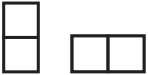
Some relation of F-polynomials between horizontal and vertical snake graphs

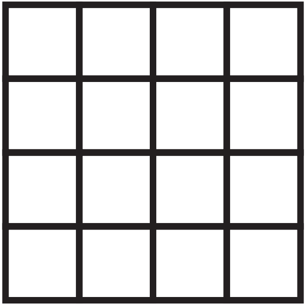
大家　光貴　(表現論研究室)

February 16, 2021

Introduction

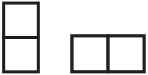
問題　(ドミノタイル張り)

4×4 の格子状平面をドミノタイル  によって敷き詰めよ。

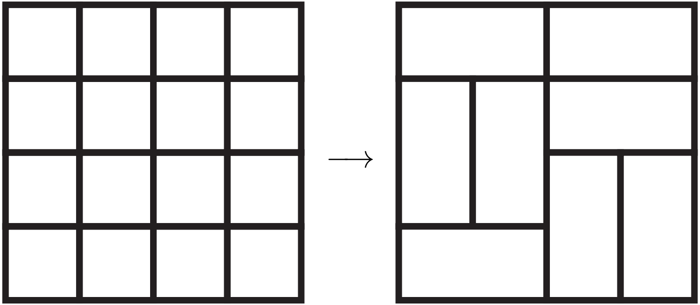


Introduction

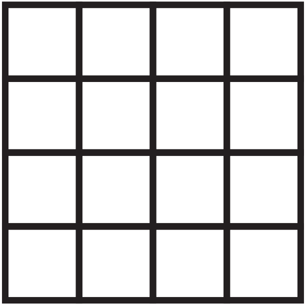
問題　(ドミノタイル張り)

4 × 4 の格子状平面をドミノタイル  によって敷き詰めよ。

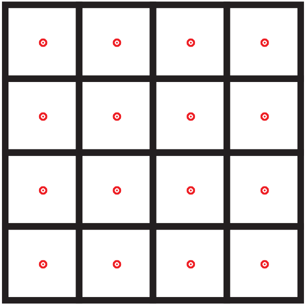
(考察 1) 素朴な方法



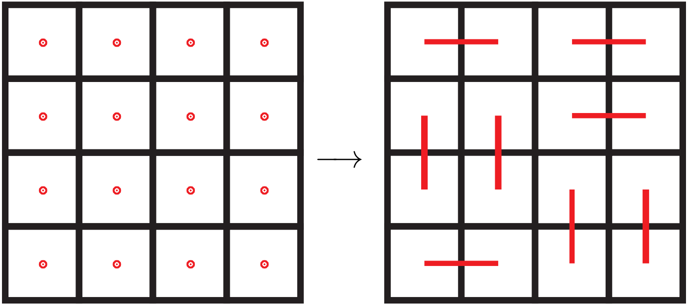
(考察 2) perfect matching を利用する方法



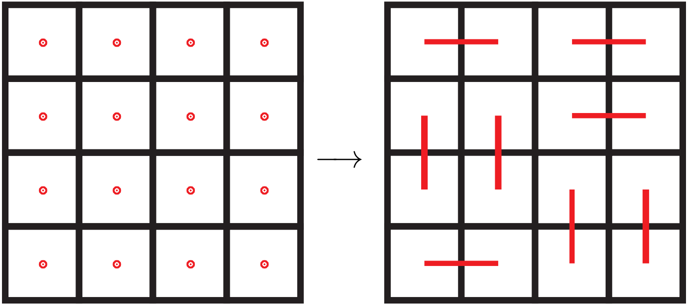
(考察 2) perfect matching を利用する方法



(考察 2) perfect matching を利用する方法



(考察 2) perfect matching を利用する方法

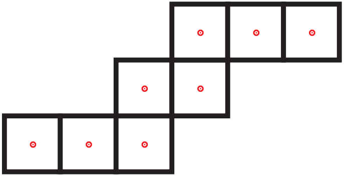


この考察はグラフ理論における **perfect matching** である。

よって

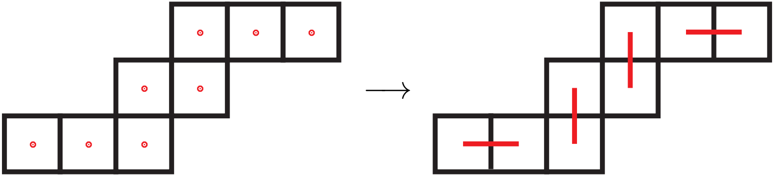
ドミノタイル張り問題 $\rightarrow$ perfect matching の問題

