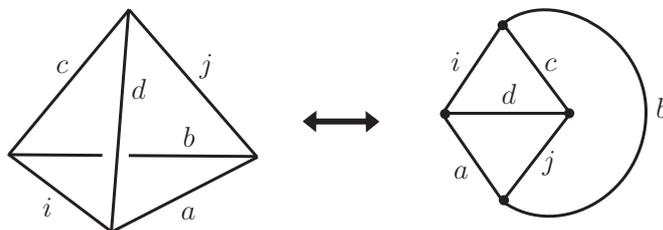


その他の四面体の回転についても不変であることが、同様の方法で証明できる。

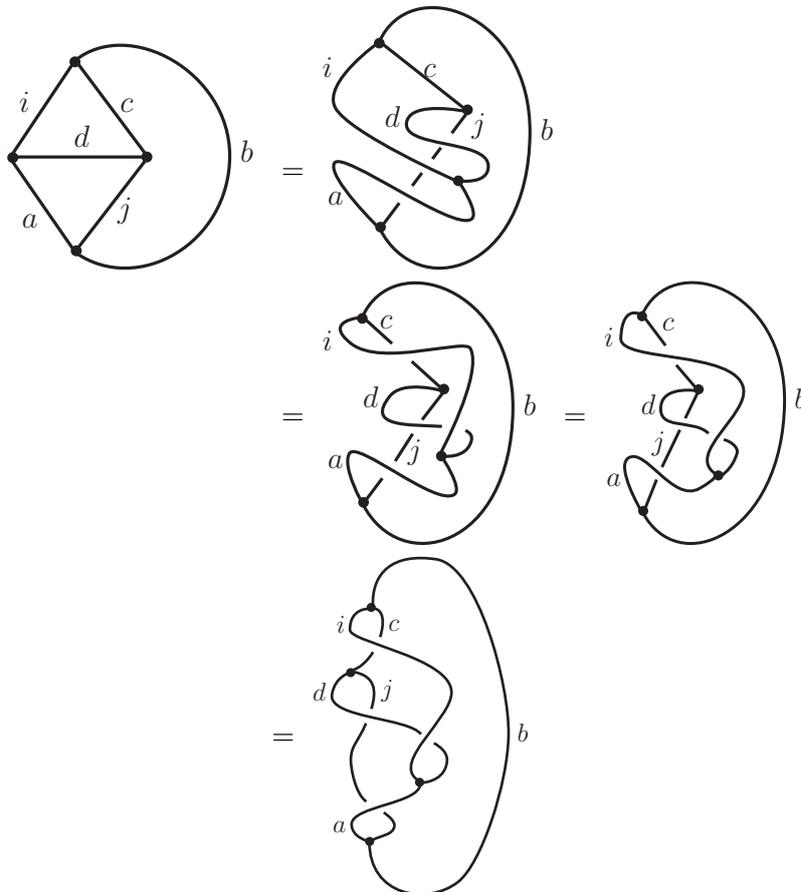
四面体の回転以外の合同変換として、1辺の midpoint とそれと向かい合う辺を含む平面に関する鏡映が考えられる。このような変換の下でも四面体ネットが不変であることを示そう。

- v_0v_1 の midpoint と v_2v_3 を含む平面に関する鏡映の下での不変性：

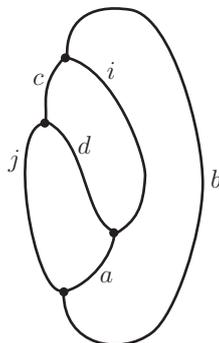
辺に彩色された σ を v_0v_1 の midpoint と v_2v_3 を含む平面に関して鏡映させる。すると、下図左のようになる。それを四面体ネットに翻訳すると、下図右のようになる。



$\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} = \text{Tet} \begin{bmatrix} a & i & b \\ c & j & d \end{bmatrix}$ を示す。これは次のようにしてわかる。まず、



となる。ここで命題 6-2 を用いると、最後の図式は

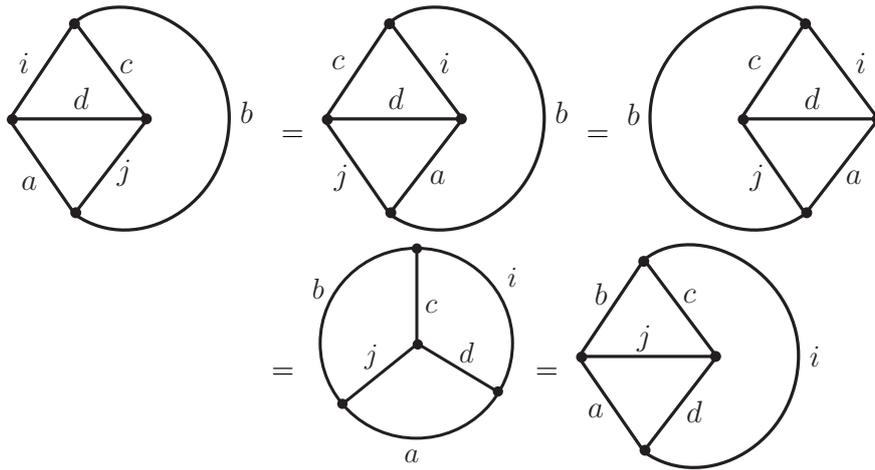


の定数倍となることがわかる。その定数は、

$$(-1)^{\frac{c+i-b}{2} + \frac{j+d-c}{2} + \frac{a-d-i}{2} + \frac{b-j-a}{2}} \times A^{\frac{1}{2}} \{c(c+2) + i(i+2) - b(b+2) + j(j+2) + d(d+2) - c(c+2) + a(a+2) - d(d+2) - i(i+2) + b(b+2) - j(j+2) - a(a+2)\}$$

$$= 1$$

である。したがって、



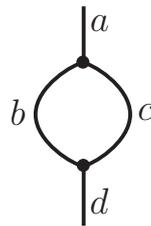
を得る。

- v_0v_2 の中点と v_1v_3 を含む平面に関する鏡映の下での不変性
- v_0v_3 の中点と v_1v_2 を含む平面に関する鏡映の下での不変性
- v_1v_2 の中点と v_0v_3 を含む平面に関する鏡映の下での不変性
- v_1v_3 の中点と v_0v_2 を含む平面に関する鏡映の下での不変性
- v_2v_3 の中点と v_0v_1 を含む平面に関する鏡映の下での不変性

も同様にして証明される。四面体を動かさない任意の合同変換は、上で述べた6つの鏡映(と回転)によって生成されるから、以上で命題は証明された。□

● 6-6 : q -スピン・ネットワークの局所変形 — バブル移動

次図で表わされる q -スピン・ネットワークの一部分を考える。



q -スピン・ネットワークの中のこのような部分は f_a のスカラー倍で置き換えることができる。詳しくは、

補題 6-8

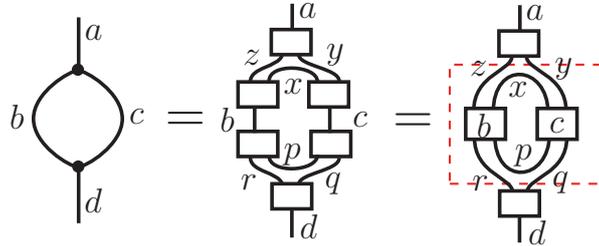
$\mathcal{S}(\mathbb{R} \times [0, 1], \Xi_{a,d})$ の元として、

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ / \quad \backslash \\ b \quad c \\ \backslash \quad / \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ d \end{array} = \delta_{a,d} \frac{\langle \theta(a, b, c) \rangle}{\Delta_a} \begin{array}{c} a \\ | \\ \boxed{f_a} \\ | \end{array}$$

が成り立つ。ここで、 $\delta_{a,d}$ はクロネッカーのデルタを表わす。

(証明)

x, y, z, p, q, r を $x = (b+c-a)/2, y = (c+a-b)/2, z = (a+b-c)/2, p = (b+c-d)/2, q = (c+d-b)/2, r = (d+b-c)/2$ とおくと、 $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times [0, 1], \Xi_{a,d})$ の元として、次の等式が成り立つ。



赤い点線で囲った枠内の図式を考える。 f_b を $\mathbf{1}_b, U_1, \dots, U_{b-1}$ の積と和で表わし、 f_c を $\mathbf{1}_c, U_1, \dots, U_{c-1}$ の積と和で表わせば、赤い点線で囲った枠内は単純 (a, d) -図式 (= いくつかの単純閉曲線と端点が赤線の上端と下端にあるようないくつかの単純曲線からなる交点がない図式で、上端・下端の端点の個数がそれぞれ a, d であるもの) の R -係数の線形和で表わされる。単純閉曲線の部分は $d \in R$ に置き換えると、単純閉曲線のない単純 (a, d) -図式の R -係数の線形和で表わされる。ここに現れる単純図式を D_1, \dots, D_k とおく。

• $a \neq d$ のとき：

$a > d$ とする。このとき、任意の D_i ($i = 1, \dots, k$) に対して、その上端から出発して再び上端に戻ってくる弧が存在する。したがって、その上端付近には必ず、

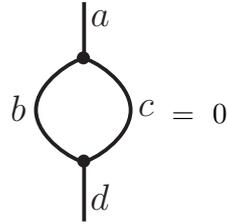


の形の部分が含まれることがわかる。

∴)

D_i の上端から出発して再び上端に戻ってくる各弧の端点に対して、左側の端点を L 、右側の端点を R でラベルづけする。また、上端から出発して上端には戻ってこない弧の上端点には M でラベルづけする。すると、 D_i の上端には L, R, M からなる長さ a の列が並ぶ。この列を左から右へ向かって見たときに、最後に登場する L をラベルに持つ弧を J とする。このとき、その L の次に来るのは J の右側の端点のラベル R となる。なぜならば、もし、そうでなかったとすると、 J の左側の端点のラベル L の次に来るラベルは、 J とは別の弧 J' の端点につけられたラベルということになる。しかも、そのラベルは M か R である。すると、 J の「内部」に別の弧 J' の端点があることになり、これが J の「外部」にある端点につながっていることになるので、必ず J と J' とは交わることになる。これは、 D_i が交わりがない単純な曲線からなることに反する。よって、 J の左側の端点のラベル L の次に来るラベルは J の右側の端点のラベル R となる。□

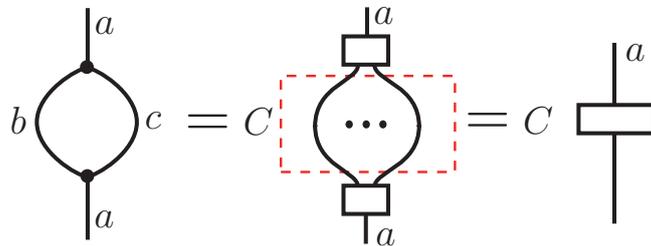
$f_a U_j = 0$ ($j = 1, \dots, a-1$) であるから、 $f_a D_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$) となる。したがって、 $a > d$ ならば、



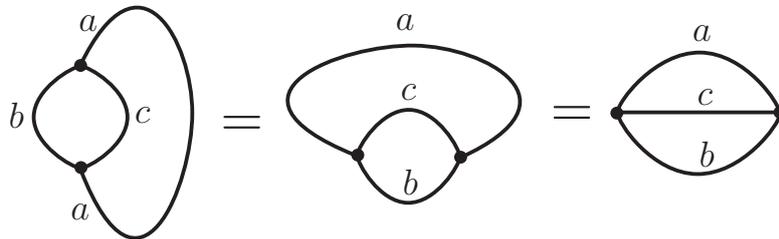
である。同様にして、 $d > a$ のときにも左辺のネットワークの値が 0 になることがわかる。

• $a = d$ のとき：

D_i が上端から出発して上端に戻る弧を持てば、 $a \neq d$ のときの考察と同じ理由により、 $f_a D_i = 0$ となる。また、下端から出発して下端に戻る弧を持てば、 $D_i f_d = 0$ となる。よって、上端から出発して上端に戻る弧を持たず、かつ、下端から出発して下端に戻る弧を持たないような D_i だけが“生き残る”。このような単純図式は、 1_a 以外に存在しない。つまり、 C を R のある元として、等式



