

フリーズパターンと祖先三角形を通じて考察する 有理絡み目のトポロジー

和久井道久 (関西大学)

May 15, 2021

N-KOOK セミナー
ZOOM によるオンライン開催
(小木曾岳義氏 (城西大学) との共同研究 + α)

Contents

- §1. Conway-Coxeter フリーズとその構成法
- §2. Farey 和, Stern-Brocot 木, 祖先三角形
- §3. 有理数の負連分数展開
- §4. 有理絡み目の Conway-Coxeter フリーズによる特徴づけ
- §5. 有理絡み目図式のライズ公式
- §6. 有理数と Farey 和の q -変形とその計算公式
- §7. 有理絡み目の正規化された Jones 多項式

§1. Conway-Coxeter フリーズとその構成法

正の整数を次のように配置した表を Conway-Coxeter フリーズ

[1] という。CCF と略記する。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	5	2	1	3	2	2	2	1	5	...
	3	1	4	9	1	2	5	3	3	1	4	
...	1	3	7	4	1	3	7	4	1	3	7	...
	1	2	5	3	3	1	4	9	1	2	5	
...	1	3	2	2	2	1	5	2	1	3	2	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

CCF の 3 規則

- (i) 縦方向は有限の幅を持ち、横方向は無限に延びている。
- (ii) 最初と最後の行にはすべて 1 が並ぶ。
- (iii) 隣接する 4 つの数はダイヤモンド状に配置され、 $ad - bc = 1$ を満たす。

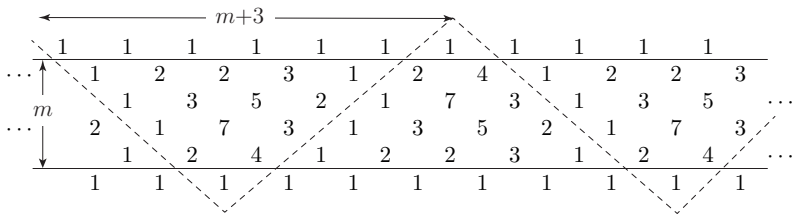
$$\begin{array}{ccc} & & b \\ a & & d \\ & & c \end{array}$$

[1] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. 57 (1973), 87–94, 175–183.

CCF の性質

定理 1 (Coxeter [2])

- (1) 幅 m の CCF は $m+3$ を周期を持つ。ここで、CCF の幅とは、CCF から最初と最後の行を除いた表の行数のことである。
- (2) CCF は水平中央線に関して映進 (gilde reflection) 対称性を持つ。したがって、CCF は水平移動と鏡映に関する基本領域を持つ。

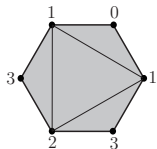
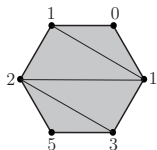


[2] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, *Acta Arith.* 18 (1971), 297–310.

CCF と多角形の三角形分割

幅 m の CCF Γ は $(m + 3)$ 角形の三角形分割と対応する。

1	1	1	1	1	1	1	1
...	2	5	1	2	5	1	...
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
...	2	2	2	2	2	2	...
1	1	1	1	1	1	1	1



多角形の三角形分割が“内部”三角形を含まないことと、対応する CCF が 1 で囲まれた領域をもつことは同値である。このような CCF を **ジグザグ型** と呼ぶ。

ジグザグ型 CCF の構成法

L と R の有限列 (LR 語と呼ぶ) から構成することができる。

[例: $w = LLLR$ の場合]

第 1 行目に 1 を等間隔に並べて、第 2 行目に 1 を 1 つ配置する。語 w を左から右に向かって読み取り、L であるか R であるかに応じて第 2 行目の 1 から下に向かって 1 をそれぞれ左と右に配置する。最後の行に、1 を等間隔に並べる。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
...									1												...	
...																						...
...																						...
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

すると、規則 $ad - bc = 1$ を満たすように数を埋めることができる。こうして得られる CCF を $CCF(w)$ と記す。

ジグザグ型 CCF の構成法

L と R の有限列 (LR 語と呼ぶ) から構成することができる。

[例: $w = \text{LLLR}$ の場合]

第 1 行目に 1 を等間隔に並べて、第 2 行目に 1 を 1 つ配置する。語 w を左から右に向かって読み取り、L であるか R であるかに応じて第 2 行目の 1 から下に向かって 1 をそれぞれ左と右に配置する。最後の行に、1 を等間隔に並べる。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
...		2		1																			...
			1																				
...		1																					...
	1		2																				
...		1																					...
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1

すると、規則 $ad - bc = 1$ を満たすように数を埋めることができる。こうして得られる CCF を $\text{CCF}(w)$ と記す。

ジグザグ型 CCF の構成法

L と R の有限列 (LR 語と呼ぶ) から構成することができる。

[例: $w = \text{LLLR}$ の場合]

第 1 行目に 1 を等間隔に並べて、第 2 行目に 1 を 1 つ配置する。語 w を左から右に向かって読み取り、L であるか R であるかに応じて第 2 行目の 1 から下に向かって 1 をそれぞれ左と右に配置する。最後の行に、1 を等間隔に並べる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	5									...
	3	1	4									
...	1	3										...
	1	2										
...	1											...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

すると、規則 $ad - bc = 1$ を満たすように数を埋めることができる。こうして得られる CCF を $\text{CCF}(w)$ と記す。

ジグザグ型 CCF の構成法

L と R の有限列 (LR 語と呼ぶ) から構成することができる。

[例: $w = \text{LLLR}$ の場合]

第 1 行目に 1 を等間隔に並べて、第 2 行目に 1 を 1 つ配置する。語 w を左から右に向かって読み取り、L であるか R であるかに応じて第 2 行目の 1 から下に向かって 1 をそれぞれ左と右に配置する。最後の行に、1 を等間隔に並べる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	5	2								...
	3	1	4	9								
...	1	3	7									...
	1	2	5									
...	1	3										...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

すると、規則 $ad - bc = 1$ を満たすように数を埋めることができる。こうして得られる CCF を $\text{CCF}(w)$ と記す。

CCF と LR 語

ジグザグ型 CCF Γ から LR 語を読み取ることができる。ただし、一意ではない。

[例] $w = \text{LLLR}$ から構成される $\Gamma = \text{CCF}(w)$ の場合、 w の他に、LR 語 $(ir)(w) := \text{LRRR}$ も読み取り可能である。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	①	5	2	①	3	2	2	2	1	5	...
	3	①	4	9	①	2	5	3	3	1	4	
...	①	3	7	4	①	3	7	4	1	3	7	...
	①	2	5	3	3	①	4	9	1	2	5	
...	①	3	2	2	2	①	5	2	1	3	2	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

CCF は映進対称性を持つため、 $\text{CCF}(ir(w)) = \text{CCF}(w)$ が成り立つ。

§2. Farey 和, Stern-Brocot 木, 祖先三角形

既約分数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が Farey ネイバーであるとは、
が満たされるときをいう。

$$qr - ps = 1$$

規約

- $\infty = \frac{1}{0}$ も既約分数に含める。
- 既約分数 $\frac{p}{q}$ において $q \geq 0$ と仮定する。

既約分数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して

$$\frac{p}{q} \# \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s} \quad (\text{Farey 和})$$

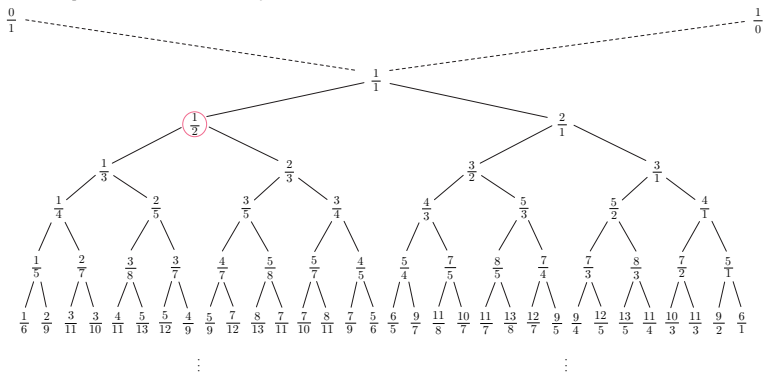
は再び既約である。この既約分数を $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ のメディエントと呼ぶ。

補題 2

- (1) $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が Farey ネイバーならば、
- (i) $\frac{p}{q}, \frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ および $\frac{p}{q} \# \frac{r}{s}, \frac{r}{s}$ はそれぞれ Farey ネイバーである。
 - (ii) 开区間 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ に含まれる既約分数の中で、 $\frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ の分母と分子の絶対値は最小である。
- (2) 任意の非負有理数は、 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ から有限回 $\#$ を施すことにより得られる。
- (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\alpha = \frac{p}{q} \# \frac{r}{s}$ を満たす Farey ネイバー $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が一意的に存在する。

(3) における組 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ を α の**両親**と呼ぶ。

Stern-Brocot 木 [3, 4] (SB 木と略記) は $\frac{1}{1}$ を頂点とする次の二進木のことをいう。



補題 2(3) により、任意の非負有理数は Stern-Brocot 木の頂点として 1 回だけ現れる。

[3] A. Brocot, *Calcul des rouages par approximation, Nouvelle méthode*, *Revue chronométrique* 3 (1861), 186–194.