ここで、次のような形の平面格子グラフの perfect matching を考える。

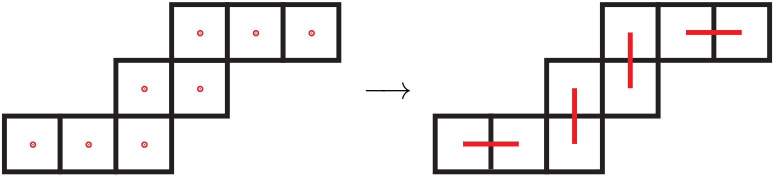


$\longrightarrow$

ここで、次のような形の平面格子グラフの perfect matching を考える。



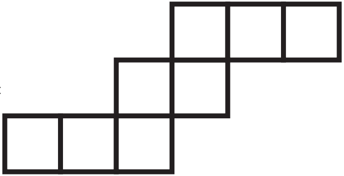
ここで、次のような形の平面格子グラフの perfect matching を考える。



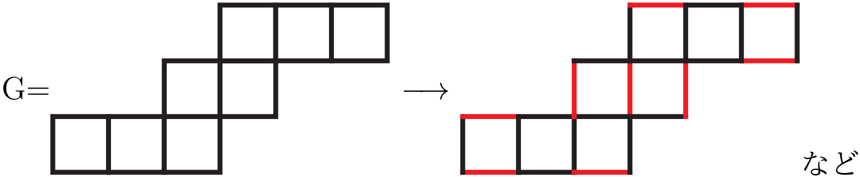
このようなジグザグな平面格子グラフを**スネークグラフ**という。

スネークグラフにおいて、点による perfect matching ではなく、
エッジによる perfect matching を考える。

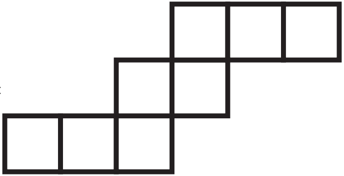
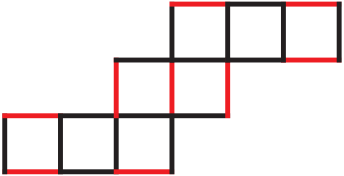
G=



スネークグラフにおいて、点による perfect matching ではなく、
エッジによる perfect matching を考える。



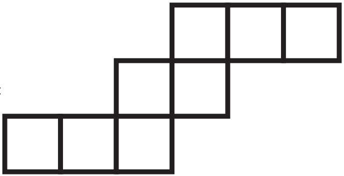
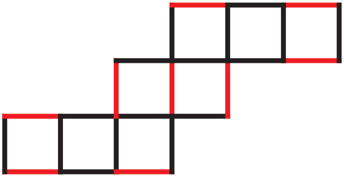
スネークグラフにおいて、点による perfect matching ではなく、
エッジによる perfect matching を考える。

G=  $\longrightarrow$  など

$\longrightarrow$ F-多項式：F(G)

(perfect matching により定義)

スネークグラフにおいて、点による perfect matching ではなく、
エッジによる perfect matching を考える。

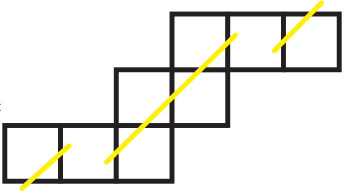
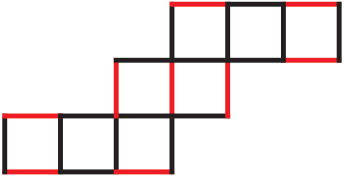
G=  $\longrightarrow$  など

$\longrightarrow$ F-多項式：F(G)

(perfect matching により定義)

$\longrightarrow \begin{cases} \text{クラスター代数によって定義} \\ \text{フィボナッチ数列とも関係.} \end{cases}$

スネークグラフにおいて、点による perfect matching ではなく、
エッジによる perfect matching を考える。

G=  $\longrightarrow$  など

$\longrightarrow$ F-多項式：F(G)
(perfect matching により定義)

$\longrightarrow \begin{cases} \text{クラスター代数によって定義} \\ \text{フィボナッチ数列とも関係.} \end{cases}$