が成り立つ。 C の値を求めるために、両辺のトレースをとる。すると、右辺は $C\Delta_a$ となり、左辺は



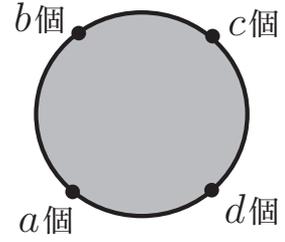
となる。よって、等式

$$\theta(a, b, c) = \theta(a, c, b) = C\Delta_a$$

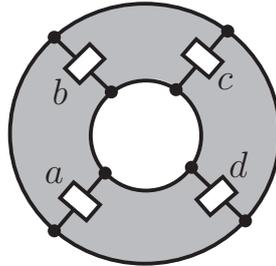
が成立する (最初の等号は補題 6-5 に基づく)。両辺を Δ_a で割れば、 C の値が求まり、 $a = d$ の場合の補題の等式が得られる。□

● 6-7: 量子 $6j$ 記号

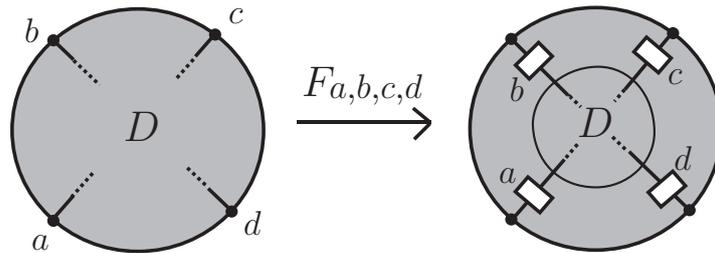
$a + b + c + d$ が偶数であるような整数 $a, b, c, d \geq 0$ に対して、線形スケイン $\mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c,d})$ を考える。ここで、 $\Xi_{a,b,c,d}$ は 2次元円板 D^2 の境界上の $a + b + c + d$ 個の固定された点の集合であり、右図のように配置されているものである (図では 4 個の点しか描かれていないが、それぞれ指定された個数だけ点が配置されていると考える)。



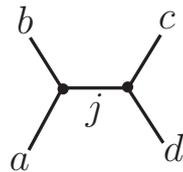
次に、アニュラスの線形スケイン $\mathcal{S}(S^1 \times [0, 1], \Xi_{a,b,c,d} \amalg \Xi'_{a,b,c,d})$ の元



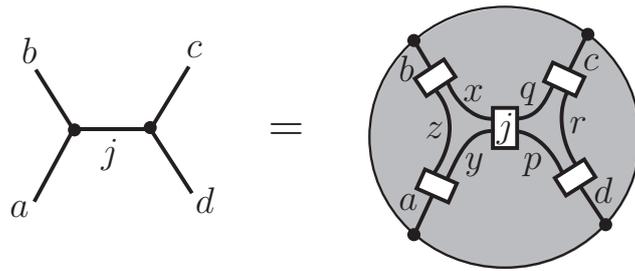
を考える。ここで、 $\Xi_{a,b,c,d}$ は外側の円周上に配置された $a + b + c + d$ 個の点の集合を表わし、 $\Xi'_{a,b,c,d}$ は内側の円周上に配置された $a + b + c + d$ 個の点の集合を表わす。各 $(D^2, \Xi_{a,b,c,d})$ 上のタンブル図式に対して、それを上図で表わされるアニュラス上の図式の「内部にはめ込む」ことにより、 $\mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c,d})$ の元が得られる。これを R 上線形に拡張することにより、 R -線形写像 $F_{a,b,c,d} : \mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c,d}) \rightarrow \mathcal{S}(D^2, \Xi_{a,b,c,d})$ が定まる。この像を $Q_{a,b,c,d}$ とおく。



$(a, b, j), (c, d, j)$ が許容的であるような任意の整数 $j \geq 0$ に対して、



を次のように定義される $Q_{a,b,c,d}$ の元とする。



但し、 $x = (b + j - a)/2$, $y = (j + a - b)/2$, $z = (a + b - j)/2$, $p = (d + j - c)/2$, $q = (j + c - d)/2$, $r = (c + d - j)/2$ である。

命題 6-9

$a, b, c, d \geq 0$ を $a + b + c + d$ が偶数であるような整数とする。このとき、 R -加群 $Q_{a,b,c,d}$ は

$$\left\{ \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \quad j \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array} \middle| j \in \mathbb{Z}, (a, b, j), (c, d, j) \text{ は許容的} \right\}$$

を R 上の基底として持つ。

(証明)

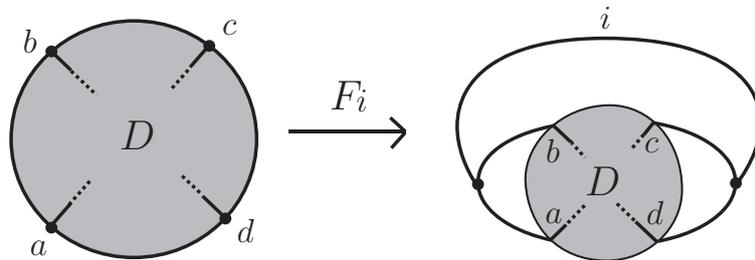
命題で与えられている $Q_{a,b,c,d}$ の部分集合を B とおく。

- B が R 上線形独立であること：

$$(6-7 a) \quad \sum_j C_j \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \quad j \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array} = 0 \quad (C_j \in R, \text{ 高々有限個の } C_j \text{ を除いて } C_j = 0)$$

とおく。但し、 j に関する和は (a, b, j) , (c, d, j) が許容的となるような 0 以上の整数にわたってとる。

$i \geq 0$ を (a, b, i) , (c, d, i) が許容的であるような整数とする。線形写像 $F_i : S(D^2, \Xi_{a,b,c,d}) \rightarrow S(D^2)$ を



によって定義する。この線形写像による (6-7 a) の像を考えると、等式

$$(6-7 b) \quad \sum_j C_j \begin{array}{c} i \\ \diagdown \quad / \\ \quad j \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array} = 0$$

を得る。補題 6-8 より、上式の左辺は $j = i$ の項だけが生き残り、 $j = i$ の項は

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &= \frac{\langle \theta(a,b,i) \rangle \langle \theta(c,d,i) \rangle}{\Delta_i^2} \text{Diagram 2} \\
&= \frac{\langle \theta(a,b,i) \rangle \langle \theta(c,d,i) \rangle}{\Delta_i^2} \text{Diagram 3} \\
&= \frac{\langle \theta(a,b,i) \rangle \langle \theta(c,d,i) \rangle}{\Delta_i}
\end{aligned}$$

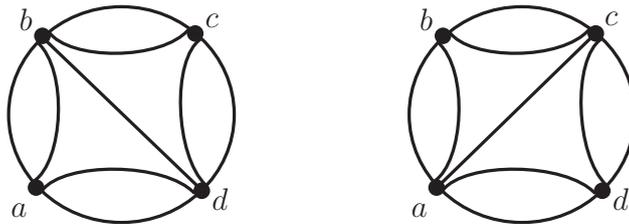
となる。これより、

$$C_i \frac{\langle \theta(a,b,i) \rangle \langle \theta(c,d,i) \rangle}{\Delta_i} = 0$$

を得る。よって、 $C_i = 0$ が得られ、 B は線形独立系である。

• B が $Q_{a,b,c,d}$ を張ること：

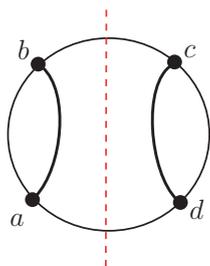
$(D^2, \Xi_{a,b,c,d})$ 上の交点も閉じた弧もない任意のタンクル図式 D に対して、 $F_{a,b,c,d}(D)$ が B の元の R -線形結合で表わされることを証明すればよい。 D には交点も閉じた弧もないので、 D における弧の繋がり方は次図の左または右のような状態になっている (頂点を結ぶ線は1本しか描かれていないが複数本出ているかもしれないし、線が全く出ていないかもしれない)。



さて、円弧 \widehat{bc} の中点と円弧 \widehat{ad} の中点とを通る“垂直な直線” l を考える。これを破線で表わす。必要ならば、境界 (の各点) を固定する D^2 のイソトピーで D の弧を動かして、 D の各弧は直線 l と有限個の点で横断的に交わる (交点がない場合も含む) ようにすることができる。そのときの交点の最小個数を $m(D)$ とおく。

$m(D)$ に関する帰納法で $F_{a,b,c,d}(D)$ が B の元の R -線形結合で表わされることを証明する。

• $m(D) = 0$ のとき：タンクル図式 D は次図の形になっている。

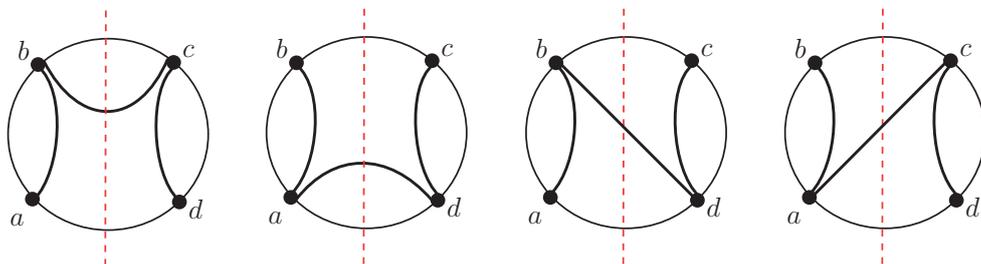


したがって、

$$F_{a,b,c,d}(D) = \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \quad 0 \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array}$$

と表わされる。

- $m(D) = 1$ のとき：タンクル図式 D は下図のいずれかの形になっている。



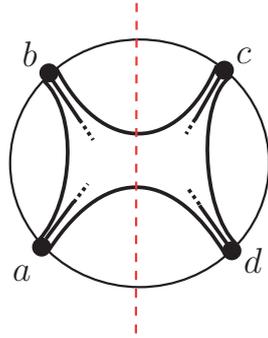
破線付近の D の弧の一部分を $\mathbf{1}_1 = f_1$ とみなせるから、上のいずれの場合についても

$$F_{a,b,c,d}(D) = \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \quad 1 \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array}$$

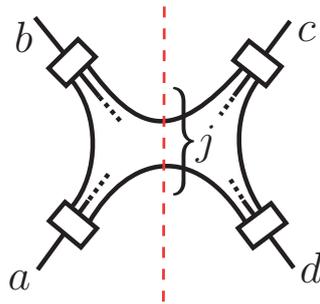
と表わされる。

- $j \geq 2$ とし、 $m(D') < j$ であるような、交点も閉じた弧もない任意のタンクル図式 D' に対して $F_{a,b,c,d}(D')$ が \mathcal{B} の元 ($j' < j$ かつ (a, b, j') , (c, d, j') は許容的であるような $\begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \quad j' \\ / \quad \diagdown \\ a \quad d \end{array}$)

の R -線形結合で表わされると仮定する。このとき、 D を交点も閉じた弧もないタンクル図式であって $m(D) = j$ であるものとする。一般性を失うことなく、 D の各弧は l と j 個の点で横断的に交わっているとしてよい。



この D に対して、 $F_{a,b,c,d}(D)$ を考える。



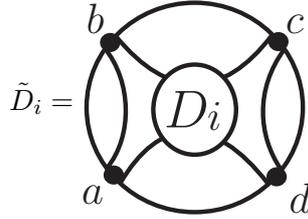
$F_{a,b,c,d}(D)$ の直線 l の付近の様子は $\left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right\} j$ のようになっている。

$$f_j = \mathbf{1}_j + \mathcal{U} \quad (\mathcal{U} \in \text{Span}_R \{ U_{i_1} \cdots U_{i_k} \mid k \geq 0, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, j-1 \})$$

