有理数とダンスと群と

和久井道久 (関西大学)

December 15, 2021

城西大学理学部数学科講演会

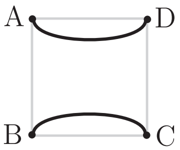
(ZOOM によるオンライン開催)

内容

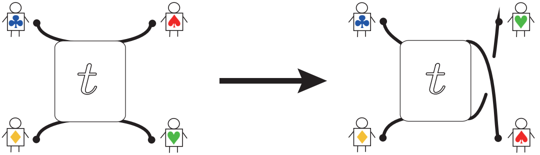
- Conway のスクエア・ダンスとは
- ほどくためのアルゴリズム
- 有理タングルと有理数の対応関係
- 整数彩色による有理タングルの不変量の構成と分類
- スクエア・ダンスと群

Conway のスクエア・ダンス

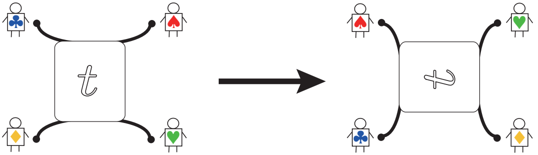
- 4 人が正方形の頂点の位置に立ち、2 本のひもを 2 人 1 組で握る。
- 次の 2 つのルールに従ってダンスを踊る。



[ツイスト]



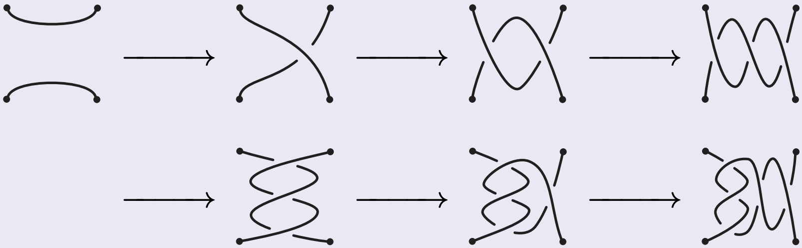
[回転]



ダンスを有限回行って得られる絡んだひもの状態を**有理タングル**と呼ぶ。

有理タングルの例

例 1



問題 2

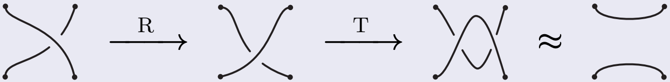
ひもが絡んだ状態から再びツイストと回転を繰り返し、もとの絡んでいない状態に戻すことができるか？できる場合、そのほどき方を見つけよ。

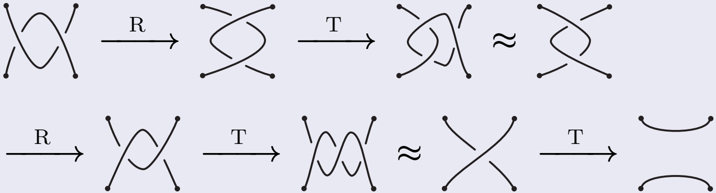
有理タングルの例

- ツイスト $\longrightarrow$ **T**
- 回転 $\longrightarrow$ **R**

上の例 1 の場合：$\mathbf{TTTRTT = T^3RT^2}$

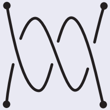
観察 3

(1) 

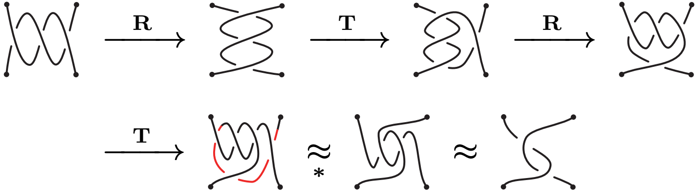
(2) 

練習問題

練習 1

 の場合はどうか？

解；



(＊：奥にある赤い部分を上に引き上げて交差を解消)

最後のタングルは、観察 3(2) の途中に現れるタングルなので、$\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{T}$ を順次行うとほどくことができる。 □

ほどくためのアルゴリズム

定理 4 (Conway)