このスネークグラフは連分数 $[2, 5, 2]$ と関係がある。

目標

$F\Big($  $\Big)$, $F\Big($  $\Big)$ の漸化式を求める。

目標

$F\Big($ 

$\Big)$, $F\Big($ 

$\Big)$ の漸化式を求める。

以下の流れで進めていく。

連分数

↓

スネークグラフ

↓

perfect matching

↓

F-多項式

↓

主結果と予想

有限連分数

正整数 $a_i(i=1,...,n)$ に対して有限連分数

$$[a_1,...,a_n]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

を考える。$[a_1,...,a_n]$ を分数で書いたときの分子を $N[a_1,...,a_n]$ とおく。これは漸化式

$$N[a_1,...,a_n]=a_nN[a_1,...,a_{n-1}]+N[a_1,...,a_{n-2}]$$

$$N[a_1]=a_1,\ N[a_1,a_2]=a_1a_2+1$$

を満たす。

スネークグラフ

タイル G を図 1 のように定める。

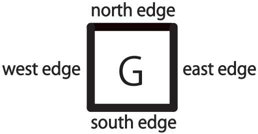


図 1

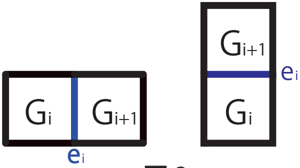
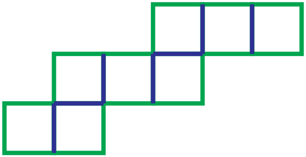


図 2

Definition 1

図 2 のルールで配置して得られる、一連のタイル G_i によって接続された平面グラフを**スネークグラフ**と呼ぶ。



内部エッジと**境界エッジ**

連分数によるスネークグラフの構成

以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3,2,1,3,2]$ のスネークグラフ $G[3,2,1,3,2]$ は以下のように決定される。

連分数によるスネークグラフの構成

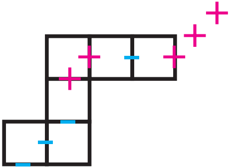
以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3, 2, 1, 3, 2]$ のスネークグラフ $G[3, 2, 1, 3, 2]$ は以下のように決定される

連分数によるスネークグラフの構成

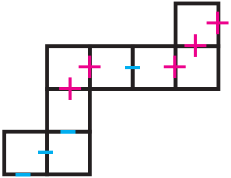
以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3,2,1,3,2]$ のスネークグラフ $G[3,2,1,3,2]$ は以下のように決定される

連分数によるスネークグラフの構成

以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3, 2, 1, 3, 2]$ のスネークグラフ $G[3, 2, 1, 3, 2]$ は以下のように決定される

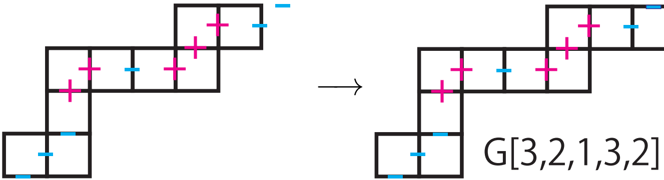


$\longrightarrow$



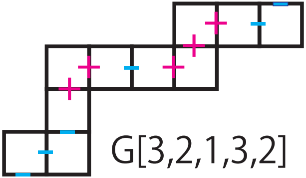
連分数によるスネークグラフの構成

以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3, 2, 1, 3, 2]$ のスネークグラフ $G[3, 2, 1, 3, 2]$ は以下のように決定される



連分数によるスネークグラフの構成

以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3, 2, 1, 3, 2]$ のスネークグラフ $G[3, 2, 1, 3, 2]$ は以下のように決定される

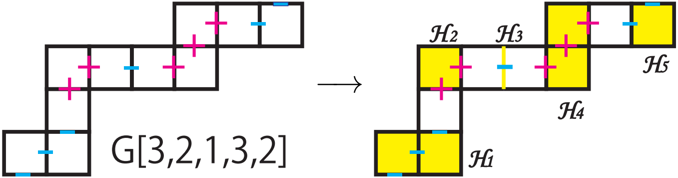


$\longrightarrow$

異符号が隣り合う正方形を除くと n 個のサブグラフ $H_i (i = 1, ..., n)$ が得られる。

連分数によるスネークグラフの構成

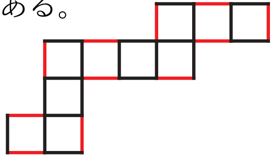
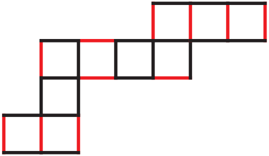
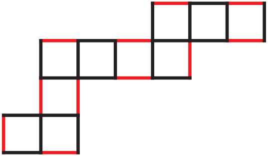
以下の例で説明の代わりとする。
連分数 $[3,2,1,3,2]$ のスネークグラフ $G[3,2,1,3,2]$ は以下のように決定される



