



以下、次の記号を用いる。

- $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  において、 $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$  ( $x$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の開球体)
- 距離空間  $(X, d)$  において、 $U(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  ( $x$  の  $(X, d)$  における  $\varepsilon$ -近傍)

1. 次の3つの条件を満たす  $X$  の部分集合族  $\mathcal{O}$  のことを位相と呼ぶ。

- (i)  $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$
- (ii)  $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{O} \implies \bigcap_{i=1}^k O_i \in \mathcal{O}$
- (iii)  $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

位相空間  $(X, \mathcal{O})$  において、 $\mathcal{O}$  の元のことを開集合と呼ぶ。

説明：位相の3条件は、距離空間あるいはユークリッド空間における開集合たちが満たす性質を公理化したもの。位相空間とは、集合  $X$  とその位相  $\mathcal{O}$  との組  $(X, \mathcal{O})$  のことをいうが、 $\mathcal{O}$  を省略して書く場合が多い。つまり、単に「 $X$  を位相空間とする」と書く場合が多いが、その場合、 $X$  に何か1つの位相  $\mathcal{O}$  が指定されていると考える。このとき、「 $U \in \mathcal{O}$ 」のことを「 $U$  は  $X$  における開集合である」または「 $U$  は  $X$  の開集合である」と書き表わす。(関連問題：1-4, 2-1, 4-A, 4-B, 9-3(1))

2.  $\mathcal{O}_d = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U(x; \varepsilon) \subset U\}$

説明： $\mathcal{O}_d$  は距離空間  $(X, d)$  における開集合全体からなる  $X$  の部分集合族。 $X$  上の距離  $d_1$  と  $d_2$  が異なっても、それらの定める位相  $\mathcal{O}_{d_1}$  と  $\mathcal{O}_{d_2}$  は一致することがある。この場合、 $d_1$  と  $d_2$  は同値な距離と呼ばれるが、同値な距離については、そのどれを使っても写像の連続性に関しては同一の結果をもたらす。なぜならば、距離空間の間の写像が連続であることは開集合の逆像が開集合であるということと同等であるからである。この事実は、写像の連続性を議論する上において、距離という概念が本質的でないことを示唆しており、位相を考える出発点となる。(関連問題：1-B, 1-4, 4-2, 8-A)

3.  $X - U (U \in \mathcal{O})$  の形で書かれる  $X$  の部分集合を閉集合と呼ぶ。

説明：閉集合とは、開集合の補集合のこと。この定義は以下の事実に基づいている。距離空間  $(X, d)$  においては、部分集合  $A$  の閉包が

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, A \cap U(x; \varepsilon) \neq \emptyset\}$$

によって定義され、閉集合は  $\bar{A} = A$  を満たす部分集合  $A$  として定義される。距離空間において、部分集合が閉集合であることと、補集合が開集合であることは同等であるので、位相空間における閉集合の概念を上で述べたように定義する。なお、 $(X, \mathcal{O})$  の閉集合全体を  $\mathfrak{A}$  とおくと、 $\mathfrak{A}$  は、ド・モルガンの法則により、

- (i)  $X \in \mathfrak{A}, \emptyset \in \mathfrak{A}$
- (ii)  $C_1, \dots, C_k \in \mathfrak{A} \implies \bigcup_{i=1}^k C_i \in \mathfrak{A}$
- (iii)  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathfrak{A} \implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathfrak{A}$

を満たす。この3つの性質を満たす部分集合族を指定することによっても、 $X$  に位相を導入することができる。(関連問題：2-A, 4-B, 4-3, 4-4, 8-C)

4.  $\mathcal{O}|_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$

説明：相対位相とは、 $X$  の位相を  $A$  に制限することによって与えられる  $A$  の位相のこと。位相空間  $(A, \mathcal{O}|_A)$  を部分空間と呼ぶ。部分空間  $(A, \mathcal{O}|_A)$  における閉集合は、 $A \cap C$  ( $C$  は  $(X, \mathcal{O})$  における閉集合) の形で与えられる。「どこで開か？」を明記せずに、単に「 $O$  は開集合」のように書く人がいるが、この書き方はあまり勧められない。与えられた位相空間  $X$  だけでなくその部分空間も同時に考える場

合には「どこで開か?」ということを必ず明記する必要がある。例えば、 $X = \mathbb{R}$  とし、その部分空間  $A = [0, 1]$  を考えるとき、 $X$  の部分集合  $[0, 1/2)$  は  $X$  において開でないが、 $A$  においては開である。今後は与えられた位相空間  $X$  の部分空間も同時に扱うことが多くなるし、そもそも、「開集合」「閉集合」は位相を指定して始めて意味を持つ概念なのだから、常に「 $\circ\circ$ における開集合」「 $\circ\circ$ における閉集合」と書く習慣をつけておいた方がよい。(関連問題: 4-4, 5-A(2), 5-2, 5-3, 5-4, 8-B(1), 14-2, 15-1)

5. 証明: 開集合の場合のみ示す (閉集合の場合は、以下の証明において、開集合という文字を閉集合という文字に置き換えるだけでよい)。

$O$  が  $A$  の開集合ならば、ある  $X$  の開集合  $U$  を用いて、 $O = A \cap U$  と表わすことができる。仮定により、 $A$  が  $X$  の開集合なので、 $A \cap U = O$  も  $X$  の開集合である ( $\because$  2つの開集合の共通部分は開集合)。□

(関連問題: 4-4)

$$6. \text{Int } A = \bigcup_{\substack{U: X \text{ の開集合,} \\ U \subset A}} U, \quad \bar{A} = \bigcap_{\substack{F: X \text{ の閉集合,} \\ F \supset A}} F, \quad \overline{X - A} = X - \text{Int } A \quad (\leftarrow X - \bar{A} = \text{Int}(X - A))$$

でも可)

説明:  $A$  の内部は  $A$  に含まれる最大の開集合のことであり、閉包は  $A$  を含む最小の閉集合のこと。  $X$  だけでなく、部分空間も同時に考えている場合には、「内部」、「閉包」が  $X$  における内部、閉包なのか、部分空間における内部、閉包なのかを明記する必要がある (問4の説明参照)。内部、閉包の定義から、

$$A: X \text{ の開集合} \iff \text{Int } A = A$$

$$A: X \text{ の閉集合} \iff \bar{A} = A$$

であり、 $X - \bar{A} = \text{Int}(X - A)$  から

$$x \in \bar{A} \iff x \in U \text{ を満たす } X \text{ の任意の開集合 } U \text{ に対して } U \cap A \neq \emptyset$$

であることがわかる。(関連問題: 2-A, 2-B, 8-4(1), 12-2, 14-A, 14-1)

7.  $\bar{A} = X$ .