有理タングルの絡まった 2 つのひもは、ツイストと回転を有限回行うことでほどくことができ、そのためのアルゴリズムがある。

[アイデア]
ツイストを行ったか回転を行ったかに応じて有理数を割り当てる。

[割り当て規則]

(i) ツイストを行った場合、有理数に 1 を加える。

(ii) 回転を行った場合、有理数 x から $-\dfrac{1}{x}$ を作る。

(i),(ii) の有理数に対する操作をそれぞれ $\underline{T}, \underline{R}$ と記す：

$$\underline{T}(x) = x + 1, \qquad \underline{R}(x) = -\frac{1}{x}.$$

ほどくためのアルゴリズム

$$\underline{T}(x) = x + 1, \qquad \underline{R}(x) = -\frac{1}{x}.$$

 $\longrightarrow \mathbb{t}_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathbb{t}_k$

$$0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow x_k$$

このようにして、各有理タングルに 1 つの有理数が対応する。
今、有理タングル $\mathbb{t}$ に対応する有理数が x であったとしょう。
このとき、次の操作を有理タングルと有理数の両方に行う。

[Conway のアルゴリズム]

- $x < 0$ の場合、$\mathbb{t}$ にツイストを、x に $\underline{T}$ を施す。
- $x > 0$ の場合、$\mathbb{t}$ に回転を、x に $\underline{R}$ を施す。
- $x = 0$ の場合、何も行わない。

これを繰り返すと、最後には 0 の有理数となり、2 つのひもがもつれていない状態になる。

アルゴリズムの実践

[Conway のアルゴリズム]

- $x < 0$ の場合、t にツイストを、x に $\underline{T}$ を施す。
- $x > 0$ の場合、t に回転を、x に $\underline{R}$ を施す。
- $x = 0$ の場合、何も行わない。

例 5

TTRTR というダンスを経て得られた有理タングルの場合、対応する有理数は

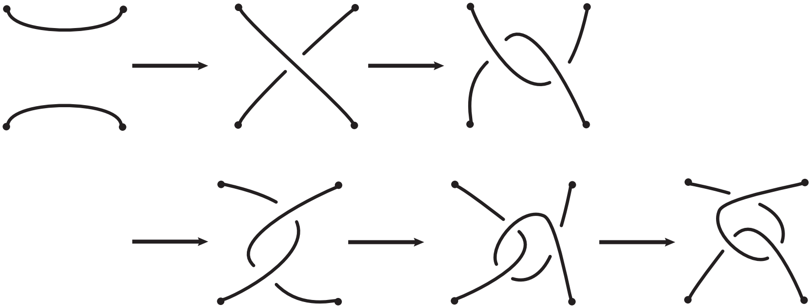
$$\mathbf{0} \xmapsto{\mathrm{T}} \mathbf{1} \xmapsto{\mathrm{T}} \mathbf{2} \xmapsto{\mathrm{R}} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \xmapsto{\mathrm{T}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \xmapsto{\mathrm{R}} -\mathbf{2}$$

となる。したがって、TT を行えば初期状態に戻る。

練習 2

上の例の内容を、図を描いて確認せよ。

練習 2 の解答



最後の有理タングルは、TT を行えば初期状態に戻る。

定理 4 の証明(アルゴリムによりほどける理由)

正の有理数 x について

- $x \geq 1 \implies \underline{R}(x) = -\frac{1}{x} \geq -1$. よって、$\underline{R}(x) \in [-1, 0)$.
- $0 < x < 1 \implies \underline{R}(x) = -\frac{1}{x} < -1$

$$\implies (\underline{T}^k \circ \underline{R})(x) = -\frac{1}{x} + k \in (-1, 0)$$