異符号が隣り合う正方形を除くと n 個のサブグラフ $H_i(i=1,...,n)$ が得られる。

perfect matching

グラフ G の **perfect matching** とは、グラフ G の各頂点がちょうど一つのエッジの端点になる G のエッジの集合 (赤で表示) のことを言う。
$G[3,2,1,3,2]$ においては perfect matching は以下のようなものがある。


,

,

など

1 つ目と 3 つ目は、境界エッジのみからなり、1 つ目においては最初のタイルの south edeg を perfect matching にもつので、**最小 matching** といい P^- で表し,3 つ目を**最大 matching** といい P^+ で表す。

スネークグラフ $G[a_1, ..., a_n]$ における perfect matching の総数は $N[a_1, ..., a_n]$ に一致する。

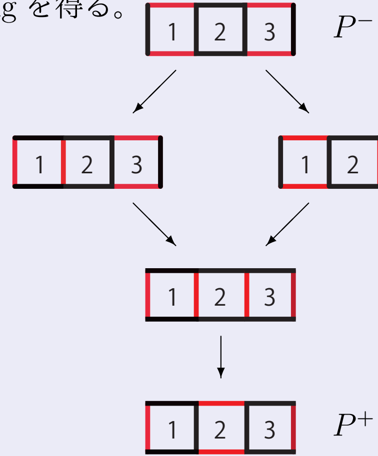
タイルの回転と perfect matching

タイルの回転から新たな perfect matching を得る。例を示すと、

タイルの回転と perfect matching

Example 2

$G[2,2]$ においてそれぞれのタイルに番号を付けることでタイルの回転から matching を得る。



F-多項式

スネークグラフ G の **F-多項式**は以下で定義される。

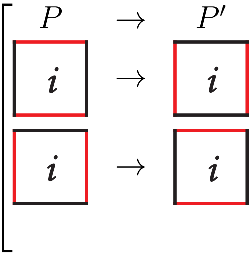
$$F(G) = \sum_P y(P)$$

ただし、和はすべての perfect matching にわたる。

ここで,

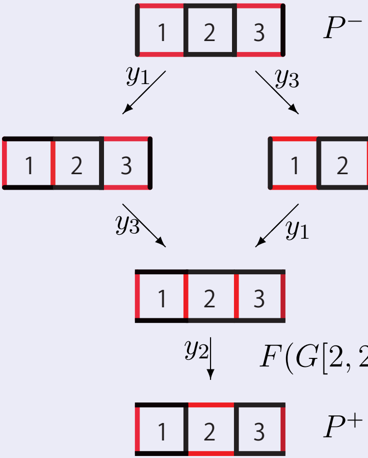
$$\begin{cases} y(P') = y_i y(P) \quad (i = 1, 2, ..., n) \\ y(P^-) = 1 \end{cases}$$

ただし、$y(P')$ はタイル i を回転させたときに、$y(P)$ を y_i 倍することで得る。



Example 3

$G[2,2]$ において



$$F(G[2,2]) = 1 + y_1 + y_3 + y_1 y_3 + y_1 y_2 y_3$$

vertical and horizontal snake graph

縦一直線のスネークグラフを **vertical snake graph**, 横一直線のスネークグラフを **horizontal snake graph** と呼ぶ。
これらの形は以下のようになる。

$G[1, 1, ..., 1] =$ 

$, \ G[2, 1, ..., 1] =$ 

vertical and horizontal snake graph

縦一直線のスネークグラフを **vertical snake graph**, 横一直線のスネークグラフを **horizontal snake graph** と呼ぶ。
これらの形は以下のようになる。

$G[1,1,...,1] =$ 

$, G[2,1,...,1] =$ 

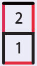
これらの F-多項式に関して調べていく。十分小さい n において、

Example 4

$F\Big($ 

$\Big) = 1 + y_1,\ F\Big($ 

$\Big) = 1 + y_1 + y_1y_2,$

$F\Big($ 

$\Big) = 1 + y_2 + y_1y_2,\ F\Big($ 

$\Big) = 1 + y_2 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_2y_3.$

これらの F-多項式を漸化式で表現することができる。

Theorem 5

以下の等式を満たす。

(a) $4 \leq n$ のとき、

$$F\left(\begin{array}{|c|}\hline n\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right) = y_2 F\left(\begin{array}{|c|}\hline n\\\hline \vdots\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}\right) F\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right) + F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 5 & \cdots & n\\\hline\end{array}\right).$$

