

Conway-Coxeter フリーズと有理絡み目と
山田の祖先三角形
—Stern-Brocot 木を通して結ばれる3つの世界—

和久井道久 (関西大学)

October 20, 2018
Knotting Nagoya 2018
名古屋工業大学にて

この研究は小木曾岳義氏 (城西大学) との共同研究です

内容

- §1. Conway-Coxeter フリーズ–定義と例–
- §2. 既約分数の Farey 和と Stern-Brocot 木と LR 語
- §3. Conway-Coxeter フリーズと有理数の対応関係
- §4. 山田の祖先三角形
- §5. 有理数の連分数展開と有理タングルの分類定理
- §6. タングル図式の Kauffman ブラケット
- §7. Conway-Coxeter フリーズの対称性と不変量
- §8. まとめ

§1. Conway-Coxeter フリーズ (CCF) [4] とは

次の規則を満たす数の表のことをいう：

- (i) 縦方向は有限の幅を持ち、横方向は無限に延びている。
- (ii) 最初の行は 0 が並び、その次の行は 1 が並ぶ。最後の行は 0 が並び、その一つ上の行は 1 が並ぶ。
- (iii) 連続する行は $1/2$ ずつずれて配置されており、
各隣接する 4 つの要素は右のようにダイヤ
モンドの形を成し、 $ad - bc = 1$ を満たす。

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ & & \\ a & & d \\ & & c \end{array}$$

注意 1

- Conway と Coxeter が 1970 年頃導入。一般に、Dynkin 図形もしくはクイバーに対応して CCF を考えることができる (上の規則は A 型に対応)。
- 2002 年に Fomin と Zelevinsky が導入したクラスター代数 [7] により、脚光を浴びるようになった。
- 黒木玄氏 [12], 中島啓氏 [13] による明快な記事あり。

Conway-Coxeter フリーズの例

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|--|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| ... | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | ... | | | |
| ... | 2 | 1 | 7 | 3 | 1 | 3 | 5 | 2 | 1 | 7 | 3 | ... | | | |
| | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | ... | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |

CCF を図示するとき：

- 0 が並ぶ最初と最後の行は省略する。
- 最上段に並ぶ 1 のすぐ下と、最下段に並ぶ 1 のすぐ上に線を引く。

2 つの線に挟まれた行数を CCF の幅 (width) と呼ぶ。

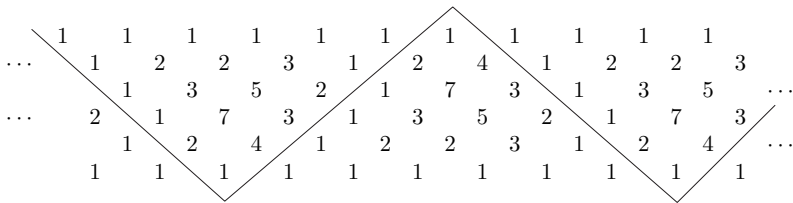
上の例は幅が 4 の CCF である。

CCF は単位元を持つ任意の可換環の元を配置することができるが、以下では特に正の整数が配置された CCF を考える。

CCF の性質

定理 2 (Coxeter [5])

- (1) 幅 m の CCF は $m + 3$ を周期を持つ。 $m + 3$ はその CCF の位数 (order) と呼ばれる。
- (2) CCF は水平中央線に関して映進 (gilde reflection) 対称性を持つ。すなわち、CCF は水平方向の移動と鏡映に関する基本領域を持つ。



演習問題

次の配列が CCF となるように、数字を埋めよ。

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | | 2 | | | | | |
| | | | | | | | 3 | | | | | |
| | | | | | | | 4 | | | | | |
| | | | | | | | 5 | | | | | |
| | | | | | | | 6 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

解答

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 2 | |
| 5 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | 1 | 11 | 5 | 1 | 3 |
| 9 | 4 | 1 | 4 | 4 | 7 | 3 | 1 | 5 | 9 | 4 | 1 | |
| 7 | 3 | 1 | 5 | 9 | 4 | 1 | 4 | 4 | 7 | 3 | 1 | |
| 3 | 5 | 2 | 1 | 11 | 5 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

§2. 既約分数の Farey 和と Stern-Brocot 木と LR 語

既約分数 $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ が連続している (consecutive)、あるいは、

Farey ネイバー (Farey neighbor)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} qr - ps = 1.$$

規約

- $\infty = \frac{1}{0}$ も既約分数として扱う。
- $\frac{p}{q}$ を既約分数というときには、 $q \geq 0$ を仮定する。

既約分数 $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ に対して

$$\frac{p}{q} \# \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s} \quad (\text{Farey 和 (Farey sum)})$$

と定めると、これは再び既約分数になる。この既約分数は $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ の **メディエント (mediant)** と呼ばれる。

既約分数の Farey 和の性質

補題 3

- (1) $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が Farey ネイバーであるとき、
- (i) $\frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ の両方に連続している。
 - (ii) $\frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ は開区間 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ に属する分数の中で、分母の絶対値および分子の絶対値が最小である。
- (2) 任意の非負有理数は $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ から $\#$ によって生成される。
- (3) 任意の有理数 α に対して、 $\alpha = \frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ を満たす Farey ネイバー $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が一意的に存在する。

(3) の条件を満たす Farey ネイバーの組 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ を有理数 α の親と呼ぶ。 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ のそれぞれも α の親と呼ぶ。

Stern-Brocot 木 (= SB 木) と LR 語

SB 木の各頂点から下に向かって 2 つの辺が出ている。左に進む場合を L、右に進む場合を R と記すと、 $\frac{1}{1}$ から出発する SB 木内の任意の道は L と R の語で表わされる。ここでは、CCF との対応関係から $\frac{1}{2}$ から出発する SB 木内の道を考える。すると、

开区間 $(0, 1)$ 内の有理数 α

$\xleftrightarrow{1:1}$ L と R からなる語 $w(\alpha)$

但し、 $w(\alpha) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ から } \alpha \text{ へ至る道から定まる L と R} \\ \text{の列を右から左に順番に並べたもの} \end{array} \right)$

$w(\alpha)$ を $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ の LR 語と呼ぶ。

例 4

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \emptyset, w\left(\frac{1}{5}\right) = LLL = L^3, w\left(\frac{2}{7}\right) = RLL = RL^2,$$

$$w\left(\frac{3}{8}\right) = LRL, w\left(\frac{3}{7}\right) = RRL = R^2L.$$

$w = \text{LLLR}$ から構成される $\text{CCF}(w)$ は次のようになる。

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| ... | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | ... |
| | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | |
| ... | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | ... |
| | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | |
| ... | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | ... |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