となる k が存在する。

よって、始めに与えられた有理数 x は $-1 \leq x < 0$ を満たすとしてよい。その有理数を

$$x := -\frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q)$$

と表わす。アルゴリズムに従って $\underline{T}$ を施すと、

$$x + 1 = \frac{q-p}{q} =: x_1$$

が得られる。

定理 4 の証明 (つづき)

$$x + 1 = \frac{q-p}{q} =: x_1$$

において

- $p = q$ なら $x_1 = 0$ なのでここで完了である。
- $p < q$ なら $x_1 > 0$ である。アルゴリズムに従って $\underline{R}$ を施して負の数にし、$\underline{T}$ を何回か施して正の数にする。但し、正の数になる 1 つ手前で止めておく：

$$x_1 \longmapsto -\frac{q}{q-p} \longmapsto \cdots \longmapsto x_2 := -\frac{r}{q-p}$$
$$(r \in \mathbb{N},\ r \leq q-p)$$

(x の分母) $>$ (x_2 の分母) > 0 であるから、アルゴリズムを繰り返していけば、最後には分母が 1 の状態 (つまり、負の整数) になる。よって、$\underline{T}$ を繰り返し適用して 0 にすることができる。このとき、タングルのもつれは解消している。 $\square$

有理タングルと有理数との間の対応

Conway のアルゴリズムにより、有理タングルに有理数が定まる。各有理タングルにどんな有理数が対応するのかを調べよう。

$$\longleftrightarrow \quad \mathbf{0} \tag{1}$$

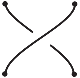
であり、自然数 n に対して、

$$\longleftrightarrow \quad \boldsymbol{n} \tag{2}$$

このタングルに回転 R を施すと、有理数に $\underline{R}$ を施すことになるから、

$$\longleftrightarrow \quad -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \tag{3}$$

である。特に、



$$\longleftrightarrow \quad -\mathbf{1}.$$

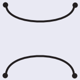
有理タングルと有理数との間の対応

観察 6

タングル (2) で、全交差点の上下を変えて得られるタングル

(4)

にはどんな有理数 x が対応するか？

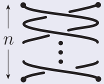
このタングルにツイストを n 回施すと  になってほどけるから、x は $x + n = 0$ を満たす。よって、$x = -n$ である、すなわち

$$\longleftrightarrow \quad -n. \tag{5}$$

有理タングルと有理数との間の対応

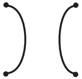
注意 7

上の観察より、次の対応もあることがわかる：



$$\longleftrightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \tag{6}$$

(2) と (3) との関係、および、(5) と (6) との関係から、(1) のタングルを 90° 回転して得られる有理タングル

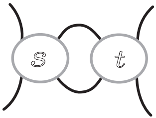


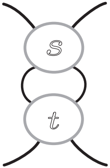
$$\tag{7}$$

は $\infty = \dfrac{1}{0}$ に対応するものと考えられる。

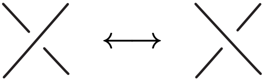
タングルに対する 5 操作

有理タングルには和 $+$, 積 $*$, 鏡像 $-$, 回転 $(-)^{\mathrm{rot}}$, 反転 $(-)^{\mathrm{in}}$ の操作が以下のように定義される。