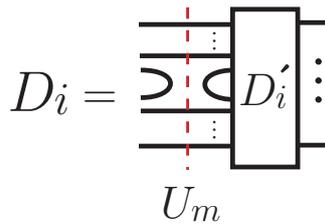
と書けるから、破線部分の付近を $\mathbf{1}_j$ とみなして $f_j - \mathcal{U}$ に置き換えることにより、

$$\begin{aligned}
 F_{a,b,c,d}(D) &= \left(\begin{array}{c} b \\ \diagdown \\ \square \\ \diagup \\ a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \square \\ \diagdown \\ d \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right] j - \left(\begin{array}{c} b \\ \diagdown \\ \square \\ \diagup \\ a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \square \\ \diagdown \\ d \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathcal{U} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} b \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ d \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right] j - \left(\begin{array}{c} b \\ \diagdown \\ \square \\ \diagup \\ a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \square \\ \diagdown \\ d \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathcal{U} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

と表わせることがわかる。上式の第2項における U は $U_{i_1} \cdots U_{i_k}$ の形をした単純図式の R -線形結合の形になっている。その R -線形結合の和の中に現れる任意の単純図式 D_i について、



とおくと、 $m(\tilde{D}_i) < j$ となる。なぜならば、 D_i は少なくとも1つの U_m ($m \in \{1, \dots, j-1\}$) があって、 $D_i = U_m D'_i$ の形をしているからである。



帰納法の仮定により、 $F_{a,b,c,d}(\tilde{D}_i)$ は \mathcal{B} の元 ($j' < j$ かつ (a, b, j') , (c, d, j') は許容的であるような $\begin{matrix} b & & c \\ & \searrow & / \\ & j' & \\ & / & \searrow \\ a & & d \end{matrix}$) の R -線形結合で表わされる。したがって、 $F_{a,b,c,d}(D)$ もまた \mathcal{B} の元 ($j' \leq j$

かつ (a, b, j') , (c, d, j') は許容的であるような $\begin{matrix} b & & c \\ & \searrow & / \\ & j' & \\ & / & \searrow \\ a & & d \end{matrix}$) の R -線形結合で表わされることがわかる。これで、帰納法が完成し、 \mathcal{B} が $Q_{a,b,c,d}$ を張ることの証明が終わった。 \square

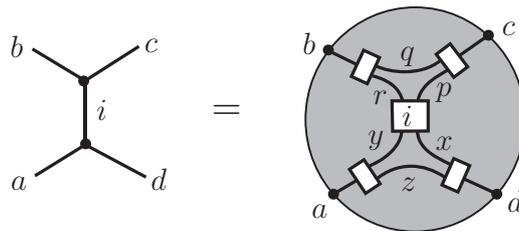
命題6-9とまったく同様にして、次も証明することができる。

系 6-10

$a, b, c, d \geq 0$ を $a+b+c+d$ が偶数であるような整数とする。このとき、 R -加群 $Q_{a,b,c,d}$ は

$$\left\{ \begin{matrix} b & & c \\ & \searrow & / \\ & i & \\ & / & \searrow \\ a & & d \end{matrix} \middle| i \in \mathbb{Z}, (a, b, i), (c, d, i) \text{ は許容的} \right\}$$

を R 上の基底として持つ。但し、



であり、 $x = (a+d-i)/2$, $y = (i+a-d)/2$, $z = (a+d-i)/2$, $p = (i+c-b)/2$, $q = (c+b-i)/2$, $r = (b+i-c)/2$ である。

命題 6-9 と系 6-10 より、 $Q_{a,b,c,d}$ の 2 つの基底が得られる。したがって、それらの基底の変換が考えられる。その基底の変換行列の各係数を量子 $6j$ 記号 (quantum $6j$ -symbol) と呼ぶ。すなわち、量子 $6j$ 記号とは次式で定義される R の元

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\}$$

のことをいう。

$$\text{Diagram with edges } a, b, c, d \text{ and label } j = \sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \text{Diagram with edges } a, b, c, d \text{ and label } i$$

● 6-8 : 量子 $6j$ 記号と四面体ネットとの関係

量子 $6j$ 記号の値は四面体ネットの値を使って計算することができる。

命題 6-11

$a, b, c, d, i, j \geq 0$ を $(a, b, j), (c, d, j), (a, d, i), (b, c, i)$ が許容的であるような整数とする。このとき、量子 $6j$ 記号の値は

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} = \frac{\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} \Delta_i}{\langle \theta(a, d, i) \rangle \langle \theta(b, c, i) \rangle}$$

で与えられる。

(証明)

$(b, c, k), (a, d, k)$ が許容的であるような任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{Diagram with edges } a, b, c, d \text{ and label } j \text{ and line } k = \sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \text{Diagram with edges } a, b, c, d \text{ and label } i \text{ and line } k$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & k \\ c & d & j \end{array} \right\} \frac{\langle \theta(b, c, k) \rangle \langle \theta(a, d, k) \rangle}{\Delta_k^2} \begin{array}{c} |k \\ \square \\ |k \\ \square \\ |k \end{array} \quad (\because \text{補題 6-6}) \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & k \\ c & d & j \end{array} \right\} \frac{\langle \theta(b, c, k) \rangle \langle \theta(a, d, k) \rangle}{\Delta_k^2} \begin{array}{c} |k \\ \square \\ | \end{array}
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} k \\ \circ \\ b \quad c \\ \circ \\ a \quad j \quad d \\ \circ \\ k \end{array} &= \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & k \\ c & d & j \end{array} \right\} \frac{\langle \theta(b, c, k) \rangle \langle \theta(a, d, k) \rangle}{\Delta_k^2} \begin{array}{c} k \\ \square \end{array} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & k \\ c & d & j \end{array} \right\} \frac{\langle \theta(b, c, k) \rangle \langle \theta(a, d, k) \rangle}{\Delta_k}
\end{aligned}$$

を得る。両辺を $\frac{\Delta_k}{\langle \theta(b, c, k) \rangle \langle \theta(a, d, k) \rangle}$ 倍すれば求めていた等式になる。 \square

● 6-9 : 1 の冪根での特殊化と有限な許容系

Temperley-Lieb 代数を用いて 3 次元多様体の不変量を構成するためには、 A を 1 の冪根に特殊化して、許容系の中から「閉じた」有限系を取り出す必要がある。そのために、 Δ_n の零点を調べよう。

補題 6-12

$n \geq 2$ のとき、 Δ_n は、 $\mathbb{R}[d]$ において、次のように一次式の積に分解する：

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(d - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

(証明)

$\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式 $\Delta_{n+1} = d\Delta_n - \Delta_{n-1}$ を満たし、また、 $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 1$ であるから、 Δ_n は d について最高次の係数が 1 の $n-1$ 次多項式になっていることがわかる。よって、補題を証明するためには、 $\Delta_n \in \mathbb{R}[d]$ が $2 \cos \frac{k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) を根に持つことを示せばよい。

今、 $d \in \mathbb{R}$ とし、方程式 $x^2 - dx + 1 = 0$ の \mathbb{C} における解 x を考える。両辺に x^{-1} を掛けると $x - d + x^{-1} = 0$ となるから、

$$d = x + x^{-1}$$

である。 $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ は d を不定元として漸化式 $\Delta_{n+1} = d\Delta_n - \Delta_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすが、この d に上で固定した実数 d を代入すれば、

$$\Delta_{n+1}(d) = d\Delta_n(d) - \Delta_{n-1}(d) = (x + x^{-1})\Delta_n(d) - \Delta_{n-1}(d)$$

を得る。これは

$$\Delta_{n+1}(d) - x\Delta_n(d) = x^{-1}(\Delta_n(d) - x\Delta_{n-1}(d))$$

と書き換えられる。よって、

$$(6-9 a) \quad \Delta_{n+1}(d) - x\Delta_n(d) = x^{-n}(\Delta_1(d) - x\Delta_0(d)) = x^{-n}$$

を得る。\$x\$ と \$x^{-1}\$ との対称性から同様の考察で

$$(6-9 b) \quad \Delta_{n+1}(d) - x^{-1}\Delta_n(d) = x^n$$

も得られる。(6-9 a) と (6-9 b) から

$$(x - x^{-1})\Delta_n(d) = x^n - x^{-n}$$

を得る。今、\$k = 1, 2, \dots, n-1\$ として \$d = 2 \cos \frac{k\pi}{n}\$ の場合を考える。このとき、\$x^2 - dx + 1 = 0\$ の \$\mathbb{C}\$ における解 \$x\$ は \$x = e^{\pm \frac{k\pi i}{n}}\$ である。\$x = e^{\frac{k\pi i}{n}}\$ の場合を考えると、\$x - x^{-1} = 2i \sin \frac{k\pi}{n} \neq 0\$ (\$\because k = 1, 2, \dots, n-1\$)、かつ、\$x^n - x^{-n} = e^{\frac{nk\pi i}{n}} - e^{-\frac{nk\pi i}{n}} = (-1)^k - (-1)^k = 0\$ であるから、\$\Delta_n(2 \cos \frac{k\pi}{n}) = 0\$ を得る。 \$\square\$

上の補題より、

$$(6-9 c) \quad \Delta_n = 0 \iff d = 2 \cos \frac{k\pi}{n} \text{ for some } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

となる。

以下では、2 以上の整数 \$r\$ を固定して、\$A\$ を \$A = \exp(\frac{\pi i}{2r})\$ に特殊化して考える。

$$q = A^2 = \exp\left(\frac{\pi i}{r}\right)$$

とおく。このとき、

$$d = -A^2 - A^{-2} = -q - q^{-1} = -2 \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) = 2 \cos\left(\frac{(r-1)\pi}{r}\right)$$

となる。よって、この \$d\$ がこの値のとき、\$\Delta_r = 0\$ であるが、\$n = 0, 1, \dots, r-1\$ に対して \$\Delta_n \neq 0\$ である。

\$\therefore\$)

\$\Delta_r = 0\$ となることは (6-9 c) からわかる。

\$n = 0, 1, \dots, r-1\$ とする。\$\Delta_n = 0\$ となったとすると、(6-9 c) により、\$d = 2 \cos \frac{k\pi}{n}\$ (\$k \in \{1, \dots, n-1\}\$) である。よって、

$$\cos \frac{(r-1)\pi}{r} = \cos \frac{k\pi}{n}$$

となる。\$0 < \frac{(r-1)\pi}{r} < \pi\$、\$0 < \frac{k\pi}{n} < \pi\$ であるから、上の等式は

$$\frac{(r-1)\pi}{r} = \frac{k\pi}{n}$$

に同値である。よって、

$$k = \frac{r-1}{r}n = n - \frac{r}{n}$$

を得る。

$$1 \leq n - k = \frac{r}{n}$$

だから $n \leq r$ となる。これは矛盾。故に、 $n = 0, 1, \dots, r-1$ に対しては $\Delta_n \neq 0$ である。 □

集合 $I = \{0, 1, \dots, r-1\}$ の元の3つ組 (a, b, c) が r -許容的 (r -admissible) であるとは、次の3条件が成り立つときをいう。

- (i) $a + b + c$ は偶数である。
- (ii) $b + c - a \geq 0, c + a - b \geq 0, a + b - c \geq 0$.
- (iii) $a + b + c \leq 2r - 4$. *

I の元の r -許容的な3つ組 (a, b, c) の全体を Adm_r とおく。

$(a, b, c) \in \text{Adm}_r$ ならば、 $\langle \theta(a, b, c) \rangle \neq 0$ となる。

∴)

$x = (b + c - a)/2, y = (c + a - b)/2, z = (a + b - c)/2$ とおく。すると、

$$\begin{aligned}
 x + y + z + 1 &= \frac{a + b + c}{2} + 1 \leq \frac{2r - 4}{2} + 1 < r, \\
 x &= \frac{b + c - a}{2} \leq \frac{a + b + c}{2} \leq \frac{2r - 4}{2} < r, \\
 y &= \frac{c + a - b}{2} \leq \frac{a + b + c}{2} \leq \frac{2r - 4}{2} < r, \\
 z &= \frac{a + b - c}{2} \leq \frac{a + b + c}{2} \leq \frac{2r - 4}{2} < r, \\
 x + y &= c < r, \quad y + z = a < r, \quad z + x = b < r
 \end{aligned}$$