説明:  $x$  の  $X$  における任意の開近傍  $U$  に対して  $U \cap A \neq \emptyset$  と書いても同じ。要するに、 $A$  が  $X$  において稠密であるとは、 $X$  中の任意の点  $x$  の「いくらでも近くに」 $A$  の点が存在するときをいう。例えば、 $\mathbb{Q}$  は  $\mathbb{R}$  において稠密である。これは、円周率や自然対数や  $\sqrt{2}$  などの任意の無理数が有理数列の極限として「得られる」ことを意味する。(関連問題: 3-4, 7-2, 15-1, 15-4)

8.  $N \subset X$  が  $x$  の  $X$  における近傍  $\iff \exists U: X$  の開集合 s.t.  $x \in U \subset N$

説明:  $x \in \text{Int } N$  と書いても正解であるが、この条件では使いにくいことが多いので、敢えて上のように書いた。考えている位相空間が  $X$  のみという状況なら、 $x$  の近傍というときに「 $X$  における」ということに神経質になる必要はないかもしれないが、部分空間も同時に考える状況では、「どこにおける近傍か」を明記しなければならない。例えば、 $X = \mathbb{R}$  において  $0 \in X$  の近傍として、 $(-1/2, 1/2)$  がとれるが、これは  $A = [0, 1]$  における  $0$  の近傍になり得ない。逆に、 $[0, 1/2)$  は  $A$  における  $0$  の近傍であるが、 $X$  における  $0$  の近傍になり得ない。 $x$  の  $X$  における近傍であって、 $X$  の開集合となっているものを  $x$  の  $X$  における開近傍と呼ぶ。(関連問題: 1-C, 6-A, 6-B, 6-3, 7-A, 7-B, 7-1, 13-4)

9.  $X$  の開集合を元とする部分集合族  $\mathcal{B}$  であって、次の条件を満たすものを開基と呼ぶ:

$$\forall U: X \text{ の開集合}, \exists \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B} \text{ s.t. } U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

説明: 距離空間において、任意の開集合は  $\varepsilon$ -近傍の和集合として表わされるということが念頭にあると、開基の概念に馴染やすい。実際、距離空間の定める位相空間において、 $\varepsilon$ -近傍の全体  $\{U(x; \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$  は、1つの開基をなしている。一般に、位相空間における開集合は様々な形をしていてとらえどころがない(ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  における開集合を思い浮かべてみよ)。そのため、具体的な位相空間を扱う

場合には、任意の開集合を使って議論したのでは不便なことがある。開集合の「基本単位」となる開基の概念を導入する理由はここにある。(関連問題：6-B, 7-A, 7-B, 7-1)

10.  $\{B(x; \frac{1}{m}) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$  ( $\{B(x; r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$  でも可)

説明： $\{B(x; \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$  や  $\{B(x; \frac{1}{m}) \mid x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の開基になっているが、非可算無限集合であるので、この問の答えに適さない。一般に、可算個 (有限個も含む) の元からなる開基は可算基と呼ばれ、可算基が存在する位相空間は第2可算公理を満たすと呼ばれる。 $\mathbb{R}^n$  は第2可算公理を満たす位相空間の典型例である。 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  が位相空間  $X$  の可算基ならば、 $X$  の部分空間  $A$  に対して、 $\{A \cap U_i\}_{i=1}^{\infty}$  は  $A$  の可算基となる。したがって、 $S^n$ ,  $D^n$  など第2可算公理を満たす。また、第2可算公理を満たす位相空間の有限個の直積も第2可算公理を満たすので、 $S^m \times S^n$ ,  $S^m \times D^n$  などは第2可算公理を満たす。さらに、 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  が  $X$  の可算基であって、 $\pi: X \rightarrow Y$  が連続な全射開写像であるとき、 $\{\pi(U_i)\}_{i=1}^{\infty}$  は  $Y$  の可算基となる。これを自然な射影  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  に適用することにより、 $\mathbb{R}P^n$  もまた第2可算公理を満たすことがわかる。(関連問題：7-2, 7-3, 7-4)

11. 「最も小さい」位相： $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}, X\}$   
「最も大きな」位相： $\{X \text{ の部分集合全体}\}$

説明： $S$  を含む「最も小さい」位相とは、 $S$  によって生成される位相のこと。一般に、集合  $X$  に対してその部分集合族  $S$  を1つ与えると、次のように  $X$  の位相  $\mathcal{O}_S$  が1つ定まる。まず、 $S$  の有限個の元の共通部分からなる部分集合族  $\{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid U_1, \dots, U_k \in S, k \in \mathbb{N}\}$  を作る。次に、この部分集合族の任意個の和集合全体を考え、それに空集合と  $X$  を加えることにより  $\mathcal{O}_S$  を定義する。この  $\mathcal{O}_S$  は、 $S$  によって生成される  $X$  の位相と呼ばれ、 $S$  を含む最小の位相になっている。「最も大きな」位相の方は離散位相と呼ばれ、離散距離によって距離づけ可能であるが、 $\mathcal{O}_S$  は一般に距離づけ不可能である。(関連問題：4-1, 4-2, 6-4, 7-1)

12. 略証：「 $\implies$ 」は開基の定義から直ちに示されるので、「 $\impliedby$ 」について示す。仮定から、任意の  $x \in U$  に対して、 $x \in B_x \subset U$  となる  $B_x \in \mathcal{B}$  が存在する。このとき、 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$  が成り立つ。

各  $B_x$  は  $X$  の開集合であるから、 $U$  もまた  $X$  の開集合である。□

(関連問題：7-B, 7-1)

13. 次のうち、どれを定義としてもよい。すべて同値な命題である。

- (i)  $\forall x \in X, \forall V: f(x)$  の  $Y$  における開近傍,  $\exists U: x$  の  $X$  における開近傍 s.t.  $f(U) \subset V$ .
- (ii)  $U: Y$  の開集合  $\implies f^{-1}(U): X$  の開集合.
- (iii)  $F: Y$  の閉集合  $\implies f^{-1}(F): X$  の閉集合.
- (iv)  $A \subset X \implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .
- (v)  $x \in X, N: f(x)$  の  $Y$  における近傍  $\implies f^{-1}(N): x$  の  $X$  における近傍.