(1) 和 $s + t \ :=$ 

(2) 積 $s * t \ :=$ 

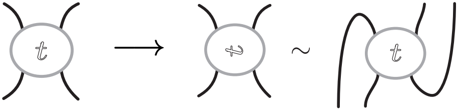
(3) 鏡像：タングル t の全交差点において “上下” 入れ換え



をして得られるタングルのこと。$-t$ と記す。

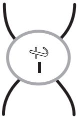
タングルに対する 5 操作

(4) **回転：タングル t を反時計周りに 90° 回転**



して得られるタングルのこと。t^{rot} で表わす。

(5) **反転：タングル t に対して、回転と鏡像の合成を施して得られるタングルのこと。t^{in} で表わす。**

$t^{\mathrm{in}} :=$ 

タングルの和と有理数の和

タングルに対する 5 操作は有理数に対する演算と対応している。

- 和 $+$ に関して：有理タングル s, t がそれぞれ有理数 x, y に対応するとき、

$$s + t \quad \longleftrightarrow \quad x + y. \tag{8}$$

例えば、整数 n に対して、

$[n] =$

$(n > 0$ のとき$)$

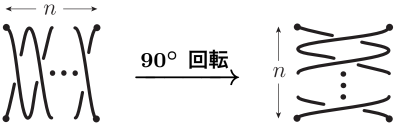
$(n < 0$ のとき$)$

とおくと、任意の整数 m, n に対して

$[m] + [n] = [m + n]$ であり、これは $m + n$ に対応する。

タングルの回転と有理数

- 回転 $(-)^{\mathrm{rot}}$ に関して：



特に、$n = 1$ のとき

$$[1] \xrightarrow{90^\circ\ \text{回転}} [-1]$$

である。これが、Conway のアルゴリズムにおいて、90° 回転を、$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ではなく $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ と解釈する理由である。

一般に、有理タングル t が有理数 x に対応するとき、

$$t^{\mathrm{rot}} \longleftrightarrow -\frac{1}{x}.$$

タングルの鏡像・反転と有理数

- **鏡像 − に関して：**

$[n] =$  $\xrightarrow{\text{上下入れ替え}}$ $[-n] =$ 

$\dfrac{1}{[n]} :=$  $\xrightarrow{\text{上下入れ替え}}$ $-\dfrac{1}{[n]} =$ 

一般に、有理タングル t が有理数 x に対応するとき、

$$-t \quad \longleftrightarrow \quad -x.$$

- **反転 $(-)^{\mathrm{in}}$ に関して：**
反転は回転と鏡像の合成であるから、有理タングル t が有理数 x に対応するとき、

$$t^{\mathrm{in}} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{x}.$$

タングルの積と有理数に対する操作

- 積 $*$ に関して：
  整数 m, n に対して
  $$\left(\frac{1}{[m]}\right) * \left(\frac{1}{[n]}\right) = \frac{1}{[m+n]} = \frac{1}{[m]+[n]}.$$
  90° 回転をすれば積は和になるから、有理数に対しては、
  $$(x, y) \longmapsto -\frac{1}{(-\frac{1}{x}) + (-\frac{1}{y})} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$
  に対応する。つまり、有理タングル $\mathbb{s}, \mathbb{t}$ がそれぞれ有理数 x, y に対応するとき、
  $$\mathbb{s} * \mathbb{t} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}. \tag{9}$$

以上のように、タングルは代数的操作と相性がよく、その代数的操作は有理数に対する基本操作と対応している。

有理タングルと連分数

有理数の和の可換性と、逆数をとる操作を 2 回続けて行うと元の有理数に戻ることに対応して次が成り立つ：

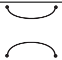
補題 8

有理タングル s, t に対して

$$s + t = t + s. \tag{10}$$

$$(t^{\mathrm{in}})^{\mathrm{in}} \approx (t^{\mathrm{rot}})^{\mathrm{rot}} \approx t. \tag{11}$$

スクエア・ダンスで得られる有理タングルと有理数との関係：

有理タングル	有理数
$[0] =$ 	$\mathbf{0}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$[0] + [d_1] = [d_1]$	$\mathbf{0} + d_1 = d_1$
$\downarrow$	$\downarrow$

有理タングル	有理数
$[0] =$ 	$\mathbf{0}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$[0] + [\boldsymbol{d_1}] = [\boldsymbol{d_1}]$	$\mathbf{0} + \boldsymbol{d_1} = \boldsymbol{d_1}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$-\dfrac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{d_1}]}$	$-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d_1}}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$[\boldsymbol{d_2}] - \dfrac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{d_1}]}$	$\boldsymbol{d_2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d_1}}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$-\dfrac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{d_2}] - \dfrac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{d_1}]}}$	$-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d_2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d_1}}}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\vdots$	$\vdots$

Conway のスクエア・ダンスと負連分数

よって、Conway のスクエア・ダンスにより得られるタングルは、

$$[d_l] - \cfrac{1}{[d_{l-1}] - \cfrac{1}{[d_{l-2}] - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{[d_2] - \cfrac{1}{[d_1]}}}}} \tag{12}$$