となる。よって、補題6-5と系6-6と全く同様にして

$$\langle \theta(a, b, c) \rangle = \text{Net}(x, y, z) = \frac{\Delta_{x+y+z+1}! \Delta_x! \Delta_y! \Delta_z!}{\Delta_{y+z}! \Delta_{z+x}! \Delta_{x+y}!}$$

が成り立つ。 □

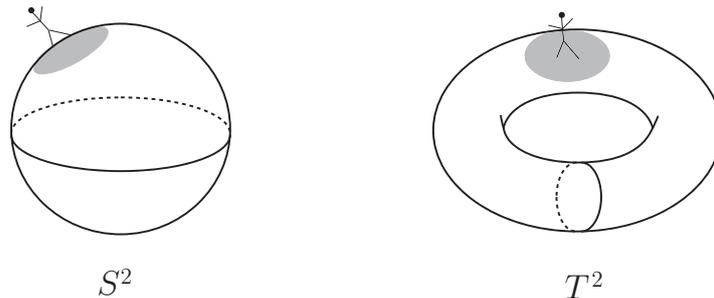
*条件 (iii) は初版 (2010年1月14日版) では右辺が正しくなかったので、修正した。

§7. 3次元多様体の状態和不変量

Kauffman と Lins は Temperley-Lieb 代数を用いて 3次元多様体の位相不変量を定義した [14]。それは、3次元多様体を四面体の和集合に分割し、その各四面体に四面体ネットを対応させることによって定義される一種の状態和の形で与えられる。その状態和不変量の構成方法を述べる前に、3次元多様体とその単体分割について簡単に説明しておこう。

● 7-1 : 3次元多様体とその単体分割

n 次元多様体とは、ごく大雑把に言えば、「局所的には \mathbb{R}^n のように思える」位相空間のことをいう。その意味は、その空間の上に人が立ったとしたとき、どの場所から眺めても、その付近の様子はあたかも \mathbb{R}^n の中にいるかのように見える、ということである。 $n=2$ のときには、球面 S^2 やトーラス T^2 などがそのような性質を持つ空間である。



位相空間 M が n 次元位相多様体 (topological manifold) であるとは、次の2つの条件が成り立つときをいう。

(TM1) M は Hausdorff 空間である、すなわち、相異なる任意の2点 $p, q \in M$ に対して、 M における p の開近傍 U と q の開近傍 V であって、 $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する。

(TM2) 任意の $p \in M$ に対して、 p の M における開近傍 U であって、 \mathbb{R}^n の開集合と同相になるものが存在する、すなわち、

$$\exists U : \text{open n.b.d. of } p \text{ in } M, \exists U' : \text{open in } \mathbb{R}^n, \exists h : U \rightarrow U' : \text{homeo.}$$

例 7-1

(1) 3次元球面 $S^3 = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \}$ は 3次元多様体である。

(2) 積空間 $S^2 \times S^1, S^1 \times S^1 \times S^1$ は 3次元多様体である。

(3) S^3 の対蹠点を同一して得られる空間 \mathbb{RP}^3 は 3次元多様体である。

多様体の研究は手法の上からは大きく2つに分かれる。1つは微積分の手法を用いて研究する方法であり、もう1つは組合せ構造を通して研究する方法である。この講義では後者の視点から多様体を扱う。そのために、多様体を単体と呼ばれる基本的なピースに分解する。

ユークリッド空間の中の部分集合 σ が n -単体 (n -simplex) であるとは、一般的な位置にある $n+1$ 個の点 v_0, v_1, \dots, v_n を用いて

$$\sigma = |v_0 v_1 \cdots v_n| := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 (i = 0, 1, \dots, n) \right\}$$

と表わされるもののことをいう。ここで、 v_0, v_1, \dots, v_n が一般的な位置にあるとは、 n 個のベクトル $\overrightarrow{v_0v_1}, \overrightarrow{v_0v_2}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$ が一次独立であるときをいう。 v_0, v_1, \dots, v_n を σ の頂点 (vertex) という。単体 $\sigma = |v_0v_1 \cdots v_n|$ に対してその頂点のうちのいくつかを取り出したものを $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ とすると、これらはまた一般的な位置にあるので、 k -単体 $\tau = |v_{i_0}v_{i_1} \cdots v_{i_k}|$ が得られる。このような単体を σ の面 (face) と呼ぶ。

$n = 1, 2, 3$ のとき、任意のコンパクトな n 次元位相多様体 M に対して単体分割 K が存在し、その多面体に同相となることが知られている ($n = 2$ に対しては Radó により、 $n = 3$ に対しては Moise により証明された)。ここで M の単体分割 (simplicial decomposition) または三角形分割 (triangulation) とは、0-単体 (= K の頂点と呼ばれる)、1-単体 (= K の辺と呼ばれる)、2-単体 (= K の面と呼ばれる)、3-単体 (= K の四面体と呼ばれる) からなる有限集合 K であって、次の 3 条件を満たすものをいう。

(SC1) 任意の $\sigma \in K$ に対してその任意の面 τ も K に属する。

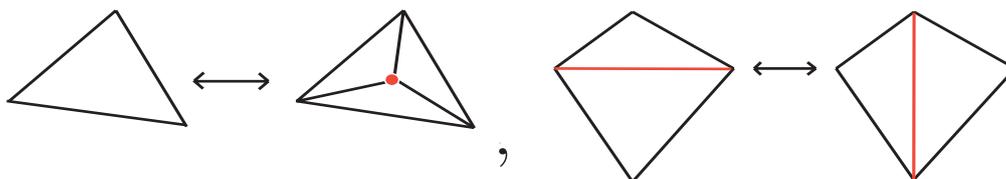
(SC2) $\sigma, \tau \in K$, $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば、 $\sigma \cap \tau$ は σ の面であり、 τ の面でもある。

(SC3) $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ は M と同相である。

単体分割に関する基本的な事実は、田村一郎・著『トポロジー』(岩波全書)を参照。

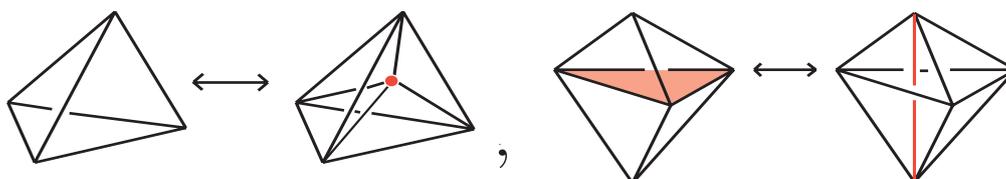
● 7-2 : 単体分割に対する Pachner 移動

与えられた曲面に対してその単体分割はたくさん考えられるが、これらのどんな 2 つも、次図で表わされる非常に単純な置き換え (右から左への変形と左から右への変形) の繰り返しによって移りあうことが知られている。



このような操作を曲面の単体分割に対する Pachner 移動 (Pachner move) と呼ぶ。オイラー数のように、多様体の単体分割を利用して定義された量が位相不変量であることを示すためには、Pachner 移動の下でその量が不変なことを示せばよい。

同様の操作は 3 次元多様体の単体分割に対しても行うことができる (実は任意の次元で定義することができる)。



上図における左から 2 番目、3 番目、4 番目では、それぞれ 4 つ、2 つ、3 つの四面体が頂点、三角形、辺を共有して貼り合わさった状態を描いている。このような分割の置き換え操作

を 3 次元多様体の単体分割に対する **Pachner 移動** (*Pachner move*) と呼ぶ。Pachner により、次の結果が知られている。

定理 7-2 (Pachner)

2つの 3次元閉多様体と同相のとき、それらの単体分割は、Pachner 移動の有限列により移りあう。

● **7-3 : 3 次元多様体の Turaev-Viro 不変量**

3次元多様体の Turaev-Viro 不変量 [26] は少し正規化された量子 $6j$ -記号を使って定義される。 r を 2 以上の整数とする。

M を閉 3次元多様体 (向きづけ不可能でもよい) とし、その単体分割 T を 1つとる。 T の各辺に $I = \{0, 1, \dots, r-1\}$ の元を割り当てる仕方が r -許容的であるとは、 T の各三角形の 3つの辺に対して、その 3辺に割り当てられている I の元が r -許容的であるときをいう。このような割り振り方を **カラー** (または **状態**) と呼ぶ。

さて、 T のカラー φ と四面体 $\sigma = |v_0 v_1 v_2 v_3|$ に対して複素数

$$W(\sigma; \varphi) = \begin{array}{c} \text{c} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{b} \quad \text{a} \quad \text{d} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{i} \quad \text{j} \end{array}$$

を対応させる規則が与えられているとしよう。上の等式の右辺には σ の頂点の場所が記されていないが、どこを v_0, v_1, v_2, v_3 に選んでも値は不変である (四面体の合同変換に関して対称である) とする。ここで、 i と j で彩色される辺の位置が四面体ネットの節で登場したときと逆になっていることに注意されたい。その意味は後ほど明らかになる。

次で定義される複素数 $Z(T)$ を考える。

$$Z(T) = \omega^{-\#T^{(0)}} \sum_{\varphi: \text{color of } T} \left(\prod_{e: \text{edge of } T} \Delta_{\varphi(e)} \right) \left(\prod_{\sigma: \text{tetrahedron of } T} W(\sigma; \varphi) \right).$$

ここで、 $T^{(0)}$ は T の頂点全体からなる集合であり、

$$\omega = \sum_{a=0}^{r-1} \Delta_a^2$$

である。

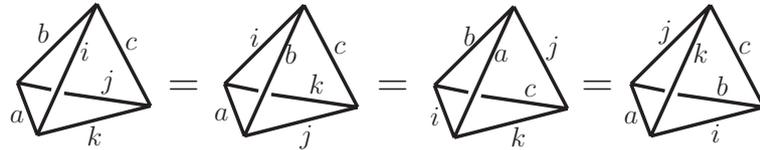
注意: ω はしばしば **大域次元** と呼ばれる。これは圏あるいは正則表現の次元 (あるいは、それらに含まれる元の個数) を測っていると考えられる。群の表現論を知っている人は、群環 $\mathbb{C}[G]$ の左正則表現が G の既約表現の完全代表系 V_0, \dots, V_n を用いて $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{a=0}^n V_a \otimes V_a^*$ のように直

和分解されたことを思い出して欲しい。この両辺の次元を数えると等式 $|G| = \sum_{a=0}^n (\dim V_a)^2$ が得られる。したがって、 $\Delta_a = \text{Tr}(f_{a-1})$ を既約表現 V_a の次元に対応するものと考えれば、大域次元 ω の公式となる。実は、量子群と呼ばれる代数的な対象 $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ を考えると、実際

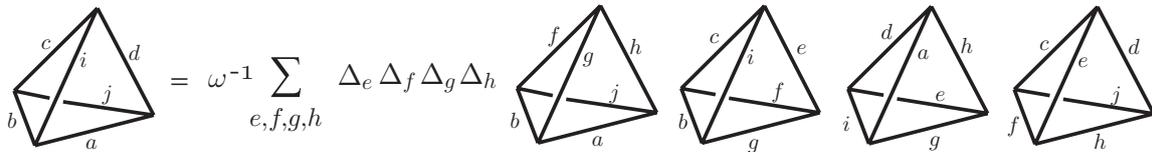
に、 Δ_a はその既約表現の量子化された次元として意味を持ち、群環の場合と同様に、空間レベルでの等式がある意味で成立する [4, 25, 33]。

上のように定義される量 $Z(T)$ はいつ 3 次元多様体の位相不変量になるであろうか？その必要十分条件は、Pachner の定理により、次の 3 つが成立することである。

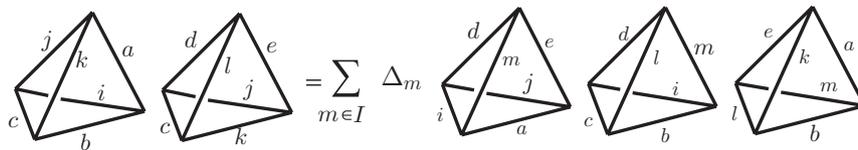
- $W(\sigma; \varphi)$ が四面体の合同変換に関して対称性を持つ：