説明：上記のいずれも距離空間における連続写像の概念を一般化したもの。その中で、(i) は距離空間における連続写像の定義「任意の  $x \in X$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $f(U(x; \delta)) \subset U(f(x); \varepsilon)$  を満たす」を最も忠実に一般化したものになっている。(iv) は少し分かりにくい条件であるが、 $f$  が距離空間の間の写像の場合には、「 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  となる  $X$  内の任意の点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して、 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  が成り立つ」という条件と同等であり、この表現の仕方は高校の数学の教科書でよくみかけるものである。(関連問題：2-3, 5-A, 5-B, 5-C, 5-1, 11-B(1), 11-2, 11-4(1))

14.  $x_0 \in X$  で連続： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $d_X(x_0, x) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .

$x_0 \in X$  で連続でない：次の条件を満たす  $\varepsilon > 0$  が存在する：

$$\forall \delta > 0, \exists x \in X \text{ s.t. } d_X(x_0, x) < \delta, d_Y(f(x_0), f(x)) \geq \varepsilon.$$

**説明：**点  $x_0 \in X$  で  $f$  が連続であるということを文章で書くと、「任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、次の条件を満たす  $\delta > 0$  が存在する： $d_X(x_0, x) < \delta$  を満たすすべての  $x \in X$  に対して、 $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ 」となる。したがって、この否定は、「ある  $\varepsilon > 0$  については、どのように  $\delta > 0$  をとっても、条件「 $d_X(x_0, x) < \delta$  を満たすすべての  $x \in X$  に対して、 $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ 」は成り立たない」、となる。条件「 $d_X(x_0, x) < \delta$  を満たす任意の  $x \in X$  に対して、 $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ 」が成り立たないとは「 $d_X(x_0, x) < \delta$  を満たす  $x \in X$  の中に  $d_Y(f(x_0), f(x)) \geq \varepsilon$  となるものがある」ということを意味するから、結局、点  $x_0 \in X$  で  $f$  が連続でないことを文章で書くと、「ある  $\varepsilon > 0$  をとると、どのように  $\delta > 0$  をとっても、 $d_X(x_0, x) < \delta$  かつ  $d_Y(f(x_0), f(x)) \geq \varepsilon$  となる  $x \in X$  がある」となる。ここで、書き方の注意を与えておこう。すべての点  $x_0 \in X$  で連続なとき、 $f$  は連続であると呼ばれる。これを論理記号を使って書くと

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d_X(x_0, x) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

となる。この表記から「 $\forall x_0 \in X$ 」を落して、単に

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d_X(x_0, x) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

と書いてしまうと、一様連続の意味に取られ得るので注意を要する。一様連続性でなく単なる連続性を考えているときには、 $\varepsilon > 0$  を任意に与える前に、点  $x_0 \in X$  を (任意に) 取ってこなければならない。(関連問題：2-1, 2-3, 3-C, 3-3, 5-3, 8-4)

15. **略証：**写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  によって定義すると、これは連続である。このとき、 $D^2 = f^{-1}((-\infty, 0])$  となっているが、 $(-\infty, 0]$  は  $\mathbb{R}$  の閉集合であり、 $f$  は連続であるから、 $D^2$  は  $\mathbb{R}^2$  において閉である。□

(関連問題：2-3, 11-B(1), 11-2, 11-4(1))

16. **証明：** $U$  を  $Z$  における任意の開集合とする。このとき、 $g$  は連続なので、 $g^{-1}(U)$  は  $Y$  の開集合となる。 $f$  は連続であるから、 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$  は  $X$  の開集合である。故に、 $g \circ f$  は連続である。□

(関連問題：5-A(1))

17. **証明：** $U$  を  $X$  における任意の開集合とする。このとき、 $i^{-1}(U) = U \cap A$  となる。したがって、 $i^{-1}(U)$  は  $A$  における開集合である。故に、 $i$  は連続である。□

(関連問題：5-A(2))

18. **略証：** $A, B$  が共に  $X$  の開集合のときに示す。 $U \subset Y$  を  $Y$  の任意の開集合とすると、 $f, g$  の連続性から、 $f^{-1}(U), g^{-1}(U)$  はそれぞれ  $A, B$  の開集合になる。 $A, B$  が共に  $X$  の開集合なので、 $f^{-1}(U), g^{-1}(U)$  は  $X$  の開集合である (問5)。よって、 $h^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$  は  $X$  の開集合となるので、 $h$  は連続である。 $A, B$  が共に  $X$  の閉集合のときには、上の証明において、開集合を閉集合に置き換えるだけでよい。□

**説明：**「 $A, B$  が共に  $X$  の開集合あるいは共に閉集合である」という条件が重要である。この問題で述べられている結果は、 $h$  が  $f$  と  $g$  を  $A \cap B$  の部分で貼り合わせて作られていることから、しばしば「連続写像の貼り合わせの補題」として引用され、位相幾何学において基本的な道具の1つである。(関連問題：5-1, 13-A)

19. **略証：**写像  $f: D^{\circ 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$ ,  $x \in D^{\circ 2}$  によって定義し、写像  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow D^{\circ 2}$  を  $g(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  によって定義する。 $f, g$  は連続であって、 $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ,  $g \circ f = id_{D^{\circ 2}}$  を満たす。したがって、 $f, g$  は同相写像であり、 $D^{\circ 2} \cong \mathbb{R}^2$  となる。□

(関連問題：5-2, 5-4, 10-1)

20.  $\{ W \subset X \times Y \mid \forall (x, y) \in W, \exists U \in \mathcal{O}_X, \exists V \in \mathcal{O}_Y \text{ s.t. } (x, y) \in U \times V \subset W \}$

**説明：**積位相とは、 $\mathcal{S} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$  によって生成される位相のことをいう。 $\mathcal{S}$  は積位相の開基になっているので、積位相の任意の元、つまり、積空間  $X \times Y$  における任意の開集合は、 $\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$  ( $J$ : 集合,  $U_j \in \mathcal{O}_X, V_j \in \mathcal{O}_Y$  ( $j \in J$ )) の形に書くことができる。ここで、「和集合の記号」がついているのは、 $\mathcal{S}$  のままでは位相の3番目の条件が満たされないため (例えば、 $X = Y = \mathbb{R}$  として、 $(-1, 1) \times (-1, 1)$  と  $(0, 2) \times (0, 2)$  との和集合が  $U \times V$  ( $U, V$  は  $\mathbb{R}$  の開集合) の形に書くことができるかどうかを考えてみよ)。(関連問題：6-A, 6-B, 6-1, 6-3, 6-4, 7-A, 7-B, 7-1, 8-1, 14-B, 14-2)