であり、これに対応する有理数は次の負連分数である：

$$d_l - \cfrac{1}{d_{l-1} - \cfrac{1}{d_{l-2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{d_2 - \cfrac{1}{d_1}}}}} \tag{13}$$

(正則) 連分数とは

一般に、実数列 $a_1, \ldots, a_n$ から作られる次の形の「分数式」を (正則) 連分数と呼ぶ：

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{14}$$

これを

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \tag{15}$$

と表わす。

有理タングルの Conway 表記法

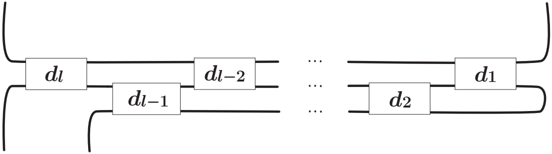
(13) の連分数は次のように表わされる：

l が奇数のとき：$[d_l, -d_{l-1}, d_{l-2}, \ldots, -d_2, d_1]$.

l が偶数のとき：$[d_l, -d_{l-1}, d_{l-2}, \ldots, d_2, -d_1]$.

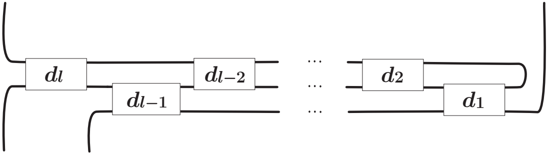
一方、(12) の有理タングルは次の形に整理することができる。

- l が奇数のとき、



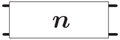
(16)

- l が偶数のとき、

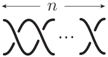


(17)

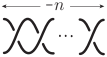
有理タングルの Conway 表記法の証明

但し、

$=$



$(n \geq 0)$,



$(n < 0)$

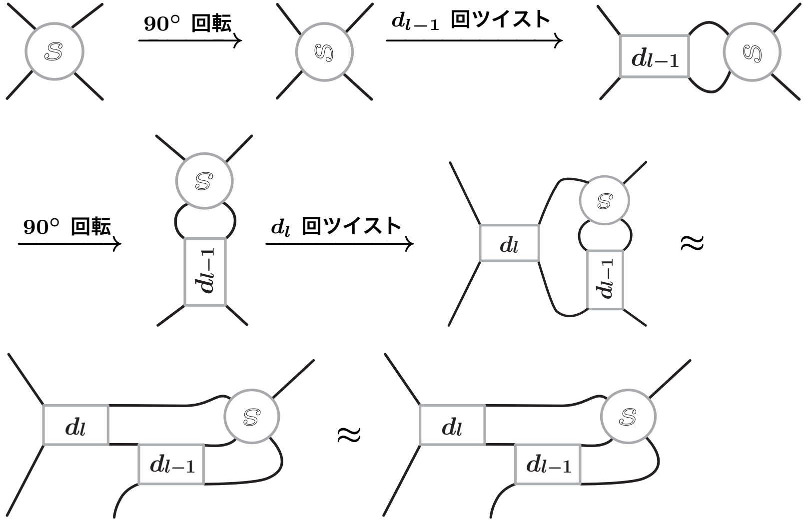
(略証)

l に関する帰納法で示す。$l = 1, 2$ の時は成立している。
$l \geq 3$ として、$(l-1)$ 以下のときに (16), (17) のように表わされると仮定する。(12) のタングル $\mathbb{t}$ は、$[d_{l-2}]$ 以降の部分を $\mathbb{s}$ とおくと、次のように表わされる：

$$\mathbb{t} = [d_l] - \cfrac{1}{[d_{l-1}] - \cfrac{1}{\mathbb{s}}}$$

有理タングルの Conway 表記法の証明 (つづき)