[4] M.A. Stern, *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 55 (1858), 193–220.

SB 木と LR 語

SB 木において、左下の方向に進むか右下に進むかに応じて L か R を記す。このとき、次の 1 対 1 対応が存在する：

$$\begin{array}{c} \text{开区間 } (0, 1) \text{ 内の有理数 } \alpha \\ \xleftrightarrow{1:1} \text{ LR 語 } w(\alpha) \end{array}$$

ここで、 $w(\alpha)$ は、 $\frac{1}{2}$ から出発して α へ到達する SB 木内の道に対応する L と R からなる列を、右から左へ並べることに得られる。

語 $w(\alpha)$ を $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ の LR 語と呼ぶ。

例 3

$$\begin{aligned} w\left(\frac{1}{2}\right) &= \emptyset, w\left(\frac{1}{5}\right) = \text{LLL} = L^3, w\left(\frac{2}{7}\right) = \text{RLL} = \text{RL}^2, \\ w\left(\frac{3}{8}\right) &= \text{LRL}, w\left(\frac{3}{7}\right) = \text{RRL} = \text{R}^2\text{L}. \end{aligned}$$

LR 語に対する 3 操作と有理数

LR 語 w に対して LR 語 $i(w), r(w), (ir)(w)$ を次で定める :

- $i(w) := \left(\begin{array}{l} w \text{ において L と R を置き換える} \\ \text{ことにより得られる語} \end{array} \right)$
- $r(w) := \left(\begin{array}{l} w \text{ における文字の順番を逆に並べ換える} \\ \text{ことにより得られる語} \end{array} \right)$
- $(ir)(w) := i(r(w)) = r(i(w))$

(注 : $(ir)(w)$ は CCF のところで与えたものと一致する。)

例 4

$w = RLLL$ に対して

$$i(w) = LRRR, \quad r(w) = LLR, \quad (ir)(w) = RRRL.$$

LR 語と開区間 $(0, 1)$ 内の有理数を同一視すると次が成り立つ :

補題 5

$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ とし、 $(\frac{x}{r}, \frac{y}{s})$ を α の両親とする。このとき、

$$i(\alpha) = \frac{q-p}{q}, \quad r(\alpha) = \frac{r}{q}, \quad (ir)(\alpha) = \frac{s}{q}.$$

w と $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ が対応しているとき、 q は CCF における最大数であり、 $\alpha, i(\alpha), r(\alpha), (ir)(\alpha)$ の分子は CCF において q を囲む 4 つの整数として現れる [5]。

[例： $w = \text{LLLR}$ のとき]

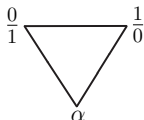
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	5	2	1	3	2	2	2	1	
	3	1	4	9	1	2	5	3	3	1	...
...	1	3	7	4	1	3	7	4	1	3	
	1	2	5	3	3	1	4	9	1	2	...
...	1	3	2	2	2	1	5	2	1	3	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

[5] T. Kogiso and M. Wakui, *A bridge between Conway-Coxeter Friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, JKTR (2019), 1950083, (40 pages).

山田修司先生による祖先三角形 [6]

正の有理数 α の祖先三角形とは、

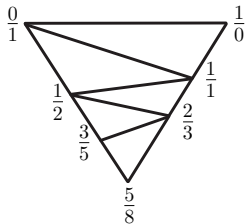
α , $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ を頂点とする三角形



の、次のように作られ

る三角形分割で、各頂点に以下の規則で有理数が割り当てられたものをいう：

- すべての頂点は斜辺上にある。
- 三角形分割の中の任意の三角形の頂点 β , β_L , β_R について、 β の高さが最も低く、 β_L , β_R がそれぞれ左斜辺、右斜辺上にあるとき、 (β_L, β_R) は β の親である。

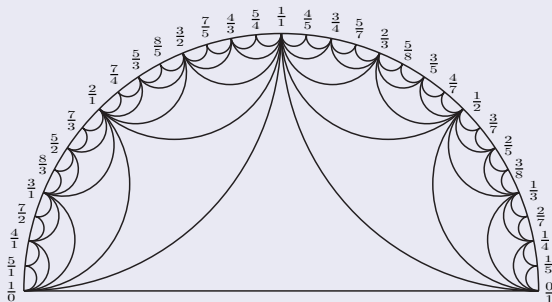


α の祖先三角形を $\text{YAT}(\alpha)$ により表わし、 $\text{YAT}(\alpha)$ を構成する各小三角形を基本三角形と呼ぶ。

[6] 山田修司, 「2橋結び目の Jones 多項式」, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集, 1996年2月.

注意 6

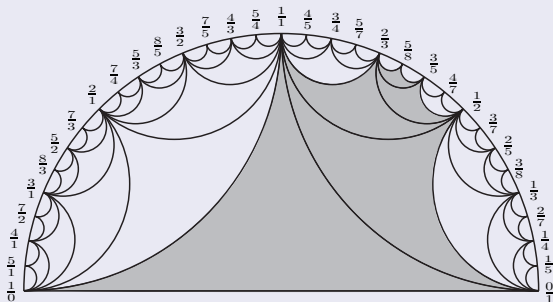
SB 木は双曲幾何において Farey tessellation と呼ばれているものと本質的に同じであり、祖先三角形と同じものは 2 (本) 橋絡み目の研究によく登場する [7]。



[7] A. Hatcher and U. Ortel: *Boundary slopes for Montesinos knots*, *Topology* 28 (1989), 453-480.

注意 6

SB 木は双曲幾何において Farey tessellation と呼ばれているものと本質的に同じであり、祖先三角形と同じものは 2 (本) 橋絡み目の研究によく登場する [7]。



[7] A. Hatcher and U. Ortel: *Boundary slopes for Montesinos knots*, *Topology* 28 (1989), 453-480.

YAT(α) はSB 木から自然に構成される

例 7

$\alpha = \frac{7}{4}$ の場合：

$$\alpha = \frac{5}{3} \# \frac{2}{1},$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{2} \# \frac{2}{1},$$

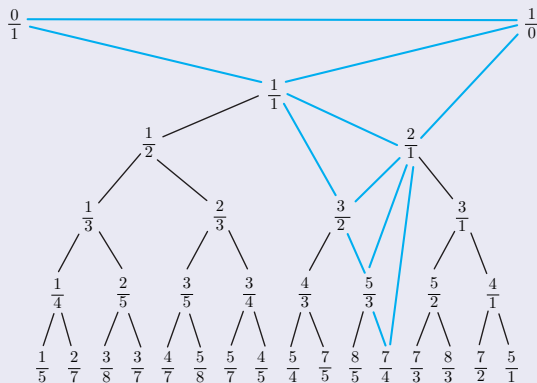
$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1} \# \frac{2}{1},$$

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} \# \frac{1}{0},$$

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \# \frac{1}{0}.$$

このとき、

YAT($\frac{7}{4}$) は右図の青線部分になる。

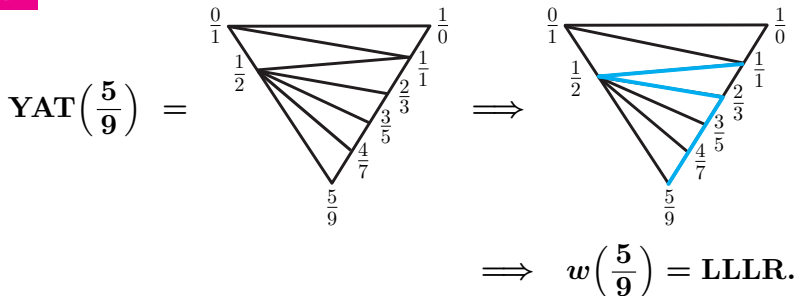


山田の祖先三角形から LR 語を読み取る方法

$\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ のとき、 $YAT(\alpha)$ においてもともと SB 木の辺になっている部分は、 $\frac{1}{1}$ から α への下降道であって、 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ を除く) すべての頂点を通るものである。

$\frac{1}{2}$ からたどるときに、左の辺に進むときには L を、右の辺に進むときには R を対応させて、L と R の列を右から左に並べると $w(\alpha)$ が得られる。

例



§3. 有理数の負連分数展開

正則連分数展開

任意の $\alpha \in \mathbb{Q}$ は次の連分数の形で表わされる：

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

但し、 $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ である。右辺を $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ で表わし、 α の**正則連分数展開**と呼ぶ。
 $a_n \geq 2$ ならば、

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1]$$

と表わすことができ、正則連分数展開による表示は n の偶奇を指定すれば一意的である。

負連分数展開

任意の有理数 $\alpha (> 1)$ はまた次の形の連分数として一意的に表わすことができる：

$$c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{c_{l-1} - \frac{1}{c_l}}}}}, \quad (1)$$