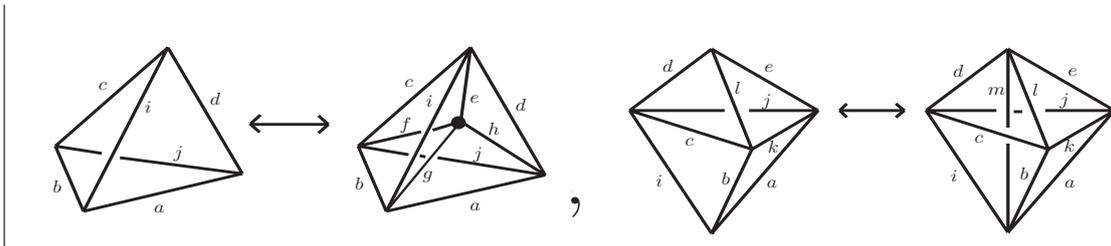
- 次の関係式が成立する。



- 次の関係式が成立する。



∴)



● 7-4 : 量子 $6j$ 記号の性質 — Biedenharn-Elliot 恒等式

量子 $6j$ -記号は次の等式を満足する。

命題 7-3 (Biedenharn-Elliot 恒等式)

$(a, i, j), (b, c, i), (a, b, k), (d, e, j), (c, d, l), (e, k, l)$ が許容的であるような 0 以上の任意の整数 a, b, c, d, e, i, j に対して

$$(7-4 a) \quad \left\{ \begin{matrix} b & c & k \\ j & a & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & c & l \\ d & e & j \end{matrix} \right\} = \sum_m \left\{ \begin{matrix} a & i & m \\ d & e & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & c & l \\ d & m & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & l & k \\ e & a & m \end{matrix} \right\}$$

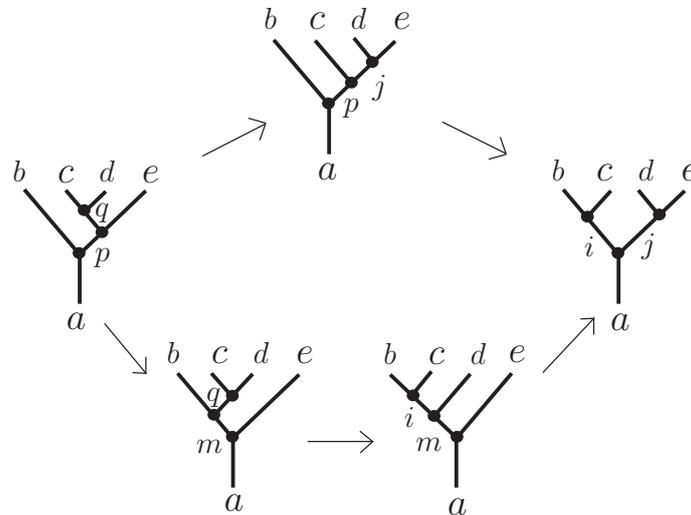
但し、右辺の和は $(i, d, m), (a, e, m)$ が許容的となるような m にわたってとる。

(証明)

命題の奇妙な等式は、二項演算が与えられた集合 S の 4 つの元 a, b, c, d に対して、積をとる方法と関係している。実際、 a, b, c, d の並べ方を変えずに積をとる方法は 5 通りあり、それは

$$a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd), \quad (a(bc))d, \quad ((ab)c)d$$

で与えられる。 S 上の二項演算が結合的であれば、結合法則をうまく適用することにより、これらはすべて等しいことがわかる。この事実は次のようなグラフで表現することができる。



まず、“上回り”について計算する。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} b & c & d & e \\ i & j & & \end{matrix} \right\} &= \sum_{p:(c,j,p), (a,b,p) \in \text{Adm}} \left\{ \begin{matrix} b & c & p \\ j & a & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & c & d & e \\ & & p & j \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{\substack{p:(c,j,p), (a,b,p) \in \text{Adm} \\ q:(c,d,q), (e,p,q) \in \text{Adm}}} \left\{ \begin{matrix} b & c & p \\ j & a & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p & c & q \\ d & e & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & c & d & e \\ & & q & \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

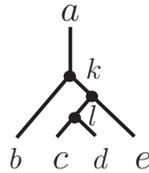
となる。一方、“下回り”について計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad j \\ | \\ a \end{array} &= \sum_{m:(i,d,m),(a,e,m) \in \text{Adm}} \left\{ \begin{array}{c} a \quad i \quad m \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ i \quad m \\ | \\ a \end{array} \\
&= \sum_{\substack{m:(i,d,m),(a,e,m) \in \text{Adm} \\ q:(c,d,q),(b,m,q) \in \text{Adm}}} \left\{ \begin{array}{c} a \quad i \quad m \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad q \\ d \quad m \quad i \end{array} \right\} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ q \\ | \\ a \end{array} \\
&= \sum_{\substack{m:(i,d,m),(a,e,m) \in \text{Adm} \\ q:(c,d,q),(b,m,q) \in \text{Adm} \\ p:(a,b,p),(q,e,p) \in \text{Adm}}} \left\{ \begin{array}{c} a \quad i \quad m \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad q \\ d \quad m \quad i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad q \quad p \\ e \quad a \quad m \end{array} \right\} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ q \\ | \\ p \\ | \\ a \end{array}
\end{aligned}$$

よって、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}
(7-4 \text{ b}) \quad & \sum_{\substack{p:(c,j,p),(a,b,p) \in \text{Adm} \\ q:(c,d,q),(e,p,q) \in \text{Adm}}} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad p \\ j \quad a \quad i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} p \quad c \quad q \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ q \\ | \\ p \\ | \\ a \end{array} \\
&= \sum_{\substack{m:(i,d,m),(a,e,m) \in \text{Adm}_r \\ q:(c,d,q),(b,m,q) \in \text{Adm} \\ p:(a,b,p),(q,e,p) \in \text{Adm}}} \left\{ \begin{array}{c} a \quad i \quad m \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad q \\ d \quad m \quad i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad q \quad p \\ e \quad a \quad m \end{array} \right\} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \\ \diagdown \quad \diagup \\ q \\ | \\ p \\ | \\ a \end{array}
\end{aligned}$$

k, l を $(a, b, k), (c, d, l), (e, k, l)$ が許容的な 0 以上整数とし、(7-4 b) の両辺に次の q -スピン・ネットワークを連結させる。



すると、(7-4 b) の左辺に上の q -スピン・ネットワークを連結させたものは、バブル移動により

$$\frac{\langle \theta(c, d, l) \rangle \langle \theta(l, e, k) \rangle \langle \theta(b, k, a) \rangle}{\Delta_l \Delta_k \Delta_a} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad k \\ j \quad a \quad i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k \quad c \quad l \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} f_a$$

となり、(7-4 b) の右辺に上の q -スピン・ネットワークを連結させたものは、バブル移動により

$$\sum_{m:(i,d,m),(a,e,m) \in \text{Adm}} \frac{\langle \theta(c, d, l) \rangle \langle \theta(l, e, k) \rangle \langle \theta(b, k, a) \rangle}{\Delta_l \Delta_k \Delta_a} \left\{ \begin{array}{c} a \quad i \quad m \\ d \quad e \quad j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad c \quad l \\ d \quad m \quad i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} b \quad l \quad k \\ e \quad a \quad m \end{array} \right\} f_a$$

となる。したがって、トレースをとって、

$$\frac{\langle \theta(c, d, l) \rangle \langle \theta(l, e, k) \rangle \langle \theta(b, k, a) \rangle}{\Delta_l \Delta_k} \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{m: (i, d, m), (a, e, m) \in \text{Adm}} \frac{\langle \theta(c, d, l) \rangle \langle \theta(l, e, k) \rangle \langle \theta(b, k, a) \rangle}{\Delta_l \Delta_k} \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix}$$

を得る。

$$(7-4 \text{ c}) \quad \frac{\langle \theta(c, d, l) \rangle \langle \theta(l, e, k) \rangle \langle \theta(b, k, a) \rangle}{\Delta_l \Delta_k} \neq 0$$

だから、この値で両辺を割ると、求めている等式を得る。 □

● 7-5 : 量子 $6j$ 記号の性質 — 直交性

命題 7-4 (直交関係式)

量子 $6j$ -記号は次の等式を満足する： $a+b+c+d$ が偶数であるような 0 以上の整数 a, b, c, d に対して

$$(7-5 \text{ a}) \quad \sum_i \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} = \delta_{j,k}$$

但し、右辺の和は $(a, d, i), (b, c, i)$ が許容的となるすべての 0 以上の整数 i にわたってとる。

(証明)

量子 $6j$ 記号の定義より、次の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} j \\ \bullet \\ j \end{array} = \sum_i \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} i \\ \bullet \\ i \end{array}$$

この公式を右辺を時計回りに 90° 回転させたネットワークに適用すれば、次の等式を得る。

$$\begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} i \\ \bullet \\ i \end{array} = \sum_k \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} \begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} k \\ \bullet \\ k \end{array}$$

上の 2 つの等式から次の等式を得る。

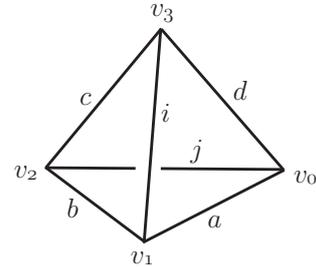
$$\begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} j \\ \bullet \\ j \end{array} = \sum_{i,k} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} \begin{array}{c} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{array} \begin{array}{c} k \\ \bullet \\ k \end{array}$$

命題 6-9 により、

$$\sum_i \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} = \delta_{j,k}$$

を得る。 □

3次元閉多様体 M の単体分割 T に対して、そのカラー φ と T に属する四面体 $\sigma = |v_0v_1v_2v_3|$ をとる。 σ の各辺は φ によって右図のように彩色されているとする (i と j が彩色されている辺の位置が四面体ネットの定義で現れたものとは違うことに注意)。このとき、 $W(\sigma; \varphi) \in \mathbb{C}$ を



$$(7-5 \text{ b}) \quad W(\sigma; \varphi) := \frac{\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}}{\sqrt{\theta(a, b, j)} \sqrt{\theta(b, c, i)} \sqrt{\theta(c, d, j)} \sqrt{\theta(d, a, i)}}$$

によって定義する。

補題 7-5

$W(\sigma; \varphi)$ は矛盾なく定義されている。

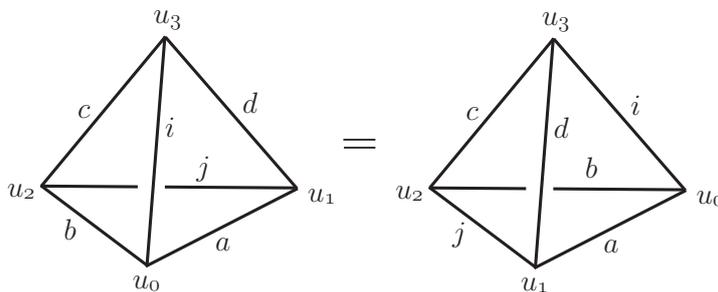
(証明)

$\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}$ は四面体の合同変換に関して不変であるから、

$$N(a, b, c, d, i, j) := \sqrt{\theta(a, b, j)} \sqrt{\theta(b, c, i)} \sqrt{\theta(c, d, j)} \sqrt{\theta(d, a, i)}$$

が四面体の合同変換に関して不変であることを示せばよい。

- σ の頂点の番号づけを $v_0 \rightarrow u_1, v_1 \rightarrow u_0, v_2 \rightarrow u_2, v_3 \rightarrow u_3$ に変更した場合：