補題 8 を用いて



最後の $\mathbb{S}$ に帰納法の仮定を適用すればよい。 □

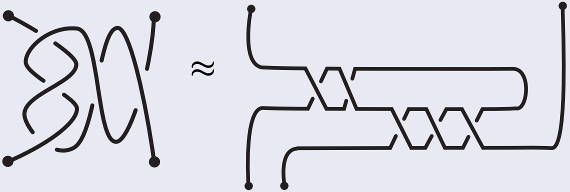
有理タングルの Conway 表記法の例

例 9

例 1 で作った有理タングルは、

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\mathrm{T}^{3}} \mathbf{3} \xrightarrow{\mathrm{R}} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \xrightarrow{\mathrm{T}^{2}} \mathbf{2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

より、連分数 $[2,-3]$ に対応している。よって、



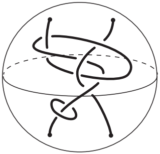
が成り立つ。

有理タングルから対応する有理数を求めるには

問題 10

有理タングルが与えられたとき、対応する有理数を求めるにはどうすればよいか？

有理タングルは特別なタングルである。タングルとは、数学的には次図のように、3 次元球体 $\mathbb{B}^3$ 内に次の条件を満たすように埋め込まれた 1 次元多様体 t のことをいう：



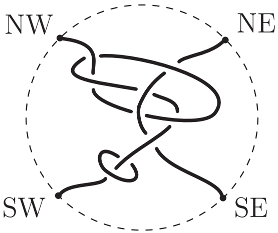
2 つのタングル s と t が同値である (このとき $s \approx t$ と書く) とは、$\mathbb{B}^3$ の表面上の点を動かさずに $\mathbb{B}^3$ 内で連続的に変形して、s を t に変えることができるときをいう。

タングル図式

タングルを、次の条件を満たすように平面上の図で表わしたものを**タングル図式**と呼ぶ。

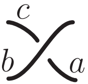
(TD1) 交差点の個数は有限個であり、すべての交差点は 2 重点である (3 重点以上を持たない)。

(TD2) 各 2 重点においては 2 曲線が横断的に交わっており、下を通る曲線の方は、交差点を含む小さな部分を切り取って図示する。



タングル図式の整数彩色

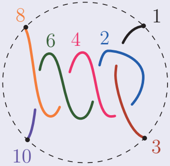
T をタングル図式とする。
T の下交差点から次の下交差点までの部分を**部分弧**という。
T の**整数彩色**とは、T の各部分弧に整数を割り当てる方法、すなわち、写像 $\lambda : \{ T \text{ の部分弧全体} \} \longrightarrow \mathbb{Z}$ であって、その割り当て方が各交差点において次を満たすもののことをいう：



$$(a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a + c = 2b$$

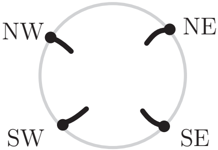
T の整数彩色の全体を $\mathrm{Col}(T)$ で表わす。

例 11



整数彩色を用いた不変量の構成

$\lambda \in \mathrm{Col}(T)$ に対して、4 つの端点を含む辺の整数彩色をそれぞれ $\lambda(\mathrm{NW}), \lambda(\mathrm{NE}), \lambda(\mathrm{SW}), \lambda(\mathrm{SE})$ で表わす。



$$\begin{pmatrix} \lambda(\mathrm{NW}) & \lambda(\mathrm{NE}) \\ \lambda(\mathrm{SW}) & \lambda(\mathrm{SE}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおき、$a = b = d$ となる $\lambda \in \mathrm{Col}(T)$ を除いた整数彩色の全体を $\mathrm{Col}^{-}(T)$ とおく。関数 $f_T : \mathrm{Col}^{-}(T) \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を

$$f_T(\lambda) := \frac{b-a}{b-d} \tag{18}$$

と定める。

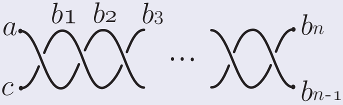
$\lambda \in \mathrm{Col}(T)$ が**対角和規則**を満たすとは

$$\lambda(\mathrm{NW}) + \lambda(\mathrm{SE}) = \lambda(\mathrm{NE}) + \lambda(\mathrm{SW})$$