21. **略証：**  $\pi_X$  についてのみ示す ( $\pi_Y$  についても同様)。

$\pi_X$  の連続性： $U$  を  $X$  の任意の開集合とすると、 $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  となる。これは  $X \times Y$  の開集合であるから、 $\pi_X$  は連続である。

$\pi_X$  が開写像であること： $X$  の開集合  $U$  と  $Y$  の開集合  $V$  に対して、 $\pi_X(U \times V) = U$  となる。今、 $\{U \times V \mid U \text{ は } X \text{ の開集合, } V \text{ は } Y \text{ の開集合}\}$  は  $X \times Y$  の開基なので、 $\pi_X$  は開写像である。□

(関連問題：6-C, 14-B)

22. **略証：**各成分への写像  $\psi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\psi_1(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$ ,  $\psi_2(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ ,  $\psi_3(x, y) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$  は、有理式で表わされる関数なので、連続である。したがって、積位相の普遍性により、 $\psi$  も連続である。□

**説明：**積位相の普遍性とは次の内容を指す。「写像  $f : Z \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$  が連続であるための必要十分条件は、 $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$ ,  $z \in Z$  によって定義される写像  $f_i : Z \rightarrow X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) がすべて連続となることである。」これを標語的に述べると、「積空間への写像が連続かどうかは各成分への写像が連続かどうかで決まる」となる。なお、この間の解答では、暗黙のうちに「ユークリッド空間  $\mathbb{R}^m$  と  $\mathbb{R}^n$  の積位相は、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{m+n}$  の位相と一致する」という事実を使っている。(関連問題：6-1, 6-2, 6-3)

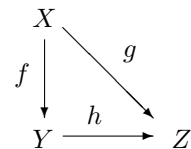
23.  $\{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$

**説明：**商位相を伴った位相空間を商空間と呼ぶ。よく使われる状況は、 $Y$  が  $X$  上のある同値関係  $\sim$  で割って得られる商集合  $X/\sim$  で、 $f$  が自然な射影  $X \rightarrow X/\sim$  の場合である。この場合、商空間  $X/\sim$  のことを等化空間と呼ぶことがある。(関連問題：5-B, 5-C, 8-2, 8-3, 10-1, 11-B(2), 13-2(3), 14-3)

24. **略証：**商位相の定義と連続写像の定義から  $f$  は連続である。しかしながら、 $f$  はいつでも開写像になるとは限らない。実際、写像  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ,  $t \in [0, 1]$  を考える。 $S^1$  に  $f$  に関する商位相を入れる (注：この位相は  $\mathbb{R}^2$  における相対位相に一致する) と、 $f$  は開写像でない。□

(関連問題：5-3)

25.  $Y$  が全射  $f : X \rightarrow Y$  に関する商位相を持っているとき、右の図式を可換とする2つの写像  $g : X \rightarrow Z$  と  $h : Y \rightarrow Z$  について、 $g$  が連続であることと  $h$  が連続であることは同値である。これを商写像 (商位相) の普遍性と言い表わす。



**説明：** $h$  が連続なら、 $g$  は2つの連続写像  $f$  と  $h$  の合成写像として連続であるから、商写像の普遍性の本質的な部分は、 $g$  の連続性から  $h$  の連続性が出る場所である。例えば、 $Y$  が  $X$  上のある同値関係  $\sim$  で割って得られる等化空間  $X/\sim$  のときを考える。等化空間の構造は、一般に複雑であり、実体がよくわからないことが多い。商写像の普遍性は、そういった“複雑な”空間  $Y$  からの写像が連続かどうかを知りたいければ、商をとる前の“よくわかっている”空間  $X$  からの写像が連続かどうかを調べればよい」ということを主張している。(関連問題：5-B, 5-C, 8-2, 8-3, 10-1, 11-B(2), 13-2(3), 14-3)

26.  $x, x' \in X$  に対して「 $[x] = [x'] \implies f(x) = f(x')$ 」が成り立てば、 $h$  を写像として定義することができる。

説明：この問いに答えるには、写像とは何か？ということをお反省しなければならない。 $f$  が集合  $A$  から  $B$  への写像であるとは、 $A$  の各元  $a$  に対して、 $B$  のある1つの元  $b$  を対応させる規則のことをいい、この場合、 $b$  を  $f(a)$  と書き表わす。したがって、 $h$  を写像と呼ぶためには、 $X/\sim$  の各元  $[x]$  について、 $Y$  の元がただ1つに定まっていなければならない。果たして、 $h([x]) = f(x)$  によってただ1つに定まっているだろうか？ここで問題となるのは、 $X/\sim$  の元  $p$  は、確かにある  $x \in X$  によって  $p = [x]$  という形に書けるのであるが、その書き表わし方は（一般に）1通りではないということである。つまり、別の  $x' \in X$  によっても、 $p = [x']$  と書くことができる可能性がある。このとき、 $x$  を用いて写した結果  $h([x]) = f(x)$  と  $x'$  を用いて写した結果  $h([x']) = f(x')$  が一致しなければ、 $X/\sim$  の元  $p$  に対して、 $Y$  の元  $f(x)$  を対応させるのか、 $f(x')$  を対応させるのか判断がつかない。ここに、「 $[x] = [x'] \implies f(x) = f(x')$ 」が成り立つかどうかを調べる必然性が生まれてくる。この条件が成立することを確かめることを「 $h$  の well-definedness を確かめる」という。（関連問題：10-1, 14-3）