注意 5

LR 語からは作ることのできない CCF が存在する [10]。

定義 6

1 がジグザグに現れる、あるいは、1 で囲まれた基本領域を持つ CCF を **ジグザグ型** (zigzag-type) と呼ぶ。

LR 語とジグザグ型 CCF の対応関係

ジグザグ型 CCF Γ に対して LR 語は一意に定まらない。CCF は映進対称性をもつため、

$\Gamma = \text{CCF}(w)$ のときには $\Gamma = \text{CCF}(ir(w))$ でもある。

ここで、 $ir(w)$ は次のように定義される 2 つの操作 i と r の合成である：

- $i(w) = (w \text{ から L と R を入れ換えて得られる語})$
- $r(w) = (w \text{ から 語の並びを左右逆にして得られる語})$

例 7

$w = \text{LLLR}$ の場合、

$$i(w) = \text{RRRL}, \quad r(w) = \text{RLLL}, \quad (ir)(w) = \text{LRRR}.$$

ジグザグ型 CCF から有理数を得る方法

まず、ジグザグ型 CCF Γ に並んでいる数字の中で最大の数字を見出す。その数字を q とし、 q の左上の数字を p としたとき、有理数 $\frac{p}{q}$ が Γ に対応する有理数になる。(注： q の左上の数字は高々 2 通りであり、多くの場合 2 通りある。 $\frac{p}{q}$ に対応する LR 語が w であるとき、もう一方は $(ir)(w)$ に対応する有理数の分子になる。)

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|--|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| ... | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | ... | |
| | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | | |
| ... | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | ... | |
| | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | | |
| ... | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | ... | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

上の CCF の場合、 $\frac{5}{9}$ と $\frac{7}{9}$ が対応する。

ジグザグ型 CCF から有理数を得る方法

まず、ジグザグ型 CCF Γ に並んでいる数字の中で最大の数字を見出す。その数字を q とし、 q の左上の数字を p としたとき、有理数 $\frac{p}{q}$ が Γ に対応する有理数になる。(注： q の左上の数字は高々 2 通りであり、多くの場合 2 通りある。 $\frac{p}{q}$ に対応する LR 語が w であるとき、もう一方は $(ir)(w)$ に対応する有理数の分子になる。)

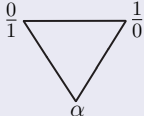
| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|---|--|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| ... | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | ... | | |
| | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | | | |
| ... | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | 4 | 1 | 3 | 7 | ... | | |
| | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 2 | 5 | | | |
| ... | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | ... | | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |

上の CCF の場合、 $\frac{5}{9}$ と $\frac{7}{9}$ が対応する。

§4. 山田の祖先三角形 [16] … 1996 年に山田修司氏により導入。

定義 8

正の有理数 α の山田の祖先三角形とは、

$\alpha, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を頂点とする三角形  の、次のように作られ

る三角形分割で、各頂点に有理数が割り当てられているものをいう：

- 各小三角形の頂点は、 α から出発して親を順次たどっていくときに通過する SB 木の頂点 (= 有理数) で、斜辺上にあり、
- β, β_L, β_R が小三角形の頂点で、 β が最も高さが低いものとする、 (β_L, β_R) は β の親である。

α の山田の祖先三角形を $\text{YAT}(\alpha)$ により表わし、 $\text{YAT}(\alpha)$ を構成する小三角形のそれぞれを $\text{YAT}(\alpha)$ の基本三角形と呼ぶ。

山田の祖先三角形の例

例 9

$\alpha = \frac{7}{4}$ の場合：

$$\alpha = \frac{5}{3} \# \frac{2}{1},$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{2} \# \frac{2}{1},$$

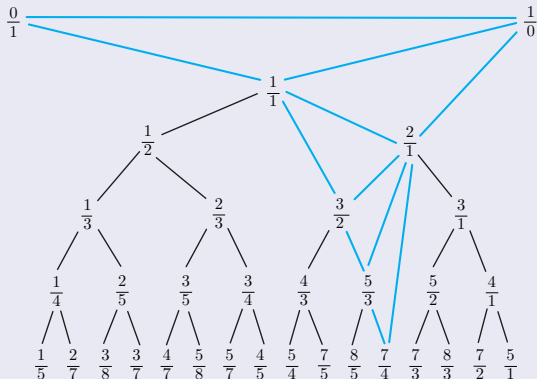
$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1} \# \frac{2}{1},$$

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} \# \frac{1}{0},$$

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \# \frac{1}{0}.$$

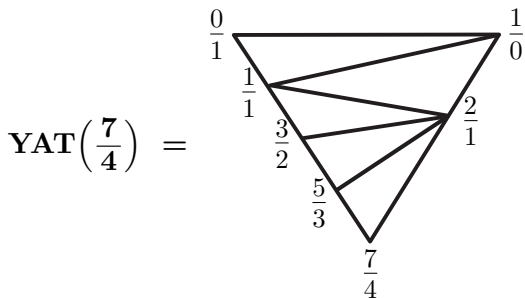
よって、

$\text{YAT}\left(\frac{7}{4}\right)$ は右図の青線部分になる。



山田の祖先三角形の例 (つづき)

形を整えると、

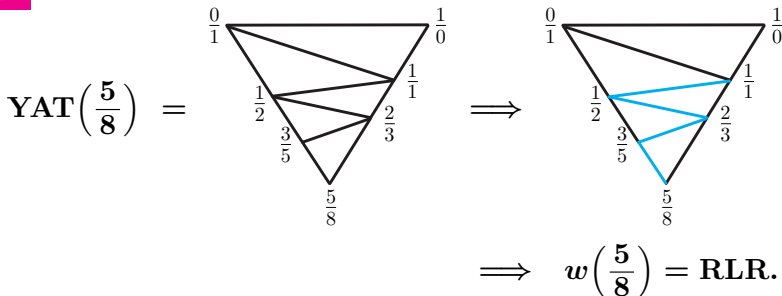


山田の祖先三角形から LR 語を読み取る方法

$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ のとき、 $YAT(\alpha)$ においてもともと SB 木の辺になっている部分は、 $\frac{1}{1}$ から α への下降道であって、 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ を除く) すべての頂点を通るものである。