が成り立つときをいう。

観察 12

(1) $T = [n]$ $(n > 0)$ の次図の彩色 λ を考える。



このとき、
$$\begin{cases} b_1 = 2a - c, \\ b_2 = 2b_1 - a = 3a - 2c, \\ b_3 = 2b_3 - b_1 = 4a - 3c, \\ \quad\vdots \\ b_n = \cdots = (n+1)a - nc \end{cases}$$
である。特に、
$$\lambda(\mathrm{NE}) = (n+1)a - nc,\ \lambda(\mathrm{SE}) = na - (n-1)c.$$
よって、$\lambda(\mathrm{NW}) + \lambda(\mathrm{SE}) = \lambda(\mathrm{NE}) + \lambda(\mathrm{SW})$ を満たす。さらに、$\lambda \in \mathrm{Col}^-(T)$ のとき
$$f_T(\lambda) = \frac{(n+1)a - nc - a}{(n+1)a - nc - \bigl(na - (n-1)c\bigr)} = n.$$

観察 13

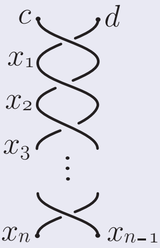
(2) $T = \big)\ \big($ の場合、$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NW}) & \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NE}) \\ \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SW}) & \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SE}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ より、

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NW}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SE}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NE}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SW})$$

が成り立つ。$\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{Col}^{-}(\boldsymbol{T})$ のとき、$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$ であるから

$$\boldsymbol{f_T}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}} = \infty.$$

(3) $\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathbf{1}}{[\boldsymbol{n}]}$ $(\boldsymbol{n} > \mathbf{0})$ の右図の彩色 $\boldsymbol{\lambda}$ を考える。



(1) と同様に

$\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SW}) = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\boldsymbol{c}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SE}) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{d}$

であるから

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NW}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SE}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{NE}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{SW}).$$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{Col}^{-}(\boldsymbol{T})$ のとき

$$\boldsymbol{f_T}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d} - \big(\boldsymbol{n}\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\boldsymbol{d}\big)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}.$$

整数彩色による有理タングルの不変量と分類

定理 14 (Kauffman and Lambropoulou)

有理タングル $\mathbb{t}$ に対して、

$$f(\mathbb{t}) := f_T(\lambda) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \quad (T \text{ は } \mathbb{t} \text{ の図式、} \lambda \in \mathrm{Col}^-(T))$$

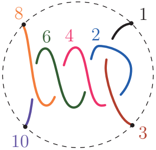
は T および λ に依らない定数である。さらに、この値は $\mathbb{t}$ に対応する有理数に一致する。

2 つの有理タングルが同値になるかならないかは、対応する有理数が等しいか等しくないかにより完全に決定される：

定理 15 (Conway)

有理タングル $\mathbb{s}, \mathbb{t}$ が同値であるための必要十分条件は対応する有理数が等しいこと、すなわち、$f(\mathbb{s}) = f(\mathbb{t})$ となることである。

計算例

例 11 で与えられたタングル $\mathbb{t}$ =  を考える。$\mathbb{t}$ に対応する有理数は

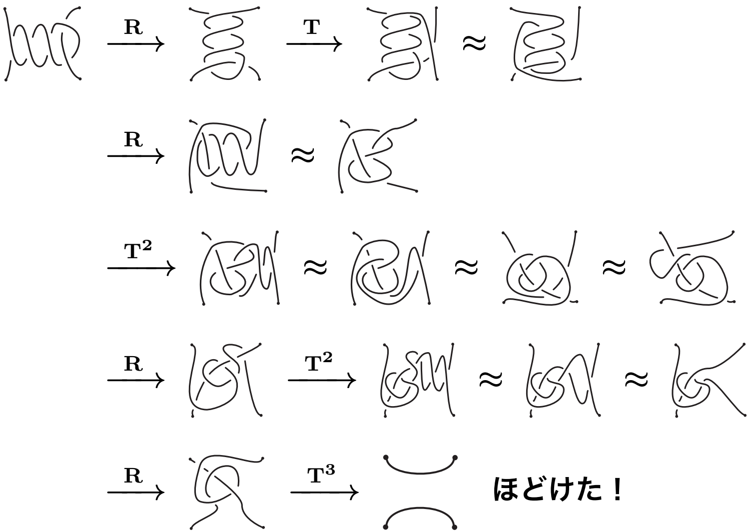
$$f(\mathbb{t}) = \frac{1-8}{1-3} = \frac{7}{2}.$$