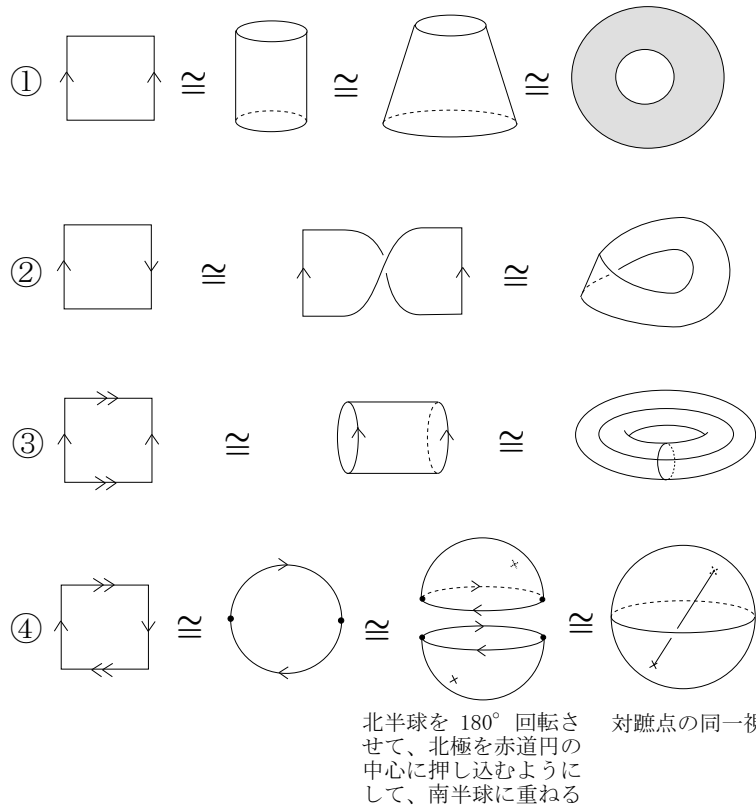
27. ①  $S^1 \times [0, 1]$  (円筒または円環面)

② メービウスの帯

③  $S^1 \times S^1$  (トーラス)

④  $\mathbb{RP}^2$  (射影平面)

説明：図を参照。（関連問題：5-B, 10-1, 14-3）



28. 略証：任意の相異なる2点  $x, y \in X$  に対して、 $\varepsilon := d(x, y)$  ( $> 0$ ) とおく。このとき、 $U(x; \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $U(y; \frac{\varepsilon}{2})$  が  $x, y$  を分離する  $(X, \mathcal{O}_d)$  における開集合となる。□

説明：位相空間  $X$  がハウスドルフ空間であるとは、相異なる任意の2点  $x, y \in X$  に対して、 $x$  の  $X$  における開近傍  $U$  と  $y$  の  $X$  における開近傍  $V$  が存在して、 $U \cap V = \emptyset$  となることをいう。距離空間

はハウスドルフ空間であるが、ハウスドルフ空間は距離づけ可能であるとは限らない。位相空間  $X$  がハウスドルフ空間であることは、対角集合  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  が  $X \times X$  において閉集合となるということによって特徴づけることができる。この特徴づけの応用として、「ハウスドルフ空間  $Y$  への2つの連続写像  $f, g: X \rightarrow Y$  がある稠密な部分集合  $A \subset X$  上で一致するならば、 $f = g$  となる」という事実が証明される。これは、「 $\mathbb{R}$  上の2つの連続な実数値関数が  $\mathbb{Q}$  上で等しければ、 $\mathbb{R}$  上の関数として等しい」という命題の一般化である。(関連問題：8-A, 8-1)

29. 略証：  $X$  をハウスドルフ空間とし、一点  $x \in X$  をとる。任意に  $y \in X - \{x\}$  をとると、 $x \neq y$  であるから、

$$\exists U, V : X \text{ の開集合 s.t. } x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

となる。このとき、 $y \in V \subset X - U \subset X - \{x\}$  を得る。故に、 $X - \{x\}$  は  $X$  の開集合である。すなわち、 $\{x\}$  は  $X$  の閉集合である。  $\square$

(関連問題：8-C)

30.  $\forall \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : A \text{ の } X \text{ における開被覆, } \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \text{ s.t. } A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$

説明：  $A$  がコンパクトであるとは、どのような  $A$  の  $X$  における開被覆に対しても、そこから有限個を選んで、依然として  $A$  を覆っているようにできるときをいう。ここで、 $A$  の  $X$  における開被覆とは、 $X$  の開集合からなる部分集合族であって、それらの和集合が  $A$  を含むものをいう。部分集合  $A$  がコンパクトであることは、それを  $X$  の部分空間とみなしてコンパクトであることと同値である。したがって、コンパクト性は、それがどの位相空間に含まれているか、ということには依存しない、それ自身が持っている性質である。(関連問題：9-A, 9-B, 9-C, 9-1, 9-2, 9-3, 15-B)

31. 略証：  $A \cup B$  の  $X$  における開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとる。このとき、 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は  $A, B$  の  $X$  における開被覆にもなっている。 $A, B$  はコンパクトなので、

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \text{ s.t. } A &\subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} \\ \exists \lambda'_1, \dots, \lambda'_m \in \Lambda \text{ s.t. } B &\subset \bigcup_{j=1}^m U_{\lambda'_j} \end{aligned}$$

となる。よって、 $A \cup B$  は  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の有限部分集合  $\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^n \cup \{U_{\lambda'_j}\}_{j=1}^m$  によって被覆される。故に、 $A \cup B$  はコンパクトである。  $\square$

説明：証明は  $A \cup B$  の開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとるところから始めなければならない。よく、 $A$  と  $B$  の開被覆を先にとり、それらの和集合をとることにより  $A \cup B$  の開被覆を作る、という順番で書き始める人がいるが、これは誤り。証明すべきことは何なのかをよく考え、任意にとって来なければならないものは最初に与えて証明を開始すること。(関連問題：9-2)

32.  $S^n$  はコンパクトだから。

説明：一般に、コンパクト空間上で定義された実数値連続関数は、最大値と最小値を持つ。これは、コンパクト性が連続写像によって保たれるということと、 $\mathbb{R}$  内のコンパクト集合は有界閉集合であるという2つの事実に基づく。(関連問題：9-C, 10-3, 11-3, 11-4)

33. 略証：  $f$  が閉写像であることを示せばよい。 $C$  を  $X$  の閉集合とすると、 $X$  はコンパクトであるから、 $C$  はコンパクトである。コンパクト性は連続写像によって保たれるから、 $f(C)$  はコンパクトである。ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であるから、 $f(C)$  は  $Y$  の閉集合である。よって、 $f$  は閉写像である。  $\square$

説明：同相写像とは、連続かつ全単射であって、逆写像も連続であるものをいう。一般に、代数系の間の同型写像とは違い、逆写像の連続性はもとの写像の連続性と全単射性から出ないが、この問題のように、定義域がコンパクトで、終域がハウスドルフであれば、連続かつ全単射から逆写像の連続性が自動的に