$\frac{1}{2}$ からたどるときに、左の辺に進むときには L を、右の辺に進むときには R を対応させて、L と R の列を右から左に並べると $w(\alpha)$ が得られる。

例



§5. 有理数の連分数展開と有理タングルの分類

既約分数 $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ は次の連分数の形で表わされる：

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

但し、 $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ である。

右辺を $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ で表わす。

この展開は n の偶奇を指定すれば一意的である。これを $\frac{p}{q}$ の連分数展開と呼ぶ。次が成り立つ。

連分数展開と Farey 和

補題 10

$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ($a_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$) に対し

(1) n が奇数のとき、

$$\beta = \begin{cases} [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2), \\ [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}] & (a_n = 1) \end{cases}$$

$$\gamma = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

は Farey ネイバーであり、 $\alpha = \beta \sharp \gamma$ が成り立つ。

(2) n が偶数のとき、

$$\beta = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}],$$

$$\gamma = \begin{cases} [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2), \\ [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}] & (a_n = 1) \end{cases}$$

は Farey ネイバーであり、 $\alpha = \beta \sharp \gamma$ が成り立つ。

(補題 10 の例証)

$n = 3$ のとき成立すると仮定し、 $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$ とする。

$[0, b, c - 1] = \frac{p}{q}$, $[0, b] = \frac{r}{s}$ と既約分数で表示すると

$$[0, a, b, c - 1] = \frac{1}{a + \frac{p}{q}} = \frac{p}{ap + q}, \quad [0, a, b] = \frac{1}{a + \frac{r}{s}} = \frac{r}{ar + s}$$

である。帰納法の仮定より $qr - ps = -1$ であるから、

$$p(ar + s) - r(ap + q) = ps - rq = 1.$$

よって、 $[0, a, b, c - 1]$, $[0, a, b]$ は Farey ネイバーで、

$$\begin{aligned} & [0, a, b, c - 1] \# [0, a, b] \\ &= \frac{p}{ap + q} \# \frac{r}{ar + s} = \frac{1}{a + \frac{s+q}{r+p}} \\ &= \frac{1}{a + [0, b, c - 1] \# [0, b, c]} = \frac{1}{a + [0, b, c]} = [0, a, b, c]. \end{aligned}$$

よって、 $n = 4$, $a_1 = 0$, $a_n \geq 2$ のとき補題は成り立つ。 \square

(2-) タングルとは

3次元球体 B と B に固有に埋め込まれた 1次元多様体 t との組 (B, t) であって、次を満たすものをいう [3]。

(Tang1) $\partial t \subset \partial B, t \cap \partial B = \partial t$.

(Tang2) $\sharp(\partial t \cap \partial B_{\pm}) = 2, \partial t \cap S_0^2 = \emptyset$.



タングル $(B, s), (B, t)$ が同値である

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (B, s) から (B, t) への境界上の各点を
固定するアンビエント・イソトピーが存在する。

以下、標準 3次元球体 \mathbb{B}^3 内のタングル t であって、
 $\partial t = t \cap \partial \mathbb{B}^3$ が 4点

$$\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{複号任意})$$

からなるもののみを扱い、 (\mathbb{B}^3, t) を単に t と書く。

タングル図式

タングル t は $\Delta = \{0\} \times \mathbb{D}^2$ 上の図式として表わすことができる。この図式を**タングル図式**と呼ぶ。

事実 端点が共通であるような 2 つのタングルが同値

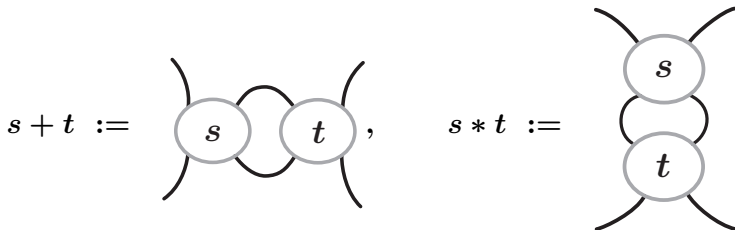
\iff それらの図式が Reidemeister 移動 I, II, III と
平面のイソトピーの有限回で移り合う。

但し、Reidemeister 移動と平面のイソトピーは円板 Δ の内部でのみ行う。







タングルの 2 つの演算と有理タングル

タングル (図式) s, t に対して和 $+$ と積 $*$ を次で定める:



定義 11

有理タングルとは、 $[0] =$

 または $[\infty] =$

 から出
 発して、タングル $[1] =$

 や $[-1] =$

 を加えたり、
 積を取ったりすることを繰り返して得られるものをいう。

有理タングルの分類 は Conway [3] により与えられた (1970 年)。

$\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $T(\alpha)$ を図式にもつ有理タングルを $t(\alpha)$ と書く。

定理 12 (Conway の有理タングルの分類定理)

2 つの有理タングル $t(\alpha)$, $t(\beta)$ が同値であるための必要十分条件は $\alpha = \beta$ となることである。したがって、有理タングルのイソトピー類全体は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ によってパラメータライズされる。

注意 13

定理の明確な証明は Cromwell の本 [2; Chapter 8] や Bonahon と Siebenmann によるモノグラフ [1; Proposition 1.3] にある。Goldman と Kauffman [8] により初等的な証明が与えられ、Kauffman と Lambropoulou [9; Theorem 3] により改良された。

注意 14 (Schubert による有理絡み目の分類)

有理絡み目とは、有理タングルの分子と同値であるような絡み目のことをいう。有理絡み目の分類は Schubert によりなされた (1956 年)[14]。

有理タングル $s = t\left(\frac{p}{q}\right)$, $t = t\left(\frac{p'}{q'}\right)$ について、有理絡み目 $N(s)$, $N(t)$ が (向きを考えないで) 同値であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである。

- ① $p = p'$ かつ
- ② $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ または $q \equiv q' \pmod{p}$.

§6. タングル図式 T の Kauffman ブラケット $\langle T \rangle$

タングル図式 T の Kauffman ブラケット $^* \langle T \rangle$ は $[\infty]$, $[0]$ を $\Lambda := \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ (A は不定元) 上の基底にもつ階数 2 の自由加群 $\Lambda^2 := \Lambda[\infty] + \Lambda[0]$ に値をとる。



Kauffman ブラケット $\langle T \rangle \in \Lambda^2$ の計算規則 :

$$(KB1) \quad \langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle$$

$$(KB2) \quad \langle T \amalg \bigcirc \rangle = \delta \langle T \rangle, \text{ 但し、} \delta = -A^2 - A^{-2}.$$

*元々は、Kauffman ブラケット多項式は 1986 年に Kauffman により導入された絡み目図式に対する Laurent 多項式である。Kauffman は、ひねり数 (writhe) を用いてブラケット多項式を補正することで有向絡み目の Jones 多項式が得られることを示し、Jones 多項式が再帰的に計算できることを示した。

Kauffman ブラケット $\langle T \rangle$ は正則イソトピー不変量

$\langle T \rangle$ は、正則イソトピー不変量 (= Reidemeister 移動 II, III の下で不変) である。したがって、 $[\infty]$, $[0]$ の係数もまた正則イソトピー不変量になる。すなわち、

$$\langle T \rangle = n_T[\infty] + d_T[0] \quad (1)$$

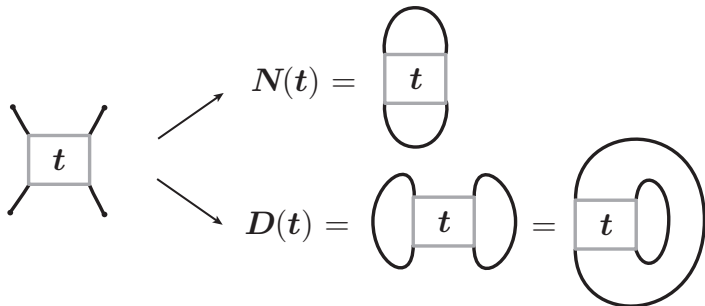
と書くと、 n_T, d_T はタングル図式 T の正則イソトピー不変量である。

$\langle T \rangle$ は Reidemeister 移動 I の下では次を満たす：

$$\langle \begin{array}{c} | \\ \rho \end{array} \rangle = -A^3 \langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \rangle, \quad \langle \begin{array}{c} \rho \\ | \end{array} \rangle = -A^{-3} \langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \rangle \quad (2)$$

タングル図式の分母と分子と Kauffman ブラケット

タングル (図式) t から次の図の操作で作られる絡み目 (図式) $N(t)$ と $D(t)$ をそれぞれ t の分子 (閉包)(numerator) と分母 (閉包)(denominator) と呼ぶ。



補題 15

$$\langle N(T) \rangle = n_T + d_T \delta, \quad \langle D(T) \rangle = n_T \delta + d_T.$$



Kauffman ブラケットのトレースと回転

写像 $v : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda$ を

$$v(a[\infty] + b[0]) = a\delta + b \quad (a, b \in \Lambda) \quad (3)$$

により定義する。また、写像 $(-)^{\text{rot}} : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ を

$$(a[\infty] + b[0])^{\text{rot}} = b[\infty] + a[0] \quad (a, b \in \Lambda) \quad (4)$$

により定義する。すると、補題 15 の等式は次のように書き換えられる：

補題 16

タングル図式 T に対して

$$\langle N(T) \rangle = v(\langle T \rangle^{\text{rot}}),$$

$$\langle D(T) \rangle = v(\langle T \rangle).$$

□

タングルの操作と Kauffman ブラケット

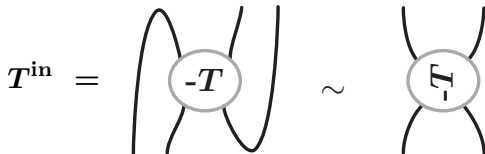
タングル図式 T に対して、

$-T := (T \text{ のすべての交差点で上下を入れ換えたもの})$

$T^{\text{in}} := (-T \text{ を反時計周りに } 90^\circ \text{ 回転したもの})$

$T^{\text{rot}} := (T \text{ を反時計周りに } 90^\circ \text{ 回転したもの})$

を順に鏡像、反転、回転という。



タングルの操作と Kauffman ブラケット

タングル図式 T に対して、

$-T := (T \text{ のすべての交差点で上下を入れ換えたもの})$

$T^{\text{in}} := (-T \text{ を反時計周りに } 90^\circ \text{ 回転したもの})$

$T^{\text{rot}} := (T \text{ を反時計周りに } 90^\circ \text{ 回転したもの})$

を順に鏡像、反転、回転という。

写像 $\overline{(-)} : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ を

$$\overline{A} = A^{-1}, \quad \overline{A^{-1}} = A$$

となる環準同型とする。

補題 17

タングル図式 T に対して $\langle T \rangle = n_T[\infty] + d_T[0]$ とおくと、

(1) $\langle -T \rangle = \overline{n_T}[\infty] + \overline{d_T}[0],$

(2) $\langle T^{\text{rot}} \rangle = d_T[\infty] + n_T[0] (= \langle T \rangle^{\text{rot}}),$

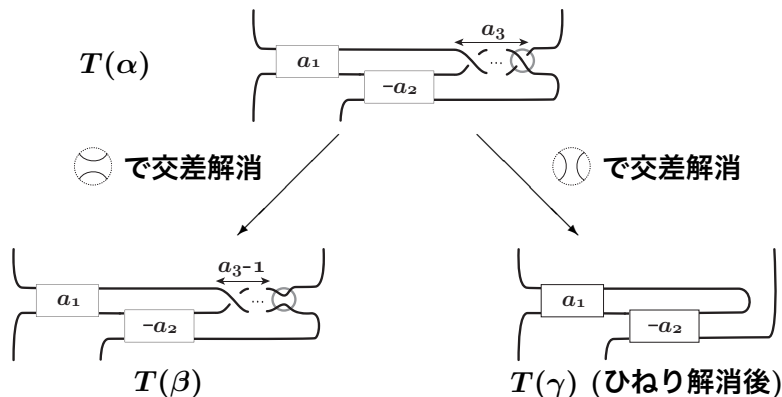
(3) $\langle T^{\text{in}} \rangle = \overline{d_T}[\infty] + \overline{n_T}[0].$



有理タンゲル図式の Kauffman ブラケット (観察 1)

- $n = 3$, $a_n \geq 2$ のとき : $\alpha = [a_1, a_2, a_3]$ に対して $\beta = [a_1, a_2, a_3 - 1]$, $\gamma = [a_1, a_2]$ とおくと、(KB1) と (2) より、

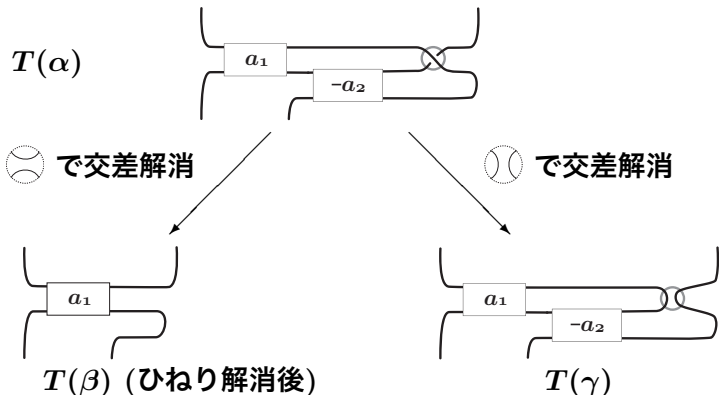
$$\langle T(\alpha) \rangle = A \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} (-A^3)^{-(a_3-1)} \langle T(\gamma) \rangle.$$



有理タングル図式の Kauffman ブラケット (観察 2)

- $n = 3, a_n = 1$ のとき : $\alpha = [a_1, a_2, a_3]$ に対して $\beta = [a_1], \gamma = [a_1, a_2]$ とおくと、

$$\langle T(\alpha) \rangle = A(-A^3)^{a_2} \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} \langle T(\gamma) \rangle.$$



有理タングル図式の Kauffman ブラケットの Farey 和公式

補題 18

$a_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ とし、 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ とおき、 α の親 (β, γ) を用いて、Farey 和 $\alpha = \beta \sharp \gamma$ として書く。

(1) n が奇数のとき、

$$\langle T(\alpha) \rangle = \begin{cases} A \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} (-A^3)^{1-a_n} \langle T(\gamma) \rangle & (a_n \geq 2), \\ A (-A^3)^{a_n-1} \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} \langle T(\gamma) \rangle & (a_n = 1). \end{cases}$$

(2) n が偶数のとき、

$$\langle T(\alpha) \rangle = \begin{cases} A (-A^3)^{a_n-1} \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} \langle T(\gamma) \rangle & (a_n \geq 2), \\ A \langle T(\beta) \rangle + A^{-1} (-A^3)^{-a_n-1} \langle T(\gamma) \rangle & (a_n = 1). \end{cases}$$

n が奇数で $a_n \geq 2$ のとき、上の補題 (1) の等式の両辺に $(-A^3)^{a_1-a_2+\dots+a_n}$ を掛けて次を得る。

$$\begin{aligned} & (-A^3)^{a_1-a_2+\dots+a_n} \langle T(\alpha) \rangle \\ = & (-A^4)(-A^3)^{a_1-a_2+\dots+(a_n-1)} \langle T(\beta) \rangle \\ & - A^{-4}(-A^3)^{a_1-a_2+\dots-a_{n-1}+2} \langle T(\gamma) \rangle \end{aligned} \quad (*)$$

補題の他の等式からも同様の等式を得る。そこで、 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{wt}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1 - a_2 + \dots + a_n & (n \text{ が奇数}), \\ a_1 - a_2 + \dots - a_n + 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

と定め、 $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して、連分数展開 $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ ($a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$) を行い、

$$\phi(\alpha) := (-A^3)^{\text{wt}(a_1, \dots, a_n)} \langle T([a_1, \dots, a_n]) \rangle$$

と定める。この値は α の連分数展開の仕方によらない。

\mathbb{Q}_+ を 0 以上の有理数の全体とする。

(*) を関数 ϕ を用いて書き換えることにより、次を得る：

命題 19

写像 $\phi : \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\} \rightarrow \Lambda^2$ は次の漸化式を満たす： β, γ が Farey ネイバーならば、

$$\phi(\beta \sharp \gamma) = -A^4 \phi(\beta) - A^{-4} \phi(\gamma).$$

注意 1 $\phi(0) = [0]$ である。また、 $\infty = \frac{1}{0} = [1, 0]$ と解釈して ϕ の式に当てはめると、

$$\begin{aligned} \phi([1, 0]) &= (-A^3)^{1+2} \langle T([1, 0]) \rangle = -A^9 \left\langle \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \right\rangle \\ &= -A^9 (-A^3)^{-1} \left\langle \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \right\rangle = A^6 [\infty] \end{aligned}$$

となる。

注意 2 写像 $\phi : \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\} \longrightarrow \Lambda^2$ と (3) の関数 v との合成は次を満たす：

$$v(\phi(0)) = 1, \quad v(\phi(\infty)) = -A^4(A^4 + 1), \quad (5)$$

$$v(\phi(\alpha)) = -A^4 v(\phi(\beta)) - A^{-4} v(\phi(\gamma)) \quad (6)$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\})$ であって、 (β, γ) は α の親).

注意 3 山田修司氏 [16] は値 $v(\phi(\alpha))$ が、 $A^{\pm 1}$ の冪を法として $T(\alpha)$ の分母 $D(T(\alpha))$ の Kauffman ブラケットに一致することを示した。 ϕ の定義と $\langle D(T(\alpha)) \rangle = v(\langle T(\alpha) \rangle)$ より、次の等式が得られる [11]。

$$v(\phi(\alpha)) = (-A^3)^{\text{wt}(\alpha)} \langle D(T(\alpha)) \rangle$$

祖先三角形による ϕ の解釈 [16] 各 $\alpha \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) = & \left(A^6 (-A^4)^{-r(\alpha)} \sum_{\gamma \in P_\infty(\alpha)} (-A^4)^{w_R(\gamma)} \right) [\infty] \\ & + \left((-A^4)^{l(\alpha)} \sum_{\gamma \in P_0(\alpha)} (-A^4)^{-w_L(\gamma)} \right) [0]. \end{aligned}$$

ここで、

$r(\alpha) := (\alpha$ の祖先三角形において右斜辺上にある辺の個数),

$l(\alpha) := (\alpha$ の祖先三角形において左斜辺上にある辺の個数),

$P_\infty(\alpha) := \{\infty$ から α へ至る下降道の全体 $\}$,

$P_0(\alpha) := \{0$ から α へ至る下降道の全体 $\}$

であり、各 $\gamma \in P_\infty(\alpha) \cup P_0(\alpha)$ に対して

$w_R(\gamma) := (\gamma$ の右側にある基本三角形の総数),

$w_L(\gamma) := (\gamma$ の左側にある基本三角形の総数).

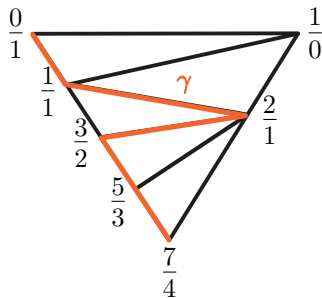
祖先三角形における下降道の例

$\alpha = \frac{7}{4}$ の場合：

$r(\alpha) = 2, l(\alpha) = 4$

であり、右図の道 γ に対して

$w_R(\gamma) = 4, w_L(\gamma) = 1$ である。



祖先三角形による ϕ の解釈—成立理由—

$t = A^4$ とする。

- (i) 山田の祖先三角形の各基本三角形において、三角形の左側の斜辺には $-t$ を、右側の斜辺には $-t^{-1}$ を乗せる。
- (ii) $* = \infty, 0$ に対して

$$\phi_*(\alpha) := \sum_{\gamma \in P_*(\alpha)} \left(\begin{array}{c} \text{通過する边上の} \\ -t^{\pm 1} \text{ たちの積} \end{array} \right)$$

とおくと、命題 19 とその下の注意 1 より、

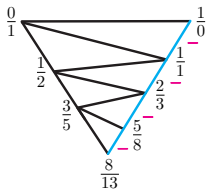
$$\phi(\alpha) = A^6 \phi_\infty(\alpha)[\infty] + \phi_0(\alpha)[0]. \quad (7)$$

このとき、各 $\gamma \in P_*(\alpha)$ に対して

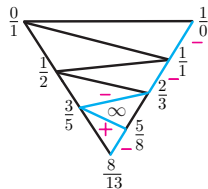
$$\left(\begin{array}{c} \text{通過する边上の} \\ -t^{\pm 1} \text{ たちの積} \end{array} \right) = \begin{cases} (-t)^{-r(\alpha)} (-t)^{w_R(\gamma)} & (* = \infty) \\ (-t)^{l(\alpha)} (-t)^{-w_L(\gamma)} & (* = 0) \end{cases}$$

となる (次の例を参照)。

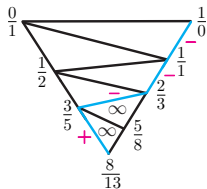
祖先三角形による ϕ の解釈—成立理由 (例)— 下の表において青の折れ線が γ で、赤の符号は $-t$ の指数 ± 1 部分を表わす。 ∞ のついた基本三角形が γ の右側にあるもの。



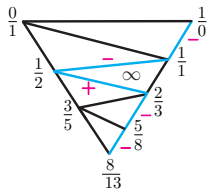
$$(-t)^{-4}$$



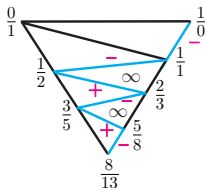
$$(-t)^{-4}(-t)$$



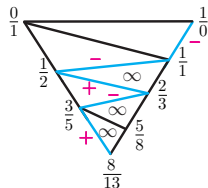
$$(-t)^{-4}(-t)^2$$



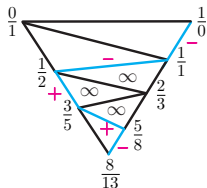
$$(-t)^{-4}(-t)$$



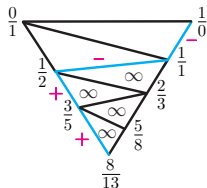
$$(-t)^{-4}(-t)^2$$



$$(-t)^{-4}(-t)^3$$



$$(-t)^{-4}(-t)^3$$



$$(-t)^{-4}(-t)^4$$

§7. CCF の対称性と不変量

定理 20 (Kogiso-W.[11])

有理数 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ に対して

$$v(\phi(ir(\alpha))) = \overline{v(\phi(\alpha))}.$$

(証明)

$\alpha = [0, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ (n は奇数、 $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$) と書く。定理 19 より

$$v(\phi(\alpha)) = (-A^3)^{\text{wt}(\alpha)} v(\langle T(\alpha) \rangle).$$

ここで、補題 16 を用いて右辺を書き換えると、

$$v(\phi(\alpha)) = (-A^3)^{\text{wt}(\alpha)} \langle D(T(\alpha)) \rangle.$$

一方、 $ir(\alpha) = [0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2] = \alpha'$ とおくと、

$$\text{wt}(\alpha') = -a_n + a_{n-1} - \dots + a_2 = -\text{wt}(\alpha).$$

よって、定理 19 および補題 16 より

$$v(\phi(ir(\alpha))) = (-A^3)^{-\text{wt}(\alpha)} \langle D(T(\alpha')) \rangle.$$

ここで、

$$D(T(\alpha')) =$$

$$\sim$$

$$\sim$$

である (\sim は正則イソトピックを意味する)。よって、

$$\langle D(T(\alpha')) \rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle$$

$$= \langle D(-T(\alpha)) \rangle = \overline{\langle D(T(\alpha)) \rangle}. \quad \square$$

ジグザグ型 CCF の Kauffman ブラケット

定義 21

ジグザグ型 CCF Γ を $\Gamma = \text{CCF}(w)$ (w は LR 語) と表わす。 w に対応する有理数 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ を用いて

$$\langle \Gamma \rangle := v(\phi(\alpha)) \quad (8)$$

とおき、 Γ の Kauffman ブラケット多項式と呼ぶ。定理 20 より、 $\langle \Gamma \rangle$ は $A \leftrightarrow A^{-1}$ の置き換えを除いて一意的に定義される。

Farey 和と LR 語

補題 22

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ を Farey ネイバーとし、それぞれに対応する LR 語を w, w' とする。このとき、

$$w\left(\frac{p}{q} \# \frac{r}{s}\right) = \begin{cases} Lw' & (\ell(w) < \ell(w') \text{ のとき}) \\ Rw & (\ell(w) > \ell(w') \text{ のとき}) \end{cases} \quad (9)$$

となる。但し、 $\ell(\quad)$ は語の長さを表わす。(9) の右辺を $w \vee w'$ で表わす。

例 23

$w\left(\frac{2}{5}\right) = \text{RL}$, $w\left(\frac{3}{7}\right) = \text{RRL}$ であるから、

$$w\left(\frac{5}{12}\right) = w\left(\frac{2}{5} \# \frac{3}{7}\right) = \text{LRRL}.$$

ジグザグ型 CCF の Kauffman ブラケットの計算公式

定理 24 (Kogiso-W.[11])

$$\langle \Gamma_{\emptyset} \rangle = -A^4 - A^{-4},$$

$$\langle \Gamma_L \rangle = -A^4 + 1 + A^{-8}, \quad \langle \Gamma_R \rangle = A^8 + 1 - A^{-4}$$

であり、LR 語 w, w' に対応する有理数が Farey ネイバーであるとき、

$$\langle \Gamma_{w \vee w'} \rangle = -A^4 \langle \Gamma_w \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_{w'} \rangle. \quad (10)$$

したがって、任意の $k \in \mathbb{N}$ と LR 語 w に対して

$$\langle \Gamma_{R^k L w} \rangle = -A^4 \langle \Gamma_{R^{k-1} L w} \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_w \rangle,$$

$$\langle \Gamma_{L^k R w} \rangle = -A^4 \langle \Gamma_w \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_{L^{k-1} R w} \rangle.$$

計算公式の適用例

$w = L^3R$ に対応する CCF $\Gamma_w = \text{CCF}(w)$ を考える。このとき、定理 24 の公式より

$$\begin{aligned}\langle \Gamma_{L^3R} \rangle &= -A^4 \langle \Gamma_\emptyset \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_{L^2R} \rangle \\ &= -A^4 \langle \Gamma_\emptyset \rangle - A^{-4} (-A^4 \langle \Gamma_\emptyset \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_{LR} \rangle) \\ &= (1 - A^4) \langle \Gamma_\emptyset \rangle + A^{-8} (-A^4 \langle \Gamma_\emptyset \rangle - A^{-4} \langle \Gamma_R \rangle) \\ &= (1 - A^4 - A^{-4}) \langle \Gamma_\emptyset \rangle - A^{-12} \langle \Gamma_R \rangle \\ &= (1 - A^4 - A^{-4}) (-A^4 - A^{-4}) \\ &\quad - A^{-12} (A^8 + 1 - A^{-4}) \\ &= A^8 - A^4 + 2 - 2A^{-4} + A^{-8} - A^{-12} + A^{-16}.\end{aligned}$$

CCF の垂直方向に関する対称性と LR 語

CCF Γ が与えられたとき、左右を逆にする (すなわち、垂直方向に関する鏡映をとる) ことにより新しい CCF を作ることができる。このようにして得られる CCF を $\perp(\Gamma)$ と記すことにする。

例 25

$\Gamma = \Gamma_{L^3R}$ に対して、

$$\perp(\Gamma) : \begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & \dots & 5 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & \dots & \\ & & 4 & 1 & 3 & 3 & 5 & 2 & 1 & 9 & 4 & 1 & 3 & & \\ \perp(\Gamma) : & \dots & 7 & 3 & 1 & 4 & 7 & 3 & 1 & 4 & 7 & 3 & 1 & \dots & \\ & & 5 & 2 & 1 & 9 & 4 & 1 & 3 & 3 & 5 & 2 & 1 & & \\ & \dots & 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & \dots & \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \end{array}$$

これは、 w において、L と R を入れ換えることにより得られる語 $i(w)$ に対応する CCF である。

CCF の対称性と Kauffman ブラケット

定理 26 (Kogiso-W.[11])

ジグザグ型 CCF Γ に対して

$$\langle \perp(\Gamma) \rangle \doteq \langle \Gamma \rangle$$

となる。ここで、 \doteq は A を A^{-1} に置き換えて得られる Laurent 多項式は同じとみなして等しいことを意味する。

上の定理の証明のために、次の補題を用いる。

補題 27

(1) 既約分数 $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ に対して、

$$i\left(w\left(\frac{p}{q}\right)\right) = w\left(\frac{q-p}{q}\right).$$

(2) LR 語 w, w' に対応する既約分数が Farey ネイバーであるとき、

$$i(w \vee w') = i(w') \vee i(w).$$

(定理 26 の証明)

LR 語 w に対して、

$$v(\phi(i(w))) = \overline{v(\phi(w))} \quad (11)$$

が成り立つことを示せばよい。LR 語の長さに関する数学的帰納法で証明する。

I. 長さ 1 以下の LR 語 $w (= \emptyset, L, R)$ に対して (11) は成立する (簡単にわかる)。

II. 長さ d 未満の LR 語に対して (11) が成立すると仮定する。

w を長さ d の LR 語とする。 $w = w_1 \vee w_2$ となる LR 語 w_1, w_2 をとり、 $w_1 = w\left(\frac{p}{q}\right)$, $w_2 = w\left(\frac{r}{s}\right)$ とすると、補題

27 より、 $i(w_2) = w\left(\frac{q-p}{q}\right)$, $i(w_1) = w\left(\frac{s-r}{s}\right)$ は Farey ネイバーであり、 $i(w) = i(w_2) \vee i(w_1)$.

よって、(19) と帰納法の仮定より、

$$\begin{aligned}v(\phi(i(w))) &= -A^4 v(\phi(i(w_2))) - A^{-4} v(\phi(i(w_1))) \\ &= -A^4 \overline{v(\phi(w_2))} - A^{-4} \overline{v(\phi(w_1))} \\ &= \overline{-A^{-4} v(\phi(w_2)) - A^4 v(\phi(w_1))} \\ &= \overline{v(\phi(w))}.\end{aligned}$$

よって、長さ d の LR 語 w に対しても (11) は成り立つ。 \square

注意 28

LR 語 w とその並び順を左右逆にして得られる LR 語 $r(w)$ に対して、 w , $r(w)$ に対応する $(0, 1)$ 内の有理数をそれぞれ α, β とする。このとき、定理 20 と定理 26 より

$$v(\phi(\alpha)) = v(\phi(\beta))$$

が成り立つ。

CCF の Kauffman ブラケットから得られる 2 つの多項式

- (0) Stern-Brocot 木を用いて山田の祖先三角形を描く。
- (i) 各辺の上に、三角形の左側の斜辺には $-t$ を、右側の斜辺には $-t^{-1}$ を乗せる。

$$(ii) Q_{\alpha}(t) := \sum_{\substack{\alpha \text{ から } \frac{1}{2} \\ \text{への上昇経路}}} \left(\begin{array}{c} \text{通過する辺上の} \\ -t^{\pm 1} \text{ たちの積} \end{array} \right),$$

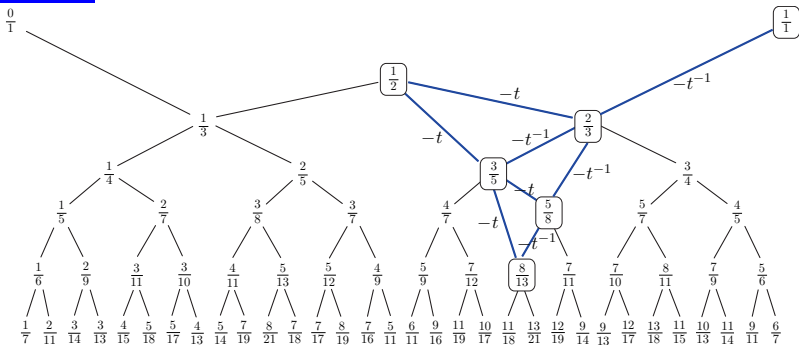
$$R_{\alpha}(t) := \sum_{\substack{\alpha \text{ から } \frac{1}{1} \text{ (or } \frac{0}{1}) \\ \text{への上昇経路}}} \left(\begin{array}{c} \text{通過する辺上の} \\ -t^{\pm 1} \text{ たちの積} \end{array} \right).$$

このとき、

$$\langle \Gamma_{w(\alpha)} \rangle = (-t - t^{-1})Q_{\alpha}(t) + R_{\alpha}(t) \quad (12)$$

となる。但し、 $t = A^4$ と置き換える。

計算例



$$\begin{aligned}
 Q_{\frac{8}{13}}(t) &= (-t)^2 + (-t)(-t^{-1})(-t) + (-t^{-1})(-t)^2 \\
 &\quad + (-t^{-1})(-t)(-t^{-1})(-t) + (-t^{-1})^2(-t) \\
 &= t^2 - 2t + 1 - t^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\frac{8}{13}}(t) &= (-t)(-t^{-1})^2 + (-t^{-1})(-t)(-t^{-1})^2 + (-t^{-1})^3 \\
 &= -t^{-1} + t^{-2} - t^{-3}.
 \end{aligned}$$

$Q_\alpha(t), R_\alpha(t)$ の性質

$Q_{\frac{8}{13}}(-1) = 5, R_{\frac{8}{13}}(-1) = 3$ であるから、

$Q_{\frac{8}{13}}(-1) + R_{\frac{8}{13}}(-1) = 8, 2Q_{\frac{8}{13}}(-1) + R_{\frac{8}{13}}(-1) = 13$ とな

り、 $\frac{8}{13}$ の分子と分母が復元される。

一般に、次が成り立つ。

命題 29 (Kogiso-W.[11])

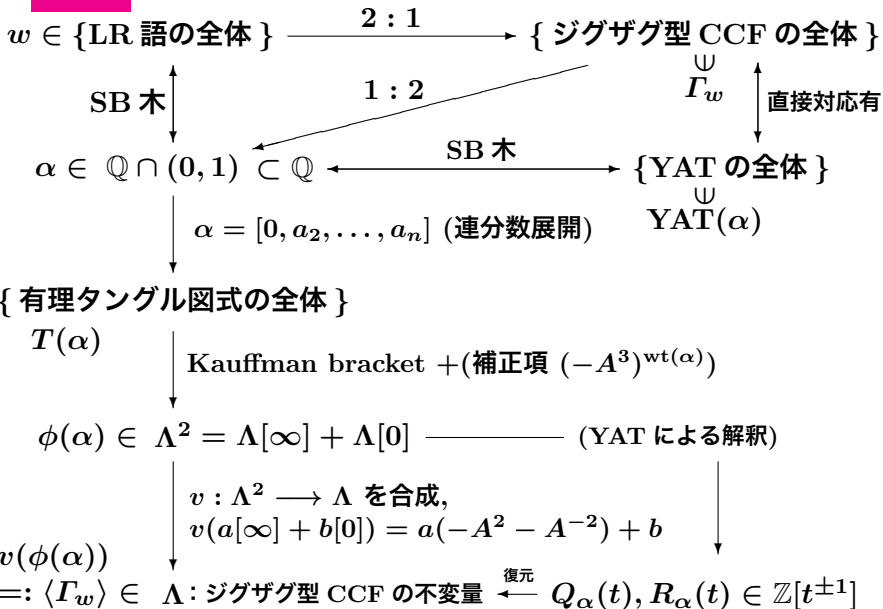
$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ について、

(1) $2p > q \implies Q_{\frac{p}{q}}(-1) + R_{\frac{p}{q}}(-1) = p, Q_{\frac{p}{q}}(-1) = q - p.$

(2) $2p < q \implies Q_{\frac{p}{q}}(-1) = p, Q_{\frac{p}{q}}(-1) + R_{\frac{p}{q}}(-1) = q - p.$

注意 $Q_\alpha(t), R_\alpha(t)$ も、 $\langle \Gamma_{w(\alpha)} \rangle$ と同様に、Farey ネイバーを用いて計算することができる。

まとめ



- [1] F. Bonahon and L.C. Siebenmann, *New geometric splittings of classical knots and the classification and symmetries of arborescent knots*, June 12, 2010.
- [2] A. Brocot, *Calcul des rouages par approximation, Nouvelle méthode*, Revue chronométrique **3** (1861), 186–194.
- [3] J.H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, in Proceedings of the conference on computational problems in abstract algebra held at Oxford 1967, (J. Leech ed.), Pergamon Press, 1970, 329–358.
- [4] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94, 175–183.
- [5] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.
- [6] P. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [8] J.R. Goldman and L.H. Kauffman, *Rational tangles*, Adv. Appl. Math. **18** (1997), 300–332.
- [9] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, Adv. Appl. Math. **33** (2004), 199–237.
- [10] 小木曾岳義, 「Conway Coxeter Frieze を用いた有理絡み目図式の Kauffman bracket 多項式の計算レシビ」, 研究集会「結び目の数学 X」報告集 (2018), 91–108.
- [11] T. Kogiso and M. Wakui, *A bridge between Conway-Coxeter Friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, arXiv:1806.04840v1, 2018.
- [12] 黒木玄, 「フリーズパターン—数の繰返し模様の不思議」, <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf>.
- [13] 中島啓, 「講座：数学の発見クラスター代数とルート系」, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Talks/12_Hakken/hakken.pdf.
- [14] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65** (1956), 133–170.
- [15] M.A. Stern, *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **55** (1858), 193–220.
- [16] 山田修司, 「2 橋結び目の Jones 多項式」, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集, 1996 年 2 月.