但し、 c_1, \dots, c_l は 2 以上の整数である。(1) の右辺を $[c_1, \dots, c_l]^-$ と表わし、 α の負連分数展開と呼ぶ。右辺は $c_l = 1$ のときにも意味を持つことに注意する。但し、この場合には一意性は成立しない。

任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して

$$[\overbrace{2, 2, \dots, 2}^r]^- = \frac{r+1}{r}.$$

例 8

$$\frac{13}{4} = \frac{12+1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = [3, 4],$$

$$\frac{13}{4} = \frac{16-3}{4} = 4 - \frac{3}{4} = 4 - \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = 4 - \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} = [4, 2, 2, 2]^-$$

正則連分数展開と負連分数展開の関係

補題 9 (Morier-Genoud and Ovsienko [8])

有理数 $\alpha (> 1)$ は次のように連分数展開されているとする：

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}] = [c_1, \dots, c_l]^-,$$

$$a_i \geq 1 \quad (0 \leq i \leq 2m-1), \quad c_j \geq 2 \quad (1 \leq j \leq l).$$

このとき、

$$(c_1, \dots, c_l) = (a_0 + 1, \overbrace{2, \dots, 2}^{a_1 - 1}, a_2 + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{a_3 - 1}, \dots, \\ a_{2m-2} + 2, \overbrace{2, \dots, 2}^{a_{2m-1} - 1}).$$

[8] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *q-deformed rational and q-continued fractions*, Forum Math. Sigma 8 (2020), e13, 55pp.

注意 10

a_i ($0 \leq i \leq 2m - 1$) は c_j ($1 \leq j \leq l$) から次式で求められる :

$$c_1 = a_0 + 1,$$

$$c'_{2k+1} = a_{2k} + 2 \quad (k = 1, \dots, m - 1),$$

$$c'_{2k} = a_{2k-1} - 1 \quad (k = 1, \dots, m),$$

$$c'_i = \begin{cases} (c_2, \dots, c_l \text{ における } \frac{i-1}{2} \text{ 番目の数}) & (i > 1 \text{ が奇数のとき}), \\ (\frac{i-1}{2} \text{ 番目と } \frac{i}{2} \text{ 番目の数の間の } 2 \text{ の個数}) & (\text{そうでないとき}). \end{cases}$$

負連分数展開と有理数に対する 3 操作

補題 11

$\alpha = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($c_j \in \mathbb{N}$, $c_j \geq 2$ ($l \geq 2$, $j = 1, \dots, l$)) に対して

$$(1) \quad i(\alpha) = \frac{1}{[1, c_1, \dots, c_l]^-}.$$

$$(2) \quad r(\alpha) = [c_l, \dots, c_1]^-.$$

$$(3) \quad (ir)(\alpha) = \frac{1}{[1, c_l, \dots, c_1]^-}.$$

連分数と Farey 和

正則連分数版もあるがここでは負連分数版のみ紹介する。

補題 12 (負連分数版)

$\alpha = [c_1, c_2, \dots, c_l]^-$ ($c_j \in \mathbb{N}$, $c_j \geq 2$ ($l \geq 2$, $j = 1, \dots, l$)) とする。

(1) $c_l > 2$ ならば、

$$\beta = [c_1, \dots, c_{l-1}, c_l - 1]^-, \quad \gamma = [c_1, \dots, c_{l-1}]^-$$

は Farey ネイバーであり、 $\alpha = \beta \# \gamma$.

(2) $c_l = 2$ ならば、

$$\beta = \begin{cases} [c_1, \dots, c_{l-1} - 1]^- & (l > 2 \text{ のとき}), \\ [c_{l-1} - 1]^- & (l = 2 \text{ のとき}), \end{cases} \quad \gamma = [c_1, \dots, c_{l-1}]^-$$

は Farey ネイバーであり、 $\alpha = \beta \# \gamma$.

$\beta = 1$ となることもあり得ることに注意する。実際、

$c_1 = \dots = c_l = 2$ ならば、 $\beta = [2, \dots, 2, 1]^- = 1$ である。

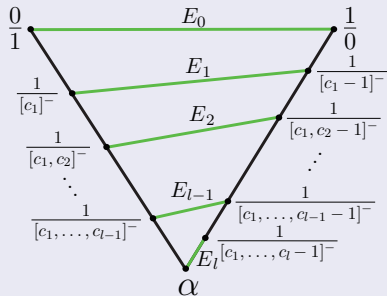
補題 13

有理数 α ($0 < \alpha < 1$) に対して
 $\frac{1}{\alpha} = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($c_1, \dots, c_l \in \mathbb{N}$,
 $c_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, l$)) とする。

$\frac{0}{1}, \frac{1}{[c_1]^-}, \frac{1}{[c_1, c_2]^-}, \dots,$
 $\frac{1}{[c_1, \dots, c_l]^-} = \alpha$ は、YAT(α)

の左斜辺上に上から順番に並ぶ
 頂点である。各 $j = 1, \dots, l$ に対して

$\frac{1}{[c_1, \dots, c_j]^-}, \frac{1}{[c_1, \dots, c_j - 1]^-}$ を端点とする辺を E_j とおき、
 E_0 を $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を端点とする辺とする。このとき、 E_{j-1}, E_j および
 左斜辺、右斜辺により囲まれる領域内の基本三角形の個数は、
 $j = 1$ のとき c_1 個であり、それ以外の場合は $(c_j - 1)$ 個である。



注意： $c_l = 2$ のときには

$$[c_1, \dots, c_l - 1]^- = [c_1, \dots, c_{l-1} - 1]^-$$

であるから、 E_{l-1} と E_l の端点が一致する。

例 14

$\alpha = \frac{7}{11}$ のとき、

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{11}{7}$$

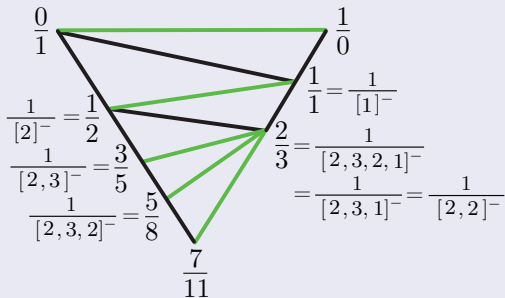
$$= [2, 3, 2, 2]^-$$

であり、

$$\text{YAT}\left(\frac{7}{11}\right),$$

$$\frac{1}{[2]^-}, \frac{1}{[2, 3]^-}, \frac{1}{[2, 3, 2]^-}$$

は右図のようになる。



§4. 有理絡み目の Conway-Coxeter フリーズによる特徴づけ

((2, 2)-) タングルとその図式

3次元球体 B と B に固有に埋め込まれた 1次元多様体 t との組 (B, t) であって、次を満たすものをいう。

(Tang1) $\partial t \subset \partial B$, $t \cap \partial B = \partial t$.

(Tang2) $\sharp(\partial t \cap \partial B_{\pm}) = 2$, $\partial t \cap S_0^2 = \emptyset$.



タングル (B, s) , (B, t) が**同値**である

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (B, s) から (B, t) への境界上の各点を固定するアンビエント・イソトピーが存在する。

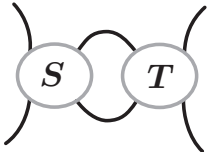
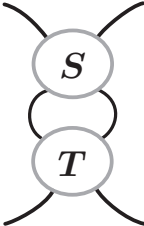
以下、標準 3次元球体 \mathbb{B}^3 内のタングル t であって、 $\partial t = t \cap \partial \mathbb{B}^3$ が 4点

$$\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{複号任意})$$

からなるもののみを扱い、 (\mathbb{B}^3, t) を単に t と書く。





タングル t は $\Delta = \{0\} \times \mathbb{D}^2$ 上の図式として表わすことができる。この図式を**タングル図式**と呼ぶ。

タングル (図式) の 2 つの演算 $+$, $*$ と有理タングル

$$S + T := \text{Diagram 1}, \quad S * T := \text{Diagram 2}$$



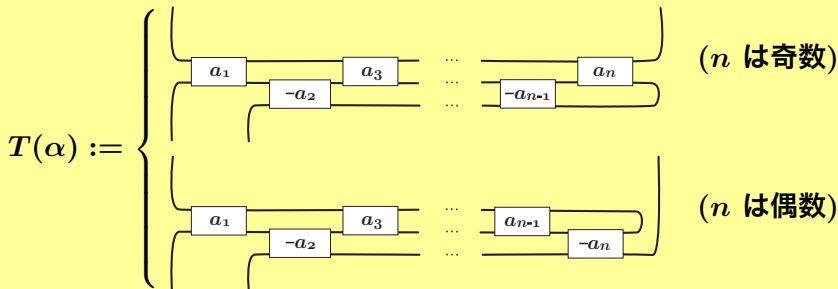
定義 15

有理タングルとは、 $[0] = \text{Diagram 3}$ または $[\infty] = \text{Diagram 4}$ から出発して、タングル $[1] = \text{Diagram 5}$ や $[-1] = \text{Diagram 6}$ を加えたり、積を取ったりすることを繰り返して得られるものをいう。