出てくる。この事実は、コンパクトな空間をユークリッド空間へ埋め込むときによく使われる。例えば、連続写像  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $f(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = ((1 + \frac{1}{2} \cos \theta) \cos \varphi, (1 + \frac{1}{2} \cos \theta) \sin \varphi, \frac{1}{2} \sin \theta)$  によって定義すると、これは単射なので、連続な全単射  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow f(S^1 \times S^1)$  を得る。この逆写像を具体的に書き下すことは難しいが、 $S^1 \times S^1$  はコンパクトで、 $\mathbb{R}^3$  はハウスドルフであるので、 $f^{-1}$  の具体的な形を知らなくても、直ちに  $S^1 \times S^1 \cong f(S^1 \times S^1) \subset \mathbb{R}^3$  であることがわかる。(関連問題：9-B, 10-A, 10-B, 10-1, 14-3, 15-3)

34. ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $K$  がコンパクトであるための必要十分条件は、 $K$  が  $\mathbb{R}^n$  において有界閉集合であることである。

説明：この事実はハイネ-ボレルの被覆定理と呼ばれる。この定理によって  $S^n$ ,  $D^n$  や円環面  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  はコンパクトであり、 $\mathbb{R}^n$ ,  $\overset{\circ}{D}^n$  はコンパクトでないことがわかる ( $\mathbb{R}^n$ ,  $\overset{\circ}{D}^n$  がコンパクトでないことは、直接示すこともできる)。コンパクト性は位相不変な性質 (同相写像で保たれる性質) なので、ユークリッド空間において有界閉集合であるという性質は、位相不変な性質である。つまり、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $K$  が有界閉集合ならば、 $K$  と同相なすべての  $\mathbb{R}^m$  の部分集合  $K'$  もやはり有界閉集合になる。しかし、「有界性」「閉集合性」をそれぞれ単独で考えたのでは位相不変にならない。両方を合わせて始めて位相不変な性質になる。なお、ハイネ-ボレルの被覆定理において、 $\mathbb{R}^n$  を勝手な距離空間に置き換えることはできないので注意 (十分性が成立しない)。一般の距離空間に対してコンパクト性を特徴づけるためには、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合に対する「有界性」「閉集合性」をそれぞれ「全有界性」「完備性」として捉え直さなければならない (問 50 参照)。(関連問題：11-A, 11-B(1), 11-C, 11-2, 11-4(1), 14-3, 14-4(1))

35. 略証：写像  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$  によって、定義すると、 $S^n = f^{-1}(0)$  と表わすことができる。 $f$  は連続であり、 $\{0\}$  は  $\mathbb{R}$  の閉集合であるから、 $S^n$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の閉集合である。また、 $S^n \subset B(0; 2)$  であるから、 $S^n$  は有界である。故に、 $S^n$  はコンパクトである。□

(関連問題：11-B(1), 11-2, 11-4(1))

36.  $S^n$

説明：位相空間  $X$  の 1 点コンパクト化とは、 $X$  に 1 点  $\infty$  ( $\notin X$ ) を付け加えて作られるコンパクトな位相空間のことで、正確には、 $X \cup \{\infty\}$  に次のような位相を入れた空間のこと：

$$\{X \text{ の開集合全体} \} \cup \{ (X - K) \cup \{\infty\} \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクトな閉集合} \}.$$

この位相の入れ方を理解するには、 $\mathbb{R}^2$  の 1 点コンパクト化について考えてみるとよい。すでに知っているように、立体射影という方法により、 $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  は  $\mathbb{R}^2$  と同相である。したがって、点  $(0, 0, 1)$  を除いた部分では、 $S^2$  は  $\mathbb{R}^2$  とみなすことができる。点  $(0, 0, 1)$  に近ければ近いほど、立体射影によって、原点から遠くに写されることに注意すると、 $(0, 0, 1)$  の  $S^2$  における十分小さい開近傍  $U$  から  $(0, 0, 1)$  を除いた部分は  $\mathbb{R}^2$  内のある有界閉集合の外部に写されることがわかる。このことは、点  $(0, 0, 1)$  の  $S^2$  における十分小さい開近傍  $U$  は、 $\mathbb{R}^2$  内のある有界閉集合  $K$  の外部  $\mathbb{R}^2 - K$  に点  $(0, 0, 1)$  を付け加えたものと思うことができることを意味する。こうして、 $\mathbb{R}^2$  の 1 点コンパクト化は  $S^2$  であることがわかる。同じ説明は、 $\mathbb{R}^n$  の 1 点コンパクト化についても通用する。(関連問題：5-4, 15-A, 15-B, 15-2, 15-3)

37. 次のどちらでもよい。

$$A: X \text{ の開集合かつ閉集合} \implies A = \emptyset \text{ または } A = X.$$

$$U, V: X \text{ の空でない開集合, } U \cap V = \emptyset \implies U \cup V \subsetneq X.$$

説明： $X$  が連結であるとは、開集合によって  $X$  を 2 つに分けることができないときをいう。これを正確に述べたものが解答にある 2 つの命題である (この 2 つは同値であるから、どちらを定義に採用してもかまわない)。その内容を文章で書くと、一番目の命題が「 $X$  の開かつ閉集合は空集合または  $X$  自身に限る」となり、2 番目の命題が「 $X$  を共通部分を持たない 2 つの空でない開集合の和集合として表わ

すことはできない」となる。連結性の概念は、空間が「繋がっている」ということを数学的に述べたものであるが、直感的には繋がっていないように思えても連結になっていることがあるので注意を要する。例えば、 $\mathbb{R}^2$  の部分空間

$$X = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = \frac{x}{n}\}$$

は連結であるが、「繋がっている」という気はあまりしないであろう。 $X$  の部分集合が連結であるとは、部分空間として連結であるときをいう。(関連問題：12-A, 12-C, 12-2, 12-3, 12-4(1))

38. 閉集合になっているもの： $\emptyset, \mathbb{R}, (a, b)$

開集合になっているもの： $\emptyset, \mathbb{R}, [a, b], \{a\}$

閉集合でも開集合でもないもの： $[a, b), (a, b]$

説明： $\mathbb{R}$  内の空でない連結な部分集合は、1点集合、または、区間に限る。ここで、 $S \subset \mathbb{R}$  が区間であるとは、 $S$  は少なくとも2点以上からなり、 $a, b \in S, a < b$  について、 $a < x < b$  ならば  $x \in S$  を満たすときをいう。(関連問題：12-C, 12-3)

39.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を連結な位相空間  $X$  から 1次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}$  への連続写像とすると、

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) < f(x_2) \implies [f(x_1), f(x_2)] \subset f(X)$$

となる。

証明の概略： $\gamma \in [f(x_1), f(x_2)]$  であって、 $\gamma \notin f(X)$  となるものがあると仮定する。このとき、 $M := f^{-1}((-\infty, \gamma))$  は  $X$  の空でない開かつ閉集合であって、 $M \neq X$  である ( $\because$  連続写像  $f$  による開集合  $(-\infty, \gamma)$  の引き戻しとして  $M$  は  $X$  の開集合。また、 $x_1 \in M$  より  $M \neq \emptyset$  であり、 $x_2 \notin M$  ゆえ  $M \neq X$  であり、 $M = f^{-1}((-\infty, \gamma))$  とも書けることから  $M$  は  $X$  の閉集合である)。これは  $X$  の連結性に反する。□

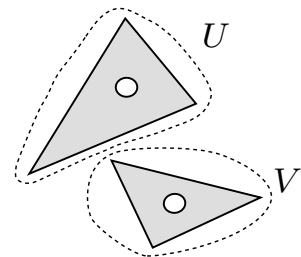
(関連問題：12-B, 12-1)

40. 略証：「①  $\implies$  ②」は自明に成立するから、「②  $\implies$  ①」を示す。任意に  $x, y \in X$  をとる。仮定により、 $a$  から  $x$  への  $X$  内の弧  $f$  と、 $a$  から  $y$  への  $X$  内の弧  $g$  が存在する。このとき、 $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow X$  を  $\bar{f}(t) = f(1-t)$  によって定義すれば、 $\bar{f}$  は  $x$  から  $a$  への  $X$  内の弧であり、これと  $g$  をつないで得られる  $X$  内の弧は  $x$  から  $y$  への弧となっている。□

説明：任意の2点が弧で結べるとき、その位相空間は弧状連結であると呼ばれる。 $X$  だけでなくその部分空間も同時に考えている状況のときには、「どこにおける弧なのか」を明記する必要がある。例えば、 $X = S^1 - \{(0, 1)\}$  とその部分空間  $A = X \cap B((0, 1); 1)$  を考えると、 $A$  内の点で、第1成分が正のものと負のものとは  $A$  内の弧で結ぶことはできないが、 $X$  内の弧では結ぶことができる。(関連問題：13-A, 13-B, 13-1)

41. (1)  $X$  は連結でないが、コンパクトである。

理由：図のような  $\mathbb{R}^2$  の共通部分を持たない開集合  $U, V$  を使って、 $X = (X \cap U) \cup (X \cap V)$  のように表わすことができるので、 $X$  は連結でない。一方、 $X$  は  $\mathbb{R}^2$  の有界閉集合なので、コンパクトである。



(2)  $Y$  はコンパクトでないが、連結である。

理由： $Y$  の任意の2点を弧で結ぶことができるので弧状連結である。したがって、 $Y$  は連結である。一方、 $Y$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合でない ( $\because$  破線部分に収束する  $Y$  内の点列が存在する) ので、コンパクトでない。

説明：コンパクトかどうかを調べるには、それが  $\mathbb{R}^2$  において有界閉集合であるかどうかを調べればよい(問34参照)。連結かどうかを調べるときには、「弧状連結な位相空間は連結である」という定理が役に立つ。しかし、この定理の逆は正しくないので、注意を要する。例えば、問37の説明で与えられている  $\mathbb{R}^2$  の部分空間  $X$  は連結であるが、弧状連結でない。このように、弧状連結と連結の間には差があるが、局所弧状連結な位相空間(すなわち、任意の点  $x \in X$  とその任意の開近傍  $U$  に対して、 $x \in V \subset U$

となる  $X$  の開集合  $V$  であって弧状連結なものが存在するような位相空間) に対しては、連結であることと弧状連結であることは同値である。特に、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  における開集合  $U$  は局所弧状連結であるから、 $U$  が連結であることと弧状連結であることは同値である。(関連問題：11-A, 13-C, 13-3, 13-4)

42. ①連続写像で保たれる性質：コンパクト性、連結性、弧状連結性

②位相不変な性質：4つとも全部

③直積をとる操作で保たれる性質：4つとも全部

④部分空間に遺伝する性質：ハウスドルフ性

説明：問題に挙げた4つの性質とも同相写像のもとで保たれるので位相不変な性質であるが、ハウスドルフ性は連続写像のもとでは保たれない繊細な性質である。③については、位相空間が空でないという仮定の下で、どの性質についても逆が成立する。例えば、 $X, Y \neq \emptyset$  のとき、 $X \times Y$  がハウスドルフ空間であれば、 $X$  も  $Y$  もハウスドルフ空間である。問題に挙げた4つ以外にも位相不変な性質は沢山ある。例えば、第2可算公理を満たすという性質、正規性、局所弧状連結性は位相不変な性質である。第2可算公理を満たすという性質は部分空間や直積に遺伝するが、連続写像では保たれない。正規性は部分空間や直積に遺伝せず、連続写像で保たれない。局所弧状連結性は直積に遺伝するが、部分空間に遺伝せず、連続写像で保たれない。(関連問題：7-2 注意, 8-B, 8-2, 9-C, 11-1, 12-B, 12-4(2), 13-1(2), 14-C, )

43. ①ハウスドルフであるもの：全部

②コンパクトであるもの： $S^n, \mathbb{R}P^n, D^n, S^n \times D^m$

③連結であるもの： $n = 1$  のときの  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  以外全部

④弧状連結であるもの： $n = 1$  のときの  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  以外全部

(関連問題：8-A, 8-B, 9-4, 11-A, 11-B, 11-C, 12-C, 12-3, 12-4, 13-B, 13-2)

44. 略証： $[0, 1)$  はコンパクトでない。一方、 $S^1$  はコンパクトである。コンパクト性は位相不変な性質であるから、コンパクトな空間とそうでない空間が同相になることはあり得ない。よって、 $[0, 1) \not\cong S^1$  である。□

(関連問題：5-3, 9-C, 11-C)

45.  $\{S, T, U, V, W, X, Y, Z\} / \cong = \{\{S, U, V, W, Z\}, \{T, Y\}, \{X\}\}$

説明： $S, U, V, W, Z$  はどれも閉区間  $I = [0, 1]$  に同相であるから、同じ類に属することがわかり、 $T, Y$  の間にも同相写像を作ることができるので、 $T$  と  $Y$  は同じ類に属することがわかる。他方、閉区間  $I$  と  $Y$  と  $X$  は互いに同相でない。これは次の2つの事実を使うと示すことができる(コンパクト性、連結性によって  $I, Y, X$  を区別することはできないことに注意)。

・同相写像  $f: X \rightarrow Y$  と1点  $x_0 \in X$  に対して、 $f|_{X - \{x_0\}}: X - \{x_0\} \rightarrow Y - \{f(x_0)\}$  は同相写像である。

・連結成分の「個数」は同相写像の下で保たれる (*i.e.* 位相不変な性質である)。

例えば、同相写像  $f: Y \rightarrow I$  があつたとする。このとき、 $Y$  において3つの線分の交点  $p$  を考えると、 $Y - \{p\} \cong I - \{f(p)\}$  となる。 $Y - \{p\}$  の連結成分の個数は3であるが、 $I - \{f(p)\}$  の連結成分の個数は1か2であるから、矛盾である。よって、 $Y \not\cong I$  であることがわかる。(関連問題：9-C, 12-B, 14-C, 14-4)

46. 点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $X$  内で収束するとは、次を満たす  $a \in X$  が存在するときをいう：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies d(x_n, a) < \varepsilon.$$

点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  が基本列 (Cauchy 列) であるとは、次が成り立つときをいう (注：次の2つは同値なので、どちらを定義としてもよい)。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m, n \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \implies d(x_n, x_N) < \varepsilon.$$

説明：基本列 (Cauchy 列) とは「ある番号から先の  $x_n$  たちが互いに十分近い距離にある」ような点列をいう。収束する点列は基本列であるが、逆は必ずしも正しくない。(関連問題：3-A, 3-B, 3-C, 3-1, 3-2)

47. 距離空間  $X$  が完備であるとは、 $X$  内の任意の基本列が  $X$  内で収束することをいう。

説明：距離空間  $X$  が完備でないとき、 $X$  の中では収束しない基本列がある。これは、 $X$  に「隙間や閉じていない部分がある」ために起きる現象である ( $X$  として  $\mathbb{R} - \{x_0\}$  や  $(-1, 1)$  などが念頭にあると考えやすい)。したがって、その隙間をすべて埋めて、閉じていない部分に縁を付けてあげれば、 $X$  の中では収束しなかった基本列も、そうやって作った空間  $\hat{X}$  の中では収束するようになる。 $\hat{X}$  を  $X$  の完備化という。厳密には、 $X$  の完備化とは、 $X$  を稠密な部分距離空間として含む完備距離空間のことであり、基本列の商空間として構成することができる。 $X$  が完備であるとは、 $\hat{X} = X$  となることに他ならない。例えば、有理数の全体  $\mathbb{Q}$  の完備化は  $\mathbb{R}$  である。完備距離空間の代表例としては、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の他に、ヒルベルト空間  $\ell^2(\mathbb{R})$  や  $[0, 1]$  上の実数値連続関数の全体  $C[0, 1]$  に  $d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$  によって定義される距離  $d$  を入れたものなどがある。(関連問題：1-1, 1-2, 3-A, 3-B, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4)

48.  $\mathbb{R}^n$ ,  $D^n$ ,  $S^n$  は完備であるが、 $D^n - \{0\}$ ,  $\overset{\circ}{D}^n$  は完備でない。

説明：一般に、完備な距離空間の部分空間  $A$  が完備であるための必要十分条件は、 $A$  が  $X$  において閉集合であることである。 $S^n$ ,  $D^n$  が完備で、 $D^n - \{0\}$ ,  $\overset{\circ}{D}^n$  が完備でないという結果は、この事実から従う。 $D^n - \{0\}$ ,  $\overset{\circ}{D}^n$  が完備でないことは直接示すこともできる。例えば、 $\overset{\circ}{D}^n$  内の点列  $\{(1 - \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)\}_{n=1}^{\infty}$  を考える。これは  $\overset{\circ}{D}^n$  内の基本列である。しかしながら、この点列の  $\mathbb{R}^n$  における極限は  $(1, 0, \dots, 0)$  であり、 $\overset{\circ}{D}^n$  に属さない。このようにして、 $\overset{\circ}{D}^n$  は完備でないことが簡単にわかる。(関連問題：3-B, 3-1)

49. 完備性は位相不変な性質ではない。しかし、直積をとる操作の下で完備性は保たれる。

説明：位相空間として  $D^2 \cong \mathbb{R}^2$  である (問 19) が、 $D^2$  は完備ではなく、 $\mathbb{R}^2$  は完備である (問 48)。このことは完備性が同相写像の下で保たれないことを意味する。一方、直積をとる操作の下では完備性は保存され、また、その逆も成り立つ。すなわち、空でない距離空間  $X, Y$  について、直積距離空間  $X \times Y$  が完備であるための必要十分条件は  $X, Y$  が両方とも完備であることである。例えば、 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  は完備であるが、それは、1 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}$  が完備であることに帰着される。(関連問題：1-3, 3-A, 3-B)

50. 全有界かつ完備である。

- 任意の点列は収束する部分列を持つ (= 点列コンパクト)。
- 任意の無限部分集合は集積点を持つ。

説明：距離空間が全有界であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ s.t. } X = \bigcup_{i=1}^n U(x_i; \varepsilon)$$

となるときをいう。この概念は“有界の度合い”を細分化することによって得られる。有界な距離空間  $X$  は、 $\varepsilon > 0$  を十分大きくとると、たった 1 つの  $\varepsilon$ -近傍に含まれるが、 $\varepsilon$  を小さくしていくと、一般に、 $\varepsilon$ -近傍 1 つだけに納まってしまわない。しかし、1 個では無理でも、有限個の  $\varepsilon$ -近傍を使えば、それらの和集合の中には  $X$  を納めることができるかもしれない。このようにできることを“ $\varepsilon$ -網に関して有界”と呼ぶことにすれば、全有界とは、どんなに  $\varepsilon > 0$  を小さくしていても、 $\varepsilon$ -網に関して有界な距離空間であるといえる。例えば、無限集合に離散距離を入れた空間は有界であるが、 $1/2$ -網に関して有界でないので、全有界でない。距離空間が全有界かつ完備とは“どんなに小さな  $\varepsilon$ -網を用いても、有限個の  $\varepsilon$ -網で捕らえられて、かつ、隙間も開いた部分もない”状態を意味し、これとコンパクト性が同値であることにはそれほど違和感を感じないであろう。(関連問題：10-3)