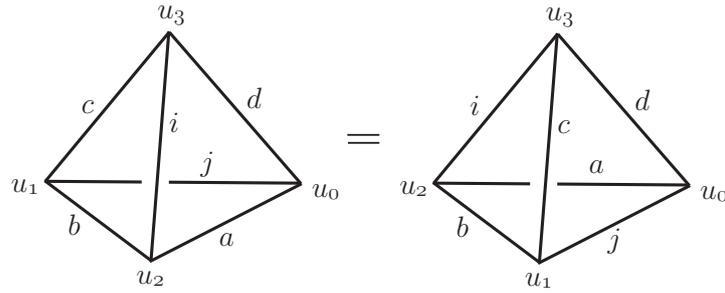


この番号づけのもとで対応する $N(a, b, c, d, i, j)$ は $N(a, j, c, i, d, b)$ となる。

$$N(a, j, c, i, d, b) = \sqrt{\theta(a, j, b)} \sqrt{\theta(j, c, d)} \sqrt{\theta(c, i, b)} \sqrt{\theta(i, a, d)} = N(a, b, c, d, i, j)$$

となる。

- σ の頂点の番号づけを $v_0 \rightarrow u_0, v_1 \rightarrow u_2, v_2 \rightarrow u_1, v_3 \rightarrow u_3$ に変更した場合：

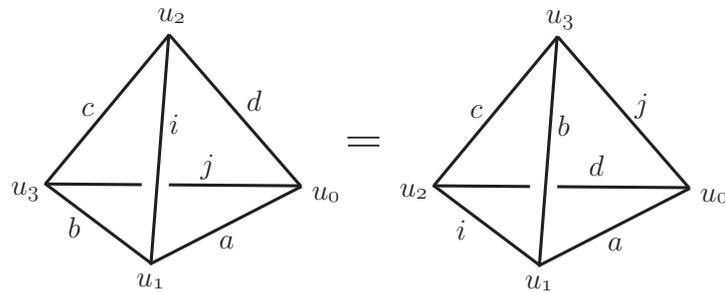


この番号づけのもとで対応する $N(a, b, c, d, i, j)$ は $N(j, b, i, d, c, a)$ となる。

$$N(j, b, i, d, c, a) = \sqrt{\theta(j, b, a)}\sqrt{\theta(b, i, c)}\sqrt{\theta(i, d, a)}\sqrt{\theta(d, j, c)} = N(a, b, c, d, i, j)$$

となる。

- σ の頂点の番号づけを $v_0 \rightarrow u_0, v_1 \rightarrow u_1, v_2 \rightarrow u_3, v_3 \rightarrow u_2$ に変更した場合：



この番号づけのもとで対応する $N(a, b, c, d, i, j)$ は $N(a, i, c, j, b, d)$ となる。

$$N(a, i, c, j, b, d) = \sqrt{\theta(a, i, d)}\sqrt{\theta(i, c, b)}\sqrt{\theta(c, j, d)}\sqrt{\theta(j, a, b)} = N(a, b, c, d, i, j)$$

となる。

四面体の任意の合同変換は上で挙げた3つの番号づけから誘導される変換の合成で表わされるから、 $N(a, b, c, d, i, j)$ は四面体の任意の合同変換の下で不変である。□

(7-5 b) の右辺を

$$\begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}$$

により表わすと、

$$\begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\theta(d, a, i)}\sqrt{\theta(b, c, i)}}{\sqrt{\theta(a, b, j)}\sqrt{\theta(c, d, j)}} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \Delta_i$$

が成り立つ。

補題 7-6

次の関係式が成立する。

(証明)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix} &= \Delta_k \frac{\sqrt{\theta(b,c,i)}\sqrt{\theta(j,a,i)}}{\sqrt{\theta(b,a,k)}\sqrt{\theta(j,c,k)}} \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix} &= \Delta_l \frac{\sqrt{\theta(k,c,j)}\sqrt{\theta(d,e,j)}}{\sqrt{\theta(k,e,l)}\sqrt{\theta(d,c,l)}} \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix} &= \Delta_m \frac{\sqrt{\theta(a,i,j)}\sqrt{\theta(d,e,j)}}{\sqrt{\theta(a,e,m)}\sqrt{\theta(d,i,m)}} \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix} &= \Delta_l \frac{\sqrt{\theta(b,c,i)}\sqrt{\theta(d,m,i)}}{\sqrt{\theta(b,m,l)}\sqrt{\theta(d,c,l)}} \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix} &= \Delta_k \frac{\sqrt{\theta(b,l,m)}\sqrt{\theta(e,a,m)}}{\sqrt{\theta(b,a,k)}\sqrt{\theta(e,l,k)}} \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

となる。命題 7-3 の式に代入すると、

$$(7-5 c) \quad \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix} = \sum_m \Delta_m \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix}$$

となる。これは求めていた等式に他ならない。 \square

補題 7-7

次の関係式が成立する。

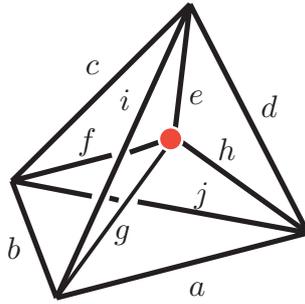
但し、右辺の和は $(e, f, c), (e, g, i), (e, h, d), (f, b, g), (f, h, j), (h, g, a) \in \text{Adm}_r$ となるような $e, f, g, h \in I$ すべてにわたってとる。

(証明)

量子 $6j$ -記号の直交性は次の等式に書き替えることができる。

$$(7-5 d) \quad \sum_i \Delta_i \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} = \Delta_k^{-1} \delta_{j,k}$$

さて、



の上側にある3つの四面体に補題7-6を適用すると、

$$\begin{array}{c} j \\ \triangle \\ a \\ b \quad g \end{array} \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ i \\ b \quad a \end{array} = \sum_{e \in I} \Delta_e \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ e \\ f \quad h \end{array} \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ i \\ b \quad g \end{array} \begin{array}{c} d \\ \triangle \\ h \\ i \quad e \end{array}$$

となる。よって、

$$(7-5 e) \quad (\text{補題の右辺}) = \omega^{-1} \sum_{f,g,h} \Delta_f \Delta_g \Delta_h \begin{array}{c} f \\ \triangle \\ g \\ b \quad a \end{array} \begin{array}{c} j \\ \triangle \\ a \\ b \quad g \end{array} \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ i \\ b \quad a \end{array}$$

となる。ここで、(7-5 d) より、

$$\sum_{g \in I} \Delta_g \begin{array}{c} f \\ \triangle \\ g \\ b \quad a \end{array} \begin{array}{c} j \\ \triangle \\ a \\ b \quad g \end{array} = \sum_{g \in I} \Delta_g \begin{array}{c} f \\ \triangle \\ g \\ b \quad a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \triangle \\ j \\ a \quad h \end{array} = \Delta_j^{-1}$$

であるから、

$$((7-5 e) \text{ の右辺}) = \omega^{-1} \sum_{\substack{f,h \in I \\ (f,h,j) \in \text{Adm}_r}} \Delta_j^{-1} \Delta_f \Delta_h \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ i \\ b \quad a \end{array}$$

がわかる。よって、

$$(\text{補題の右辺}) = \omega^{-1} \sum_{\substack{f,h \in I \\ (f,h,j) \in \text{Adm}_r}} \Delta_j^{-1} \Delta_f \Delta_h \begin{array}{c} c \\ \triangle \\ i \\ b \quad a \end{array}$$

となる。これが補題の左辺に等しいことを示すには、

$$(7-5 f) \quad \omega \Delta_j = \sum_{\substack{f,h \in I \\ (f,h,j) \in \text{Adm}_r}} \Delta_f \Delta_h$$

を示せばよい。 $a, b \in I$ に対して

$$(a, b, 0) \in \text{Adm}_r \iff a = b$$

であるから、

$$\omega = \sum_{a=0}^{r-1} \Delta_a^2 = \sum_{\substack{a,b \in I \\ (a,b,0) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \Delta_b = \Delta_0^{-1} \sum_{\substack{a,b \in I \\ (a,b,0) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \Delta_b$$

となる。したがって、任意の $j \in I$ に対して

$$\omega_j := \Delta_j^{-1} \sum_{\substack{a,b \in I \\ (a,b,j) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \Delta_b$$

が j によらずに一定であることを示せばよい。

$i, j \in I$ を任意にとる。このとき、 $k \in I$ を

$$k = \begin{cases} i - j & (i \geq j), \\ j - i & (j \geq i) \end{cases}$$

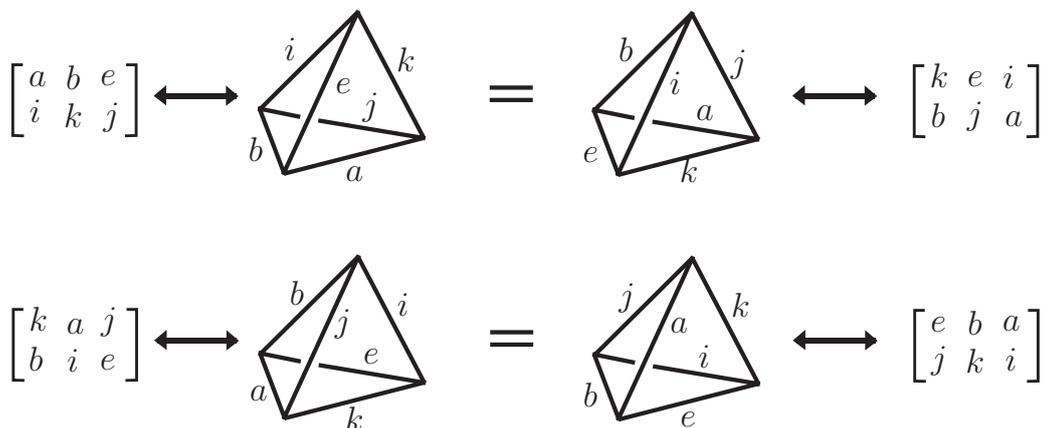
とおく。 $(i, j, k) \in \text{Adm}_r$ となる。(7-5 d) より $(a, b, j) \in \text{Adm}_r$ であるような任意の $a, b \in I$ に対して

$$\Delta_j^{-1} = \sum_{\substack{e \in I \\ (b,i,e), (a,k,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_e \begin{bmatrix} a & b & e \\ i & k & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & a & j \\ b & i & e \end{bmatrix}$$

と表わされる。よって、

$$\begin{aligned} \omega_j &= \sum_{\substack{a,b \in I \\ (a,b,j) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \Delta_b \Delta_j^{-1} \\ &= \sum_{\substack{a,b,e \in I \\ (a,b,j), (b,i,e), (a,k,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \Delta_b \Delta_e \begin{bmatrix} a & b & e \\ i & k & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & a & j \\ b & i & e \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\substack{b,e \in I \\ (b,i,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_b \Delta_e \sum_{\substack{a \in I \\ (a,b,j), (a,k,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \begin{bmatrix} a & b & e \\ i & k & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & a & j \\ b & i & e \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\substack{b,e \in I \\ (b,i,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_b \Delta_e \sum_{\substack{a \in I \\ (b,j,a), (e,k,a) \in \text{Adm}_r}} \Delta_a \begin{bmatrix} e & b & a \\ j & k & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & e & i \\ b & j & a \end{bmatrix} \\ &= \Delta_i^{-1} \sum_{\substack{b,e \in I \\ (b,i,e) \in \text{Adm}_r}} \Delta_b \Delta_e \\ &= w_i \end{aligned}$$

となる。ここで、(*) の部分は四面体対称性を考えると分かる (次の図の対応を参照)。



これで証明された。 □

以上より、 $Z(T)$ は M の単体分割 T の選び方に依らない、すなわち、3次元閉多様体 M の位相不変量であることがわかった。 $Z(T)$ は Turaev と Viro [26] が導入した、1 の冪根における量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ の表現論を用いて定義される状態和不変量 $\text{TV}_{r+1}(M)$ に一致することが知られている [19]。そこで、この講義では、 $\text{TV}_{r+1}(M) := Z(T)$ と定義し、これを M の **Turaev-Viro 不変量** と呼ぶことにする。Turaev-Viro 不変量を計算することは容易ではないが、次の結果が知られている [25, 26]。

計算例

$$\text{TV}_r(S^2 \times S^1) = 1, \quad \text{TV}_r(S^3) = \frac{1}{r} \sin^2 \frac{\pi}{r}, \quad \text{TV}_r(S^1 \times S^1 \times S^1) = (r-1)^2.$$

上記以外のかかなり多くの閉 3 次元多様体に対しても Turaev-Viro 不変量は計算されている [14, 22]。この講義では説明しないが、これらはいずれも 3 次元多様体のグラフ表示 [7, 14] を用いて計算されている。

● 7-6 : 展望—球面圏と Turaev-Viro 不変量の一般化

上で述べた Turaev-Viro 不変量の構成方法は球面圏に対して一般化することができる。それは、Barrett と Westbury によって成し遂げられた [3]。その詳細はここでは述べられないが、ここでは、Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n$ を一種のモノイダル圏の中に置くことができ、それが球面圏になることを説明しよう。まず、単純図式の定義を次のように拡張する。

$m, n \geq 0$ を整数とし、 $m+n$ は偶数であるとする。単純 (m, n) -図式 (*simple (m, n) -diagram*) とは、 $\frac{m+n}{2}$ 個の閉区間の $\mathbb{R} \times [0, 1]$ への埋め込みの像 D であって、以下の 3 条件を満たすもののことをいう：

- (SD1) $\partial D \subset \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ かつ $D - \partial D \subset \mathbb{R} \times (0, 1)$.
- (SD20) $\#(\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})) = m$, かつ、 $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ の各点において D は $\mathbb{R} \times \{0\}$ に横断的に交わる。
- (SD21) $\#(\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{1\})) = n$, かつ、 $\partial D \cap (\mathbb{R} \times \{1\})$ の各点において D は $\mathbb{R} \times \{1\}$ に横断的に交わる。

2つの単純 (m, n) -図式 D, D' の間に、 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ 上の $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ を固定するイソトピー $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in [0, 1]}$ であつて、

(i) $\varphi_0 = \text{id}$,

(ii) $\varphi_1(D) = D'$,

(iii) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\varphi_t(D)$ が単純 (m, n) -図式である

を満たすものが存在するとき、 D と D' は同値であると呼ばれる。 d を不定元とする \mathbb{Q} 上の有理関数体を R とおく： $R = \mathbb{Q}(d)$. 単純 (m, n) -図式の同値類を基底とする R 上のベクトル空間を $(\text{TL})_{m, n}$ とおく。単純 (m, n) -図式 D に対して、その同値類を $[D]$ で表わす。 R -線形写像

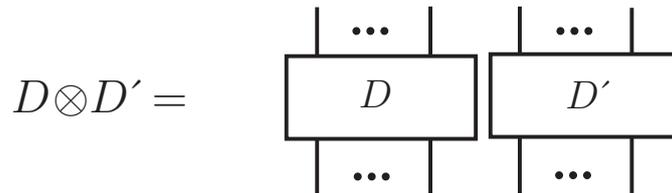
$$\alpha_{l, m, n} : (\text{TL})_{l, m} \times (\text{TL})_{m, n} \longrightarrow (\text{TL})_{l, n}, \quad ([D], [D']) \longmapsto \alpha_{l, m, n}([D], [D']) =: [D'] \circ [D]$$

を Temperley-Lieb 代数 $(\text{TL})_n$ のときと同じ方法で定義する：

(7-6 a)
$$[D'] \circ [D] = d^{k(D' \natural D)} [D' \vee D].$$

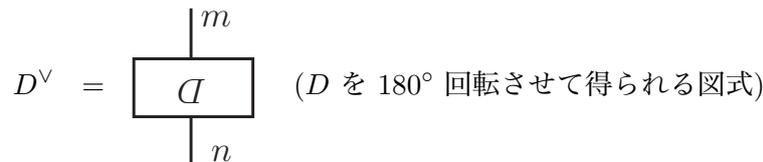
すると、対象が非負整数で、非負整数の各組 (m, n) に対して射の集合が $(\text{TL})_{m, n}$ で与えられ、合成が $\alpha_{l, m, n}$ であるような R -線形圏が定まる。この R -線形圏 TL を **Temperley-Lieb 圏** と呼ぶ。

単純 (m, n) -図式 D と単純 (m', n') -図式 D' に対して、単純 $(m + m', n + n')$ -図式 $D \otimes D'$ を

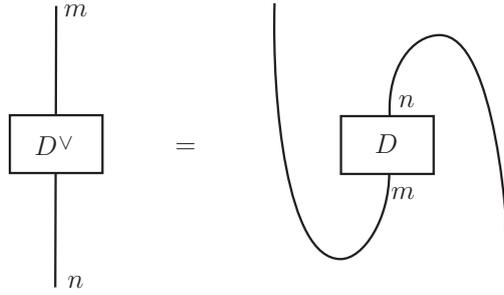


によって定義する。このテンソル積 \otimes を線形に拡張することにより、 R -双線形写像 $\otimes : (\text{TL})_{m, n} \times (\text{TL})_{m', n'} \longrightarrow (\text{TL})_{m+m', n+n'}$ が定まる。Temperley-Lieb 圏 TL は、このテンソル積 \otimes を伴って、 R -線形モノイダル圏になる。(モノイダル圏の詳細は MacLane・著『Categories for the working mathematician』を参照されたい。モノイダル圏のイメージとして思い浮かべるとよいのは、体 k 上の有限次元ベクトル空間とそれらの間の線形写像のなす圏 $\text{Vect}_k^{\text{finite}}$ である。)

任意の単純 (m, n) -図式 D に対して、単純 (n, m) -図式 D^\vee を次のように定義する：



次式が成り立つ。



上式は、 $ev_n \in (\text{TL})_{2n,0}$, $coev_n \in (\text{TL})_{0,2n}$ を



と定義すると、次のように表わされる：

$$[D^V] = [\mathbf{1}_m \otimes ev_m] \circ [\mathbf{1}_m \otimes D \otimes \mathbf{1}_n] \circ [coev_n \otimes \mathbf{1}_n].$$

このことから、 $[D^V]$ は、圏 TL において、線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対する転置写像 $tf : W^* \rightarrow V^*$ の役割りを果たすものであることがわかる (圏 $\text{Vect}_{\mathbf{k}}^{\text{finite}}$ における $ev_n, coev_n$ の対応物は

$$ev_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbf{k}, \quad ev_V(f \otimes v) = f(v) \quad (f \in V^*, v \in V),$$

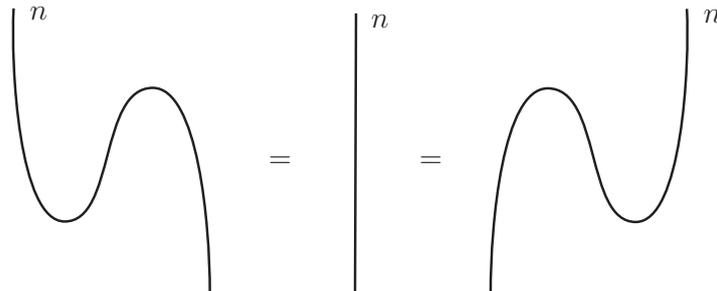
$$coev_V : \mathbf{k} \rightarrow V \otimes V^*, \quad coev_V(1) = \sum_{i=1}^m v_i \otimes v_i^* \quad \left(\begin{array}{l} \{v_i\}_{i=1}^m, \{v_i^*\}_{i=1}^m \text{ は互いに} \\ \text{双対的な } V, V^* \text{ の基底} \end{array} \right)$$

である)。

Temperley-Lieb 圏における射 $ev_n, coev_n$ は

$$[coev_n \otimes \mathbf{1}_n] \circ [\mathbf{1}_n \otimes ev_n] = \mathbf{1}_n = [\mathbf{1}_n \otimes coev_n] \circ [ev_n \otimes \mathbf{1}_n]$$

を満たす。



一般に、(\mathbf{k} -線形) モノイダル圏 $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, r, l)$ の対象 $V \in \mathcal{C}$ に対して、次の条件を満たす \mathcal{C} の対象 V^V および \mathcal{C} の射

$$ev_V : V^V \otimes V \rightarrow \mathbb{I}, \quad coev : \mathbb{I} \rightarrow V \otimes V^V$$

との組 $(V^\vee, \text{ev}_V, \text{coev}_V)$ を V の**左双対** (*left dual*) という：合成

(7-6 b)

$$V \xrightarrow{l^{-1}} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{\text{coev}_V \otimes \text{id}} (V \otimes V^\vee) \otimes V \xrightarrow{a} V \otimes (V^\vee \otimes V) \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{ev}_V} V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{r} V,$$

(7-6 c)

$$V^\vee \xrightarrow{r^{-1}} V^\vee \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{coev}_V} V^\vee \otimes (V \otimes V^\vee) \xrightarrow{a^{-1}} (V^\vee \otimes V) \otimes V^\vee \xrightarrow{\text{ev}_V \otimes \text{id}} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{l} V$$

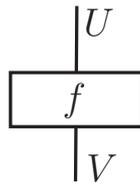
はそれぞれ V, V^\vee 上の恒等写像に等しい。

任意の対象 V が左双対を持つとき、モノイダル圏 \mathcal{V} は**左剛的** (*left rigid*) であると呼ばれる。左剛的モノイダル圏においては、任意の射 $f: V \rightarrow U$ に対して、“双対射” $f^\vee: U^\vee \rightarrow V^\vee$ が次の合成によって定義される。

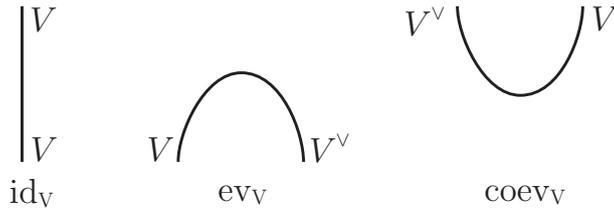
$$\begin{array}{ccc}
 U^\vee & \xrightarrow{r^{-1}} & U^\vee \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{coev}_V} U^\vee \otimes (V \otimes V^\vee) \xrightarrow{\text{id} \otimes (f \otimes \text{id})} U^\vee \otimes (U \otimes V^\vee) \\
 & \searrow f^\vee & \downarrow a^{-1} \\
 & & (U^\vee \otimes U) \otimes V^\vee \\
 & & \downarrow \text{ev} \otimes \text{id} \\
 & & \mathbb{I} \otimes V^\vee \\
 & & \downarrow l \\
 & & V^\vee
 \end{array}$$

Temperley-Lieb 圏 (TL) における射 $[D^\vee]$ は、まさに、この双対射になっている。

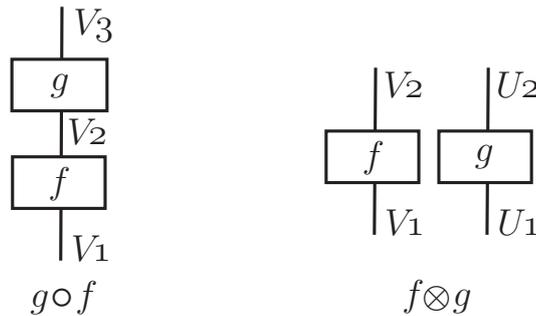
Temperley-Lieb 圏 (TL) における射は単純図式の同値類であるが、任意の左剛的モノイダル圏 \mathcal{V} に対して、その射 $f: V \rightarrow U$ を次のような図式で表わすことができる (紐に添えられた V, U は紐の本数を表わしているわけではないことに注意)。



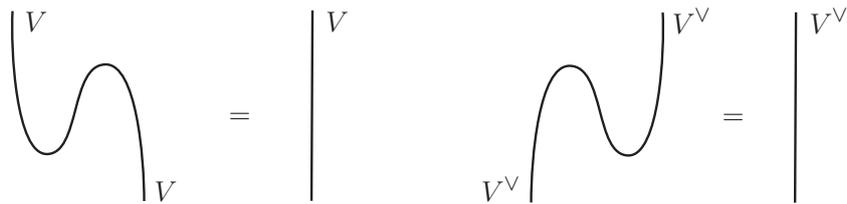
$\text{id}_V: V \rightarrow V$, $\text{ev}_V: V^\vee \otimes V \rightarrow \mathbb{I}$, $\text{coev}_V: \mathbb{I} \rightarrow V \otimes V^\vee$ をそれぞれ次の図式で表わす。