有理タングルの Conway 表示 $T(\alpha)$

$\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を正則連分数展開する： $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.
 但し、 $\alpha = \infty$ のときは $a_1 = 1, a_2 = 0$ で、 $\alpha \in \mathbb{Q}$ のときは
 $a_1 \in \mathbb{Z}, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ である。



但し、 $\boxed{n} = \begin{cases} \overleftarrow{\text{X} \dots \text{X}}^n & (n \geq 0), \\ \overleftarrow{\text{X} \dots \text{X}}^{-n} & (n < 0). \end{cases}$

有理タングルの分類

Conway[9] により与えられた (1970 年)。

$\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $T(\alpha)$ を図式にもつ有理タングルを $t(\alpha)$ と書く。

定理 16 (Conway の有理タングルの分類定理)

2 つの有理タングル $t(\alpha)$, $t(\beta)$ が同値であるための必要十分条件は $\alpha = \beta$ となることである。したがって、有理タングルのイソトピー類全体は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ によってパラメータライズされる。

証明は Cromwell の本 [10; Chapter 8] または Bonahon and Siebenmann によるモノグラフ [11; Proposition 1.3] を参照。

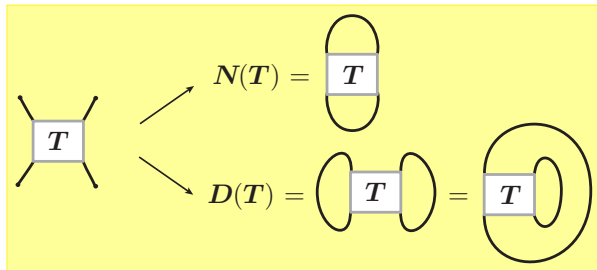
[9] J.H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, in Proceedings of the conference on computational problems in abstract algebra held at Oxford 1967, (J. Leech ed.), Pergamon Press, 1970, 329–358.

[10] P. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.

[11] F. Bonahon and L.C. Siebenmann, *New geometric splittings of classical knots and the classification and symmetries of arborescent knots*, June 12, 2010.

タングルから絡み目へ

タングル (図式) T から 2 つの絡み目 (図式) $N(T)$ と $D(T)$ が次のように得られる：



$N(T)$, $D(T)$ はそれぞれ T の分子、分母と呼ばれる。

有理絡み目の定義 有理絡み目とは、有理タングルの分母に同値な絡み目のことをいう。2 (本) 橋結び目とも呼ばれる。

有理絡み目の例

(1) $\alpha = \frac{5}{9}$ の場合、 $\alpha = [0, 1, 1, 3, 1]$ であり、



(2) $\alpha = \frac{5}{6}$ の場合、 $\alpha = [0, 1, 5]$ であり、



$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ を $\alpha = \frac{p}{q}$ (既約分数) と表わしたとき、有理絡み目 $D(\mathfrak{t}(\alpha))$ は、 q が奇数ならば結び目であり、 q が偶数ならば 2 成分絡み目である。

定理 17 (Schubert による有理絡み目の分類 (非有向版)[12])

有理絡み目 $D(\mathfrak{t}(\frac{p}{q}))$, $D(\mathfrak{t}(\frac{p'}{q'}))$ が (向きを考えないで) 同値であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである。

- ① $q = q'$ かつ
- ② $pp' \equiv 1 \pmod{q}$ または $p \equiv p' \pmod{q}$.

2018 年の Knotting Nagoya での講演の際に、作間誠先生のコメントがヒントになって次の結果を示すことができた。

定理 18 (Kogiso-W. [11])

$\alpha = \frac{p}{q}$ ($q > p \geq 2$) を有理数とし、 $p' \in \{1, \dots, q-1\}$ とする。有理絡み目 $D(\mathfrak{t}(\frac{p'}{q}))$ が $D(\mathfrak{t}(\alpha))$ またはその鏡像 $\overline{D(\mathfrak{t}(\alpha))}$ に同値であるための必要十分条件は $\frac{p'}{q}$ が $\alpha, i(\alpha), r(\alpha), (ir)(\alpha)$ のいずれかに一致することである。

[12] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Zeit. 66 (1956), 133–170.

[13] T. Kogiso and M. Wakui, *A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag-type by rational links*, arXiv2008.09364, to appear in OJM.

ジグザグ型 CCF と有理絡み目

2 つの CCF は、垂直方向、水平方向およびそれらの合成により
 移り合うとき同じと考える。定理 18 により、ジグザグ型 CCF
 と鏡像の違いを無視した (非有向) 有理絡み目とは 1 対 1 に対応
 することがわかる。

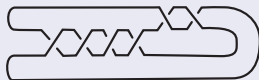
例 19

$$\Gamma_{\frac{2}{9}} \sim \Gamma_{\frac{7}{9}} \sim \Gamma_{\frac{5}{9}} \sim \Gamma_{\frac{4}{9}} \longleftrightarrow \{D(\mathfrak{t}(\frac{2}{9})), \overline{D(\mathfrak{t}(\frac{2}{9}))}\}$$

||

1	1	1	
...	2	5	1
1	9	4	...
...	4	7	3
3	3	5	...
...	2	2	3
1	1	1	

||



$$D(\mathfrak{t}(\frac{5}{9})) \sim D(\mathfrak{t}(\frac{2}{9})),$$

$$D(\mathfrak{t}(\frac{7}{9})) \sim D(\mathfrak{t}(\frac{4}{9})) \sim \overline{D(\mathfrak{t}(\frac{2}{9}))}$$

に注意。実際、 $2 \cdot 4 \equiv -1 \pmod{9}$,
 $2 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{9}$.

定理 18 の証明の概略

\implies) $pp' \equiv \pm 1$ または $p \equiv \pm p' \pmod{q}$ を満たしているとする。

- $pp' \equiv 1 \pmod{q}$ ならば、 $pp' = xq + 1$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき、 $(\frac{x}{p'}, \frac{p-x}{q-p'})$ は α の両親であり、 $r(\alpha) = \frac{p'}{q}$ † である。
- $pp' \equiv -1 \pmod{q}$ ならば、 $pp' = yq - 1$ となる $y \in \mathbb{Z}$ が存在する。 $(\frac{p-y}{q-p'}, \frac{y}{p'})$ は α の両親であり、 $(ir)(\alpha) = \frac{p'}{q}$ † である。
- $p \equiv p' \pmod{q}$ ならば、 $p = p'$ であり、 $\alpha = \frac{p'}{q}$ である。
- $p \equiv -p' \pmod{q}$ ならば、 $q - p' \equiv p \pmod{q}$ である。 p' の範囲により $q - p' = p$, $i(\alpha) = \frac{q-p}{q} = \frac{p'}{q}$ となる。

\impliedby) α の両親を $(\frac{x}{r}, \frac{y}{s})$ とすると、

$i(\alpha) = \frac{q-p}{q}$, $q - p \equiv -p \pmod{q}$ である。よって、定理 17 によ


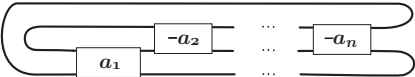
り、 $D(\mathfrak{t}(i(\alpha))) \sim D(\mathfrak{t}(-\alpha)) = \overline{D(\mathfrak{t}(\alpha))}$ である。同様に、

$$\begin{cases} (ir)(\alpha) = \frac{s}{q}, D(\mathfrak{t}((ir)(\alpha))) \sim D(\mathfrak{t}(\alpha)), \\ r(\alpha) = \frac{r}{q}, D(\mathfrak{t}(r(\alpha))) \sim D(\mathfrak{t}(\alpha)) \end{cases} \quad \text{となる。} \quad \square$$

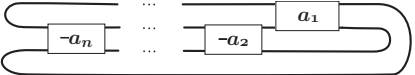
† 修正

i, r, ir の有理絡み目への効果 (定理 18 の \Leftarrow の幾何的証明)

タングル図式 T に対して、鏡像を \overline{T} と表わし、それを 90 度回転して得られる図式を T^{in} と表わす。 $\alpha = [0, a_1, \dots, a_n]$ (n は偶数) に対して、 $D(T(i(\alpha)))$, $D(T((ir)(\alpha)))$ は絡み目としてそれぞれ次に同値である：

$$D(T(i(\alpha))) \sim D((T^{\text{in}} + [-1]) * [1]) \sim \text{Diagram 1} \sim \text{Diagram 2} \sim \overline{D(T(\alpha))},$$



$$D(T((ir)(\alpha))) = D(T(\alpha)^{\text{pal}}) \text{ (“pal” は palindrome の意)}$$

$$= \text{Diagram 3} = \overline{D(T(\alpha))}.$$


よって、 $D(T(r(\alpha))) \sim D(T(\alpha))$.

§5. 有理絡み目図式のライズ公式

永井・寺嶋両氏は、有理絡み目図式のライズを正則連分数展開を用いて組み合わせた的に計算する公式 [14] を発見した。ここでは、その公式を負連分数展開から計算する方法を紹介する。ここからは向きの入った絡み目 (図式) を考える。

絡み目図式のライズ

D を有向絡み目図式とする。次で定義される整数 $\text{wr}(D)$ を D のライズと呼ぶ：

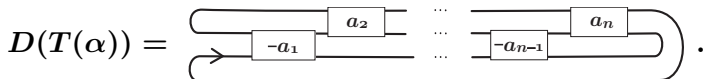
$$\text{wr}(D) = \sum_{\text{all crossings } p} \varepsilon(p),$$

$$\text{但し、} \varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ p \end{array} \text{ のとき} \right) \\ -1 & \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ p \end{array} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

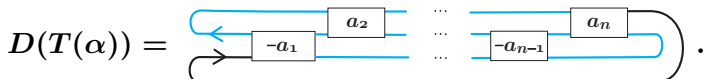
[14] W. Nagai and Y. Terashima, *Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials*, Adv. Math. 363 (2020), 106965, 37pp.

向きの規約 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ を $\alpha = \frac{p}{q} = [0, a_1, \dots, a_n]$
 $(p, q, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N})$ と書く。このとき、 $D(T(\alpha))$ の向きを
 次のように選ぶ：

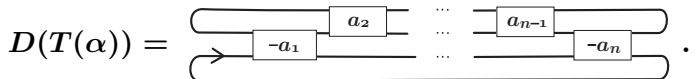
- q が奇数で n が偶数のとき



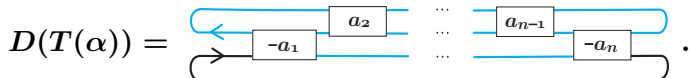
- q と n が偶数のとき



- q と n が奇数のとき



- q が偶数で n が奇数のとき



有理数の型

0 を除く任意の有理数は、分母と分子の偶奇に基づいて、 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}$ 型の 3 つの型に分類される。

$\frac{p}{q} = \frac{x}{r} \# \frac{y}{s}$ に対して、ユニモジュラー規則により $\frac{p}{q}, \frac{x}{r}, \frac{y}{s}$ の型はすべて異なることに注意する。

例 20

$\frac{3}{10} = \frac{2}{7} \# \frac{1}{3}$ に対して、 $\frac{3}{10}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}$ の型は順に $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ である。

Seifert 道 [14]

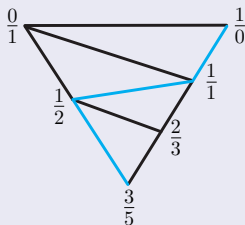
$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ の Seifert 道とは、 $YAT(\alpha)$ において $\frac{1}{0}$ から出発して α へ至る下降道であって、次の条件を満たすものをいう：その道のすべての辺について、端点に割り当てられた有理数の型は

すべて $\frac{1}{1}$ ————— $\frac{1}{0}$ であるか、すべて $\frac{1}{0}$ ————— $\frac{0}{1}$

であるかのいずれかである。

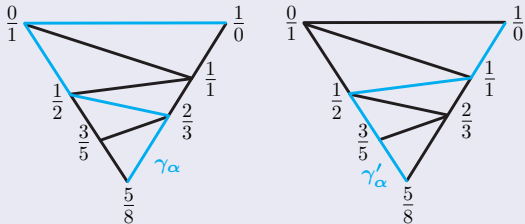
例 21

$\frac{3}{5} = [0, 1, 1, 1, 1]$ の場合



例 22

$\frac{5}{8} = [0, 1, 1, 1, 2]$ の場合



Seifert 道 (続き)

$\alpha = \frac{p}{q} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ とする。

q が奇数ならば、Seifert 道は一意的に存在する。これを γ_α で表わす。

q が偶数ならば、Seifert 道はちょうど 2 つ存在する。頂点が $\frac{1}{0}$ 型と $\frac{0}{1}$ 型からなる Seifert 道を γ_α で表わし、もう一つの Seifert 道を γ'_α で表わす。

祖先三角形の基本三角形列

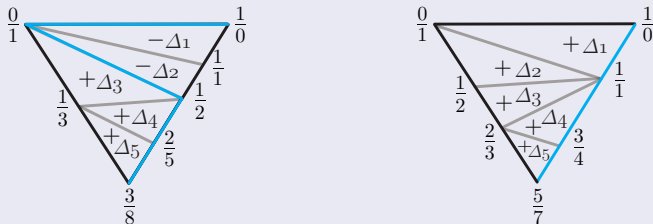
$\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ とし、祖先三角形 $\text{YAT}(\alpha)$ を考える。 $\text{YAT}(\alpha)$ の基本三角形列とは、 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を端点とする辺を含む基本三角形から出発して、 α を頂点に持つ基本三角形に至るまでの $\text{YAT}(\alpha)$ における基本三角形からなる降下列 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ であって、各 k に対して、 $\Delta_{k-1} \cap \Delta_k$ が共通の辺からなるものをいう。

基本三角形の符号

各基本三角形に符号を割り当てる。

例 23

$\frac{3}{8}$ と $\frac{5}{7}$ の基本三角形列と基本三角形の符号：



符号割り当ての大まかな規則は、「 γ_α が $\text{YAT}(\alpha)$ を横切るときに符号を変える」というものである。ただし、 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を端点とする辺 (上辺) を通過するときには $\text{YAT}(\alpha)$ を横切ると考える。

永井・寺嶋両氏によるライズ計算公式

$\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ を $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ の基本三角形列とする。このとき、符号 $t_\alpha(\Delta_k)$ ($k = 1, \dots, m$) を次のように帰納的に定める：

$$t_\alpha(\Delta_1) = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ が } \frac{1}{0} \text{ 型または } \frac{0}{1} \text{ 型 のとき}), \\ -1 & (\alpha \text{ が } \frac{1}{1} \text{ 型 のとき}) \end{cases}$$
$$t_\alpha(\Delta_k) = \begin{cases} -t_\alpha(\Delta_{k-1}) & \left(\gamma_\alpha \text{ が } \Delta_{k-1} \text{ と } \Delta_k \right. \\ & \left. \text{の共通辺を通るとき} \right), \\ t_\alpha(\Delta_{k-1}) & \text{(そうでないとき)}. \end{cases}$$

定理 24 (Nagai - Terashima [14, Theorem 4.4])

$$-\text{wr}(\alpha) = \sum_{k=1}^m t_\alpha(\Delta_k). \quad (2)$$

負連分数展開による計算公式

$\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ とし、

$$\frac{1}{\alpha} = [c_1, \dots, c_l]^- \quad (c_j \geq 2 \quad (j = 1, \dots, l))$$

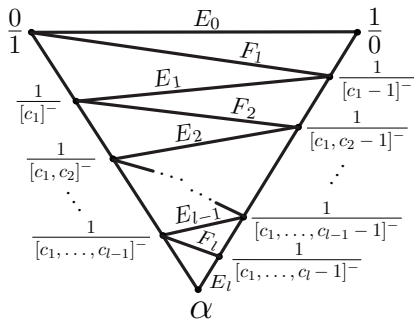
のように負連分数展開す

る。 E_j ($j = 0, 1, \dots, l$) と F_j ($j = 1, \dots, l$) を図のように与えられる YAT(α) における辺とする。 Seifert 道

γ_α が $\frac{1}{0}$ から出発して E_j

のどちらかの端点に最初に到達するまでに、祖先三角形

YAT(α) を横切る回数を z_j とおく。但し、 γ_α が E_0 を通る場合は 1 回横切ると数える。



負連分数展開による計算公式 (続き)

$j = 1, \dots, l$ に対して $t_\alpha([E_{j-1}, E_j])$ を次のように帰納的に定める:

$$t_\alpha([E_0, E_1]) := \begin{cases} -c_1 & (z_1 = 0 \text{ のとき}), \\ c_1 & (z_1 = 1 \text{ のとき}), \\ c_1 - 2 & (z_1 = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$j \geq 2$ に対して

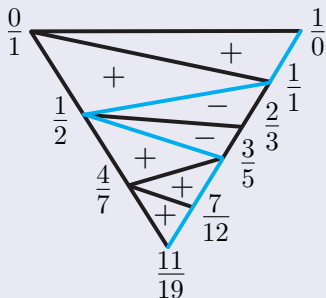
$$t_\alpha([E_{j-1}, E_j]) := \begin{cases} (-1)^{z_j-1}(c_j - 1) & \left(\begin{array}{l} \gamma_\alpha \text{ が } F_j \text{ を} \\ \text{通らないとき} \end{array} \right), \\ (-1)^{z_j}(c_j - 3) & (\gamma_\alpha \text{ が } F_j \text{ を通るとき}). \end{cases}$$

このとき、

$$\text{wr}(D(T(\alpha))) = \sum_{j=1}^l t_\alpha([E_{j-1}, E_j]). \quad (3)$$

例 25

$\alpha = \frac{11}{19} = [0, 1, 1, 2, 1, 1, 1]$ のとき $\frac{19}{11} = [2, 4, 3]^-$.



$z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2$ より、

$$t_\alpha([E_0, E_1]) = -2, t_\alpha([E_1, E_2]) = 1, t_\alpha([E_2, E_3]) = -2.$$

よって、((3) の右辺) = -3 .

これは、 $D(T(\alpha))$ のライズに一致している。

2 成分有理絡み目の向きの変更

$\alpha = \frac{p}{q} = [0, a_1, \dots, a_n]$ において q が偶数のとき、 $D(T(\alpha))$ は 2 成分となる。 $D(T(\alpha))$ の向きを変更することにより、次図で表わされる図式 $D_{+-}(T(\alpha))$, $D_{--}(T(\alpha))$, $D_{-+}(T(\alpha))$ が得られる：

$$D_{+-}(T(\alpha)) = \text{Diagram 1},$$

$$D_{--}(T(\alpha)) = \text{Diagram 2},$$

$$D_{-+}(T(\alpha)) = \text{Diagram 3}.$$

上の図式では n を偶数に選んだが、奇数のときも同様に定めることができる。

2 成分有理絡み目の向きの変更とライズ

補題 26

$\frac{1}{0}$ 型の有理数 α に対して、

- (1) $\text{wr}(D_{--}(T(\alpha))) = \text{wr}(D(T(\alpha))),$
 $\text{wr}(D_{-+}(T(\alpha))) = \text{wr}(D_{+-}(T(\alpha))).$
- (2) $\text{wr}(D_{+-}(T(\alpha))) = -\text{wr}(D(T(1 - \alpha))).$

(証明)

絡み目図式 D に対して、そのすべての交差の上下を入れ替えて得られる絡み目図式を \overline{D} で表わす。

- (1) ライズの定義より自明。
- (2) $D(T(\alpha))$ は、 $\overline{D_{-+}(T(i(\alpha)))}$ に向きを込めて正則イソトピックであることから従う。 □

wr($D_{+-}(T(\alpha))$) のライズ計算公式

$\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ が $\frac{1}{0}$ 型 のとき、 α の基本三角形 Δ_k の符号 $t'_\alpha(\Delta_k)$ を、Seifert 道 γ_α の代わりに γ'_α を用いて帰納的に定義する。定理 24 と同様に、次が成り立つ：

$$-\text{wr}(D_{+-}(T(\alpha))) = \sum_{k=1}^m t'_\alpha(\Delta_k). \quad (4)$$

よって、 $\frac{1}{\alpha} = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($c_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, l$)) と書くと、次が成り立つ：Seifert 道 γ'_α が $\frac{1}{0}$ から出発して E_j のどちらかの端点に最初に到達するまでに、祖先三角形 $YAT(\alpha)$ を横切る回数を z'_j とおき、

$$t'_\alpha([E_{j-1}, E_j]) := \begin{cases} -c_1 & (j = 1 \text{ のとき}), \\ (-1)^{z'_j-1} (c_j - 1) & (j \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める。このとき、

$$\text{wr}(D_{+-}(T(\alpha))) = \sum_{j=1}^l t'_\alpha([E_{j-1}, E_j]). \quad (5)$$

以上で得た負連分数展開によるライズの計算公式を用いて、負連分数展開からライズを帰納的に計算するための公式が得られる。

定理 27 (一部のみ)

$\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ とし、 $\frac{1}{\alpha} = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($c_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, l$)) と表わす。 $\alpha_j := \frac{1}{[c_1, \dots, c_j]^-}$ と定め、 $\epsilon(c_l)$ を c_l の偶奇に応じて $+$, $-$ をとる関数とする。 $D_{++} := D$ とすると、 $l \geq 3$ に対して次が成り立つ。

(1) α_{l-1} が $\frac{1}{0}$ 型、 α が $\frac{1}{1}$ 型の時、

$$\text{wr}(D(T(\alpha))) = \text{wr}(D_{+-}(T(\alpha_{l-1}))) + (-1)^{z_{l-1}(\alpha_{l-1}) + \frac{1+(-1)^{c_l}}{2} + 1} (c_l - 1).$$

(2) α_{l-1} が $\frac{0}{1}$ 型、 α が $\frac{1}{1}$ 型の時、

$$\text{wr}(D(T(\alpha))) = \text{wr}(D_{+\epsilon(c_l)}(T(\alpha_{l-2})))$$

$$+ (-1)^{z_{l-2}(\alpha_{l-2}) + \frac{1+(-1)^{c_l-1}}{2} + \frac{1-(-1)^{c_l}}{2}} (-c_{l-1} + c_l + 2).$$

§6. 有理数と Farey 和の q -変形とその計算公式

q -整数

q を不定元とする。1 以上の整数 a に対して $[a]_q \in \mathbb{Z}[q]$ を

$$[a]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{a-1} \quad (6)$$

と定め、 $[0]_q := 0$ と定める。 $\mathbb{Z}[q]$ の商体 $Q(\mathbb{Z}[q])$ において次が成立する：

$$a \geq 0 \text{ に対して } [a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q}.$$

有理数の q -連分数展開と q -有理数

Morier-Genoud と Ovsienco により有理数の連分数展開の q -変形が導入された。

定義 28 (Morier-Genoud - Ovsienco [8; Definition 1.1])

c_1, \dots, c_l を 2 以上の自然数からなる有限列とする。このとき、 $[c_1, \dots, c_l]_q^- \in Q(\mathbb{Z}[q])$ を次の式で定義する：

有理数の q -連分数展開と q -有理数 (続き)

定義 28 (Morier-Genoud - Ovsienko [8; Definition 1.1])

$$[c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \frac{q^{c_2-1}}{\ddots - \frac{q^{c_{l-2}-1}}{[c_{l-1}]_q - \frac{q^{c_{l-1}-1}}{[c_l]_q}}}} \quad (7)$$

$\alpha \in (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ を $\alpha = [c_1, \dots, c_l]^-$ と負連分数で表わすと、 $Q(\mathbb{Z}[q])$ の元 $[c_1, \dots, c_l]_q^-$ が定まる。このとき、

$$[\alpha]_q := [c_1, \dots, c_l]_q^-$$

と定めて、 α の q -変形あるいは q -有理数と呼ぶ。

(7) を (分母・分子に $\mathbb{Z}[q]$ の元を掛けることなく) 通分していくことにより、 $[\alpha]_q$ は

$$[\alpha]_q = \frac{N_q(\alpha)}{D_q(\alpha)} \quad (N_q(\alpha), D_q(\alpha) \in \mathbb{Z}[q])$$

と一意的に書き表わされる。ここで、

- (i) $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ は $\mathbb{Z}[q]$ において互いに素であり、
- (ii) $\alpha = \frac{r}{s}$ ($(r, s) = 1, r, s \geq 1$) のとき、
 $N_1(\alpha) = r, D_1(\alpha) = s$ である。

便宜上、 $\alpha = \frac{1}{0}$ に対して、 $N_q(\alpha) = 1, D_q(\alpha) = 0$ と定める。

例 29

(1) $r \in \mathbb{N}$ とし、 $\alpha = \frac{r+1}{r} = [2, \dots, 2]^-$ を考える。

$$\left[\frac{3}{2} \right]_q = [2]_q - \frac{q}{[2]_q} = 1 + q - \frac{q}{1+q} = \frac{[3]_q}{[2]_q}.$$

例 29 (続き)

一般に、

$$\begin{aligned}\left[\frac{r+1}{r}\right]_q &= [2]_q - \frac{q}{\left[\frac{r}{r-1}\right]_q} = \frac{[2]_q[r]_q - q[r-1]_q}{[r]_q} \\ &= \frac{[r+1]_q}{[r]_q}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \left[\frac{5}{2}\right]_q &= [3, 2]_q^- = [3]_q - \frac{q^2}{[2]_q} \\ &= \frac{[2]_q[3]_q - q^2}{[2]_q} = \frac{1 + 2q + q^2 + q^3}{1 + q} \neq \frac{[5]_q}{[2]_q}.\end{aligned}$$

有理数の q -連分数展開と q -Farey 和の関係

1 より大きい 2 つの有理数 $\alpha = \frac{r}{s}$, $\beta = \frac{r'}{s'}$ ($r, s, r', s' \in \mathbb{N}$) が Farey ネイバーの関係にあるとする。 $\alpha \# \beta = [c_1, \dots, c_l]^-$ と書くとき、

$$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q := \frac{N_q(\alpha) + q^{c_l-1} N_q(\beta)}{D_q(\alpha) + q^{c_l-1} D_q(\beta)} \quad (8)$$

と定めて、 $[\alpha]_q$ と $[\beta]_q$ の重み付き Farey 和と呼ぶ [8]。上の定義は、 $s = 1$, $(r', s') = (1, 0)$ の場合にも適用する。

定理 30

1 より大きな有理数 α, β が Farey ネイバーならば、

$$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q = [\alpha \# \beta]_q.$$

例 31

$$\frac{4}{3} \# \frac{3}{2} = \frac{7}{5} = [2, 2, 3]^- \text{ より、}$$

$$\left[\frac{4}{3} \right]_q \oplus \left[\frac{3}{2} \right]_q = \frac{N_q\left(\frac{4}{3}\right) + q^2 N_q\left(\frac{3}{2}\right)}{D_q\left(\frac{4}{3}\right) + q^2 D_q\left(\frac{3}{2}\right)}$$

となる。ここで、 $\left[\frac{3}{2} \right]_q = \frac{[3]_q}{[2]_q}$, $\left[\frac{4}{3} \right]_q = \frac{[4]_q}{[3]_q}$ であるから

$N_q\left(\frac{4}{3}\right) = [4]_q$, $N_q\left(\frac{3}{2}\right) = [3]_q$, $D_q\left(\frac{4}{3}\right) = [3]_q$, $D_q\left(\frac{3}{2}\right) = [2]_q$ であり、したがって、

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{3} \right]_q \oplus \left[\frac{3}{2} \right]_q &= \frac{(1 + q + q^2 + q^3) + q^2(1 + q + q^2)}{(1 + q + q^2) + q^2(1 + q)} \\ &= \frac{1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}{1 + q + 2q^2 + q^3} \end{aligned}$$

を得る。これは $\left[\frac{7}{5} \right]_q = [2]_q - \frac{q}{[2]_q - \frac{q}{[3]_q}}$ の値に等しい。 □

c_l の公式

1 より大きい有理数 α を負連分数展開する :

$\alpha = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($c_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, l$)). このとき、
 $t^-(\alpha) := c_l$ と定める。

補題 32

1 より大きな有理数 α, β が Farey ネイバーをなしているとき、

$$t^-(\alpha \# \beta) = \left\lceil \frac{N(\alpha)}{N(\beta)} \right\rceil + 1$$

である。ここで、 $\lceil \alpha \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \alpha \leq n\}$ (天井関数) であり、 $N(\alpha), N(\beta)$ はそれぞれ α, β を既約分数で表わしたときの分子を表わす。

(証明)

$\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{r}{s}$ とおくと、 $r(\alpha \# \beta) = \frac{p+r}{r} = \frac{p}{r} + 1$ である。

また、補題 11(2) より

$\alpha \sharp \beta = [c_1, \dots, c_l]^-$ ($l \geq 2$, $c_j \in \mathbb{N}$, $c_j \geq 2$ ($j = 1, 2, \dots, l$)) のとき

$$r(\alpha \sharp \beta) = [c_l, \dots, c_1]^- = c_l - \frac{1}{[c_{l-1}, \dots, c_1]^-}$$

である。よって、

$$\frac{p}{r} + 1 = c_l - \frac{1}{[c_{l-1}, \dots, c_1]^-}$$

を得る。両辺の整数部分を比較して

$$\left\lceil \frac{p}{r} \right\rceil + 1 = c_l = \mathbf{t}^-(\alpha \sharp \beta)$$

を得る。



定理 33

$\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{b}{d}$ を 1 より大きな有理数からなる Farey ネイバーとする。このとき、

$$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q = \frac{(a, b)_q}{(c, d)_q}$$

となる。ここで、右辺の分母と分子は次の規則で帰納的に定義される非負整数係数の q に関する多項式である：互いに素な正の整数の組 (a, b) に対して、

$$(a, b)_q = \begin{cases} (a - r, r)_q + q(a, b - a)_q & (a < b \text{ のとき}), \\ (a - b, b)_q + q^e(r, b - r)_q & (a > b \text{ のとき}). \end{cases}$$

但し、 r は、 $a < b$ のとき b を a で割ったときの余り、 $a > b$ のとき a を b で割ったときの余りであり、 $e = \lceil \frac{a}{b} \rceil$ である。また、 $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して $(1, n)_q = (n, 1)_q = [1 + n]_q$ である。

記号の約束 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(n)_q := [n]_q \quad (= 1 + q + \cdots + q^{n-1}), \quad (0)_q := 0$$

q -Farey 和の計算公式の応用

$$\left[\frac{17}{5} \right]_q = \frac{(10, 7)_q}{(3, 2)_q} = \frac{(3, 7)_q + q^2(3, 4)_q}{(3)_q + q^2(2)_q}$$

ここで、

$$(3, 4)_q = (3)_q + q(4)_q, \quad (3, 7)_q = (3)_q + q(3, 4)_q$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left[\frac{17}{5} \right]_q &= \frac{(1 + q + q^2)(3)_q + (1 + q)q^2(4)_q}{(3)_q + q^2(2)_q} \\ &= \frac{(3)_q^2 + q^2(2)_q(4)_q}{(3)_q + q^2(2)_q}. \end{aligned}$$

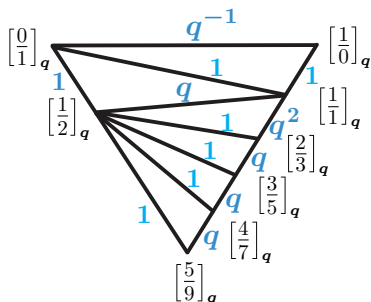
q -YAT(重付き祖先三角形) による解釈

Morier-Genoud と Ovsienko [8] の重みの規則：

$$[\alpha \# \beta]_q = \frac{N_q(\alpha) + q^k N_q(\beta)}{D_q(\alpha) + q^k D_q(\beta)}$$

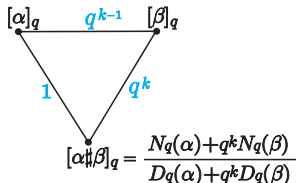
(必要に応じて、時計回りの回転で同じ形になるように回転させて考える)

[例： $\alpha = \frac{5}{9}$ の場合]



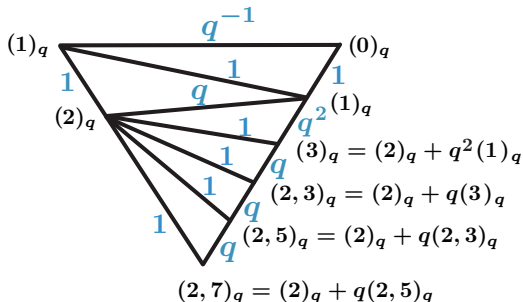
q -YAT(重付き祖先三角形) による解釈

Morier-Genoud と Ovsienko [8] の重みの規則：



(必要に応じて、時計回りの回転で同じ形になるように回転させて考える)

[例： $\alpha = \frac{5}{9}$ の場合] (分母を取り出す)



q-CCF を構成する試み

[例: $\alpha = \frac{5}{9}$ の場合] $[\frac{5}{9}]_q = [\frac{1}{2} \# \frac{4}{7}]_q = \frac{(1,4)_q}{(2,7)_q} = \frac{(1)_q + q(4)_q}{(2)_q + q(2,5)_q}$ に
 基づいて、 $ad - bc$ が q の冪となるように埋める。

	1	1	1	1	1	1	1
...	$(2)_q$	1	$(5)_q$	$(2)_q$	1		
	$(3)_q$	1	$(4)_q$	$(2, 7)_q$	1	$(2)_q$	
...	1	$(3)_q$	$(2, 5)_q$	$(4)_q$	1		
	1	$(2)_q$	$(2, 3)_q$	$(3)_q$	$(3)_q$	1	
...	1	$(3)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	$(3)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	$(2)_q$	1	
$(2)_q$	$(2, 3)_q$	$(3)_q$	$(3)_q$	$(3)_q$	1		...
	$(3)_q$	$(2, 5)_q$	$(4)_q$	1	$(3)_q$		
1	$(4)_q$	$(2, 7)_q$	1	$(2)_q$...
	1	$(5)_q$	$(2)_q$	1	$(3)_q$		
	1	1	1	1	1	1	1

q-CCF を構成する試み

[例: $\alpha = \frac{5}{9}$ の場合] $[\frac{5}{9}]_q = [\frac{1}{2} \# \frac{4}{7}]_q = \frac{(1,4)_q}{(2,7)_q} = \frac{(1)_q + q(4)_q}{(2)_q + q(2,5)_q}$ に
 基づいて、 $ad - bc$ が q の冪となるように埋める (赤で記す)。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
...	$(2)_q$	q	1	q^4	$(5)_q$	q^4	$(2)_q$	q	1	q^2	
	$(3)_q$	q^2	1	q^3	$(4)_q$	q^3	$(2,7)_q$	q^5	1	q	$(2)_q$
...	1	q^2	$(3)_q$	q^2	$(2,5)_q$	q^4	$(4)_q$	q^3	1	q^2	
	1	q	$(2)_q$	q	$(2,3)_q$	q^3	$(3)_q$	q^2	$(3)_q$	q^2	1
...	1	q^2	$(3)_q$	q^2	$(2)_q$	q	$(2)_q$	q	$(2)_q$	q	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	1			
q^2	$(3)_q$	q^2	$(2)_q$	q	$(2)_q$	q	$(2)_q$	q	1		
$(2)_q$	q	$(2,3)_q$	q^3	$(3)_q$	q^2	$(3)_q$	q^2	1	q^3	...	
q^2	$(3)_q$	q^2	$(2,5)_q$	q^4	$(4)_q$	q^3	1	q^2	$(3)_q$		
1	q^3	$(4)_q$	q^3	$(2,7)_q$	q^5	1	q	$(2)_q$	q	...	
q	1	q^4	$(5)_q$	q^4	$(2)_q$	q	1	q^2	$(3)_q$		
1	1	1	1	1	1	1	1	1			

§7. 有理絡み目の正規化された Jones 多項式

絡み目図式の Kauffman ブラケット $\langle D \rangle$

Laurent 多項式環 $\Lambda := \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を考える。

絡み目図式 D に対して、 $\langle D \rangle \in \Lambda$ が次の規則により定まり、これを D の Kauffman ブラケット多項式と呼ぶ：

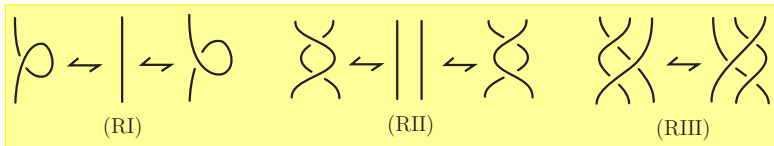
$\langle D \rangle$ に対する計算規則：

$$(KB1) \quad \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle.$$

$$(KB2) \quad \langle D \amalg \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle, \text{ 但し、} \delta = -A^2 - A^{-2}.$$

$\langle D \rangle$ の性質

Kauffman ブラケット多項式 $\langle D \rangle$ は正則イソトピー不変量、すなわち、Reidemeister 移動 (RII), (RIII) と平面のイソトピーの下で不変である。



他方、 $\langle D \rangle$ は (RI) の下では次のような変化を受ける:

$$\langle \text{loop} \rangle = -A^3 \langle \text{strand} \rangle, \quad \langle \text{strand} \rangle = -A^{-3} \langle \text{loop} \rangle \quad (*)$$

Jones 多項式 $V_L(t)$ [15]

Jones 多項式は $\mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ に値を持つ有向絡み目 L のイソトピー不変量であり、Kauffman ブラケット多項式から次のように計算することができる [16]。

$$V_L(t) = (-A^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \quad (9)$$

[15] V.F.R. Jones, *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras*, Bull. of A.M.S. 129 (1985), 103–112.

[16] L.H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology 26 (1987), 395–407.

同じ Jones 多項式を持つ有理絡み目の組と CCF の関係

t と t^{-1} の置き換えを除いて同じ Jones 多項式を持つ有理絡み目の組がいくつか知られている [17]。

$$\textcircled{1} \left\{ D\left(t\left(\frac{29}{49}\right)\right), D\left(t\left(\frac{36}{49}\right)\right) \right\} \quad \textcircled{2} \left\{ D\left(t\left(\frac{64}{147}\right)\right), D\left(t\left(\frac{104}{147}\right)\right) \right\}$$

それらの任意の組 $\{D(t(\alpha)), D(t(\beta))\}$ に対して、対応する CCF は次の共通の特徴を持つ：

- $N(\alpha) - N((ir)(\alpha)) = N(r(\alpha)) - N(i(\alpha)) = N(\beta) - N((ir)(\beta)) = N(r(\beta)) - N(i(\beta)) = \pm 2,$
- $N(\alpha) - N(r(\alpha)), N(\beta) - N(r(\beta)), D(\alpha) = D(\beta)$ は公約数を持つ。

ここで、 $N(\alpha), D(\alpha)$ はそれぞれ α の分子、分母である。

29	22	36	15	64	85	104	41
	49		49		147		147
27	20	34	13	62	83	106	43

[17] M. Hirasawa, Comments and data for our talks in the seminar “Knotting Nagoya 2018”, held at Nagoya Institute Technology.

正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$

有理数 α に対して、 $D(t(\alpha))$ の Jones 多項式 $V_\alpha(t) := V_{D(t(\alpha))}(t)$ を定数項が 1 となるように、次のように正規化することにより q に関する多項式 $J_\alpha(q)$ が得られる [18] :

$$J_\alpha(q) := \pm t^{-h} V_\alpha(t) |_{t=-q^{-1}} \quad (10)$$

但し、 $\pm t^{-h}$ は $V_\alpha(t)$ における最高次の項を表わす。

注意 34

Lee と Schiffler [18] は、偶連分数展開を用いることにより、正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$ からオリジナルの Jones 多項式 $V_\alpha(t)$ を復元することができることを示している。したがって、有理絡み目に対しては正規化しても情報は失われない。

[18] K. Lee and R. Schiffler, *Cluster algebras and Jones polynomials*, *Selecta Math.* (N.S.) 25 (2019), Paper No.58, 41pp.

Morier-Genoud と Ovsienko の公式

定理 35 (Morier-Genoud - Ovsienko [8; Proposition A.1])

有理数 $\alpha (> 1)$ に対して、正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$ は $N_q(\alpha + 1)$, $D_q(\alpha + 1)$ を用いて次のように計算される :

$$J_\alpha(q) = N_q(\alpha + 1) - qD_q(\alpha + 1). \quad (11)$$

$[\alpha + 1]_q = 1 + q[\alpha]_q$ より次を得る。

系 36

有理数 $\alpha (> 1)$ に対して、正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$ は次のように計算される :

$$J_\alpha(q) = qN_q(\alpha) + (1 - q)D_q(\alpha). \quad (12)$$

定理 30 と系 36 から次が示される :

定理 37

α, β を 1 より大きな有理数からなる Farey ネイバーとする。
 $\alpha \# \beta = [c_1, \dots, c_l]^-$ と書くとき、次の公式が成り立つ：

$$J_{\alpha \# \beta}(q) = J_{\alpha}(q) + q^{c_l - 1} J_{\beta}(q). \quad (13)$$

例 38

$$\frac{13}{4} = [4, 2, 2, 2]^- = [4, 2, 2, 1]^- \# [4, 2, 2]^- = 3 \# [4, 2, 2]^- \text{ より}$$
$$J_{\frac{13}{4}}(q) = J_3(q) + q J_{[4, 2, 2]^-}(q).$$

同様に、

$$J_{[4, 2, 2]^-}(q) = J_3(q) + q J_{[4, 2]^-}(q),$$

$$J_{[4, 2]^-}(q) = J_3(q) + q J_4(q)$$

であり、直接計算により、

$J_3(q) = 1 + q^2 + q^3$, $J_4(q) = 1 + q^2 + q^3 + q^4$ である。したがって、

$$J_{\frac{13}{4}}(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7.$$

補題 32 と定理 37 より、次を得る。

定理 39

α, β が 1 より大きな有理数からなる Farey ネイバーならば、

$$J_{\alpha \# \beta}(q) = J_{\alpha}(q) + q^{\left\lfloor \frac{N(\alpha)}{N(\beta)} \right\rfloor} J_{\beta}(q). \quad (14)$$

(解決したい直近の) 問題

- (1) $J_{\alpha}(q)$ を q -CCF, q -YAT から計算する方法を見つける。
- (2) $V_{\alpha}(t)$ の最高次の項を負連分数展開の言葉で記述する。

注：(1) について、例えば、

$$(2, 7)_q = J_{\frac{7}{2}}(q) + q(2)_q = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5.$$

問題

負連分数展開によるライズ公式の応用を見つけよ。

References

- [1] J. H. CONWAY AND H. S. M. COXETER, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94, 175–183.
- [2] H. S. M. COXETER, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.
- [3] A. BROCOT, *Calcul des rouages par approximation, Nouvelle méthode*, Revue chronométrique **3** (1861), 186–194.
- [4] M. A. STERN, *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **55** (1858), 193–220.
- [5] T. KOGISO AND M. WAKUI, *A bridge between Conway-Coxeter Friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, JKTR (2019), 1950083, (40 pages).
- [6] S. YAMADA, *Jones polynomial of two-bridge knots (2 橋結び目の Jones 多項式)*, in Japanese, in Proceedings of “結び目の諸問題と最近の成果”, 1996, pp. 92–96.
- [7] A. HATCHER AND U. ORTEL, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology **28** (1989), 453–480.
- [8] S. MORIER-GENOUD AND V. OVSIIENKO, *q -deformed rational and q -continued fractions*, Forum Math. Sigma **8** (2020), e13, 55pp.
- [9] J. H. CONWAY, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, in Proceedings of the conference on computational problems in abstract algebra held at Oxford 1967, (J. Leech ed.), Pergamon Press, 1970, 329–358.
- [10] P. CROMWELL, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.
- [11] F. BONAHON AND L. C. SIEBENMANN, *New geometric splittings of classical knots and the classification and symmetries of arborescent knots*, June 12, 2010.
- [12] H. SCHUBERT, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Zeit. **66** (1956), 133–170.
- [13] T. KOGISO AND M. WAKUI, *A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag-type by rational links*, arXiv2008.09364, to appear in OJM.
- [14] W. NAGAI AND Y. TERASHIMA, *Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials*, Adv. Math. **363** (2020), 106965, 37pp.
- [15] V. F. R. JONES, *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras*, Bull. of A.M.S. **129** (1985), 103–112.
- [16] L. H. KAUFFMAN, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.
- [17] M. HIRASAWA, Comments and data for our talks in the seminar “Knotting Nagoya 2018”, held at Nagoya Institute Technology.
- [18] K. LEE AND R. SCHIFFLER, *Cluster algebras and Jones polynomials*, Selecta Math. (N.S.) **25** (2019), Paper No.58, 41pp.