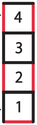
(b) n が奇数で、$3 \leq n$ のとき、

$$F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\\\hline\end{array}\right) = F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\text{-}1\\\hline\end{array}\right) y_n + F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\text{-}2\\\hline\end{array}\right).$$

(c) n が偶数で、$4 \leq n$ のとき、

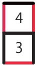
$$F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\\\hline\end{array}\right) = F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\text{-}2\\\hline\end{array}\right) y_{n-1} F\left(\begin{array}{|c|}\hline n\\\hline\end{array}\right) + F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\text{-}3\\\hline\end{array}\right).$$

(証明)
帰納法で示す。
(a) において $n = 4$ のとき

$F\Bigg($  $\Bigg)$

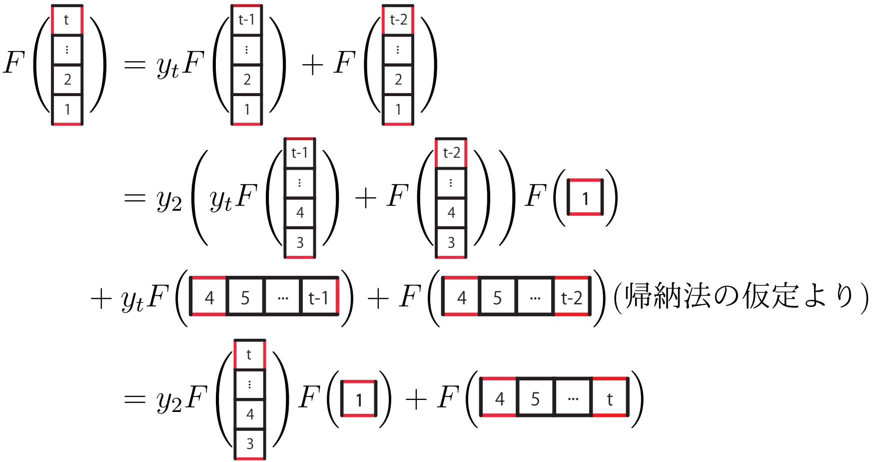
$$= 1 + y_2 + y_4 + y_1y_2 + y_2y_4 + y_1y_2y_4 + y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3y_4$$

$$= y_2(1 + y_4 + y_3y_4)(1 + y_1) + (1 + y_4)$$

$= y_2F\Big($  $\Big) F\big($  $\big) + F\big($  $\big).$

$n = 5$ のときも同様

$n = t$ が偶数の場合



$n=s$ が奇数の場合

$$F\left(\begin{array}{|c|}\hline s\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right)=F\left(\begin{array}{|c|}\hline s\text{-}1\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right)+y_{s-1}y_sF\left(\begin{array}{|c|}\hline s\text{-}2\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right)$$

$$=y_2\left(F\left(\begin{array}{|c|}\hline s\text{-}1\\\hline \vdots\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}\right)+y_{s-1}y_sF\left(\begin{array}{|c|}\hline s\text{-}2\\\hline \vdots\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}\right)\right)F\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right)$$

$$+F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&5&\cdots&s\text{-}1\\\hline\end{array}\right)+y_{s-1}y_sF\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&5&\cdots&s\text{-}2\\\hline\end{array}\right)\text{(帰納法の仮定より)}$$

$$=y_2F\left(\begin{array}{|c|}\hline s\\\hline \vdots\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array}\right)F\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right)+F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&5&\cdots&s\\\hline\end{array}\right)$$

よって、帰納法により (a) が成り立つ。
$(b),(c)$ も同様に証明される。

一般の連分数スネークグラフの F-多項式

一般のスネークグラフでは次の公式で求めることができる。

Theorem 6 ([Canakci and Schiffler])

$n \geq 2$ のとき

$$F(G[a_1, ..., a_n]) = y_{34}F(G[a_1, ..., a_{n-1}])F(H_n)+y_{56}F(G[a_1, ..., a_{n-2}]).$$

ただし、$y_0 = 1$,

$$y_{34} = \begin{cases} y_{l_{n-1}} & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}, y_{56} = \begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数}) \\ \prod_{j=l_{n-2}}^{l_n-1} y_j & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

であり、正の有限連分数 $[a_1, ...a_n]$ に対して、$i > 0$ に対して、$l_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$ と定め、さらに $i = 0$ に対して $l_0 = 0$ と定義する。

フィボナッチ数との関係

$F\Big($ 

$\Big)$ や $F\Big($ 

$\Big)$ において $y_i(i = 1, ..., n)$ をすべて 1 に置き換えることで、フィボナッチ数を得ることができる。

フィボナッチ数との関係

$F\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{n}\right)$ や $F\left(\begin{array}{c}\boxed{n}\\ \boxed{\vdots}\\ \boxed{2}\\ \boxed{1}\end{array}\right)$ において $y_i(i = 1, ..., n)$ をすべて 1 に置き換えることで、フィボナッチ数を得ることができる。

Example 7

$y_i = 1(i = 1, 2, 3, 4)$ とおくと、

$$F\left(\boxed{1}\right) = 1 + y_1 = 2,$$

$$F\left(\boxed{1}\boxed{2}\right) = 1 + y_1 + y_1 y_2 = 3,$$

$$F\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\right) = 1 + y_1 + y_3 + y_1 y_3 + y_1 y_2 y_3 = 5,$$

$$F\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\right) = 1 + y_1 + y_3 + y_1 y_3 + y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4 = 8.$$

一般に F(

),F(

) の perfect matching 数を M_n とすると、Theorem 5 より漸化式

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}\ (3 \leq n),\ M_1 = 2,\ M_2 = 3$$

が成り立つ。よって M_n は Fibonacci 数である。

予想

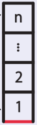
Conjecture 8

任意の自然数 n に対して $F\Bigg($ 

$\Bigg) = C\Bigg(F\Bigg($ 

$\Bigg)\Bigg)$.

ただし、

$F\Bigg($ 

$\Bigg) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M_n}$, $F\Bigg($ 

$\Bigg) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{M_n}$

$C : a_i = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \ldots y_n^{\epsilon_n} \longrightarrow b_i = \frac{y_1 \ldots y_n}{a_i}$ $(i \in \{1, \ldots, M_n\}, \epsilon_i \in \{0, 1\})$.

予想

Conjecture 8

任意の自然数 n に対して $F\left(\begin{array}{|c|}\hline n\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right) = C\left(F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\\\hline\end{array}\right)\right).$

ただし、

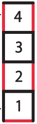
$$F\left(\begin{array}{|c|}\hline n\\\hline \vdots\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\right) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M_n},\quad F\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n\\\hline\end{array}\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{M_n}$$

$$C : a_i = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \dots y_n^{\epsilon_n} \longrightarrow b_i = \frac{y_1 \dots y_n}{a_i}\ (i \in \{1, \dots, M_n\}, \epsilon_i \in \{0, 1\}).$$

Remark 9

$n = 7$ までにおいて、Conjecture 8 が成り立つ。

例を用いて説明すると、$n=4$ のとき

$F\Big($$\Big) = 1 + y_2 + y_4 + y_1y_2 + y_2y_4 + y_1y_2y_4 + y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3y_4,$

$F\Big($$\Big) = 1+y_1+y_3+y_1y_3+y_3y_4+y_1y_2y_3+y_1y_3y_4+y_1y_2y_3y_4.$

vertical の F-多項式の項の前と、horizontal の F-多項式の項の後ろからを掛け合わせることで、

$$1 \cdot y_1y_2y_3y_4 = y_2 \cdot y_1y_3y_4 = \cdots = y_2y_3y_4 \cdot y_1 = y_1y_2y_3y_4 \cdot 1 = \underline{y_1y_2y_3y_4}$$

このような関係を**補間**という。

参考文献

- Martin Aigner, Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture, Springer International Publishing, Swizerland, 2013.
- Ilke Canakci and Ralf Schiffler, Cluster algebras and continued fractions, Compos. Math., 154 (3) (2018), 565-593.
- Ilke Canakci and Ralf Schiffler, Snake graphs and continued fractions, European Journal of Combinatorics 86 (2020), 103081.
- Ilke Canakci and Ralf Schiffler, Snake graph calculus and cluster algebras from surffaces II:self-crossing snake graphs, Math.Z., 281 (1) (2015), 55-102.
- Michelle Rabideau, F-polynomial formula from continued fractions, Journal of Algebra 509 (2018), 467-475.