2つの射 $f : V_1 \rightarrow V_2$ と $g : V_2 \rightarrow V_3$ に対して、合成 $g \circ f : V_1 \rightarrow V_3$ の図式表示を次図左のように定め、2つの射 $f : V_1 \rightarrow V_2$ と $h : U_1 \rightarrow U_2$ に対して、テンソル積 $f \otimes g : V_1 \otimes U_1 \rightarrow V_2 \otimes U_2$ の図式表示を次図右のように定める。



すると、等式 (7-6 b), (7-6 c) は

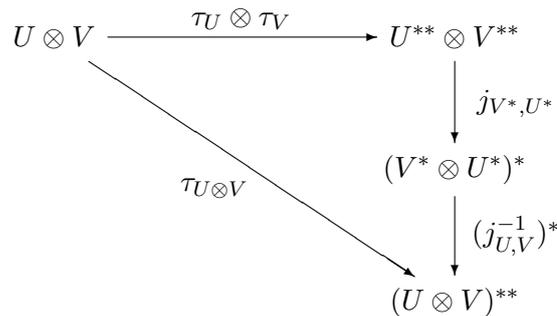


のように図式で表示される。

体 k 上の有限次元ベクトル空間のなす左剛的モノイダル圏 $\text{Vect}_k^{\text{finite}}$ においては、その任意の対象 V に対して、自然な同型射 $\tau_V : V \rightarrow V^{**} = (V^*)^*$ が定義されたことを思い出そう。

$$\tau_V(v) : V^* \rightarrow k, \phi \mapsto \phi(v) \quad (\phi \in V^*, v \in V).$$

この τ_V はテンソル積 \otimes と次の図式が可換になるという意味で可換である。



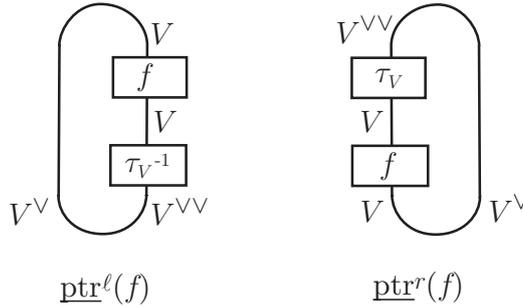
ここで、 $j_{U,V} : V^* \otimes U^* \rightarrow (U \otimes V)^*$ は自然な同型射を表わしている。

一般に、左剛的モノイダル圏 \mathcal{V} に対して、 \otimes と可換な自然な同型射 $\tau_V : V \rightarrow V^{\vee\vee} = (V^\vee)^\vee$ を \mathcal{V} の **pivotal 構造** といい、組 (\mathcal{V}, τ) を pivotal モノイダル圏と呼ぶ。Temperley-Lieb 圏は、 $\tau = \{\tau_n\}_{n \geq 0}$ として $\tau_n = [\mathbf{1}_n]$ をとることにより、pivotal モノイダル圏になる。

pivotal モノイダル圏 (\mathcal{V}, τ) においては、任意の射 $f : V \rightarrow V$ に対して、**左 pivotal トレース** $\underline{\text{ptr}}^\ell(f) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ と **右 pivotal トレース** $\underline{\text{ptr}}^r(f) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ がそれぞれ次の合成によって定義される。

$$\begin{aligned} \underline{\text{ptr}}^\ell(f) &: \mathbb{I} \xrightarrow{\text{coev}_{V^\vee}} V^\vee \otimes V^{\vee\vee} \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau_V^{-1}} V^\vee \otimes V \xrightarrow{\text{id} \otimes f} V^\vee \otimes V \xrightarrow{\text{ev}_V} \mathbb{I}, \\ \underline{\text{ptr}}^r(f) &: \mathbb{I} \xrightarrow{\text{coev}_V} V \otimes V^\vee \xrightarrow{f \otimes \text{id}} V \otimes V^\vee \xrightarrow{\tau_V \otimes \text{id}} V^{\vee\vee} \otimes V^\vee \xrightarrow{\text{ev}_{V^\vee}} \mathbb{I}. \end{aligned}$$

これらは図式で次のように表示される。



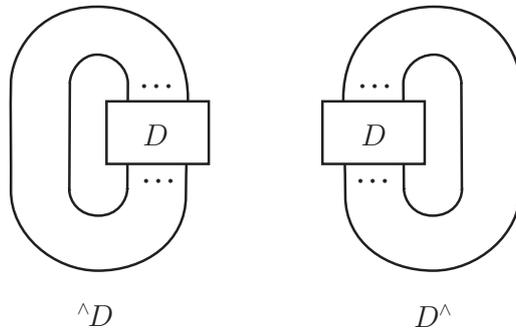
(\mathcal{V}, τ) を pivotal モノイダル圏とする。任意の射 $f : V \rightarrow V$ に対して $\underline{\text{ptr}}^\ell(f) = \underline{\text{ptr}}^r(f)$ が成り立つとき、 (\mathcal{V}, τ) を **球面モノイダル圏** と呼ぶ [3]。また、pivotal 構造 τ を **球面構造** と呼ぶ。

定理 7-8

Temperley-Lieb 圏は球面モノイダル圏である。

(証明)

単純 (n, n) -図式 D に対して、次の単純 $(0, 0)$ -図式 ${}^\wedge D, D^\wedge$ を考える。



D の上端の点を左から順に q_1, \dots, q_n とおき、下端の点を左から順に p_1, \dots, p_n とおく。単純 $(0, 0)$ -図式 ${}^\wedge D$ において、点 q_i から D の「外側」に向かって出発して紐をたどっていき、 D の下端の点 p_j にたどりついたとすると、単純 $(0, 0)$ -図式 D^\wedge において、点 q_i から D の「外側」に向かって出発して紐をたどっていくと、同じ点 p_j にたどり着く。このことは、 ${}^\wedge D$ と D^\wedge のそ

れぞれにおいて、単純閉曲線の個数が一致することを意味している。すなわち、 $k(\hat{D}) = k(D^\wedge)$.
したがって、

$$\underline{\text{ptr}}^\ell([D]) = k(\hat{D}) = k(D^\wedge) = \underline{\text{ptr}}^r([D])$$

を得る。 □

ホップ代数、量子群、部分因子環など様々な代数系に由来する球面圏の例を見つけることができる。そして、(半単純な) 球面圏が1つ与えられると、Turaev-Viro 不変量 $\text{TV}_r(M)$ のような、3次元閉多様体の状態和不変量が定義されることが知られている [3, 5, 29]。例えば、部分因子環を用いて定義される Turaev-Viro-Ocneanu 不変量は、このような状態和不変量の中の重要なクラスの1つであり、比較的良好に研究されている [18, 21, 34]。しかし、このようなものは稀であり、球面圏の豊富な存在に比較して、具体的な計算や組織的な研究がなされている状態和不変量は多くない。今後、より多くの球面圏に対して、状態和不変量の研究が発展することを期待している。

参 考 文 献

- [1] S. ABRAMSKY, *Temperley-Lieb algebra: From knot theory to logic and computation via quantum mechanics*, www.comlab.ox.ac.uk/people/samson.abramsky/tambook.pdf.
- [2] K. APPEL AND W. HAKEN, *Every planar map is four colorable*, Contemp. Math. **98** A.M.S., Providence, RI, 1989.
- [3] J.W. BARRETT AND B.W. WESTBURY, *Invariants of piecewise-linear manifolds*, Trans. A.M.S. **348** (1996), 3997–4022.
- [4] J.S. CARTER, D.E. FLATH, AND M. SAITO, *The classical and quantum 6j-symbols*, Math. Notes **43**, Princeton University Press, 1995.
- [5] S. GELFAND AND D. KAZHDAN, *Invariants of three-dimensional manifolds*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 268–300.
- [6] F.M. GOODMAN, P. DE LA HARPE, AND V.F.R. JONES, *Coxeter graphs and towers of algebras*, (Mathematical Science Research Institute Publications 14), Springer-Verlag, 1989.
- [7] I. ISHII, *Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 297–312.
- [8] V.F.R. JONES, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.
- [9] V.F.R. JONES, *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras*, Bull. of A.M.S. **129** (1985), 103–112.
- [10] C. KASSEL AND V. TURAEV, *Braid groups*, G.T.M. **247**, Springer-Verlag, 2008.
- [11] L.H. KAUFFMAN, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.
- [12] L.H. KAUFFMAN, *New invariants in the theory of knots*, A.M.S. Monthly **95** (1988), 195–242.
- [13] L.H. KAUFFMAN, *Map coloring, q-deformed spin networks, and Turaev-Viro invariants for 3-manifolds*, Internat. J. Modern Phys. B **6** (1992), 1765–1794; Errata: Internat. J. Modern Phys. B **6** (1992), 3249.
- [14] L.H. KAUFFMAN AND S. LINS, *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*, Annals of Math. Stud. **134**, 1994.
- [15] L.H. KAUFFMAN AND H. SALEUR, *An algebraic approach to the planar coloring problem*, Commun. Math. Phys. **152** (1993), 565–590.
- [16] L.H. KAUFFMAN AND R. THOMAS, *Temperley-Lieb algebras and the four-color theorem*, Combinatorica **23** (2003), 653–667.
- [17] W.B.R. LICKORISH, *An introduction to knot theory*, G.T.M. **175**, Springer-Verlag, 1997.
- [18] A. OCNEANU, *Chirality for operator algebras*, in “Subfactors”, ed. by H. Araki, et al., World Scientific, 1994, 39–63.
- [19] S. PIUNIKHIN, *Turaev-Viro and Kauffman-Lins invariants for 3-manifolds coincide*, J. Knot Theory and its Ramif. **1** (1992), 105–135.
- [20] T.L. SAATY AND P.C. KAINEN, *The four-color problem*, Dover, 1977, 1986.
- [21] N. SATO AND M. WAKUI, *Computations of Turaev-Viro-Ocneanu invariants of 3-manifolds from subfactors*, J. Knot Theory and its Ramif. **12** (2003), 543–574.
- [22] T. TANIGUCHI, *The Turaev-Viro invariants of all orientable closed Seifert fibered manifolds*, Tokyo J. Math. **30** (2007), 497–522.

- [23] H.N.V. TEMPERLEY AND E.H. LIEB, *Relations between the ‘percolation’ and ‘coloring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the ‘percolation problem’*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **322** (1971), 251–280.
- [24] R. THOMAS, *An update on the four-color problem*, Notices of AMS, **45**, no.7, (1998), 848–859.
- [25] V.G. TURAEV, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, De Gruyter, New York-Berlin, 1994.
- [26] V.G. TURAEV AND O. YA. VIRO, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols*, Topology **31** (1992) 865–902.
- [27] H. WENZL, *On a sequence of projections*, C. R. Math. Rep. Can. J. Math. **9** (1897), 5–9.
- [28] S. YAMAGAMI, *A categorical and diagrammatical approach to Temperley-Lieb algebras*, arXiv0405267v2, 2004.
- [29] D.N. YETTER, *State-sum invariants of 3-manifolds associated to artinian semisimple tortile categories*, Topology and its Appl. **58** (1994), 47–80.
- [30] C.C. アダムス・著 (金信泰造・訳) 『結び目の数学 結び目理論への初等的入門』培風館, 1998年.
- [31] 一松信・著 『四色問題 その誕生から解決まで』(ブルーバックス B-351) 講談社, 1978年.
- [32] R.J. ウィルソン・著 (齊藤伸自・西関隆夫・訳) 『グラフ理論入門』近代科学社, 1985年.
- [33] 大槻知忠・編著 『量子不変量-3次元トポロジーと数理解析の遭遇』日本評論社, 1999年 (大槻知忠、大山淑之、高田敏恵、出口哲生、村上順、村上斉、和久井道久・共著).
- [34] 村上斉・編 『 $6j$ -symbol から導かれる位相的量子場の理論の研究』(数理解析研究所講究録 1053), 京都大学数理解析研究所, 1998年 (浅枝雅子、和久井道久、鈴木幸太郎、小須田雅、中坊滋一、佐藤智史、岡本美雪・共著).