ここで、

$$\frac{7}{2} \xrightarrow{\underline{R}} -\frac{2}{7} \xrightarrow{\underline{T}} \frac{5}{7} \xrightarrow{\underline{R}} -\frac{7}{5} \xrightarrow{\underline{T}^2}$$

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\underline{R}} -\frac{5}{3} \xrightarrow{\underline{T}^2} \frac{1}{3} \xrightarrow{\underline{R}} -3 \xrightarrow{\underline{T}^3} 0$$

より、$\mathbb{t}$ は次の手順で Conway のスクエア・ダンスによりほどくことができる。


R
T
≈
R
≈
T²
≈
≈
≈
R
T²
≈
≈
R
T³
ほどけた！

練習 3

次のタングル図式の整数彩色を 1 つ見つけて、このタングルに対応する有理数を求めよ。さらに、このタングルを Conway のスクエア・ダンスによりほどくための 1 つの方法を与えよ。

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$ を q-整数という。

研究課題. 整数彩色を q-整数彩色に置き換えて、$f(t) \in \mathbb{Z}[q]$ のような不変量 (すなわち、同値なタングルに対しては q についての同じ整数係数多項式をとる関数) を作ることはできるか？

Conway のアルゴリズムと一次分数変換

Conway のアルゴリズムで登場した写像

$$\underline{T} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \underline{T}(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{Q}),$$

$$\underline{R} : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \underline{R}(x) = -\frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{Q} - \{0\})$$

に着目しよう。x を複素数を動く z に置き換えると、$\underline{T}, \underline{R}$ は一次分数変換と思える。一般の一次分数変換は a, b, c, d を $ad - bc \neq 0$ を満たす複素数の定数として、

$$F : z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

により与えられる。さらに、別の一次分数変換

$$G : w \longmapsto \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$$

を考えて、合成すると、

Conway のアルゴリズムと群

$$(G \circ F)(z) = \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}$$

となる。よって、F, G を

$$F \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad G \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

のように 2 次正方行列に対応させると、$G \circ F$ は

$$G \circ F \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように 2 次正方行列の積に対応することがわかる。

$\underline{T}, \underline{R}$ と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

$\underline{T}, \underline{R}$ は次のように行列と対応する：

$$\underline{T} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{R} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

右辺の正方行列はどちらも行列式が 1 で、成分が整数となっている。この条件を満たす 2 次正方行列の全体を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ と書く：

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

命題 16

(1) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は行列の積に関して群をなす。

(2) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、
$R^{-1} = R^3,\ T^{-1} = RTRTR$ が成り立つ。

この命題は、有理タングルを Conway のスクエア・ダンスによりほどくことができる群論的な理由を説明している。

参考文献

1. J.H. Conway, “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”, in Proceedings of the conference on computational problems in abstract algebra held at Oxford 1967, (J. Leech ed.), Pergamon Press, 1970, 329–358.
2. J.H. Conway, “Tangles, Bangles and Knots with John Conway”, UC Berkeley Graduate Lectures, 2/24/2012, video, 74 minutes.
3. T. Davis, “Conway’s rational tangles”, 2013, www.geometer.org/mathcircles/tangle.pdf.
4. L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “On the classification of rational tangles”, Adv. Appl. Math. **33** (2004), 199–237.
5. J. Tanton, “Understanding rational tangles–the mathematical behind rarional tangles and the rational tangle dance (plus new dance!)”, http://www.mathteacherscircle.org/assets/session-materials/JTantonRationalTangles.pdf.
6. 和久井道久, 「結び目と連分数」, 平成 28 年度金沢大学理工学域数物科学類計算科学特別講義のためのノート, 2017, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/˜ wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf.