

# 結び目と連分数

—平成 28 年度金沢大学理工学域数物科学類

計算科学コース 4 年生および自然科学研究科博士前期課程大学院生のために—

2017 年 1 月 31 日

(2018 年 8 月 6 日 / 2023 年 10 月 24 日 / 2024 年 1 月 6 日・一部修正)

和久井 道久

このノートを感謝とともに、還暦を迎えられた

金信泰造先生、作間誠先生、中西康剛先生

にささげます。

# はじめに

このノートは2016年10月31日から11月4日にかけて、金沢大学角間キャンパスにて行われた計算科学特別講義のために作成したノートです。その特別講義は金沢大学の川越謙一先生のコーディネートにより実現されました。

特別講義の依頼を受けた時期、ちょうどKauffmanとLambropoulouの一連の研究 [50–53] (有理タングルや有理絡み目に関する様々な結果を初等的な手法で導いたもの) に興味を持ち、読み始めていた頃だったこともあり、講義のテーマを「結び目と連分数」にし、(非有向) 有理絡み目の入門と連分数の理論の入門を兼ねて彼らの仕事を解説させていただくことにしました。

特別講義のテーマには「結び目」という用語を採用しましたが、実際の主役はタングルです。タングルという言葉は馴染みがないかもしれません。タングルは英語でtangleと綴り、繊維などの「もつれ目」を意味します。トポロジーにおいて(2-)タングルは、球体の中に埋め込まれた端点のある2本のひもといくつかの閉じたひもからなり、2本のひもの4つの端点が球面上にあるものを指します。このタングルの概念はConway [10] により導入されました。Conwayは絡み目を交点数の低いものから決定するために、絡み目を表現するための「適切な記法」としてこのような概念を考えたようです。実際、彼はその記法を利用して11交点数以下の結び目と10交点数以下の絡み目を決定しています。

タングルの中には有理数(に $\infty$ を加えたもの)と1対1に対応する有理タングルと呼ばれるクラスがあり、その4つの端点を2つずつ組にして閉じることによって得られる絡み目は有理絡み目と呼ばれます。有理絡み目は別の文脈では2(本)橋絡み目という名前で登場し、結び目・絡み目の主要なクラスの1つとして古くからよく研究されています。

講義はConwayのスクエア・ダンスの説明から始めました。これは2本のロープを使って4人(+1人?)で遊ぶゲームで、有理タングルを理解するための導入として最適のように思います。次に、結び目・絡み目やタングルの定義と扱い方、連分数(特に、有理数の連分数展開)の理論と有理タングルのさまざまな表示方法、Conwayによる有理タングルの分類結果の有理タングルの連分数表示と整数彩色に基づいたKauffmanとLambropoulouによる証明を順に紹介し、タングルのKauffmanブラケットを経てKrebes不変量を導入し、その計算方法と有用性を説明しました。次に、Schubertによる有理絡み目の分類定理を回文連分数との関係を交えて説明し、近年大きな注目を浴びるようになったDNAトポロジーへの応用、カイラリティ問題への応用を述べて終了しました。少し盛りだくさんだったことと時間的制約のために、講義では証明の詳細や例などが十分に説明できなかった箇所もあります。そういった部分に関してはこのノートで補っていただけましたら幸いです。このノートがまた、上記の内容に興味のある方に何らかの形で役に立ってくれたならと思います。

川越謙一先生には宿の選定・予約など準備の段階から相談にのってもらい、金沢滞在中は講義と生活の両面で暖かいサポートと歓待を受けました。また、思いがけない出来事でしたが、門

上晃久先生、牛島顕先生、そして、福井商業高校で教諭を務められ、現在門上先生のもとで連分数を研究されている山田泰久先生に拙話を聴いていただくことができました。短い期間でしたが交流をもつことができたことはとても嬉しい思い出です。熱心にノートを取りながら聴いてくれた、金沢大学計算科学コース4年生と自然科学研究科博士前期課程大学院生の諸氏の姿も印象深く思い出されます。おかげさまで充実したひと時を過ごすことができました。ここに記して深く感謝申し上げます。

ノートの公開に先立ち、門上先生から定理 8-11 の注意に関して有益なコメントをいただきました。深く感謝申し上げます。

著者しるす

2017年1月

付記：2022年の秋に入り大阪大学の金英子先生から、この講義ノートを修士の富田誠さんが読んで、楽しく勉強してくださっているとの連絡がありました。その後、何回かこのノートに関する問い合わせ・ご質問をいただいたことで、気がついた誤植を修正し、説明不足な箇所を直すことができました。特に、定理 3-18 の証明における II, IV および定理 A-12 の証明については、誤りをご指摘いただいただけでなく、正しい証明を考えてくださいました。熱心にそして丁寧に読んでくださった富田誠さん、金英子先生に心より感謝申し上げます。

2023年10月

付記2：2023年12月に、近畿大学の鄭仁大先生から email が届き、このノートを卒研ゼミで学部4年生と楽しく読ませて頂きました、とのメッセージとともに、読んでいる中で気がついたことを知らせてくださいました。特に、命題 3-6(2) の主張は足りないのではないかとということと、97 ページの Krebs 不変量の表の値がいくつか正しくないものがあるということをご指摘いただきました。表の値については、Krebs 不変量  $\Psi(t)$  の値を卒研ゼミ生が手計算で確認してくださったということです。 $\Psi(t)$  の値を含め、ご指摘いただいた箇所を検証した上で、修正させていただきました。さらに、鄭先生との email でのやりとりの中で、旧バージョンの第 6.3 節と第 6.4 節における「Krebs 不変量は、交点数が 7 以下の素な 2-タングルに対して完全な不変量である」という主張は不正確であることに気がつきましたので、合わせて修正しています。

このノートに関するたくさんの貴重なコメントをくださった鄭仁大先生、ならびに、楽しみながら熱心に読んでくださった鄭先生の卒研ゼミ生の要佳導、濱田絢風、浦田佳穂、高橋優太、竹上あかりの諸氏に深く感謝を申し上げます。

2024年1月

# も く じ

§1. 序論 –Conway のスクエア・ダンス–	7
§2. 有理数の連分数展開	18
§3. 有理タングルの定義とその表示	30
§4. 有理タングルの分類	55
§5. タングルの Kauffman のブラケット	68
§6. タングルの Krebs 不変量	81
§7. 回文と有理絡み目の分類	99
§8. DNA トポロジー、カイラリティ問題への応用	110
Appendix A. Jones 多項式の特異値と絡み目の行列式と Fox 彩色	123
Appendix B. 無理数の連分数展開と無限タングル	136
Appendix C. Tait のフライプ定理について	145
参考文献	154
索引	159

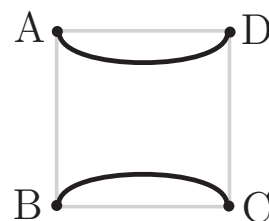


## §1. 序論—Conway のスクエア・ダンス—

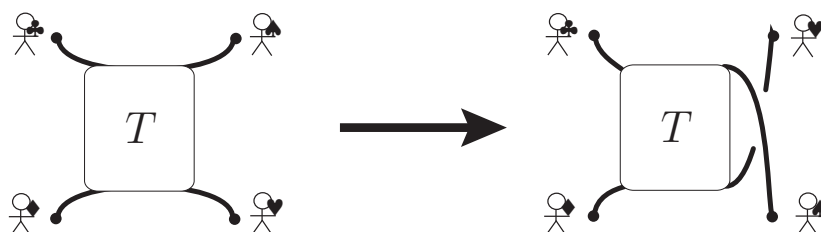
ここではまず、有理タングルの導入として、スクエア・ダンスと呼ばれている Conway が考案したゲームを紹介する [20, 103]。次に、この講義の主テーマである結び目・絡み目およびタングルの厳密な定義とそれらの図式を通じた扱い方を説明する。

### ● 1-1 : Conway のスクエア・ダンス

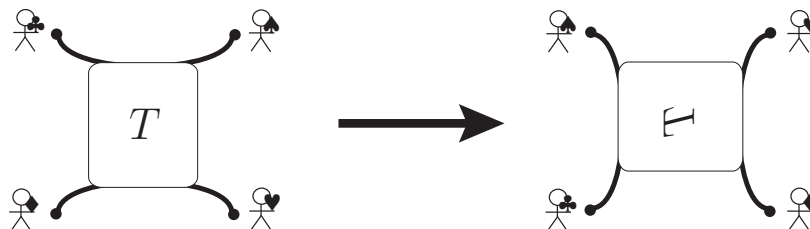
Conway のスクエア・ダンス (*square dance*) と呼ばれるゲームは 4 人が正方形の頂点の位置に立ち、2 本のロープを 2 人 1 組で握って行われる。正方形の頂点の位置を図のように A, B, C, D としておく。初期状態として、A と D の位置に立っている人同士と B と C の位置に立っている人同士が 2 本のロープを平行に握っているところから初めて、次のルール [ツイスト] と [回転] に従ってダンスを踊る。



**[ツイスト]** C と D にいる人が場所を入れ替わる。その際、D にいる人はロープを上を持ち上げて C の場所に移動し、C にいる人はロープを下に下ろして D の場所に移動する。つまり、D の人が持っているロープが C の人が持っているロープの上を通過するように、場所を入れ替わる。

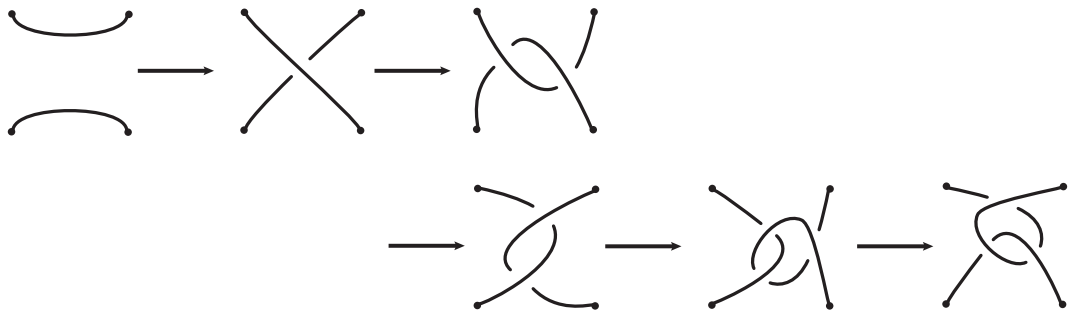


**[回転]** 4 人全員がそれぞれの位置からロープを持ったまま、反時計回りに  $90^\circ$  回転して移動する。



このルールの下でダンスを続けて、任意の回数で止める。すると、ロープが絡んだ状態になる。このようにして得られるタングルは有理タングルと呼ばれる。

さて、ロープが絡んだ状態から再び上のルールでツイストと回転を繰り返し、もとの絡んでいない状態に戻すことができるだろうか？ この問題の解を見つけよというのが Conway のスクエア・ダンスというゲームである。



ツイストを行ったときに T、回転を行ったときに R と記すことにより、行ったスクエア・ダンスを記号で表現することができる。例えば、上記の (最初に 2 回ツイストしてから回転し、ツイストして回転した) 場合、TTRTR のように表記する。

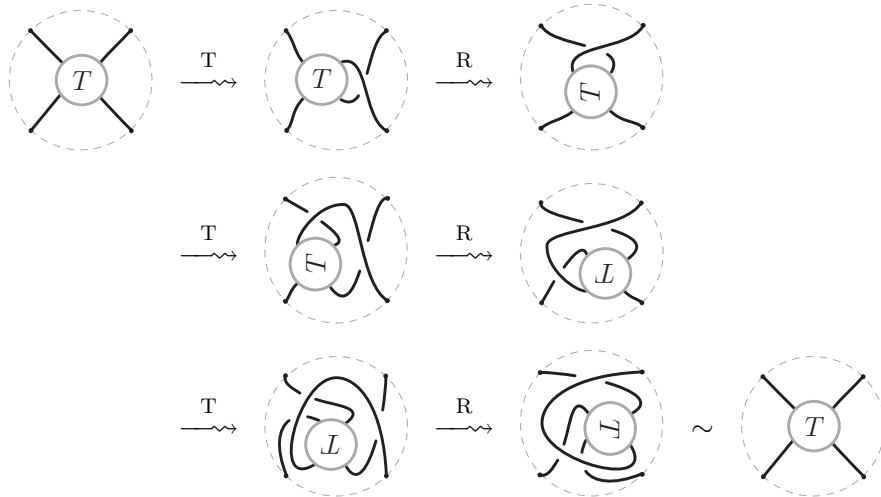
**補題 1-1**

任意の 2-タングル  $t$  に対して、ツイスト T を行ってから回転 R を行う操作を 3 回繰り返すと、もとのタングル  $t$  が得られる：

$$(R \circ T)^3(t) = t.$$

**(証明)**

次図のように変形されることから、補題は証明される。



□

Conway のスクエア・ダンスが解ける理由を Kauffman と Lambropoulou [52; Section 6] に習って説明しよう。

行列式が 1 であるような整数係数の 2 次正方行列の全体を  $SL(2, \mathbb{Z})$  で表わす： $SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$  とおく。これは行列の積に関して群をなす。 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}$  に対して  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  の元を

$$[\mathbf{v}] := \frac{p}{q}$$



により定義する ( $q=0$  のときは  $\frac{p}{q} = \infty$  と解釈する)。  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  に対して、

$$[Av] = \frac{ap + bq}{cp + dq}$$

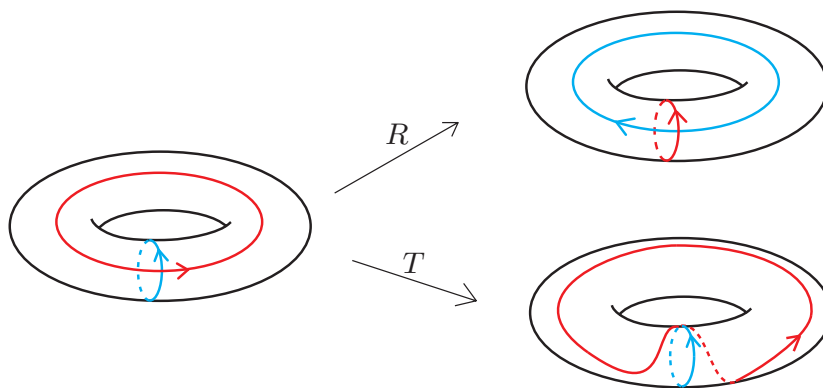
となる。次のように定義される  $R, T \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  を考える。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R$  は  $90^\circ$ -回転行列であるが、これらの行列は  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ( $\subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ ) 上の向きを保つ同相写像

$$R(z, w) = (\bar{w}, z), \quad T(z, w) = (zw, w), \quad (z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

と対応している (次図参照)。ここで  $\mathbb{S}^1$  を絶対値が 1 の複素数からなる集合とみなしている。



さて、任意の  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  をとる。  $p, q$  が互いに素 ( $q=0$  のときは  $p=1$ ) とすると、

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  が存在する。今、任意の  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 - \{\mathbf{0}\}$  に対して

$$[R\mathbf{v}] = -\frac{1}{[v]}, \quad [T\mathbf{v}] = [v] + 1$$

であることがわかる。  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  上の写像  $\underline{R}, \underline{T}$  を

$$\underline{R}(x) = -\frac{1}{x}, \quad \underline{T}(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$$

と定める。  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は上記の  $R$  と  $T$  によって生成されるから、  $A$  を  $R, R^{-1}, T, T^{-1}$  の有限個の積で表示することができる。  $A = X_1 \cdots X_k$  ( $X_i \in \{R, R^{-1}, T, T^{-1}\}$ ) と書くと、

$$0 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] = (\underline{X}_1 \circ \cdots \circ \underline{X}_k) \left( \left[ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] \right)$$

となる。  $\underline{R}^{-1} = \underline{R}^3$ ,  $\underline{T}^{-1} = \underline{RTRTR}$  であるから、 Conway のスクエア・ダンスは解くことができる。

**演習.** (1)  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は行列の積に関して群をなすことを示せ。

(2)  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  によって生成されることを示せ。

ヒント：(2)  $a, c, q, r \in \mathbb{Z}$  が  $a = qc + r$  を満たすとき、 $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mp q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \pm c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \mp r \end{pmatrix}$  (複号同順) が成立する。このこととユークリッドの互除法を使い、 $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  に左から  $R, R^{-1}, T, T^{-1}$  を有限回適当に掛けると、 $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  という形になることがわかる。

Conway のスクエア・ダンスは必ず解けることがわかったが、実際に解くにはどうすればよいだろうか。そのアルゴリズムは次のように与えられる [20, 103]。ツイストを行ったか回転を行ったかに応じて有理数に対する次の 2 種類の操作を考える。

(SQD1) ツイストを行った場合、有理数に 1 を加える。すなわち、有理数に  $\underline{T}$  を作用させて新しい有理数を作る。

(SQD2) 回転を行った場合、有理数  $x$  から有理数  $-\frac{1}{x}$  を作る。すなわち、有理数に  $\underline{R}$  を作用させて新しい有理数を作る。

$0 \in \mathbb{Q}$  から始めてこの操作をスクエア・ダンスで最後に得られた状態まで行くと、1 つの有理数が得られる。

- その有理数が負の場合、ツイストを 1 回行い、対応する有理数に 1 を加えて新しい有理数を作る。
- その有理数が正の場合、回転を 1 回行い、対応する有理数に (SQD2) の操作を行い新しい有理数を作る。
- その有理数が 0 の場合、何も行わない (すでにもつれは解消されている)。

これを繰り返して行くと、最後には 0 の有理数となり、最初の状態に戻ることがわかる。

**例 1-2** TTRTR の場合、

$$0 \xrightarrow{\underline{T}} 1 \xrightarrow{\underline{T}} 2 \xrightarrow{\underline{R}} -\frac{1}{2} \xrightarrow{\underline{T}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\underline{R}} -2$$

となる。したがって、TT を行えば最初の状態に戻る (これは直接確かめることができる)。

**問.** その理由を考察せよ。

**答.** 有理数が 1 以上の正の数の場合、アルゴリズムに従って  $\underline{R}$  を作用させて  $-1$  以上の負の有理数にする。有理数が 0 と 1 の間にある場合には、アルゴリズムに従って  $\underline{R}$  を作用させて  $-1$  よりも小さな負の有理数にし、適当な回数  $\underline{T}$  を作用させて  $-1$  よりも大きい負の有理数にする。よって、始めに与えられた有理数は  $-1$  以上 0 未満の負の有理数としてよい。その有理数を

$$x := -\frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}, p \leq q)$$

と表わす。アルゴリズムに従って  $r$  に  $\underline{T}$  を施すと、

$$x_1 := \frac{q-p}{q}$$

が得られる。 $p = q$  なら  $x_1 = 0$  であるからここで完了である。 $p < q$  なら  $x_1$  は正の有理数である。アルゴリズムに従って、 $x_1$  に  $\underline{R}$  を施すと、

$$x_2 := -\frac{q}{q-p}$$

が得られる。これは負の有理数だから  $\underline{T}$  を何回か施して

$$x_3 := -\frac{r}{q-p} \quad (r \in \mathbb{N}, r \leq q-p)$$

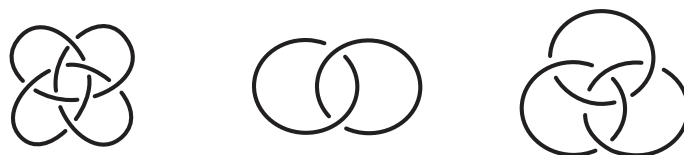
を作る (アルゴリズムに従うと 0 以上になるまで  $\underline{T}$  を施すことになるが、一旦 1 つ手前で止めておく)。  $x$  と  $x_3$  の分母を比較すると、 $x_3$  の分母の方が確実に小さい。したがって、先に述べたアルゴリズムを繰り返していけば、最後には分母が 1 の状態になる。つまり、負の整数になる。よって、アルゴリズムに従い、 $\underline{T}$  を繰り返し適用して 0 にすることができる。  $\square$

**演習.**  $n$  回ツイストを行って得られた有理タングルを、Conway のスクエア・ダンスによってもとの状態に戻す方法を与えて、実際にその方法でもとの状態に戻せることを、 $n$  が 1, 2, 3 の場合にその様子を図に描け。

### ● 1-2 : 結び目・絡み目とは

数学としての結び目については、啓蒙書や大学の公開講座などを通して知っている人も多いであろう。数学における結び目とは、1 本のひもにいろいろな形の「結び目」を作ってその両端を閉じて輪にしたものをいう。いくつかの結び目が絡んだものは絡み目と呼ばれる。トポロジーでは連続変形によって (すなわち、ひもを切らずに、もつれをほぐしたり、その逆を行って) 移り合うことのできる 2 つの結び目・絡み目は同じ結び目・絡み目と考える。ここでは、これらの概念を説明する。

結び目と絡み目の正確な定義を述べよう。自然数  $m$  に対して  $m$  個の単位円周  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  の  $\mathbb{R}^3$  への埋め込みの像を  $m$ -成分絡み目 (link) という。  $m$  を絡み目の成分数といい、各連結成分を単にその絡み目の成分 (component) と呼ぶ。1-成分絡み目を結び目 (knot) という。絡み目  $L$  の成分数を  $\#L$  で表わす。下図に描かれている 3 つの絡み目のうち、一番左のものは 4 葉結び目であり、中央はホップ絡み目 (Hopf link)、一番右のものはボロミアン環 (Borromean rings) と呼ばれる絡み目である。

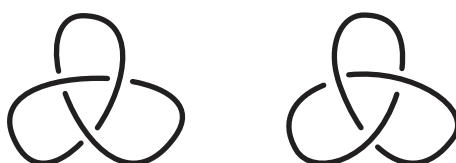


絡み目は、それが有限個の線分を繋いでできているとき、折れ線絡み目 (polygonal link) と呼ばれる。この講義では、単に絡み目と呼ばば、折れ線絡み目を指すものと約束する。但し、それを図示するときには多くの場合、滑らかな曲線で表わす。

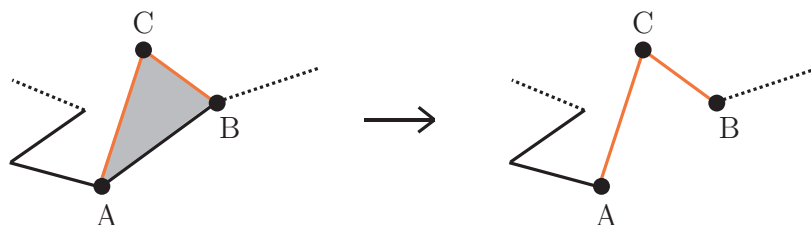
絡み目  $L$  の各成分  $L_i$  に、(多様体としての) 向きが指定されたものを**向きづけられた絡み目** (*oriented link*) と呼ぶ。 $L_i$  の向きは  $f_i(S^1) = L_i$  となる埋め込み  $f_i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって指定することができるが、図示するときには辺に矢印を付けて表わす。

結び目理論においては、次の問題は基本的である。

**結び目理論における基本問題** 2つの結び目  $K_1$  と  $K_2$  が与えられたとき、それらが  $\mathbb{R}^3$  において連続変形で移り合うか否かを判定する方法を見つけよ。例えば、次の2つの結び目(どちらも三葉結び目と呼ばれる)は  $\mathbb{R}^3$  内における連続変形で移り合うだろうか？



連続変形で移り合うことの意味を精密に述べよう。 $L$  を  $m$ -成分絡み目とする。 $L$  のある連結成分上の一辺  $AB$  をとる。空間内に点  $C$  を、三角形  $\triangle ABC$  と  $L$  とが辺  $AB$  のみで交わるようにとる。このとき、 $L$  における辺  $AB$  を2辺  $AC \cup CB$  で置き換えることにより、 $m$ -成分絡み目  $L'$  が得られる。このように  $L$  から  $L'$  を作る操作、または、逆に  $L'$  から  $L$  を作る操作を絡み目に対する**初等変形**と呼ぶ。



$m$ -成分絡み目  $L_1, L_2$  が**同値** (*equivalent*) あるいは**アンビエント・イソトピック** (*ambient isotopic*) であるとは、有限回の初等変形、および、絡み目の辺への中間点の追加・削除を行って、 $L_1$  から  $L_2$  へ変形することができることをいう。向きづけられた  $m$ -成分絡み目  $L_1, L_2$  に対しても、同様にして、同値であるということ定義する。今度は、初等変形や辺への中間点の追加・削除を行う際に、その前後で変化を受けない部分の向きが同じとなるように、各成分に向きを入れながらこれらの変形を行う。

任意の絡み目  $L \subset \mathbb{R}^3$  は、必要ならば適当に有限回初等変形を行うと、射影  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, z) = (y, z)$  に関して次を満たすようにすることができる：

- (LD1)  $L$  の各辺は  $\pi$  によって  $\mathbb{R}^2$  の辺に写される。
- (LD2)  $L$  の相異なる2つの辺の  $\pi$  による像は高々1点で交わる。
- (LD3)  $L$  の端点を共有しない2つ辺が  $\pi$  による像において共有点を持つときには、その共有点は端点以外の点であって、一方の端点他方の像上にあることはない(この状況を2つの辺の像は横断的に交わると言い表わす)。

(LD4)  $L$  の相異なる 3 つの辺の  $\pi$  による像が 1 点を共有することはない (すなわち、 $\pi(L)$  は 3 重点を持たない)。

$L$  が  $\mathbb{R}^3$  の中において上の条件を満たす位置にあるとき、 $L$  を図式を使って表示することができる。ここで、 $L$  の**図式** (*diagram*) とは、(LD1), ..., (LD4) を満たすように初等変形を施した後の  $L'$  の射影図  $D = \pi(L')$  であって、その各交点に対して、交わっている 2 本の線分のうちどちらが  $z$ -軸に関して上にあつて、どちらが下にあるか、という「上下の」情報を付けたもののことをいう。この情報を図では、次図のように、線分に小さな切れ目を入れて表現する。



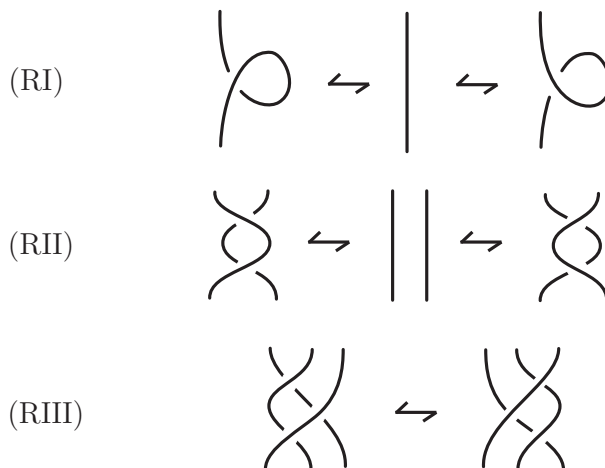
一般に、平面上に描かれたこのような図を**絡み目図式** (*link diagram*) と呼ぶ。

$L$  に向きが与えられていれば、 $L$  の図式の各成分にも向きが与えられる。すなわち、各成分に向きの情報 (これを矢印で表わす) が付与された絡み目図式が得られる。これを**向きづけられた絡み目図式** (*oriented link diagram*) と呼ぶ。

(向きづけられた) 絡み目図式があれば、それをもとに  $\mathbb{R}^3$  内の (向きづけられた) 絡み目を復元することができる。

### ● 1-3 : 絡み目図式の Reidemeister 移動

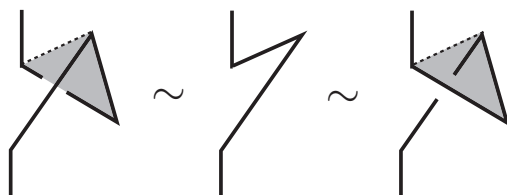
3 次元空間  $\mathbb{R}^3$  内の絡み目は、絡み目図式という平面上に描かれた図を使って表示することができるので、絡み目を絡み目図式を通して研究することができる。しかし、射影  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, z) = (y, z)$  に関して条件 (LD1), ..., (LD4) を満たすような位置への変形の仕方は一通りではないし、その結果得られる図式も 1 つには定まらない。つまり、異なった絡み目図式が同値な絡み目を表わすことがある。では、どんなときに 2 つの絡み目図式は同値な絡み目を表わすのであろうか。その答えはすでに 1930 年頃、Reidemeister によって与えられている。その結果を紹介する。



2つの絡み目図式が、前図に描かれている矢印の左側の部分と右側の部分だけが異なっており、それ以外の部分は同一であるとする(絡み目図式が向きづけられているときには、移動の前後で対応する成分の向きが同じになるものだけを考える)。

すると、このような2つの絡み目図式は同値な絡み目を表わすことが次の図のようにしてわかる。

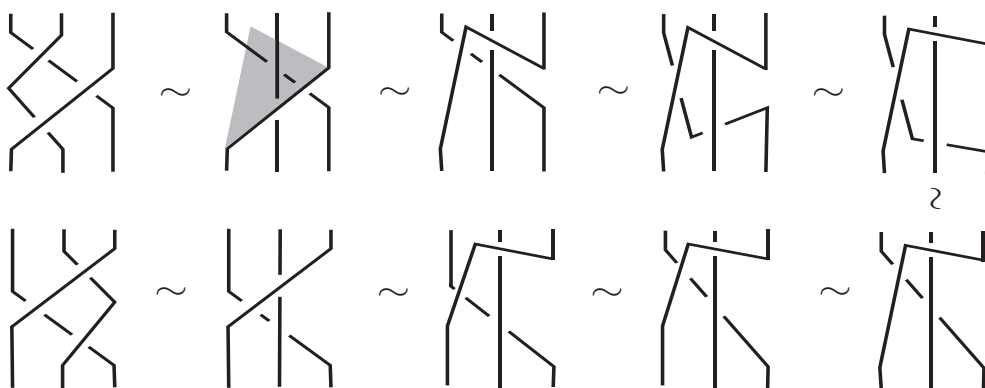
(RI) :



(RII) :



(RIII) :



絡み目図式に (RI),(RII),(RIII) のいずれかを施して、新しい絡み目図式を作る操作のことを **Reidemeister 移動** (*Reidemeister move*) という。同値な絡み目を表わす図式の変形は、Reidemeister 移動の他に **平面のイソトピー** と呼ばれる移動もある。これは、(向きづけられた)絡み目図式に対する以下の操作のことをいう。

- (i)  $\mathbb{R}^2$  に含まれる三角形による初等変形。
- (ii) 辺の中間点の追加、削除。
- (iii)  $\mathbb{R}^2$  に含まれる三角形  $\triangle ABC$  が  $(\triangle ABC) \cap D = AB \cup MN$  (但し、 $M$  は線分  $AB$  上にあり、 $N$  は  $BC \cup AC$  上にあり、 $A, B, C$  ではない) を満たすとき、 $D$  の中の辺  $AB$  を  $AC \cup BC$  で置き換える。但し、新交点  $N$  における上下の情報は  $M$  のものと同一とする。



$D$  が向きづけられているときには、上記の操作の下で、その前後で変化を受けない部分の向きが同一となるように、新たに得られる絡み目図式に向きを入れる。上記の3種類の操作を有限回繰り返して、(向きづけられた) 絡み目図式  $D$  から (向きづけられた) 絡み目図式  $D'$  が得られるとき、(向きづけられた) 2つの絡み目図式  $D, D'$  は平面のイソトピーで移り合うと呼ばれる。

次の結果は古典的である。

**定理 1-3 (Reidemeister [86, 87])**

$L, L'$  を  $\mathbb{R}^3$  内の (向きづけられた) 絡み目とし、 $D, D'$  をそれぞれ  $L, L'$  の (向きづけられた) 絡み目図式とする。このとき、 $L$  と  $L'$  が同値であるための必要十分条件は、 $D'$  が  $D$  から Reidemeister 移動 (RI),(RII),(RIII) と平面のイソトピーを有限回施すことによって得られることである。

● 1-4 : タングルとその図式

今後、 $\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^n$  はそれぞれ  $n$  次元標準球体 (standard ball)、 $n$  次元標準球面 (standard sphere) を表わす：

$$\mathbb{B}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \},$$

$$\mathbb{S}^n = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 \}.$$

$\mathbb{B}^2$  は  $\mathbb{D}^2$  と表わし、(2次元) 円板 (disk) と呼ぶことがある。 $\mathbb{B}^n$  に同相な位相空間を  $n$  次元 (位相) 球体、 $\mathbb{S}^n$  に同相な位相空間を  $n$  次元 (位相) 球面と呼ぶ。

$\mathbb{S}^n$  の部分集合  $\mathbb{S}_\pm^n$  および  $\mathbb{S}_0^n$  を次で定義する：

$$\mathbb{S}_+^n = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > 0 \},$$

$$\mathbb{S}_-^n = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} < 0 \},$$

$$\mathbb{S}_0^n = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} = 0 \}.$$

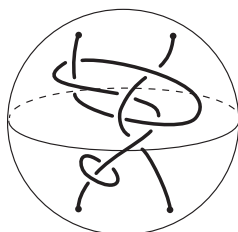
$B$  を 3次元球体とすると、同相写像  $\phi: \mathbb{B}^3 \rightarrow B$  が存在するので、これを用いて、その表面  $\partial B = \phi(\mathbb{S}^2)$  を  $\mathbb{S}_+^2, \mathbb{S}_-^2, \mathbb{S}_0^2$  に対応する3つの部分空間に分けることができる。これらの部分空間をそれぞれ  $\partial B_+, \partial B_-, \partial B_0$  によって表わす。今後、特に断らない限り、3次元球体の表面は、3つの部分空間  $\partial B_+, \partial B_-, \partial B_0$  に分けられているものとする。これらを順に、 $B$  の上半球面、下半球面、赤道と呼ぶ。

$n$  を自然数とする。 $n$ -タングル (tangle) とは、3次元球体  $B$  と  $B$  に固有に埋め込まれた1次元多様体  $t$  との組  $(B, t)$  であって、以下の2条件を満たすもののことをいう。(注：文献に

よって「タングル」という用語は後述の「タングル図式」の意味で使われることがある。[50]でもその意味で使われている。)

$$(Tang1) \partial t \subset \partial B, t \cap \partial B = \partial t.$$

$$(Tang2) \#(\partial t \cap \partial B_{\pm}) = n, \partial t \cap S_0^2 = \emptyset.$$



ここで、3次元球体  $B$  に固有に埋め込まれているという条件は、1次元多様体  $t$  の境界が  $\partial B$  に垂直に接続していることを意味している。

タングルも絡み目と同様に有限個の線分を繋いだ折れ線でできているものとするが、それを図示するときには滑らかな曲線で表示する。

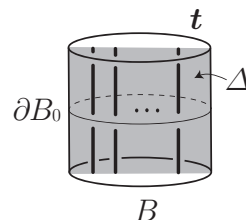
同じ3次元球体  $B$  中の2つの  $n$ -タングル  $(B, s), (B, t)$  が**同値** (equivalent) であるとは、 $\partial s = \partial t$  であって、かつ、 $(B, s)$  から  $(B, t)$  への境界上の各点を固定するアンビエント・イソトピーが存在するときをいう。このとき、 $(B, s) \sim (B, t)$  あるいは  $s \sim t$  と書く。

$n$ -タングル  $(B, t)$  が**自明** (trivial) であるとは、次の条件を満たす2次元円板 (= 2次元球体)  $\Delta \subset B$  が存在するときをいう：

(TT1)  $\Delta \cap \partial B = \partial \Delta$  かつ  $\partial \Delta$  は  $\partial B_0$  と2点で横断的に交わる、

(TT2)  $t \subset \Delta$  かつ  $\partial t = (\partial \Delta) \cap t$ ,

(TT3)  $t$  の各連結成分  $t_i$  について  $\#(\partial t_i \cap \partial B_{\pm}) = 1$ .



$B$  を3次元球体とする。 $\Delta \subset B$  を(TT1)を満たす2次元円板とし、連続な全射  $q: B \rightarrow \Delta$  を同相  $(B, \partial B_+, \partial B_-, \Delta) \cong (\mathbb{B}^3, S_+^2, S_-^2, \{0\} \times \mathbb{D}^2)$  を通して見たときに、丁度射影  $(x, y, z) \mapsto (y, z)$  に一致するものとする。このとき、 $n$ -タングル  $(B, t)$  が  $\Delta$  に関して**正則な位置** (regular position) にあるとは、次の条件を満たすときをいう。

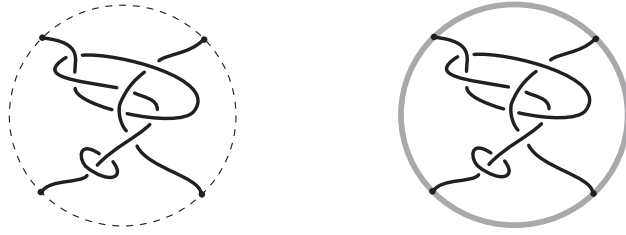
(RP1)  $\partial t \cap \partial B_{\pm}$  は  $\partial \Delta \cap \partial B_{\pm}$  上の  $n$  点集合である。

(RP2)  $q(t)$  は高々有限個の2重点をもち、3重点以上を持たない。さらに、各2重点においては2曲線が横断的に交わる。

この状況のとき、 $n$ -タングル  $(B, t)$  を  $\Delta = \{0\} \times \mathbb{D}^2$  上の図式 (= 射影図 + 各交点での上下の情報) として表わすことができる ((Tang1)により、 $\partial t$  は  $\{0\} \times S^1$  上にあることに注意)。この図式を **$n$ -タングル図式** (tangle diagram) と呼ぶ。タングルを図式を使って表現する際、 $\Delta$  の境界は描かないこともあるが、描く場合には破線もしくはグレーの実線で描くことにする。

定理1-3と同様に端点が共通であるような2つの  $n$ -タングルが同値か否かはそれらの図式が Reidemeister 移動 (RI),(RII),(RIII) と平面のイソトピーの有限回で移り合うか否かにより決





まる。但し、ここでの Reidemeister 移動 (RI),(RII),(RIII) と平面のイソトピーは、タングル図式が描かれている 2 次元円板  $\Delta$  の内部でのみ行うものとする。

**定理 1-4 (Reidemeister)**

$t, t'$  を 3 次元球体  $B$  内の  $\partial t = \partial t'$  を満たす  $n$ -タングルとし、 $D, D'$  をそれぞれ 2 次元円板  $\Delta$  上の  $t, t'$  のタングル図式とする。このとき、 $t$  と  $t'$  が同値であるための必要十分条件は、 $D'$  が  $D$  から  $\Delta$  の内部で Reidemeister 移動 (RI),(RII),(RIII) と平面のイソトピーを有限回施すことによって得られることである。

## §2. 有理数の連分数展開

この節では有理数の連分数展開について解説する。連分数展開については [35, 47, 63, 92, 102] 等に詳しい説明がある。この他一般向けの入門書として、連分数の発見から応用までを平易な文体で魅力的に語った [60] がある。

### ● 2-1 : 実数の連分数展開

実数列  $a_1, \dots, a_n$  から作られる次の形の「分数式」を (正則) **連分数** (*continued fraction*) と呼ぶ：

$$(2.1) \quad a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

これを

$$(2.2) \quad [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

と表わす。但し、 $a_1, \dots, a_n$  を勝手にとると、途中の

$$[a_k, a_{k+1}, \dots, a_n] = a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

が実数として 0 の値になる可能性がある。そのため、形式的に記号  $\infty$  を用意し、次の計算規則を導入する：任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$(2.3) \quad a + \infty = \infty = \infty + a, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

すると、連分数  $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$  は  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  と  $a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  に対して意味を持ち、値は実数か  $\infty$  となる。

**例 2-1** 例えば、任意の  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} [a] &= a, \\ [a, 0] &= a + \frac{1}{0} = a + \infty = \infty, \\ [a, \infty] &= a + \frac{1}{\infty} = a + 0 = a, \\ [a, 0, b] &= a + \frac{1}{0 + \frac{1}{b}} = a + b = [a + b] \end{aligned}$$

$$[a, b, 0] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{0}} = a + \frac{1}{b + \infty} = a + \frac{1}{\infty} = a + 0 = a,$$

$$[a, b, \infty] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\infty}} = a + \frac{1}{b + 0} = a + \frac{1}{b} = \begin{cases} \frac{ab+1}{b} & (b \neq 0), \\ \infty & (b = 0) \end{cases}$$

であり、任意の  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  および任意の  $i \in \{2, \dots, n\}$  に対して

$$(2.4) \quad [a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, [a_i, \dots, a_n]]$$

が成立する。一般に、 $a_1, \dots, a_{n-1}$  の中に 0 が含まれているとき、例えば、 $a_i = 0$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) のとき、

$$(2.5) \quad \begin{aligned} [a_1, a_2, \dots, a_n] &= [a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, [a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n]] \\ &= [a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, [a_{i-1} + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n]] \\ &= [a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n] \end{aligned}$$

が成り立つ。

## 定義 2-2

(1)  $\alpha \in \mathbb{R}$  とし、 $n \in \mathbb{N}$  とする。

$$(2.6) \quad \alpha = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n] \quad (a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}, \alpha_n \in \mathbb{R})$$

と表わされるとき、この表示を  $\alpha$  の **( $n-1$ ) 次連分数表示** と呼ぶ。さらに、(2.6) において

- (i)  $a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $\alpha_n > 1$  (但し、 $n \geq 2$  のとき).

であるとき、その表示を  $\alpha$  の **( $n-1$ ) 次連分数展開** と呼ぶ。

(2)  $\alpha \in \mathbb{R}$  が **有限連分数展開可能** であるとは、ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\alpha$  が

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (a_1 \in \mathbb{Z}, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ のとき } a_n > 1)$$

と表わされるときをいう。このとき、この表示を  $\alpha$  の **(有限) 連分数展開** と呼ぶ。

(3)  $\alpha \in \mathbb{Q}$  とする。ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\alpha$  が (2.6) のように表わされ、かつ、 $\alpha_n \in \mathbb{Z}$  であるとき、その表示を  $\alpha$  の **連分数表示** と呼ぶ。

**例 2-3** (1)  $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1, 2, 3]$  より、 $\frac{10}{7} = [1, 2, 3]$  は  $\frac{10}{7}$  の連分数

展開である。

(2)  $\omega := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (黄金比) の  $(n-1)$  次連分数展開は  $\omega = [1, 1, \dots, 1, \alpha]$  ( $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ ) の形になる。

(証明)

まず、 $\omega = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  と書けるから、 $\omega = 1 + \frac{1}{\alpha}$  と表わされる。 $\omega$  の 1 次連分数展開は  $\omega = [1, \alpha]$  となる。

次に、

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\omega}$$

と書けるから、

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}$$

と表わされる。よって、 $\omega$  の 2 次連分数展開は  $\omega = [1, 1, \alpha]$  となる。以下同様にして、

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}}}}}$$

と表わされることがわかるので、 $\omega$  の  $(n-1)$  次連分数展開は  $\omega = [1, 1, \dots, 1, \alpha]$  となる。□

**注意：**無理数を小数表示しても小数点以下の数字に規則性を見い出すことは難しいが、連分数展開を行うと (2) によく現れる数字が規則的となることがある。無理数の連分数展開については Appendix B で補足説明する。

**演習.**  $\sqrt{3}$  の  $(n-1)$  次連分数展開を求めよ。

## ● 2-2：有理数の連分数展開

任意の有理数は有限連分数展開可能であることがユークリッドの互除法からわかる。すなわち、

### 命題 2-4

$\alpha \in \mathbb{R}$  について

$$\alpha \in \mathbb{Q} \iff \alpha \text{ は有限連分数展開可能である}$$

(証明)

$\Leftarrow$  は自明なので  $\Rightarrow$  を示す。

$\alpha$  を有理数とする。

I.  $\alpha$  が整数のとき：

$\alpha = [\alpha]$  と表わされる。

II.  $\alpha$  が整数でない有理数のとき：

$\alpha = \frac{m}{n}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) と書く。除法の原理より、

$$m = q_1 n + r_1 \quad (0 \leq r_1 < n)$$

を満たす整数  $q_1, r_1$  が存在する。 $\alpha$  は整数でないから  $r_1 \neq 0$  すなわち  $0 < r_1 < n$  である。以下、除法の原理を繰り返し用いて、ある自然数  $n$  と次の等式と不等式を満たす整数の有限列

$$q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, r_1, r_2, \dots, r_n$$

が得られる。

$$\begin{aligned} n &= q_2 r_1 + r_2, & (0 < r_2 < r_1), \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & (0 < r_3 < r_2), \\ r_2 &= q_4 r_3 + r_4, & (0 < r_4 < r_3), \\ &\vdots & \vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & (0 < r_n < r_{n-1}), \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n \end{aligned}$$

ここで、 $n, r_1, r_2, \dots, r_n$  はすべて正なので、 $q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1}$  はすべて正であることに注意する。

上の等式を分数の形に書き換えて、次を得る。

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= q_1 + \frac{r_1}{n}, \\ \frac{n}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1}, \\ \frac{r_1}{r_2} &= q_3 + \frac{r_3}{r_2}, \\ \frac{r_2}{r_3} &= q_4 + \frac{r_4}{r_3}, \\ &\vdots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}, \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_{n+1} \end{aligned}$$

下から逐次代入していき、

$$\begin{aligned} \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_n + \frac{1}{q_{n+1}} = [q_n, q_{n+1}], \\ \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} = q_{n-1} + \frac{1}{[q_n, q_{n+1}]} = [q_{n-1}, q_n, q_{n+1}] \\ &\vdots \\ \frac{n}{r_1} &= q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}} = q_2 + \frac{1}{[q_3, \dots, q_n, q_{n+1}]} = [q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1}] \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{m}{n} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{n}} = q_1 + \frac{1}{[q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1}]} = [q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}]$$

を得る。ここで、 $q_{n+1} \leq 1$  であつたとすると、 $r_{n-1} \leq r_n$  となり、矛盾が生じる。よつて、 $q_{n+1} > 1$  である。したがつて、 $\alpha = [q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}]$  は  $\alpha$  の連分数展開である。□

### ● 2-3 : 連分数展開の一意性

次の定理より、無理数の連分数展開は一意的であることがわかる。

#### 定理 2-5

$m, n \in \mathbb{N}$  とし、 $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{N}$  ( $i = 2, \dots, m-1$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ ) とし、 $\alpha_m, \beta_n$  を 1 より大きな実数とする。

$$[a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha_m] = [b_1, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$$

かつ  $m \leq n$  ならば、

①  $a_i = b_i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ),

②  $\alpha_m = [b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$

が成り立つ。したがつて、特に  $m = n$  ならば  $a_i = b_i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ),  $\alpha_m = \beta_m$  が成り立つ。

#### (証明)

I.  $m = 1$  の場合

②が成り立つことだけを確認すればよい。仮定より  $\alpha_1 = [\alpha_1] = [b_1, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$  となつて②が成り立つ。

II.  $m \geq 2$  の場合

$i = 1, \dots, m-1$  に対して  $s_i, t_i \in \mathbb{R}$  を

$$s_i = [a_{i+1}, \dots, a_{m-1}, \alpha_m]$$

$$t_i = [b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$$

によつて定義する。 $s_i > 1$ ,  $t_i > 1$  である。

∴)

$1 \leq i \leq m-2$  ならば  $s_i > a_{i+1} \geq 1$ ,  $t_i > b_{i+1} \geq 1$  である。  
 $i = m-1$  ならば  $s_i = \alpha_m > 1$  であり、さらに、 $m < n$  のときには  $t_i > b_m \geq 1$ ,  
 $m = n$  のときには  $t_i = \beta_n > 1$  である。□

仮定より、 $a_1 + \frac{1}{s_1} = b_1 + \frac{1}{t_1}$  が成り立っている。 $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$  であつて、 $0 < \frac{1}{s_1}, \frac{1}{t_1} < 1$  であるから、

$$a_1 = b_1, \quad \frac{1}{s_1} = \frac{1}{t_1}$$

が成り立つ。

∴)

一般に、 $a, b$  を整数、 $\alpha, \beta$  を  $0 < \alpha, \beta < 1$  を満たす実数としたとき、 $a + \alpha = b + \beta$  ならば  $a = b$  かつ  $\alpha = \beta$  となることを示せばよい。

$a - b = \beta - \alpha$  より、 $-1 < a - b < 1$  である。 $a, b \in \mathbb{Z}$  であるから  $a - b = 0$  すなわち  $a = b$  でなければならない。したがってまた、 $\alpha = \beta$  を得る。□

故に、 $a_1 = b_1, s_1 = t_1$  である。 $s_1 = a_2 + \frac{1}{s_2}, t_1 = b_2 + \frac{1}{t_2}$  であるから、 $a_2 + \frac{1}{s_2} = b_2 + \frac{1}{t_2}$  から先ほどと同様の理由で  $a_2 = b_2, s_2 = t_2$  を得る。以下同様に

$$a_i = b_i, \quad s_i = t_i \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

が示される。

$m = n$  ならば  $s_{m-1} = \alpha_m, t_{m-1} = \beta_m$  となり、 $\alpha_m = \beta_m$  である。

$m < n$  ならば  $s_{m-1} = \alpha_m, t_{m-1} = [b_m, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$  であるから、 $\alpha_m = [b_m, \dots, b_{n-1}, \beta_n]$  を得る。□

$\alpha$  が有理数のとき、その連分数展開において最後の項として 1 を許す、つまり、 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  ( $a_1 \in \mathbb{Z}, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}$ ) という形に連分数表示するときには、次のように展開の仕方は 2 通り存在する。

#### 定理 2-6

$m, n \in \mathbb{N}$  とし、 $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}, a_i, b_j \in \mathbb{N}$  ( $i = 2, \dots, m-1, m, j = 2, \dots, n-1, n$ ) とする。

$$[a_1, \dots, a_{m-1}, a_m] = [b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$$

かつ  $m \leq n$  ならば、

- ①  $a_i = b_i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ),
- ② 「 $m = n$  かつ  $a_m = b_m$ 」 または 「 $m+1 = n$  かつ  $b_m = a_m - 1, b_{m+1} = 1$ 」

が成り立つ。

上の命題を証明するときに便利な補題を 1 つ用意しておく。

#### 補題 2-7

$n \in \mathbb{N}$  とし、 $b_1 \in \mathbb{Z}, b_j \in \mathbb{N}$  ( $j = 2, \dots, n-1, n$ ) とする。 $[b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$  が整数ならば、「 $n = 1$ 」または「 $n = 2$  かつ  $b_2 = 1$ 」である。

(証明)

$n \geq 2$  のとき  $[b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$  が整数であると仮定して、 $n = 2$  かつ  $b_2 = 1$  となることを示せばよい。

$n = 2$  とする。  $[b_1, b_2] = b_1 + \frac{1}{b_2}$  である。  $[b_1, b_2]$  が整数より  $\frac{1}{b_2}$  は整数である。そのためには  $b_2 = 1$  でなければならない。

$n \geq 3$  のときを考える。  $[b_1, \dots, b_n] = b_1 + \frac{1}{[b_2, \dots, b_n]}$  となる。よって、  $\frac{1}{[b_2, \dots, b_n]}$  は整数である。ところが、  $b_j \in \mathbb{N}$  ( $j = 2, \dots, n-1, n$ ) であり、  $n \geq 3$  であるから、  $[b_2, \dots, b_n] > 1$  である。つまり、  $1 > \frac{1}{[b_2, \dots, b_n]} (> 0)$  である。これは  $\frac{1}{[b_2, \dots, b_n]}$  が整数であることに矛盾する。よって、  $n \geq 3$  のときには  $[b_1, \dots, b_n]$  は整数になり得ない。  $\square$

### (定理 2-6 の証明)

I.  $m = 1$  の場合

$[a_1] = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n]$  となるから  $[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n]$  は整数である。補題 2-7 より「 $n = 1$  かつ  $a_1 = b_1$ 」または「 $n = 2$  かつ  $b_1 = a_1 - 1, b_2 = 1$ 」となる。

II.  $m \geq 2$  の場合

$i = 1, \dots, m-1$  に対して  $s_i, t_i \in \mathbb{R}$  を

$$s_i = [a_{i+1}, \dots, a_{m-1}, a_m]$$

$$t_i = [b_{i+1}, \dots, b_{n-1}, b_n]$$

によって定義する。  $i = 1, \dots, m-2$  のとき、定理 2-5 の証明と同様にして  $s_i > 1, t_i > 1$  であることがわかる。したがって、やはり定理 2-5 の証明と同様にして

$$a_i = b_i, \quad s_i = t_i \quad (i = 1, \dots, m-2)$$

が示される。  $s_{m-2} = a_{m-1} + \frac{1}{s_{m-1}} = a_{m-1} + \frac{1}{a_m}$ ,  $t_{m-2} = b_{m-1} + \frac{1}{t_{m-1}}$  より

$$a_{m-1} + \frac{1}{a_m} = b_{m-1} + \frac{1}{t_{m-1}}$$

である。

(i)  $a_m = 1$  のとき  $\frac{1}{t_{m-1}}$  は整数である。よって、  $t_{m-1} = 1$  であり、これを上式に代入して  $a_{m-1} = b_{m-1}$  を得る。特に  $t_{m-1} = [b_m, b_{m+1}, \dots, b_n]$  は整数であるから、補題 2-7 より、「 $m = n$ 」または「 $n = m+1$  かつ  $b_n = 1$ 」である。

- $m = n$  のとき  $1 = t_{m-1} = b_m$  である。よって、  $a_m = b_m$  となる。

- $n = m+1$  かつ  $b_n = 1$  のとき  $1 = t_{m-1} = b_m + 1$  である。  $b_m = 0$  となってしまう、  $b_m \in \mathbb{N}$  に反する。よって、この場合は生じない。

(ii)  $a_m \geq 2$  のとき  $\frac{1}{a_m}$  は整数ではないから  $\frac{1}{t_{m-1}}$  も整数ではない。よって、  $t_{m-1} > 1$  である。定理 2-5 の証明と同様にして  $a_{m-1} = b_{m-1}$ ,  $a_m = t_{m-1}$  を得る。これより  $t_{m-1} = [b_m, \dots, b_{n-1}, b_n]$  は整数であるから、補題 2-7 より「 $m = n$ 」または「 $n = m+1$  かつ  $b_n = 1$ 」となる。

- $m = n$  のとき  $a_m = t_{m-1} = b_m$  となる。



- $n = m + 1$  かつ  $b_n = 1$  のとき

$$a_m = t_{m-1} = [b_m, 1] = b_m + 1$$

となる。 □

**例 2-8**  $[2, 3, 2] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$ ,  $[2, 3, 1, 1] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{16}{7}$

より、 $\frac{16}{7}$  は 2 通りの連分数表示  $\frac{16}{7} = [2, 3, 2] = [2, 3, 1, 1]$  を持つ。

連分数  $[a_1, \dots, a_n]$  は  $n$  が偶数のとき**偶連分数**と呼ばれ、 $n$  が奇数のとき**奇連分数**と呼ばれる。次は定理 2-6 より直ちに導かれる。

### 系 2-9

任意の有理数は初項が整数で、それ以外の項が正の整数であるような偶連分数および奇連分数の形に一意的に表示される。すなわち、有理数  $\alpha$  に対して

- (1)  $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$  となる奇数  $n \in \mathbb{N}$  と  $a_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  が一意的に存在する。
- (2)  $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$  となる偶数  $n \in \mathbb{N}$  と  $a_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  が一意的に存在する。

#### (証明)

- (1) まず、 $\alpha$  が奇連分数の形に表示できることを示す。

命題 2-4 より、 $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$  ( $a_n > 1$ ) となる  $n \in \mathbb{N}$  と  $a_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  が存在する。

$n$  が奇数ならば  $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$  は  $\alpha$  の奇連分数表示である。 $n$  が偶数ならば  $\alpha = [a_1, \dots, a_n - 1, 1]$  と表わすことができる。これは  $\alpha$  の奇連分数表示である。

奇連分数表示の一意性は定理 2-6 から従う。

- (2) も同様に示される。 □

### 補題 2-10

$a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$  とし、

$$\alpha = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

とおく。

- (1)  $\alpha \pm 1 = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$ .
- (2)  $1/\alpha = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .
- (3)  $-\alpha = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$ .
- (4)  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  を固定し、 $a_i$  が  $a_i = b_i + c_i$  ( $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ ) と表わされているとき、

$$\alpha = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n].$$

- (5)  $a_n > 1$  のとき  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ ,  
 $a_n = 1$  のとき  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1} + 1]$ ,  
 $a_n < -1$  のとき  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1, -1]$ ,  
 $a_n = -1$  のとき  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1} - 1]$ .

(証明)

(1), (2), (3) は連分数の定義から直ちに示される。

(4) を示す。  $\beta = [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$ ,  $\gamma = [a_{i+1}, \dots, a_n]$  とおくと、

$$b_i + \beta = b_i + [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = b_i + c_i + \frac{1}{\gamma} = a_i + \frac{1}{\gamma} = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$$

であるから、

$$[a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + \beta] = [a_1, \dots, a_{i-1}, [a_i, a_{i+1}, \dots, a_n]] = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = \alpha$$

を得る。  $b_i + \beta = b_i + [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = [b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$  であるから、

$$[a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + \beta] = [a_1, \dots, a_{i-1}, [b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]$$

とも表わされる。

(5)  $a_n > 1$  のとき

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1} = [a_n - 1, 1]$$

となることから  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$  と表わされることがわかる。

$a_n = 1$  のとき

$$[a_{n-1}, a_n] = a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + 1$$

となることから  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1} + 1]$  と表わされることがわかる。

$a_n < -1$  のとき

$$a_n = (a_n + 1) - 1 = (a_n + 1) + \frac{1}{-1} = [a_n + 1, -1]$$

となることから  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1, -1]$  と表わされることがわかる。

$a_n = -1$  のとき

$$[a_{n-1}, a_n] = a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} - 1$$

となることから  $\alpha = [a_1, \dots, a_{n-1} - 1]$  と表わされることがわかる。 □

**演習.** 有理数  $\alpha$  が

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z})$$

のように表わされていて、 $a_2, \dots, a_n$  の中に 0 が含まれているならば、 $m < n$  を満たすある  $m \in \mathbb{N}$  と  $b_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $b_2, \dots, b_m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  を用いて

$$\alpha = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

の形に表わすことができることを示せ。

## ● 2-4 : 連分数の正準形

### 定義 2-11

連分数  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  ( $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ) が**正準形** (canonical form) であるとは、

- (i)  $a_1 \neq 0$  のときには、すべての  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $a_i > 0$  であるか、すべての  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $a_i < 0$  であり、 $a_1 = 0$  のときには、すべての  $i = 2, \dots, n$  に対して  $a_i > 0$  であるか、すべての  $i = 2, \dots, n$  に対して  $a_i < 0$  である
- (ii)  $n$  は奇数である

が満たされるときをいう。

### 定理 2-12

任意の有理数は正準形で一意的に表わされる。

#### (証明)

まず、正準形で表わすことができることを示す。長さを奇数にするのは補題 2-10(5) からいつでも可能であるから、任意の有理数  $\alpha$  が (i) を満たす連分数で表示できることを示せばよい。

命題 2-4 の証明より、 $\alpha > 0$  ならば、

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (a_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, a_n > 1)$$

と表わすことができる。これは (i) を満たす連分数表示である。 $\alpha < 0$  ならば、 $-\alpha > 0$  であるから、

$$-\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (a_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, a_n > 1).$$

このとき、

$$\alpha = -[a_1, a_2, \dots, a_n] = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$$

となる。これは (i) を満たす連分数表示である。

次に、有理数  $\alpha$  が  $\alpha = [a_1, \dots, a_m] = [b_1, \dots, b_n]$  のように 2 通りに正準形で表わされたと仮定する。 $m \leq n$  とする。

#### I. $m = 1$ の場合

$[a_1] = [b_1, \dots, b_n]$  となるから  $[b_1, \dots, b_n]$  は整数である。先に示したように、 $n = 1$  でなければならない。よって、 $a_1 = [a_1] = [b_1] = b_1$  となるので、表示の仕方は一意的である。

#### II. $m \geq 2$ の場合

$\alpha$  の符号と  $a_2, \dots, a_m, b_2, \dots, b_n$  の符号は一致する ( $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$  ならば  $a_1, b_1$  の符号とも一致する)。

$\alpha > 0$  のときを考える。 $i = 1, \dots, m-1$  に対して

$$s_i := [a_{i+1}, \dots, a_m], \quad t_i := [b_{i+1}, \dots, b_n]$$

とおく。  $i = 1, \dots, m-2$  に対して

$$s_i = a_{i+1} + \frac{1}{s_{i+1}} > a_{i+1} \geq 1, \quad t_i = b_{i+1} + \frac{1}{t_{i+1}} > b_{i+1} \geq 1$$

である。仮定より、  $a_1 + \frac{1}{s_1} = b_1 + \frac{1}{t_1}$  が成り立っている。  $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$  であり、  $0 < \frac{1}{s_1}, \frac{1}{t_1} < 1$  であるから、定理 2-5 の証明と同様にして  $a_1 = b_1, s_1 = t_1$  であることがわかる。すると、  $[a_2, \dots, a_m] = s_1 = t_1 = [b_2, \dots, b_n]$  であるから、同様の考察により、

$$a_i = b_i, \quad s_i = t_i \quad (i = 1, \dots, m-2)$$

が成立することがわかる。もし、  $m < n$  であったと仮定する。  $a_m > 1$  ならば  $s_{m-1} = a_m > 1$  であり、また、  $t_{m-1} = b_m + \frac{1}{[b_{m+1}, \dots, b_n]} > b_m \geq 1$  であるから上と同様にして  $a_{m-1} = b_{m-1}, s_{m-1} = t_{m-1}$  が成立する。すると、  $a_m = s_{m-1} = t_{m-1} = [b_m, \dots, b_n]$  は整数となるから、先に示したことから  $m = n$  でなければいけない。これは矛盾である。よって、  $a_m = 1$  である。このとき、

$$t_{m-2} = s_{m-2} = a_{m-1} + \frac{1}{a_m} = a_{m-1} + 1$$

となるので、  $t_{m-2} = [b_{m-1}, \dots, b_n]$  は整数である。再び先に示したことから  $n = m-1$  となる。しかし、  $m, n$  はともに奇数であるから  $n = m-1$  は成立し得ない。こうして、  $m < n$  であったと仮定すると矛盾が引き起こされるから、  $m = n$  でなければならないことがわかる。このとき、

$$a_{m-1} + \frac{1}{a_m} = [a_{m-1}, a_m] = s_{m-2} = t_{m-2} = [b_{m-1}, b_m] = b_{m-1} + \frac{1}{b_m}$$

である。  $a_m > 1$  ならば  $\frac{1}{a_m}$  は整数ではないから  $\frac{1}{b_m}$  も整数ではない。すなわち、  $b_m > 1$  である。よって、定理 2-5 の証明と同様に考えて  $a_{m-1} = b_{m-1}, a_m = b_m$  を得る。  $a_m = 1$  ならば  $\frac{1}{b_m}$  は整数である。よって、  $b_m = 1 = a_m$  とわかる。このとき  $a_{m-1} = b_{m-1}$  である。以上より、  $\alpha > 0$  のとき  $\alpha$  を正準形の連分数で表示する仕方は一意的であることが示された。

$\alpha < 0$  の場合を考える。この場合、  $i = 1, \dots, m-1$  に対して

$$s_i := [-a_{i+1}, \dots, -a_m], \quad t_i := [-b_{i+1}, \dots, -b_n]$$

とおいて同様の議論を行うと、

$$-a_i = -b_i, \quad s_i = t_i \quad (i = 1, \dots, m-2)$$

が成立することがわかり、  $m < n$  と仮定して矛盾を導くことができる。すると、

$$-a_{m-1} + \frac{1}{-a_m} = [-a_{m-1}, -a_m] = s_{m-2} = t_{m-2} = [-b_{m-1}, -b_m] = -b_{m-1} + \frac{1}{-b_m}$$

となり、  $-a_m > 1$  ならば  $\frac{1}{-a_m}$  は整数ではないから  $\frac{1}{-b_m}$  も整数ではない。すなわち、  $-b_m > 1$  である。よって、定理 2-5 の証明と同様に考えて  $-a_{m-1} = -b_{m-1}, -a_m = -b_m$  を得る。  $a_m = -1$  ならば  $\frac{1}{-b_m}$  は整数である。よって、  $b_m = -1 = a_m$  とわかる。このとき  $-a_{m-1} =$

$-b_{m-1}$  である。こうして、 $\alpha < 0$  のときにも  $\alpha$  を正準形の連分数で表示する仕方は一意的であることが示される。 □

### §3. 有理タングルの定義とその表示

ここでは、有理タングルを定義し、有理タングルに対する種々の演算と連分数展開と関わる様々な表示方法を紹介する。この節の内容は [52] に基づく。

#### ● 3-1 : 有理タングルの定義

以下、標準的な 3 次元球体  $\mathbb{B}^3$  内の 2-タングル  $t$  であって、 $\partial t = t \cap \partial \mathbb{B}^3$  が 4 点

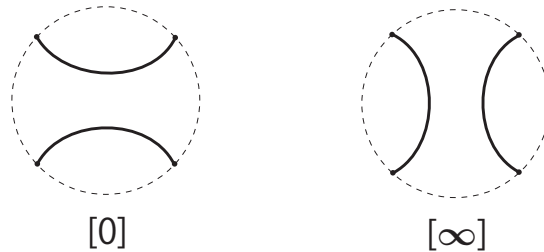
$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

からなるもの、およびその同相写像  $\phi: (\mathbb{B}^3, t) \rightarrow (B, \phi(t))$  による像であるような 2-タングル  $(B, \phi(t))$  のみを扱う。

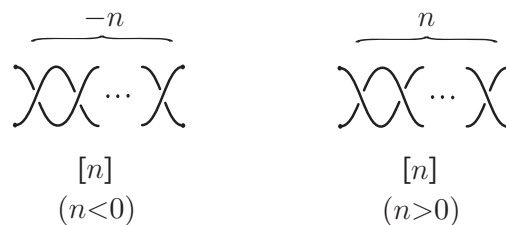
#### 定義 3-1

2-タングル  $(B, t)$  が**有理タングル** (*rational tangle*) であるとは、自明な 2-タングル  $(B, t_0)$  への向きを保つ同相写像  $h: (B, t) \rightarrow (B, t_0)$  が存在するときをいう。

**例 3-2** (1) 次の図式で表わされる 2-タングルをそれぞれ  $[0]$ ,  $[\infty]$  によって表わす。これらは有理タングルである。



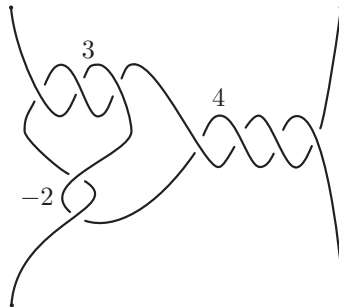
(2)  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $[n], \frac{1}{[n]}$  をそれぞれ次の図式で表わされる 2-タングルとする。  $[n]$  を**整数タングル**といい、 $\frac{1}{[n]}$  を**垂直タングル**という。但し、 $\frac{1}{[0]} = [\infty]$  と解釈する。また、 $\frac{1}{[\infty]} = [0]$  と約束する。



$$\begin{array}{ccc}
 \left. \begin{array}{c} \text{X} \\ \vdots \\ \text{X} \end{array} \right\} -n & & \left. \begin{array}{c} \text{X} \\ \vdots \\ \text{X} \end{array} \right\} n \\
 \frac{1}{[n]} & & \frac{1}{[n]} \\
 (n < 0) & & (n > 0)
 \end{array}$$

整数タンゲルおよび垂直タンゲルは有理タンゲルである。

(3) 整数タンゲルおよび垂直タンゲルを組み合わせで得られる次の 2-タンゲルは有理タンゲルである。



### ● 3-2 : 有理タンゲルの演算

有理タンゲルには和  $+$ , 積  $*$ , 鏡像  $-$ , 反転  $(-)^{\text{in}}$ , 回転  $(-)^{\text{rot}}$  の操作がイソトピーを除いて矛盾なく定義される。これらの定義を述べる。これらの定義において、2-タンゲルは  $\{0\} \times \mathbb{D}^2$  上の図式として描かれているものとする。

(1) 和  $+$  の定義

2 つの 2-タンゲル (図式)  $s, t$  に対して 2-タンゲル (図式)  $s + t$  を次の図式で定義する :

$$s + t := \text{Diagram showing two circles labeled } s \text{ and } t \text{ side-by-side, connected by arcs above and below.}$$

(2) 積  $*$  の定義

2 つの 2-タンゲル (図式)  $s, t$  に対して 2-タンゲル (図式)  $s * t$  を次の図式で定義する :

$$s * t := \text{Diagram showing two circles labeled } s \text{ and } t \text{ stacked vertically, connected by arcs on the left and right.}$$

(3) 鏡像  $-$  の定義

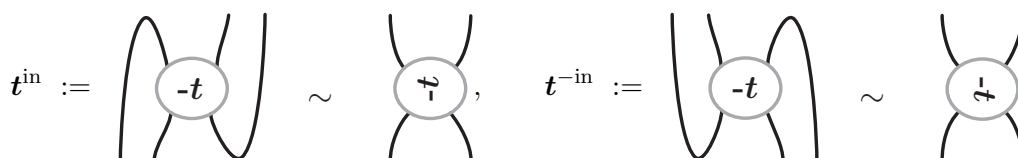
2-タンクル (図式)  $t$  に対して  $-t$  をすべての交差点での“上下”を入れ換えて得られる 2-タンクル (図式) とする。 $-t$  を  $t$  の鏡像 (*mirror image*) という。

(4) 回転  $(-)^{\text{rot}}$  の定義

2-タンクル (図式)  $t$  に対して 2-タンクル (図式)  $t^{\text{rot}}, t^{-\text{rot}}$  をそれぞれ  $t$  を反時計周りに  $90^\circ$  回転、時計回りに  $90^\circ$  回転させて得られるものとする。

(5) 反転  $(-)^{\text{in}}$  の定義

2-タンクル (図式)  $t$  に対して 2-タンクル (図式)  $t^{\text{in}}, t^{-\text{in}}$  をそれぞれ  $-t$  を反時計周りに  $90^\circ$  回転、時計回りに  $90^\circ$  回転させて得られるものとする。



$t^{\pm\text{in}}$  を  $t$  の反転 (*inversion*) という。

定義より次が成り立つことが直ちにわかる。

**補題 3-3**

- (1) 任意の 2-タンクル  $t$  に対して
- $t^{\text{in}} = -(t^{\text{rot}}) = (-t)^{\text{rot}}$ ,
  - $(t^{\text{in}})^{-\text{in}} \sim t \sim (t^{-\text{in}})^{\text{in}}$ ,
  - $(t^{\text{rot}})^{-\text{rot}} \sim t \sim (t^{-\text{rot}})^{\text{rot}}$ .
- (2) 任意の 2-タンクル  $s, t$  に対して
- $-(s + t) = (-s) + (-t)$ ,
  - $-(s * t) = (-s) * (-t)$ .
- (3) 任意の  $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  に対して  $[n]^{\text{in}} = \frac{1}{[n]}$ ,  $\left(\frac{1}{[n]}\right)^{\text{in}} = [n]$ . 特に、 $[0]^{\text{in}} = [\infty]$ ,  $[\infty]^{\text{in}} = [0]$ .

● 3-3 : 有理タンクルのツイスト形式

**定義 3-4**

有理タンクルのツイスト形式 (*twist form*) とは、有理タンクルを  $[0]$  または  $[\infty]$  から出発して、タンクル  $[\pm 1]$  を加えたり、積を取ったりすることを繰り返して得られる形に表わしたものをいう。具体的には次の形に表わされる有理タンクル図式のことを指す。



(i)  $[0]$  からスタートする場合：

$$[s_k] + \left( \cdots + \frac{1}{[r_3]} * \left( [s_1] + \left( \frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} + \cdots \right) + [s_{k+1}]$$

(ii)  $[\infty]$  からスタートする場合：

$$\frac{1}{[r_k]} * \left( \cdots * [s_3] + \left( \frac{1}{[r_1]} * \left( [s_1] + \frac{1}{[r_0]} + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_4] * \cdots \right) * \frac{1}{[r_{k+1}]}$$

但し、 $s_i, r_i \in \mathbb{Z}$  であり、 $0$  が含まれていてもよい。

**注意：** (i) において  $[s_0] = [\infty]$  を許せば、(ii) も含まれることになる。

### 命題 3-5

任意の有理タングルはツイスト形式で表わすことができる。

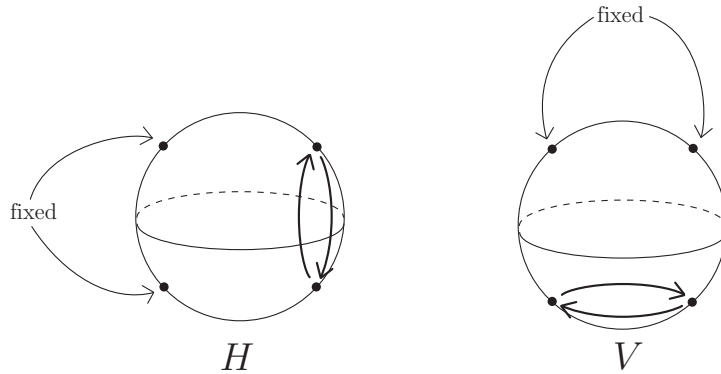
#### (証明の概略)

証明は Cromwell [11; Chapter 8] に従う。

$S^2$  上の 4 点

$$\text{NW}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{SW}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{NE}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{SE}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を集合として保つ任意の自己同相写像は、次図で表わされる 2 つの自己同相写像  $H, V$  とその逆写像を有限回合成して得られる自己同相写像に、上の 4 点集合を固定してイソトープとなる [11; p.201] ([9; Chapter 12] も参照)。



$S^2$  上の 4 点 NW, SW, NE, SE を集合として保つ任意の自己同相写像  $f$  を  $S^2$  の内部へ拡張することにより  $\mathbb{B}^3$  の自己同相写像  $\tilde{f}$  が得られ、2-タングル  $t$  は  $\tilde{f}$  によって 2-タングル  $\tilde{f}(t)$  に変換される。 $S^2$  上の 4 点 NW, SW, NE, SE を集合として保つ自己同相写像  $f, f'$  がその 4 点集合を固定してイソトープならば  $\tilde{f}, \tilde{f}'$  もイソトープになるから、 $\tilde{f}(t)$  と  $\tilde{f}'(t)$  は弱い意味で同値となる (ここで、弱い意味で同値であるとは、集合として保つことを意味する)。2-タングル  $t$  が有理タングルならば、4 点 NW, SW, NE, SE を集合として保つ適当な  $\mathbb{B}^3$  の自己同相写像  $h$  によって自明なタングル  $[0]$  (または  $[\infty]$ ) に変換される。 $f := h|_{S^2}$  は  $H, V$  とその逆写像を有限回合成して得られる自己同相写像に 4 点集合  $\{\text{NW}, \text{SW}, \text{NE}, \text{SE}\}$  を固定してイソトープとなる。よって、 $t$  は自明なタングル  $[0]$  に、 $H, V$  とその逆写像を有限回合成して得ら

れる  $S^2$  上の自己同相写像を  $\mathbb{B}^3$  上の自己同相写像へ拡張したものを施したものに同値になる。  
 $H^{\pm 1}$  を  $\mathbb{B}^3$  上の自己同相写像へ拡張したものを 2-タングル  $s$  に施した効果は  $s + [\pm 1]$  となり、  
 $V^{\pm 1}$  を  $\mathbb{B}^3$  上の自己同相写像へ拡張したものを 2-タングル  $s$  に施した効果は  $s * [\pm 1]$  となる  
 から、有理タングル  $t$  は自明なタングル  $[0]$  から出発して  $[\pm 1]$  と和や積を有限回施していつて  
 得られる 2-タングルに弱い意味で同値になる。  $\square$

2-タングル  $(\mathbb{B}^3, t)$  の**部分 2-タングル**とは、 $(\mathbb{B}^3, t)$  の図式の部分 2-タングル図式として与え  
 られる 2-タングルのことをいう。

### 命題 3-6

- (1) 有理タングルの任意の部分 2-タングルは有理タングルである。  
 (2)  $T$  を次のツイスト表示を持つ有理タングル図式とする。

$$T = [s_k] + \left( \cdots + \left( \frac{1}{[r_3]} * \left( [s_1] + \left( \frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_{k+1}]$$

但し、 $[s_0] = [\infty]$  も許すことにする。このとき、 $T$  の任意の部分 2-タングル図式は次のいづ  
 れかによって表わされる：

(i) ある  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k, k+1\}$  と  $0 \leq |s'_i| \leq |s_i|$  を満たす  $s_i$  と同符号または 0 の整  
 数  $s'_i$  に対して  $[s'_i]$  であるか、または、ある  $i \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$  と  $0 \leq |r'_i| \leq |r_i|$   
 を満たす  $r_i$  と同符号または 0 の整数  $r'_i$  に対して  $\frac{1}{[r'_i]}$ 。

(ii) ある奇数  $i \in \{1, 3, \dots, k\}$  と、 $0 \leq |s'_i| \leq |s_i|$  を満たす  $s_i$  と同符号または 0 の整数  
 $s'_i$  と、 $0 \leq |s'_{i+1}| \leq |s_{i+1}|$  を満たす  $s_{i+1}$  と同符号または 0 の整数  $s'_{i+1}$  に対して、  
 $[s'_i] + \left( \frac{1}{[r_i]} * \cdots + \left( \frac{1}{[r_3]} * \left( [s_1] + \left( \frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots * \frac{1}{[r_{i+1}]} \right) + [s'_{i+1}]$ 。

(iii) ある奇数  $i \in \{1, 3, \dots, k\}$  と、 $0 \leq |r'_i| \leq |r_i|$  を満たす  $r_i$  と同符号または 0 の整数  
 $r'_i$  と、 $0 \leq |r'_{i+1}| \leq |r_{i+1}|$  を満たす  $r_{i+1}$  と同符号または 0 の整数  $r'_{i+1}$  に対して、  
 $\frac{1}{[r'_i]} * \left( [s_{i-2}] + \cdots + \left( \frac{1}{[r_3]} * \left( [s_1] + \left( \frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots + [s_{i-1}] \right) * \frac{1}{[r'_{i+1}]}$ 。

上記の形で与えられる部分 2-タングルを  $t$  の**切片 (truncation)** という。

### (証明)

(1) 有理タングル図式で考える。その交点数に関する帰納法で証明する。

交点数が 0 のとき、有理タングルは  $[0]$  または  $[\infty]$  に境界を固定してイソトープになる。 $[0]$ ,  
 $[\infty]$  の部分 2-タングル図式は  $\mathbb{D}^2$  上の交点を持たない 2 曲線であるから、その境界を固定し  
 て  $[0]$  または  $[\infty]$  にイソトープになる。よって、 $[0]$ ,  $[\infty]$  の部分 2-タングルは有理タングルで  
 ある。

有理タングル  $t$  の  $n$  個の交点数を持つツイスト図式  $T$  を考える。 $T$  において境界に最も近  
 い交差点を  $p$  とおくと、その場所に応じて  $t$  は交点数が  $(n-1)$  個のある 2-タングル図式  $T'$

を用いて次のいずれかの形に表わされる：

$$[\pm 1] + T', \quad T' + [\pm 1], \quad [\pm 1] * T', \quad T' * [\pm 1].$$

帰納法の仮定により、 $T'$  の任意の部分 2-タンクル図式は有理タンクル図式である。

$u$  を  $t$  の任意の部分 2-タンクルとすると、 $u$  は  $T$  のある部分 2-タンクル図式  $U$  とタンクルとして同値になる。

$U$  が  $p$  を含まないとき、 $U$  は  $T'$  の部分 2-タンクル図式とみなすことができる。したがって、上で述べたように  $U$  は有理タンクル図式である。 $U$  が  $p$  を含むとき、 $U$  は  $p$  を含まない 2-タンクル図式  $U'$  を用いて次のいずれかの形に表わされる：

$$[\pm 1] + U', \quad U' + [\pm 1], \quad [\pm 1] * U', \quad U' * [\pm 1].$$

$U'$  は  $T'$  の部分 2-タンクル図式とみなすことができる。よって、 $U'$  は有理タンクル図式である。故に、 $U$  もまた有理タンクル図式である。以上より、帰納法が完成し、(1) は証明された。

(2) 有理タンクルのツイスト図式  $T$  の交点数に関する帰納法で証明する。

交点数が 0 のときは (1) のときと同様に考えてその部分 2-タンクル図式は  $T$  の切片である。

$(n-1)$  個以下の交点数を持つ有理タンクル図式  $S$  の部分 2-タンクル図式は  $S$  の切片であると仮定する。命題で与えられているツイスト表示  $T$  の交点数は  $n$  個であるとする。 $T$  において境界に最も近い交差点を  $p$  とおくと、 $T$  はある交点数が  $(n-1)$  個の 2-タンクル図式  $T'$  を用いて次のいずれかの形に表わされる。

$$[\pm 1] + T', \quad T' + [\pm 1], \quad [\pm 1] * T', \quad T' * [\pm 1].$$

帰納法の仮定により、 $T'$  の部分 2-タンクルは  $T'$  の切片である。

$U$  を  $T$  の任意の部分 2-タンクル図式とする。

$U$  が  $p$  を含まないとき、 $U$  は  $T'$  の部分 2-タンクル図式とみなすことができる。したがって、上で述べたように  $U$  は  $T'$  の切片である。したがってまた、 $U$  は  $T$  の切片である。 $U$  が  $p$  を含むとき、 $U$  は  $p$  を含まない 2-タンクル図式  $U'$  を用いて次のいずれかの形に表わされる：

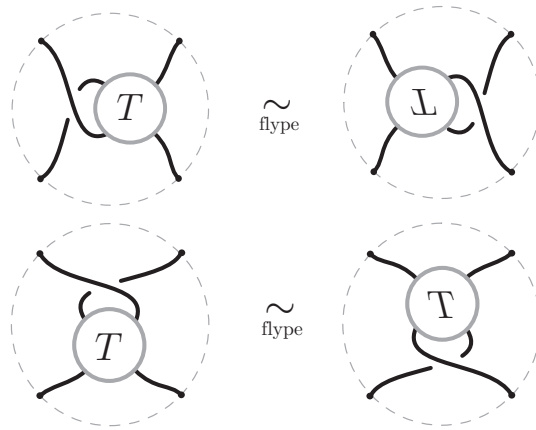
$$[\pm 1] + U', \quad U' + [\pm 1], \quad [\pm 1] * U', \quad U' * [\pm 1].$$

このとき、 $U'$  は  $T'$  の切片である。よって、 $U'$  は  $T$  の切片である。ところで、 $T = [\pm 1] + T'$  ならば  $U = [\pm 1] + U'$  というように、 $U$  が  $U'$  を用いてどのように表わされるのかは  $T$  が  $T'$  を用いてどのように表わされるのかに応じて決まっていることに注意すると、 $U$  は  $T$  の切片になっていることがわかる。これで帰納法が完成し、(2) も証明された。□

### ● 3-4：タンクルに対するフライプとフリップ

#### 定義 3-7

2-タンクル図式に対して、 $[\pm 1] + T$  または  $[\pm 1] * T$  の形をした部分 2-タンクル図式に端点を固定したまま次図の変形を行うイソトピーを**フライプ** (*flype*) と呼ぶ。

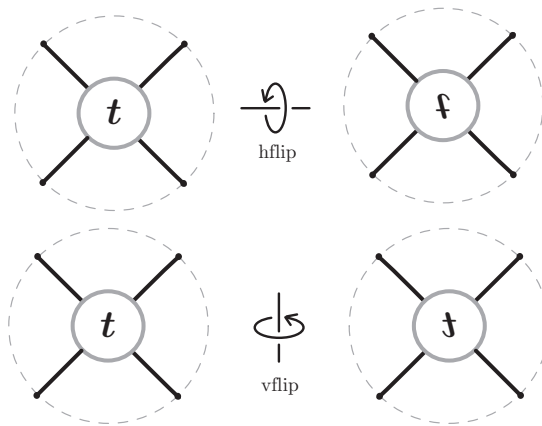


$T$  が有理タンクル図式るとき、そのフライプは**有理的** (*rational*) であると呼ばれる。

一方、2-タンクルに対して次のような操作を考える。

**定義 3-8**

2-タンクル (図式)  $t$  を水平軸のまわりに  $180^\circ$  回転させると 2-タンクル (図式) が得られる。その 2-タンクル (図式) を  $t^{\text{hflip}}$  と書き、 $t$  の**水平フリップ** (*horizontal flip*) と呼ぶ。同様に、 $t$  を垂直軸のまわりに  $180^\circ$  回転させると 2-タンクル (図式) が得られる。その 2-タンクルを  $t^{\text{vflip}}$  と書き、 $t$  の**垂直フリップ** (*vertical flip*) と呼ぶ。



フライプがイソトピーによる変形である一方、水平フリップ、垂直フリップは端点を動かすため、イソトピーではない。しかしながら、2-タンクルの部分 2-タンクル図式  $T$  上のフライプは、水平フリップ、垂直フリップと和を用いて次のように与えられるイソトピーに一致する。

$$(3.1) \quad [\pm 1] + T \sim T^{\text{hflip}} + [\pm 1], \quad [\pm 1] * T \sim T^{\text{vflip}} * [\pm 1].$$

2-タンクル (図式)  $s, t$  に対して次が成立する：

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (s + t)^{\text{hflip}} &= s^{\text{hflip}} + t^{\text{hflip}}, & (s * t)^{\text{hflip}} &= t^{\text{hflip}} * s^{\text{hflip}}, \\ (s + t)^{\text{vflip}} &= t^{\text{vflip}} + s^{\text{vflip}}, & (s * t)^{\text{vflip}} &= s^{\text{vflip}} * t^{\text{vflip}}. \end{aligned}$$

一般に、2-タンクルに水平フリップあるいは垂直フリップを行うと、イソトピー型は変化するが、有理タンクルに対しては変化が起きない。すなわち、次が成り立つ：

**補題 3-9 (フリップ補題)**

有理タングル  $t$  に対して

(1)  $t^{\text{hflip}} \sim t \sim t^{\text{vflip}}$ .

(2)  $(t^{\text{in}})^{\text{in}} = (t^{\text{rot}})^{\text{rot}} \sim t$ .

(3)  $t^{-\text{in}} \sim t^{\text{in}}, t^{-\text{rot}} \sim t^{\text{rot}}$ .

**(証明)**

有理タングル  $t$  をツイスト表示  $T$  で表わし、(1) を交点数に関する帰納法で証明する。

まず、 $[0], [\infty], [\pm 1]$  については明らかに (1) は成立する。

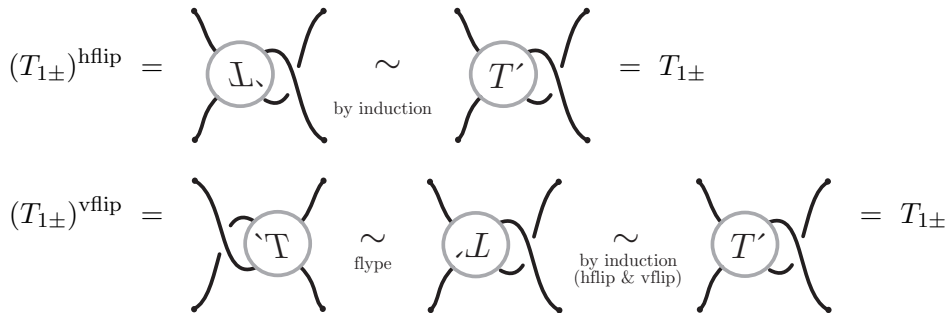
$n$  を自然数とし、交点数が  $n-1$  の任意の有理タングルに対して (1) が成り立つと仮定する。

$T$  を交点数が  $n$  の有理タングルのツイスト表示とする。 $\mathbb{B}^2$  の境界に最も近い交差点の 1 つを隔離することにより、 $T$  は交点数が  $n-1$  のある有理タングル図式  $T'$  を用いて

$$T' + [\pm 1], \quad [\pm 1] + T', \quad T' * [\pm 1], \quad [\pm 1] * T'$$

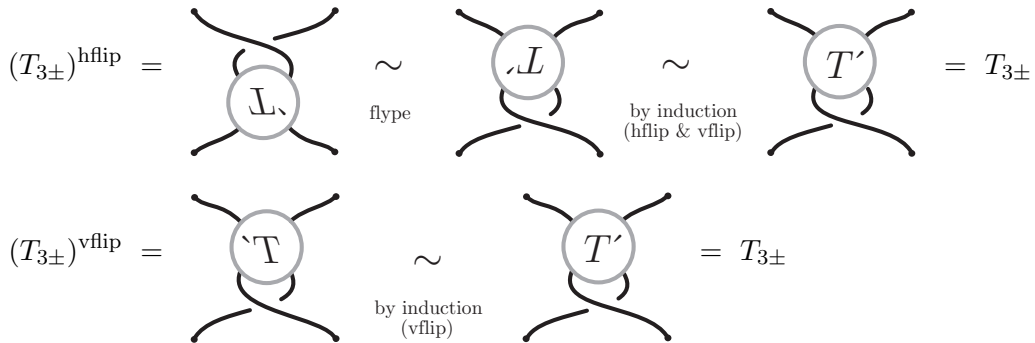
と表わすことができる。命題 3-6 の証明より、 $T'$  は有理タングル図式である。よって、帰納法の仮定より、 $T' \sim (T')^{\text{hflip}} \sim (T')^{\text{vflip}}$  となる。

①  $T_{1\pm} := T' + [\pm 1]$  について  $(T_{1\pm})^{\text{hflip}} \sim T_{1\pm} \sim (T_{1\pm})^{\text{vflip}}$  となることが次図のようにしてわかる (次図は  $+1$  の場合を描いている)。

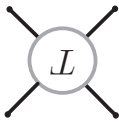


②  $T_{2\pm} := [\pm 1] + T'$  について  $(T_{2\pm})^{\text{hflip}} \sim T_{2\pm} \sim (T_{2\pm})^{\text{vflip}}$  となることが①と同様にしてわかる。

③  $T_{3\pm} := T' * [\pm 1]$  について  $(T_{3\pm})^{\text{hflip}} \sim T_{3\pm} \sim (T_{3\pm})^{\text{vflip}}$  となることが下図のようにしてわかる



④  $T_{4\pm} := [\pm 1] * T'$  について  $(T_{4\pm})^{\text{hflip}} \sim T_{4\pm} \sim (T_{4\pm})^{\text{vflip}}$  となることが③と同様にしてわかる。

(2)  $(T^{\text{in}})^{\text{in}} =$    $$ なので、 $(T^{\text{in}})^{\text{in}} = (T^{\text{hflip}})^{\text{vflip}}$  と書くことができる。したがって、(1)

より

$$(T^{\text{in}})^{\text{in}} = (T^{\text{hflip}})^{\text{vflip}} \sim T^{\text{hflip}} \sim T$$

を得る。 $(T^{\text{in}})^{\text{in}} = (T^{\text{rot}})^{\text{rot}}$  は補題 3-3 より従う。

(3) (2) と補題 3-3 より、

$$T^{-\text{in}} \sim ((T^{\text{in}})^{\text{in}})^{-\text{in}} \sim T^{\text{in}}$$

を得る。 $T^{-\text{rot}} \sim T^{\text{rot}}$  も同様にして示される。 □

### 系 3-10

任意の  $m, n \in \mathbb{Z}$  と有理タングル  $t$  に対して

$$[m] + t + [n] \sim t + [m + n], \quad \frac{1}{[m]} * t * \frac{1}{[n]} \sim t * \frac{1}{[m + n]}.$$

(証明)

(3.1) と補題 3-9 より、有理タングル  $t$  に対して

$$[\pm 1] + t \sim t + [\pm 1], \quad [\pm 1] * t \sim t * [\pm 1]$$

が成り立つ。よって、これを繰り返せば、

$$[m] + t + [n] = ([m] + t) + [n] \sim (t + [m]) + [n] = t + ([m] + [n]) = t + [m + n]$$

を得る。同様に、 $\frac{1}{[m]} * t * \frac{1}{[n]} \sim t * \frac{1}{[m + n]}$  も示される。 □

### ● 3-5 : 有理タングルの標準形

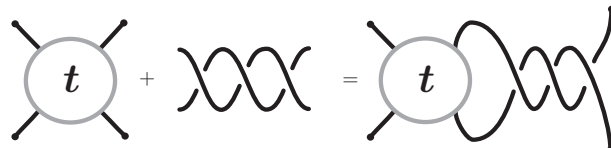
#### 定義 3-11

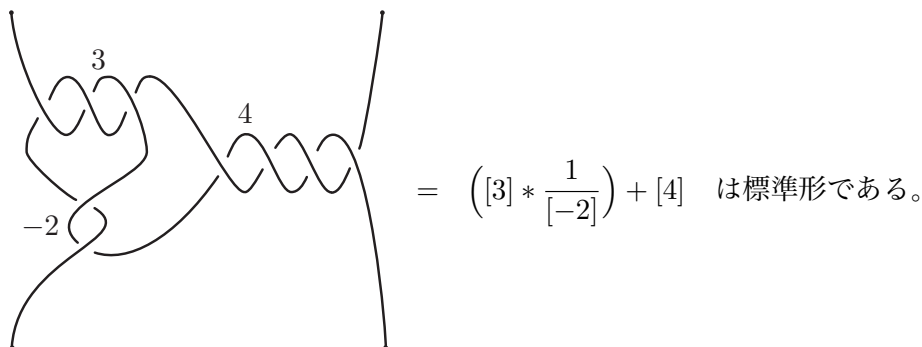
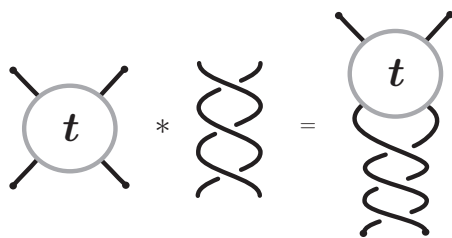
有理タングルの**標準形** (*standard form*) とは、有理タングル  $[0]$  または  $[\infty]$  から出発して、タングル  $[\pm 1]$  を右側のみに加え、下側のみを積をとった形をしたタングル図式のことをいう。具体的には次の形をした有理タングル図式を指す。

$$\left( \cdots \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$$

但し、 $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  であり、 $[a_1]$  は  $[0]$  でもよく、 $[a_n]$  は  $[\infty]$  でもよい。

**注意：**標準形において、 $n$  は必然的に奇数であることに注意する。





**補題 3-12**

任意の有理タングルは標準形にイソトープである。

(証明)

有理タングル  $t$  をツイスト形式で表わす：

$$t = [s_k] + \left( \cdots + \frac{1}{[r_3]} * \left( [s_1] + \left( \frac{1}{[r_1]} * [s_0] * \frac{1}{[r_2]} \right) + [s_2] \right) * \frac{1}{[r_4]} \right) + \cdots + [s_{k+1}]$$

ここで、 $s_0, s_i, r_i \in \mathbb{Z}$  ( $i = 1, \dots, k+1$ ) であり、 $[s_0] = [\infty]$  も許す。系 3-10 より、 $t$  は次の形で与えられる図式の有理タングルにイソトープであることがわかる：

$$t \sim \left( \cdots \left( \left( \left( [s_0] * \frac{1}{[r_1 + r_2]} \right) + [s_1 + s_2] \right) * \frac{1}{[r_3 + r_4]} \right) + \cdots \right) + [s_k + s_{k+1}]$$

このうち、 $s_i + s_{i+1} = 0$  や  $r_i + r_{i+1} = 0$  となる項は省くことができる。すると、標準形となる。 □

有理タングル  $t$  に対して  $t^{\text{in}}$  を  $\frac{1}{t}$  または  $t^{-1}$  と書く。この記法を用いても補題 3-9(3) により混乱が起きない。

**補題 3-13**

任意の有理タングル  $t$  と整数  $n$  に対して次が成り立つ：

$$t * \frac{1}{[n]} \sim \frac{1}{[n] + \frac{1}{t}}, \quad \frac{1}{[n]} * t \sim \frac{1}{\frac{1}{t} + [n]}$$

(証明)

系 3-10 より、前者のみ示せば十分である。 $n \geq 0$  のとき

$$\frac{1}{[n] + \frac{1}{t}} = - \overbrace{\text{Diagram}}^n \sim \text{Diagram} = t^{\text{hflip}} * \frac{1}{[n]}$$

となる。補題 3-9(1) を適用して、 $t^{\text{hflip}} * \frac{1}{[n]} \sim t * \frac{1}{[n]}$  となることがわかる。

$n < 0$  の場合も同様に示される。

□

### ● 3-6 : 有理タングルの連分数形式

#### 定義 3-14

有理タングルの**連分数形式** (*continued fraction form*) とは、有理タングルの次の形の表示のことをいう：

$$[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] := [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\dots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}}}}$$

ここで、 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  である。

**注意:**  $a_2, \dots, a_n$  の中に 0 がある場合には、 $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] = [[b_1], [b_2], \dots, [b_m]]$  ( $b_2, \dots, b_m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ) と書き換えることができる。

#### 補題 3-15

任意の有理タングルは連分数形式で表示することができる。

(証明)

イソトピーで変形して、有理タングル  $t$  を標準形の形に表わしておく：

$$t = \left( \dots \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \dots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1].$$

但し、 $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  であり、 $[a_1]$  は  $[0]$  でもよく、 $[a_n]$  は  $[\infty]$  でもよい。 $n$  を標準形の「長さ」と呼ぶことにする (便宜上、 $[a_n] = [\infty]$  のときにも長さは  $n$  としておく)。

$n$  に関する帰納法で、上記の標準形は  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  にイソトープになることを示す。

但し、 $[a_n] = [\infty]$  の場合には  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{n-1}]]$  と解釈する。

$n = 1$  ならば  $t = [a_1]$  であり、示すべきことはなにもない。



$n = 3$  ならば系 3-10 より  $t = \left( [a_3] * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] = [a_1] + \left( \frac{1}{[a_2]} * [a_3] \right)$  となる。 $[a_3] = [\infty]$  ならば、 $t = [a_1] + \frac{1}{[a_2]}$  であり、これ自体で連分数表示になっている。 $[a_3] \neq [\infty]$  ならば、補題 3-13 より、 $t = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3]}}$  となり、これ自体で連分数表示になっている。

$n \geq 5$  とし、長さが  $n - 2$  の有理タングルの標準形に対しては上記のような連分数形式にイソトープであると仮定する。

$$t' := \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \cdots + [a_3]$$

を考える。すると、 $t = \left( t' * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$  と表わされる。補題 3-13 と系 3-10 より、

$$t = \left( t' * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1] \sim \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{t'}} + [a_1] \sim [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{t'}}$$

を得る。帰納法の仮定より、 $t'$  は  $[a_n] = [\infty]$  のときには連分数形式  $[[a_3], \dots, [a_{n-1}]]$  にイソトープであるから、 $t \sim [[a_1], [a_2], [a_3], \dots, [a_{n-1}]]$  を得る。 $[a_n] \neq [\infty]$  のときには連分数形式  $[[a_3], \dots, [a_n]]$  にイソトープであるから、 $t \sim [[a_1], [a_2], [a_3], \dots, [a_n]]$  を得る。いずれにしても、長さが  $n$  の有理タングルの標準形に対しても主張が成り立つことが示された。□

**注意：**補題の証明より、有理タングルの標準形が求められれば、直ちに連分数表示も求められる。例えば、

$$\left( [3] * \frac{1}{[-2]} \right) + [4] = [[4], [-2], [3]] = [4] + \frac{1}{[-2] + \frac{1}{[3]}}$$

となる。

### 補題 3-16

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  とし、 $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  とおく。このとき、

- (1)  $T + [\pm 1] = [[a_1 \pm 1], [a_2], \dots, [a_n]]$ .
- (2)  $\frac{1}{T} = [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ .
- (3)  $-T = [[-a_1], [-a_2], \dots, [-a_n]]$ .
- (4)  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) が  $a_i = b_i + c_i$  ( $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ ) と表わされているとき、

$$T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{i-1}], [b_i], [0], [c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]].$$

(証明)

(1)  $T' = [[a_2], \dots, [a_n]]$  とおくと  $T = [a_1] + \frac{1}{T'}$  と表わされる。したがって、

$$\begin{aligned} T + [\pm 1] &= [a_1] + \frac{1}{T'} + [\pm 1] \\ &= [a_1] + [\pm 1] + \frac{1}{T'} \quad (\text{系 3-10}) \\ &= [a_1 \pm 1] + \frac{1}{T'} \\ &= [[a_1 \pm 1], [a_2], \dots, [a_n]] \end{aligned}$$

を得る。

$$(2) \frac{1}{T} = [0] + \frac{1}{T} = [[0], [a_1], [a_2], \dots, [a_n]].$$

(3)  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$(3.3) \quad -[n] = [-n]$$

となることから、

$$\begin{aligned} -T &= -[a_1] + \frac{1}{- [a_2] + \frac{1}{- [a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{- [a_{n-1}] + \frac{1}{- [a_n]}}}} \\ &= [-a_1] + \frac{1}{[-a_2] + \frac{1}{[-a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[-a_{n-1}] + \frac{1}{- [a_n]}}}} \\ &= [[-a_1], [-a_2], \dots, [-a_n]] \end{aligned}$$

を得る。

(4)  $S := [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$  とおく。このとき、(1) を繰り返し用いて、

$$[b_i] + S = S + [b_i] = [[b_i + c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]] = [[a_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

となる。よって、

$$[[a_1], [a_2], \dots, [b_i] + S] = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{i-1}], [[a_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]] = T$$

である。また、

$$[[b_i], [0], [c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]] = [[b_i], [0], S] = [b_i] + \frac{1}{[0] + \frac{1}{S}} = [b_i] + S$$

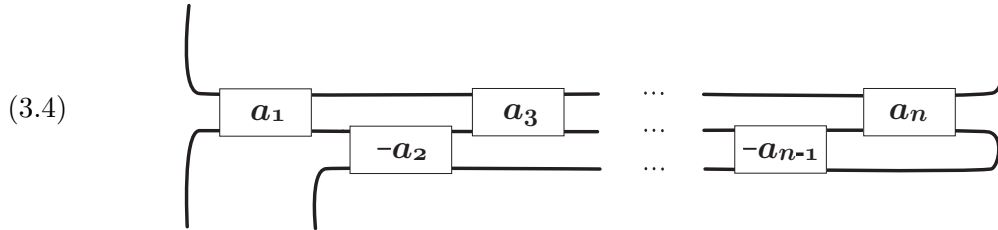
であるから、

$$[[a_1], [a_2], \dots, [a_{i-1}], [b_i], [0], [c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]] = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{i-1}], [b_i] + S] = T$$

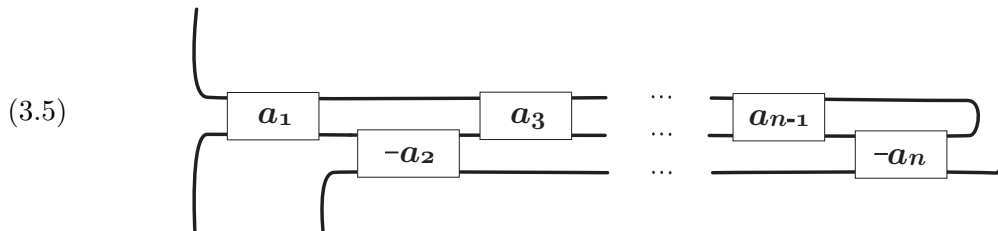
も成り立つ。 □

**例 3-17** 有理タンゲル図式  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  は次の図のように表わされる有理タンゲル図式に同値である。

- $n$  が奇数のとき、



- $n$  が偶数のとき、



但し、

$$\boxed{n} = \begin{cases} \overleftarrow{\text{X} \cdots \text{X}}^n & (n \geq 0), \\ \overleftarrow{\text{X} \cdots \text{X}}^{-n} & (n < 0) \end{cases}$$

**(証明)**

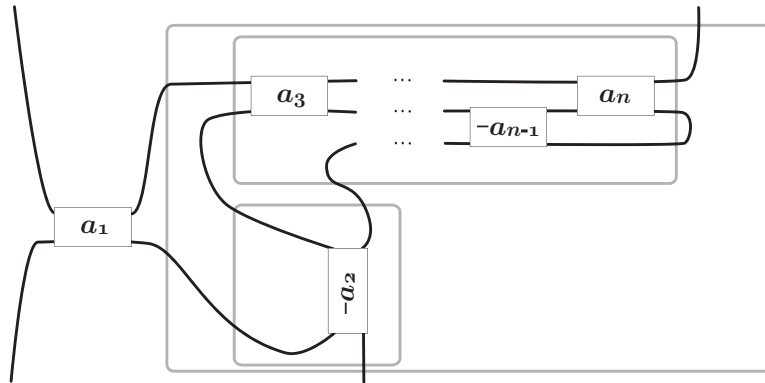
- $n$  が奇数のとき、数学的帰納法で証明する。

$n = 1$  ならば証明することは何もない。

$n \geq 3$  を奇数とし、 $n - 2$  のときに (3.4) の形に表わされると仮定する。  $T' = [[a_3], \dots, [a_n]]$  とおくと、補題 3-13 より、

$$T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{T'}} = [a_1] + \left( T' * \frac{1}{[a_2]} \right)$$

であるから、 $T$  は次の形のタンゲル図式に同値である。



これは (3.4) の形に変形することができる。

- $n$  が偶数のときも同様に数学的帰納法で証明することができる。

□

### 定理 3-18

$[0]$  と  $[\infty]$  を除く任意の有理タングルは次の条件のいずれかを満たす連分数形式  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  で表わすことができる。

- (i) すべての  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は正である。
- (ii) すべての  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は負である。
- (iii)  $a_1 = 0$ ,  $n \geq 2$  かつ、すべての  $a_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) は正である。
- (iv)  $a_1 = 0$ ,  $n \geq 2$  かつ、すべての  $a_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) は負である。

有理タングル  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  が (i) または (iii) を満たすとき**正** (*positive*) であると呼ばれ、(ii) または (iv) を満たすとき**負** (*negative*) であると呼ばれる。

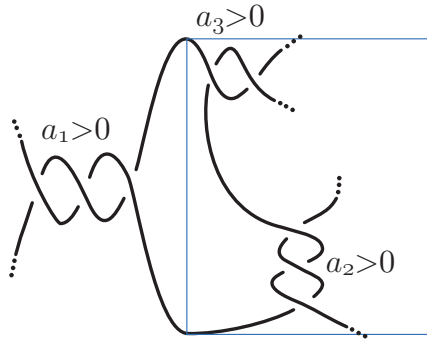
**注意** :  $n$  は奇数にとることができる。このとき、定理の条件 (i), (ii), (iii), (iv) のいずれかを満たす有理タングル図式  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  を**正準形** (*canonical form*) と呼ぶ。

この定理を証明する前に、定理から直ちにわかる結果を紹介しよう。

タングルが**交代的** (*alternating*) であるとは、交代図式をもつときをいう。ここで、タングル図式が**交代図式** (*alternating diagram*) であるとは、タングル図式上の任意の点から出発して、タングル上を移動して交差点を通過していくとき、交差点の上側を通るときと下側を通るときとが交互に現れるときをいう。有理タングルの連分数表示が正または負であるとき、その図式は交代的である。(∵ 連分数表示の「長さ」に関する帰納法で示すことができる。次図参照)。したがって、定理 3-18 より次を得る。

### 系 3-19

任意の有理タングルは交代的である。



上の事実は 2 本橋絡み目 (two-bridge link) が交代的であるという Bankwitz と Schumann の結果 [5] のタングル版である。

さて、定理 3-18 の証明に関心を向けよう。次の補題が必要である。

**補題 3-20**

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  とし、有理タングル  $t$  の (定義 3-14 の下の注意の意味での) 連分数表示  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  を考える。 $a_{i-1}, a_i$  が異符号である (すなわち、 $a_{i-1}a_i < 0$  を満たす) ような  $i \in \{2, \dots, n\}$  の個数をその連分数表示の符号逆転数と呼ぶことにし、これを  $r(T)$  で表わす。また、 $n$  を連分数表示  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  の長さといい、 $\ell(T)$  で表わす。  
 (1)  $n \geq 3$  とし、 $a_n \neq 0$ , かつ、 $a_2, \dots, a_{n-1}$  の中に 1 つだけ 0 が含まれていると仮定し、それが  $a_i$  であったとする。このとき、有理タングルとして  $T$  と同値な

$$T' = [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [a_{i-1} + a_{i+1}], [a_{i+2}], \dots, [a_n]]$$

の符号逆転数と長さの和に関して次の不等式が成立する：

$$r(T') + \ell(T') < r(T) + \ell(T).$$

(2)  $T \neq [\infty]$  とし、 $a_2, \dots, a_n$  の中に 1 つだけ 0 が含まれていると仮定する。このとき、次の条件を満たす有理タングルの連分数表示  $S$  が存在する：

- (i) 有理タングルとして  $S$  は  $T$  と同値である。
- (ii)  $r(S) + \ell(S) < r(T) + \ell(T)$ .
- (iii)  $S$  は第 2 項以降に  $[0]$  を含まない。

**(証明)**

(1)  $\ell(T') = \ell(T) - 2$  である。 $T'$  の定義より、 $a_1, \dots, a_{i-2}$  において  $a_{k-1}a_k < 0$  であるような  $k$  の個数を  $p$  とし、 $a_{i+2}, \dots, a_n$  において  $a_{k-1}a_k < 0$  であるような  $k$  の個数を  $q$  とする。 $r(T') \leq r(T) + 1$  を示せばよい。

•  $a_{i-2} > 0, a_{i+2} > 0$  のとき：

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} > 0$  であり、 $r(T') = p + q = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $r(T) = p + q + 1$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 2 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $r(T) = p + q + 1$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 2 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} < 0$  であり、 $r(T) = p + q + 2$  で、 $r(T') = p + q + 2 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

•  $a_{i-2} > 0, a_{i+2} < 0$  のとき：

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} > 0$  であり、 $r(T') = p + q + 1 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $r(T) = p + q$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $r(T) = p + q + 2$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} < 0$  であり、 $r(T) = p + q + 1$  で、 $r(T') = p + q + 1 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

•  $a_{i-2} < 0, a_{i+2} > 0$  のとき：

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} > 0$  であり、 $r(T') = p + q + 1 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $r(T) = p + q + 2$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $r(T) = p + q$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q + 1 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} < 0$  であり、 $r(T) = p + q + 1$  で、 $r(T') = p + q + 1 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

•  $a_{i-2} < 0, a_{i+2} < 0$  のとき：

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} > 0$  であり、 $r(T') = p + q + 2 = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} > 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $r(T) = p + q + 1$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 2 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} > 0$  ならば  $r(T) = p + q + 1$  で、

$$r(T') = \begin{cases} p + q + 2 & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} > 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} = 0), \\ p + q & (\text{if } a_{i-1} + a_{i+1} < 0) \end{cases}$$

である。よって、 $r(T') \leq r(T) + 1$  である。

$a_{i-1} < 0, a_{i+1} < 0$  ならば  $a_{i-1} + a_{i+1} < 0$  であり、 $r(T) = p + q$  で、 $r(T') = p + q = r(T) \leq r(T) + 1$  である。

以上より、どの場合にも  $r(T') \leq r(T) + 1$  が成り立つことが示された。

(2) 連分数表示の符号逆転数と長さの和に関する数学的帰納法で証明する。

$r(T) + \ell(T) = 1$  であり、 $[0]$  が 1 つだけ含まれているような有理タングルの連分数表示  $T$  を考える。 $\ell(T) \geq 1$  なので、 $\ell(T) = 1, r(T) = 0$  の場合しかない。つまり、 $T = [0]$  であるから、(2) の 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たしている (と考えられる)。

次に、 $m$  を 2 以上の整数とし、 $r(T) + \ell(T) < m$  を満たし、第 2 項以降に  $[0]$  が 1 つだけ含まれているような任意の有理タングルの連分数表示  $T$  に対しては 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす  $S$  が存在すると仮定する。今、 $r(T) + \ell(T) = m$  を満たし、第 2 項以降に  $[0]$  が 1 つだけ含まれているような有理タングルの連分数表示  $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$  を考える ( $a_i = 0$  とする)。

$i < n$  の場合、(1) のように  $T'$  を作ると  $r(T') + \ell(T') < m$  となる。

$a_1 \neq 0$  かつ  $a_{i-1} + a_{i+1} \neq 0$  の場合、 $T'$  には  $[0]$  の項はないので、 $T'$  は 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。

$a_1 = 0$  かつ  $a_{i-1} + a_{i+1} \neq 0$  の場合、 $T'$  において初項のみ  $[0]$  なので、 $T'$  は 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。

$a_1 \neq 0$  かつ  $a_{i-1} + a_{i+1} = 0$  の場合を考える。  $i = 2$  ならば、  $T'$  において初項のみ  $[0]$  なので、  $T'$  は 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。  $i \geq 3$  ならば、  $T' = [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [0], [a_{i+2}], \dots, [a_n]]$  の形である。これは第 2 項以降に  $[0]$  が 1 つだけ含まれているような連分数表示であり、  $r(T') + \ell(T') < m$  であるから、帰納法の仮定により、  $T'$  は、  $r(S) + \ell(S) < r(T') + \ell(T')$  を満たす有理数の連分数表示  $S$  であって、第 2 以降に  $[0]$  を含まないものと同値になる。よって、この  $S$  が 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。

$a_1 = 0$  かつ  $a_{i-1} + a_{i+1} = 0$  の場合を考える。  $i = 2$  ならば  $a_2 = 0$  であるが、  $a_3 = a_1 + a_3 = 0$  でもある。これは  $T$  において第 2 項以降に  $[0]$  が 1 つだけ含まれているという仮定に矛盾する。よって、  $i \geq 3$  である。このとき、  $T' = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{i-2}], [0], [a_{i+2}], \dots, [a_n]]$  の形である。これは第 2 項以降に  $[0]$  が 1 つだけ含まれているような連分数表示であり、  $r(T') + \ell(T') < m$  であるから、帰納法の仮定により、  $T'$  は、  $r(S) + \ell(S) < r(T') + \ell(T')$  を満たす有理数の連分数表示  $S$  であって、第 2 以降に  $[0]$  を含まないものと同値になる。よって、この  $S$  が 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。

$i = n$  の場合を考える。  $T = [[a_1], \dots, [a_{n-1}], [0]]$  となる。

$n = 2$  ならば  $T = [[a_1], [0]]$  である。  $a_1 = 0$  ならば  $T = [\infty]$  となる。これは  $T \neq [\infty]$  に反する。よって、  $n \geq 3$  である。

$$[[a_{n-2}], [a_{n-1}], [0]] = [a_{n-2}] + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[0]}} = [a_{n-2}] + \frac{1}{[a_{n-1}] + [\infty]} = [a_{n-2}] + \frac{1}{[\infty]} = [a_{n-2}]$$

となるから、  $T$  は有理タングルとして  $T' := [[a_1], \dots, [a_{n-2}]]$  と同値である。

$$r(T') + \ell(T') = \begin{cases} r(T) - 1 + (n - 2) & (a_{n-2}a_{n-1} < 0 \text{ のとき}) \\ r(T) + (n - 2) & (a_{n-2}a_{n-1} > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、  $r(T') + \ell(T') < r(T) + \ell(T) = m$  となる。よって、帰納法の仮定により、  $T'$  は、  $r(S) + \ell(S) < r(T') + \ell(T')$  を満たす有理数の連分数表示  $S$  であって、第 2 項以降に  $[0]$  を含まないものと同値になる。  $S$  は  $T$  と同値であるから、この  $S$  が 3 条件 (i),(ii),(iii) を満たす連分数表示である。

以上により、帰納法が完成し、第 2 項以降に 1 つだけ  $[0]$  が含まれているような任意の連分数表示  $T$  に対して (2) の主張正しいことが証明された。  $\square$

### (定理 3-18 の証明)

有理タングルの連分数形式  $T$  に対して符号逆転数  $r(T)$  と長さ  $\ell(T)$  を補題 3-20 のように定義する。  $r(T) + \ell(T) = 1$  であるような有理タングルの連分数形式  $T$  は  $\ell(T) = 1$  であるから、必然的に正または負の連分数形式である。

次に、  $k$  を 2 以上の自然数とし、  $r(T) + \ell(T) < k$  であるような有理タングルの (定義 3-14 の下の注意の意味での) 連分数形式  $T$  であって、第 2 項以降に 0 が高々 1 個含まれているものに対しては正または負の連分数形式で表わすことができると仮定する。

$r(T) + \ell(T) = k$  かつ  $r(T) = 0$  のとき、  $T$  はそれ自身で正または負の連分数形式である。



$h$  を自然数とし、 $r(T) + \ell(T) = k$  かつ  $r(T) < h$  を満たす任意の有理タングルの連分数形式  $T$  であって、第 2 項以降に  $[0]$  が高々 1 個含まれているものに対しては正または負の連分数形式に表わすことができるものと仮定する。今、 $T$  を  $r(T) + \ell(T) = k$  かつ  $r(T) = h$  であるような有理タングルの連分数形式  $T$  であって、第 2 項以降に  $[0]$  が高々 1 個含まれているものとする。

• 第 2 項以降に  $[0]$  が 1 個含まれているとき：

補題 3-20(2) より  $T$  は  $r(S) + \ell(S) < k$  を満たす連分数形式  $S$  であって、第 2 項以降に  $[0]$  を含まないものに同値になる。帰納法の仮定より、 $S$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。よって、それと同値な  $T$  も正または負の連分数形式で表わすことができる。

• 第 2 項以降に  $[0]$  が含まれていないとき：

$\ell(T) = n$  とおき、 $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  とおくと、 $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  である。 $h + n = k$  である。

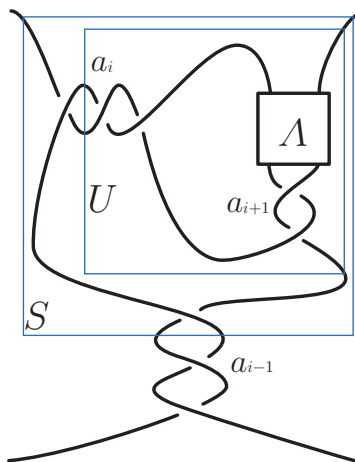
$h \geq 1$  ゆえ、 $a_{i-1}, a_i$  が異符号であるような  $i \in \{2, \dots, n\}$  が存在する。 $a_1$  から順に見ていつて、 $a_{i-1}$  と  $a_i$  の間で初めて符号が変化すると仮定する。次の 4 通りの場合が考えられる。

- I.  $a_{i-1} > 0$  かつ  $i$  が奇数の場合
- II.  $a_{i-1} > 0$  かつ  $i$  が偶数の場合
- III.  $a_{i-1} < 0$  かつ  $i$  が奇数の場合
- IV.  $a_{i-1} < 0$  かつ  $i$  が偶数の場合

まず、I の場合を考察する。この場合、 $T$  における部分タングル

$$S := [[0], [1], [a_i], \dots, [a_n]], \quad U := [[a_i + 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

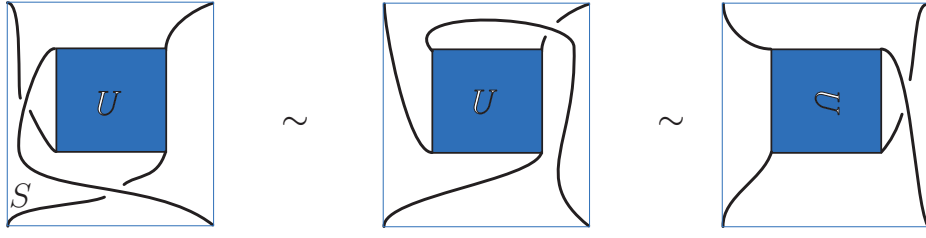
を考える。 $V := [[a_{i+2}], \dots, [a_n]]$  とおく。



ここで、補題 3-9(4) より

$$S = ([-1] + U) * [1] \sim U^{-\text{rot}} + [1] \sim U^{\text{rot}} + [1] = [1] + U^{\text{rot}} = [1] - \frac{1}{U} = [[1], -U]$$

となる (下図参照)。



$$S' := [[1], -U] = [[1], [-a_i - 1], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]]$$

とおくと、

$$\begin{aligned} T &= [[a_1], \dots, [(a_{i-1} - 1) + 1], [a_i], \dots, [a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [0], [1], [a_i], \dots, [a_n]] \quad (\text{補題 3-16(4)}) \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], S] \\ &\sim [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], S'] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [1], [-a_i - 1], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] =: T' \end{aligned}$$

となるのがわかる。 $i \geq 3$  ゆえ  $a_{i-1} \neq 0$  である。したがって、 $a_{i-1} - 1 \geq 0$  である。

$a_i \leq -2$  ならば、 $-a_i - 1 > 0$  であるから、 $r(T') = h - 1$  であり、 $r(T') + \ell(T') = (h - 1) + (n + 1) = h + n = k$  である。帰納法の仮定により、 $T'$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。

$a_i = -1$  とする。

$$T' = [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \quad \dots\dots (*1)$$

となる。 $a_{i-1} \geq 2$  ならば

$$r(T') = \begin{cases} h - 1 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ h - 2 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから

$$r(T') + \ell(T') = \begin{cases} (h - 1) + (n + 1) = k & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ (h - 2) + (n + 1) = k - 1 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。帰納法の仮定により、 $T'$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。

$a_{i-1} = 1$  ならば

$$\begin{aligned} T' &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [0], [1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-2} + 1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] =: T'' \end{aligned}$$

となる。

$$r(T'') = \begin{cases} h - 1 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ h - 2 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}, \quad \ell(T'') = n - 1$$

であるから、

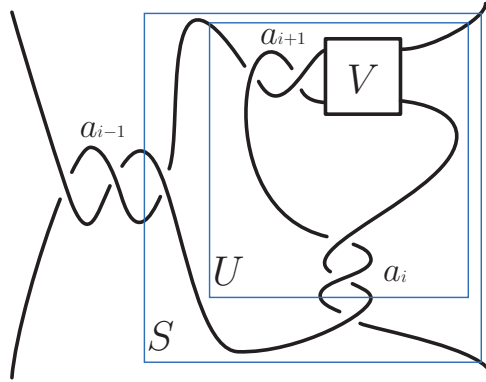
$$r(T'') + \ell(T'') = \begin{cases} k-2 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ k-3 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。よって、帰納法の仮定により、 $T''$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。

次に、II の場合を考える。 $T$  の部分タングル

$$S := [[1], [a_i], \dots, [a_n]], \quad U := [[0], [a_i + 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

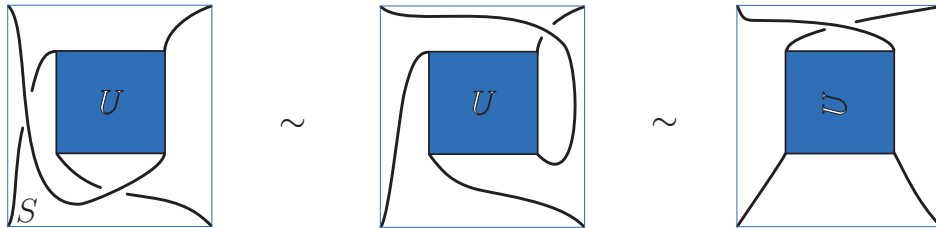
を考える。 $V := [[0], [a_{i+2}], \dots, [a_n]]$  とおく。



ここで、補題 3-13 と補題 3-9(2) より

$$\begin{aligned} S &= [1] + (\mathbf{u} * [-1]) \sim [1] * U^{\text{rot}} = \left(-\frac{1}{U}\right) * [1] \\ &\sim \frac{1}{[1] + (-U)} = [[0], [1], [-(a_i + 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \end{aligned}$$

となる (1 番目の  $\sim$  については次図を参照)。



$$S' := [[0], [1], [-(a_i + 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]]$$

とおくと、

$$\begin{aligned} T &= [[a_1], \dots, [(a_{i-1} - 1) + 1], [a_i], \dots, [a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [0], [1], [a_i], \dots, [a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [0], S] \\ &\sim [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [0], S'] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [0], [0], [1], [-(a_i + 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \end{aligned}$$

$$= [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [1], [-(a_i + 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \quad (\because \text{補題 3-16(4)})$$

となることがわかる。

$$T' := [[a_1], \dots, [a_{i-1} - 1], [1], [-(a_i + 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \quad \dots\dots (*2)$$

とおく。  $a_{i-1} - 1 \geq 0$ ,  $-(a_i + 1) \geq 0$  であるから、これは第 2 項以降に  $[0]$  を高々 2 個含む連分数形式である。

$a_{i-1} - 1 > 0$  または  $-(a_i + 1) > 0$  ならば、(\*2) は第 2 項以降に  $[0]$  を高々 1 個含む連分数形式となり、 $r(T') = h - 1$  であり、 $r(T') + \ell(T') = (h - 1) + (n + 1) = k$  である。帰納法の仮定により  $T'$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。

$a_{i-1} = 1$  かつ  $a_i = -1$  ならば、補題 3-16(4) より

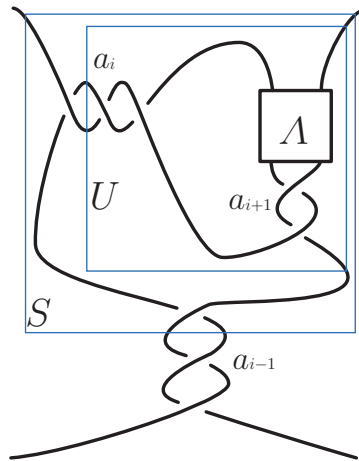
$$\begin{aligned} T' &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [0], [1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-3}], [a_{i-2}], [0], [-a_{i+1} + 1], [-a_{i+2}], \dots, [-a_n]] \\ &= [[a_1], \dots, [a_{i-3}], [a_{i-2} - a_{i+1} + 1], [-a_{i+2}], \dots, [-a_n]] \end{aligned}$$

のように書き換えられる。これは第 2 項以降に  $[0]$  を高々 1 個含む連分数形式であり、 $r(T') \leq h + 1$  であるが、 $r(T') + \ell(T') \leq (h + 1) + (n - 2) = k - 1$  である。したがって、帰納法の仮定により、 $T'$  は正または負の連分数形式で表わすことができる。

次に、Ⅲ の場合を考える。  $T$  の部分タングル

$$S := [[0], [-1], [a_i], \dots, [a_n]], \quad U := [[a_i - 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

を考える。  $V := [[a_{i+2}], \dots, [a_n]]$  とおく。

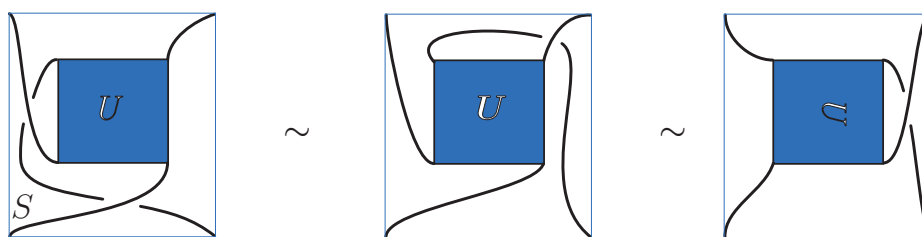


ここで、補題 3-9(4) より

$$S = ([1] + U) * [-1] \sim U^{-\text{rot}} + [-1] \sim U^{\text{rot}} + [-1] = [-1] + U^{\text{rot}} = [-1] - \frac{1}{U} = [[-1], -U]$$

となる (下図参照)。

$$S' := [[-1], -U] = [[-1], [-a_i + 1], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]]$$



とおくと、

$$\begin{aligned}
T &= [[a_1], \dots, [(a_{i-1} + 1) - 1], [a_i], \dots, [a_n]] \\
&= [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], [0], [-1], [a_i], \dots, [a_n]] \quad (\text{補題 3-16(4)}) \\
&= [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], S] \\
&\sim [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], S'] \\
&= [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], [-1], [-a_i + 1], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] =: T'
\end{aligned}$$

となることがわかる。 $i \geq 3$  より、 $a_{i-1} \neq 0$  である。したがって、 $a_{i-1} + 1 \leq 0$  である。

$a_i \geq 2$  ならば、 $r(T') = h - 1$  であり、 $r(T') + \ell(T') = (h - 1) + (n + 1) = k$  となる。帰納法の仮定により、 $T'$  は正または負の連分数展開で表わすことができる。

$a_i = 1$  ならば、

$$T' = [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], [-1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]]$$

となる。 $a_{i-1} < -1$  の場合、

$$r(T') = \begin{cases} h - 1 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ h - 2 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、

$$r(T') + \ell(T') = \begin{cases} (h - 1) + (n + 1) = k & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ (h - 2) + (n + 1) = k - 1 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって、帰納法の仮定により、 $T'$  は正または負の連分数展開で表わすことができる。

$a_{i-1} = -1$  の場合、

$$\begin{aligned}
T' &= [[a_1], \dots, [a_{i-2}], [0], [-1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \\
&= [[a_1], \dots, [a_{i-2} - 1], [0], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] =: T''
\end{aligned}$$

となる。

$$r(T'') = \begin{cases} h - 1 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ h - 2 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、

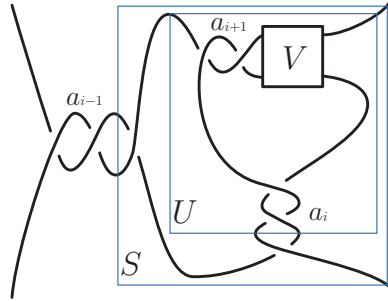
$$r(T'') + \ell(T'') = \begin{cases} (h - 1) + (n - 1) = k - 2 & (\lceil a_i a_{i+1} > 0 \text{ かつ } i < n \rceil \text{ または } i = n \text{ のとき}), \\ (h - 2) + (n - 1) = k - 3 & (a_i a_{i+1} < 0 \text{ かつ } i < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって、帰納法の仮定により、 $T''$  は正または負の連分数展開で表わすことができる。

最後に、Ⅳの場合を考える。\$T\$ の部分タンゲル

$$S := [[-1], [a_i], \dots, [a_n]], \quad U := [[0], [a_i - 1], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$$

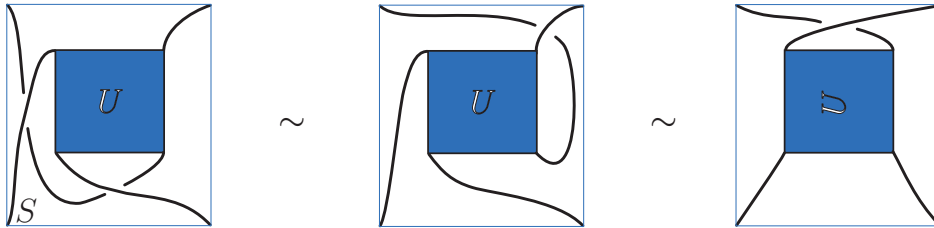
を考える。\$V := [[0], [a\_{i+2}], \dots, [a\_n]]\$ とおく。



ここで、補題 3-13 と補題 3-9(2) より

$$\begin{aligned} S &= [-1] + (U * [1]) \sim [-1] * U^{\text{rot}} = \left(-\frac{1}{U}\right) * [-1] \\ &\sim \frac{1}{[-1] + (-U)} = [[0], [-1], [-(a_i - 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] \end{aligned}$$

となる (1 番目の \$\sim\$ については次図を参照)。



$$S' := [[0], [-1], [-(a_i - 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]]$$

とおくと、Ⅱの場合と同様の計算により、

$$\begin{aligned} T &= [[a_1], \dots, [(a_{i-1} + 1) - 1], [a_i], \dots, [a_n]] \\ &\sim [[a_1], \dots, [a_{i-1} + 1], [-1], [-(a_i - 1)], [-a_{i+1}], \dots, [-a_n]] =: T' \quad \dots\dots (*3) \end{aligned}$$

を得る。

\$a\_{i-1} + 1 < 0\$ または \$-(a\_i - 1) < 0\$ ならば、(\*3) は第 2 項以降に \$[0]\$ を高々 1 個含む連分数形式となり、\$r(T') = h - 1\$ であり、\$r(T') + \ell(T') = (h - 1) + (n + 1) = k\$ である。よって、帰納法の仮定により、\$T'\$ は正または負の連分数形式で表わすことができる。

\$a\_{i-1} = -1\$ かつ \$a\_i = 1\$ ならば、Ⅱの場合と同様の計算により、

$$T' = [[a_1], \dots, [a_{i-3}], [a_{i-2} - a_{i+1} + 1], [-a_{i+2}], \dots, [-a_n]]$$

のように書き換えられる。\$r(T') + \ell(T') \le (h + 1) + (n - 2) = k - 1\$ であるから、帰納法の仮定により、\$T'\$ は正または負の連分数形式で表わすことができる。

以上より、定理は証明された。

□

#### §4. 有理タングルの分類

この節では、Conway により示された有理タングルの分類結果を Kauffman と Lambropoulou により与えられた初等的な方法 [52] で証明する。

##### ● 4-1 : 有理タングルの連分数形式とその不変量の構成

$x, y \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  (但し、 $(x, y) \neq (0, 0)$ ) に対して  $x * y \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を

$$(4.1) \quad x * y := \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

によって定義する。但し、

$$\infty * x = x * \infty = x,$$

$$\infty * 0 = 0 * \infty = 0,$$

$$\infty * \infty = \infty$$

と約束する。 $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$  に注意する。このように定義される  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  上の積  $*$  は可換であり、結合法則を満たすことがわかる (結合法則  $(x * y) * z = x * (y * z)$  は  $x = y = 0$  または  $y = z = 0$  であるときを除く他、 $x * y = 0$ ,  $z = 0$  または  $x = 0$ ,  $y * z = 0$  となるときも除くすべての  $x, y, z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して考える)。

$$\frac{1}{x} * \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y} \quad (x, y \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, (x, y) \neq (\infty, \infty))$$

が成立する。

**演習.** 上記のことを確かめよ。

各  $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  に対して  $F([n]), F\left(\frac{1}{[n]}\right) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を

$$(4.2) \quad F([n]) := n, \quad F\left(\frac{1}{[n]}\right) := \frac{1}{n}$$

と定義する。第 3 節の約束により、 $\frac{1}{[0]} = [\infty]$ ,  $\frac{1}{[\infty]} = [0]$  であるが、

$$F([\infty]) = \infty = \frac{1}{0} = F\left(\frac{1}{[0]}\right), \quad F([0]) = 0 = \frac{1}{\infty} = F\left(\frac{1}{[\infty]}\right)$$

であるから、(4.2) によって  $F([n]), F\left(\frac{1}{[n]}\right)$  は矛盾なく定義されている。

一般に、有理タングルの連分数形式

$$T = [[a_1], [a_2], [a_3], \dots, [a_n]] \quad (a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z})$$

に対して  $F(T) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を

$$F(T) = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$$

によって定義する (注: この段階では連分数形式  $[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  を有限列  $[a_1], [a_2], \dots, [a_n]$  と考えて形式的に対応させている)。

**補題 4-1**

有理タングルの連分数形式  $T = [[a_1], \dots, [a_n]]$  に対して上記のように定まる  $F(T)$  は以下の性質を満たす。  $k \in \mathbb{Z}$  に対して

- (1)  $F(T + [k]) = F(T) + k$ .
- (2)  $F\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{F(T)}$ .
- (3)  $F(-T) = -F(T)$ .
- (4)  $F\left(T * \frac{1}{[k]}\right) = F(T) * \frac{1}{k}$ .
- (5)  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  を固定し、  $T' := [[a_{i+1}], \dots, [a_n]]$  とおくと、  $F(T) = [a_1, \dots, a_i, F(T')]$ .
- (6)  $i \in \{2, \dots, n\}$  を固定し、  $a_i$  が  $a_i = b_i + c_i$  ( $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ ) と表わされているとし、  $S = [[c_i], [a_{i+1}], \dots, [a_n]]$  とおく。このとき、

$$F(T) = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + F(S)] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, F(S)].$$

**(証明)**

(1)  $T + [k] = [[a_1 + k], [a_2], \dots, [a_n]]$  より、  $F(T)$  の定義より、  $F(T + [k]) = [a_1 + k, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n] + k = F(T) + k$  を得る。

(2) 補題 3-16(2) より  $\frac{1}{T} = [[0], [a_1], \dots, [a_n]]$  であるから、

$$F\left(\frac{1}{T}\right) = F([[0], [a_1], \dots, [a_n]]) = [0, a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} = \frac{1}{F(T)}$$

を得る。

(3) 補題 3-16(3) と補題 2-10(3) より

$$F(-T) = F([-a_1], [-a_2], \dots, [-a_n]) = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n] = -[a_1, a_2, \dots, a_n] = -F(T)$$

を得る。

(4) 補題 3-13 より  $T * \frac{1}{[k]} = \frac{1}{[k] + \frac{1}{T}} = [[0], [k], [a_1], \dots, [a_n]]$  であるから、

$$\begin{aligned} F\left(T * \frac{1}{[k]}\right) &= F([[0], [k], [a_1], \dots, [a_n]]) = [0, k, a_1, \dots, a_n] = [0, k, [a_1, \dots, a_n]] \\ &= \frac{1}{k + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}} = \frac{1}{k + \frac{1}{F(T)}} = F(T) * \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(5) は連分数形式  $T$  に対する  $F(T)$  の定義より自明である。

(6)  $F(T) = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]] = [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i + F(S)]$  であり、補題 2-10(4) より

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, F(S)] &= [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, [c_i, a_{i+1}, \dots, a_n]] \\ &= [a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, 0, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n] \\ &= [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n] = F(T) \end{aligned}$$

を得る。 □



● 4-2 : タングルの整数彩色と  $F(T)$  の位相不変性

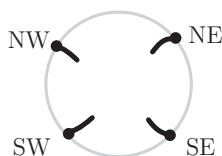
$F(T)$  がタングルの位相不変量であることを示すために、 $F(T)$  を別の方法で定義する。その方法は、1956年頃 Fox [25] により導入された結び目図式の彩色数のアイデアが基になっている。Fox は部分弧を「3色で色分け」することで、三葉結び目が自明でないことが証明可能であることを示した。彩色数については [73], [74], [84] に入門的な説明があるので参照するとよい。

以下、タングルの場合の彩色数を説明する。 $T$  を 2-タングル図式とする。 $T$  の**部分弧**とは  $T$  の中の下交差点から次の下交差点までの部分を意味する。 $T$  の**整数彩色** (*integral coloring*) とは、 $T$  の各部分弧に対して整数を割り当てる方法、すなわち、写像  $\lambda : \{T \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  であって、その割り当て方が各交差点において次図で表わされている状況のとき ( $a, b, c$  はその部分弧に割り当てられた整数彩色を表わす)、 $a + c = 2b$  を満たすものをいう。



$T$  の整数彩色の全体を  $\text{Col}(T)$  で表わす。

2-タングル  $T$  の 4 つの端点 NW, NE, SW, SE を図のように定め、各  $\lambda \in \text{Col}(T)$  に対して NW, NE, SW, SE を含む辺の整数彩色をそれぞれ  $\lambda(\text{NW}), \lambda(\text{NE}), \lambda(\text{SW}), \lambda(\text{SE})$  で表わす。



このとき、関数  $M_T : \text{Col}(T) \rightarrow M(2, \mathbb{Z})$  を

$$M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\text{NW}) & \lambda(\text{NE}) \\ \lambda(\text{SW}) & \lambda(\text{SE}) \end{pmatrix}$$

によって定義する。ここで、 $M(2, \mathbb{Z})$  は整数係数の 2 次正方行列の全体である。

$$\begin{pmatrix} \lambda(\text{NW}) & \lambda(\text{NE}) \\ \lambda(\text{SW}) & \lambda(\text{SE}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおき、 $a = b = d$  となる  $\lambda \in \text{Col}(T)$  を除いた整数彩色の全体を  $\text{Col}^-(T)$  とおく。関数  $f_T : \text{Col}^-(T) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  を

$$(4.3) \quad f_T(\lambda) := \frac{b - a}{b - d}$$

と定める。

$\lambda \in \text{Col}(T)$  が**対角和規則** (*diagonal sum rule*) を満たすとは  $\lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) = \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW})$  が成り立つときをいう。

**補題 4-2**

$S, T$  を 2-タンゲル図式とする。

(1)  $\lambda \in \text{Col}(S+T)$  を  $S, T$  の部分弧に制限することにより得られる整数彩色をそれぞれ  $\lambda|_S, \lambda|_T$  で表わす。  $M_S(\lambda|_S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $M_T(\lambda|_T) = \begin{pmatrix} b & e \\ d & f \end{pmatrix}$  ならば  $M_{S+T}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$  であり、 $\lambda|_T$  が対角和規則を満たし、 $\lambda \in \text{Col}^-(S+T)$  かつ  $\lambda|_S \in \text{Col}^-(S)$ ,  $\lambda|_T \in \text{Col}^-(T)$  ならば、次式が成立する：

$$f_{S+T}(\lambda) = f_S(\lambda|_S) + f_T(\lambda|_T).$$

(2) 任意の  $\lambda \in \text{Col}(T)$  は  $T$  の回転  $T^{\text{rot}}$  の整数彩色とみなすことができ、それを  $\lambda^{\text{rot}}$  とおくと  $M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ならば  $M_{T^{\text{rot}}}(\lambda^{\text{rot}}) = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$  となる。さらに、 $\lambda$  が対角和規則を満たしているならば、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  に対して  $\lambda^{\text{rot}} \in \text{Col}^-(T^{\text{rot}})$  となり次式が成立する：

$$f_{T^{\text{rot}}}(\lambda^{\text{rot}}) = -\frac{1}{f_T(\lambda)}.$$

(3)  $T' := (-T)^{\text{flip}}$  を  $T$  の**垂直鏡映** (*vertical reflect*) と呼ぶ。任意の  $\lambda \in \text{Col}(T)$  は  $T'$  の整数彩色とみなすことができ、それを  $\lambda'$  とおくと  $M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ならば  $M_{T'}(\lambda') = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$  となる。さらに、 $\lambda$  が対角和規則を満たしているならば、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  に対して  $\lambda' \in \text{Col}^-(T')$  となり次式が成立する：

$$f_{T'}(\lambda') = -f_T(\lambda).$$

**(証明)**

(1)  $M_S(\lambda|_S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $M_T(\lambda|_T) = \begin{pmatrix} b & e \\ d & f \end{pmatrix}$  のとき  $M_{S+T}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$  となることは自明とってよいであろう。さらに、 $\lambda|_T$  が対角和規則を満たすとき、

$$\begin{aligned} f_S(\lambda|_S) + f_T(\lambda|_T) &= \frac{b-a}{b-d} + \frac{e-b}{e-f} \\ &= \frac{b-a}{e-f} + \frac{e-b}{e-f} \quad (\lambda|_T \text{ は対角和規則を満たす}) \\ &= \frac{e-a}{e-f} \\ &= f_{S+T}(\lambda). \end{aligned}$$

(2)  $T$  の部分弧と  $T$  の回転  $T^{\text{rot}}$  の部分弧は 1 対 1 に対応するから、 $T$  の整数彩色は  $T^{\text{rot}}$  の整数彩色とみなすことができる。このとき、 $M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ならば明らかに  $M_{T^{\text{rot}}}(\lambda^{\text{rot}}) = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$  となる。 $\lambda$  が対角和規則を満たしているならば、

$$d - c = b - a$$

であるから、

$$f_{T^{\text{rot}}}(\lambda^{\text{rot}}) = \frac{d-b}{d-c} = \frac{d-b}{b-a} = -\frac{1}{f_T(\lambda)}$$

となる。

(3)  $T$  の部分弧と  $T$  の回転  $T'$  の部分弧は 1 対 1 に対応するから、 $T$  の整数彩色は  $T'$  の整数彩色とみなすことができる。このとき、 $M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ならば明らかに  $M_{T'}(\lambda') = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

となる。さらに、 $\lambda$  が対角和規則を満たしているならば、

$$a - c = b - d$$

であるから、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、

$$f_{T'}(\lambda') = \frac{a-b}{a-c} = \frac{a-b}{b-d} = -f_T(\lambda)$$

となる。 □

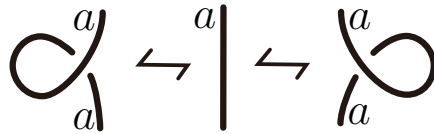
**補題 4-3**

2-タングル図式  $T$  に Reidemeister 移動 (RI), (RII), (RIII) のうちどれかを 1 回施して得られる 2-タングル図式を  $T'$  とおくと、全単射  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  が存在し、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$ ,  $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  となる。

(証明)

–  $T'$  が  $T$  から Reidemeister 移動 (RI) を施して得られているとき：

(RI) を施す  $T$  の部分弧を  $A$  とおくと、 $A$  は (RI) によって新たに生じた交差点で 2 つの部分弧に分けられる。それらを  $A_1, A_2$  とおくと、彩色条件より  $\lambda': \{ T' \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  が  $T'$  のカラーであるためには、 $\lambda'(A_1) = \lambda'(A_2)$  でなければならない。



よって、各  $\lambda \in \text{Col}(T)$  に対して  $\lambda': \{ T' \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\lambda'(E) = \begin{cases} \lambda(E) & (E \neq A \text{ のとき}), \\ \lambda(A) & (E = A_1 \text{ または } E = A_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば、 $\lambda' \in \text{Col}(T')$  であり、写像  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  を  $\varphi(\lambda) = \lambda'$  によって定義すると、全単射であることがわかる。さらに、 $\lambda'$  の作り方から  $M_{T'}(\lambda') = M_T(\lambda)$  であり、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、 $f_{T'}(\lambda') = f_T(\lambda)$  であることがわかる。したがって、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$ ,  $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  が成り立つ。

•  $T'$  が  $T$  から Reidemeister 移動 (RII) を施して得られているとき：

$T$  に (RII) を施して 2 つの正の交差点または 2 つの負の交差点が生じたものを  $T'$  とする。 $\lambda \in \text{Col}(T)$  によって、図の中央のように、部分弧  $A, B$  にカラーが割り当てられているとする。但し、 $A$  は (RII) を施したあとに上を通る弧になる方としておく。(RII) によって新たに生じる部分弧を  $C$  とおき、 $A, B$  に対応する部分弧をそれぞれ  $A', B'$  とおく。このとき、写像  $\lambda': \{ T' \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\lambda'(E) = \begin{cases} \lambda(E) & (E \neq A', B', C \text{ のとき}), \\ \lambda(A) & (E = A' \text{ のとき}) \\ \lambda(B) & (E = B' \text{ のとき}) \\ 2\lambda(A) - \lambda(B) & (E = C \text{ のとき}) \end{cases}$$

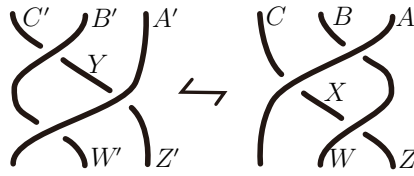
によって定義する。

$$\begin{array}{c} a \\ c \\ a \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} b \\ b \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} a \\ | \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} b \\ | \\ | \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} b \\ b \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} a \\ c \\ a \end{array}$$

$\lambda' \in \text{Col}(T')$  であり、写像  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  を  $\varphi(\lambda) = \lambda'$  によって定義すると、全単射であることがわかる。さらに、 $\lambda'$  の作り方から  $M_{T'}(\lambda') = M_T(\lambda)$  であり、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、 $f_{T'}(\lambda') = f_T(\lambda)$  であることがわかる。したがって、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$ ,  $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  が成り立つ。

•  $T'$  が  $T$  から Reidemeister 移動 (RIII) を施して得られているとき：

$T, T'$  はそれぞれ下図左と右の部分だけが異なっているものとする。 $A, B, C, X, Z, W$  を下図右のように与えられる  $T$  の部分弧とし、 $A', B', C', Y, Z', W'$  を下図左のように与えられる  $T'$  の部分弧とする。



$\lambda \in \text{Col}(T)$  とすると、彩色条件より

$$\lambda(B) + \lambda(W) = 2\lambda(A), \quad \lambda(C) + \lambda(X) = 2\lambda(A), \quad \lambda(Z) + \lambda(X) = 2\lambda(W)$$

が満たされている。このとき、

$$2\lambda(B) - \lambda(C) = 2\lambda(A) - \lambda(Z)$$

が成立する。

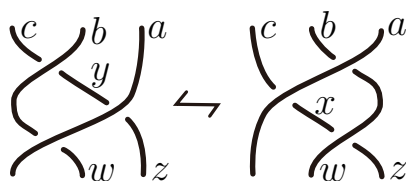
∴)

$$\left| \begin{array}{l} 2\lambda(B) + 2\lambda(W) = 4\lambda(A) \text{ の両辺から } \lambda(C) + \lambda(X) = 2\lambda(A) \text{ を引くと } 2\lambda(B) + 2\lambda(W) - \\ \lambda(C) - \lambda(X) = 2\lambda(A) \text{ となる。} \lambda(Z) + \lambda(X) = 2\lambda(W) \text{ より } 2\lambda(W) - \lambda(X) = \lambda(Z) \text{ で} \\ \text{ある。よって、} 2\lambda(B) - \lambda(C) + \lambda(Z) = 2\lambda(A) \text{ を得る。} \end{array} \right. \quad \square$$

これより、写像  $\lambda': \{ T' \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\lambda'(E) = \begin{cases} \lambda(E) & (E \neq A', B', C', Z', W' \text{ のとき}), \\ \lambda(A) & (E = A' \text{ のとき}) \\ \lambda(B) & (E = B' \text{ のとき}) \\ \lambda(C) & (E = C' \text{ のとき}) \\ \lambda(Z) & (E = Z' \text{ のとき}) \\ \lambda(W) & (E = W' \text{ のとき}) \\ 2\lambda(B) - \lambda(C) & (E = Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義すると、これは  $T'$  の整数彩色であることがわかる。



写像  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  を  $\varphi(\lambda) = \lambda'$  によって定義すると、全単射であることがわかる。さらに、 $\lambda'$  の作り方から  $M_{T'}(\lambda') = M_T(\lambda)$  であり、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、 $f_{T'}(\lambda') = f_T(\lambda)$  であることがわかる。したがって、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$ ,  $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  が成り立つ。□

#### 補題 4-4

$T$  が有理タングル図式ならば、任意の  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  は対角和規則を満たし、 $f_T(\lambda) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  は  $\lambda$  に依らない定数である。

(証明)

$T'$  を  $T$  に有限回 Reidemeister 移動を施して得られるタングル図式とする。補題 4-3 より全単射  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  が存在して、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$ ,  $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  が成り立つ。今、 $T$  に対して補題が成り立つと仮定すると、 $T'$  に対しても補題は成り立つ。

∴)

$\lambda \in \text{Col}(T)$  に対して  $\lambda' := \varphi(\lambda) \in \text{Col}(T')$  と定める。 $T$  に対しては補題は成り立つと仮定しているから、

$$\lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) = \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW})$$

$M_T(\lambda) = M_{T'}(\lambda')$  であるから、

$$\lambda'(\text{NW}) + \lambda'(\text{SE}) = \lambda'(\text{NE}) + \lambda'(\text{SW})$$

である。さらに、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、 $\lambda' \in \text{Col}^-(T')$  であり、 $f_{T'}(\lambda') = f_T(\lambda)$  であるから、 $f_T(\lambda)$  が  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  の選び方に依らない定数であれば、 $f_{T'}(\lambda')$  も  $\lambda' \in \text{Col}^-(T')$  の選び方に依らない定数である。□

したがって、 $T$  が有理タングルの標準形である場合に補題を証明すればよい。そこで、

$$T = \left( \cdots \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$$

$(a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\})$  であり、 $[a_1]$  は  $[0]$  でもよく、 $[a_n]$  は  $[\infty]$  でもよい) としておく。帰納法で示す。

I.  $n = 1$  のとき：

$T = [a_1]$  ( $a_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ) の形である。

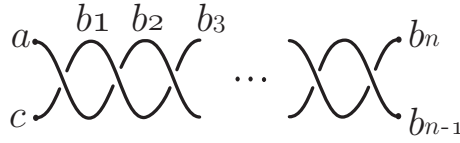
$T = [n]$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) とし、 $a := \lambda(\text{NW})$ ,  $c := \lambda(\text{SW})$  とおく。すると彩色条件より  $T = [n]$  の他の部分弧の彩色は一意的に決まり、特に、

$$\lambda(\text{NE}) = (n+1)a - nc, \quad \lambda(\text{SE}) = na - (n-1)c$$

となる。

∴)

$n > 0$  の場合、 $\lambda$  による各部分弧の彩色が図のようになっているとする。

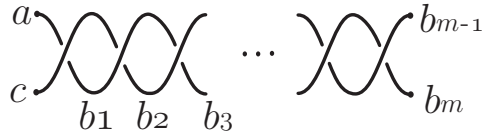


このとき、

$$\begin{cases} b_1 = 2a - c, \\ b_2 = 2b_1 - a = 3a - 2c, \\ b_3 = 2b_2 - b_1 = 4a - 3c, \\ \vdots \\ b_n = \dots = (n+1)a - nc \end{cases}$$

である。特に、 $\lambda(\text{NE}) = b_n = (n+1)a - nc$ ,  $\lambda(\text{SE}) = b_{n-1} = na - (n-1)c$  である。この等式は  $n = 0$  でも成り立つ。

$n < 0$  の場合も  $m = -n$  において同様の考察を行う。



$$\lambda(\text{NE}) = b_{m-1} = mc - (m-1)a = (n+1)a - nc,$$

$$\lambda(\text{SE}) = b_m = (m+1)c - ma = na + (-n+1)c$$

であることがわかる。よって、 $n < 0$  の場合も同じ式が成り立つ。 □

よって、

$$\begin{aligned} \lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) &= a + (na - (n-1)c) \\ &= (n+1)a + (-n+1)c = ((n+1)a - nc) + c \\ &= \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW}) \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、

$$f_T(\lambda) = \frac{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{NW})}{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{SE})} = \frac{(n+1)a - nc - a}{(n+1)a - nc - (na - (n-1)c)} = \frac{n(a-c)}{a-c} = n$$

となるので、 $\lambda$  に依らない定数である。

$T = [\infty]$  ならば、 $M_T(\lambda)$  は  $a, b \in \mathbb{Z}$  として  $M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$  の形になる。よって、

$$\lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) = a + b = \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW})$$

が成り立つ。 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、 $b \neq a$  であるから

$$f_T(\lambda) = \frac{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{NW})}{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{SE})} = \frac{b - a}{b - b} = \infty$$

となり、 $f_T(\lambda)$  は  $\lambda$  に依らない定数である。

II. 標準形の有理タングル図式  $S$  に対しては補題の主張は成立していると仮定する。このとき、 $T := S * \frac{1}{[n]}$  ( $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ) に対しても補題の主張が成り立つことを示す。

$\lambda \in \text{Col}(T)$  とすると、 $S$  上の部分弧に制限することにより  $S$  の整数彩色が得られる。それを  $\lambda|_S$  で表わすことにする。

$$M_S(\lambda|_S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく。帰納法の仮定より  $a + d = b + c$  であり、 $f_S(\lambda|_S)$  は  $S$  の整数彩色  $\lambda|_S$  の選び方に依らない。彩色条件より  $T = [n]$  のときと同様にして

$$\lambda(\text{SW}) = (n+1)c - nd, \quad \lambda(\text{SE}) = nc - (n-1)d$$

であることがわかる。

よって、

$$\begin{aligned} \lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) &= a + (nc - (n-1)d) \\ &= (b + c - d) + (nc - (n-1)d) \\ &= b + ((n+1)c - nd) = \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW}) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、

$$f_T(\lambda) = \frac{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{NW})}{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{SE})} = \frac{b - a}{b - (nc - (n-1)d)} = \frac{b - a}{(b - d) + n(d - c)}$$

となる。帰納法の仮定より、 $k := \frac{b - a}{b - d} = \frac{d - c}{b - d} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  は  $\lambda$  に依らない。

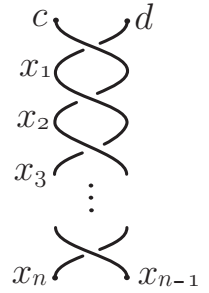
$$f_T(\lambda) = \frac{d - c}{(b - d) + n(d - c)} = \frac{1}{n + \frac{b - d}{d - c}} = \frac{1}{n + \frac{1}{k}}$$

と書き換えられるので、 $f_T(\lambda)$  は  $\lambda \in \text{Col}(T)$  の選び方に依らないことがわかる。

III. 有理タングル図式  $S$  に対しては補題の主張は成立していると仮定する。このとき、 $T := S + [n]$  ( $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ) に対しても補題の主張が成り立つことを示す。

$\lambda \in \text{Col}(T)$  とし、 $S$  上の部分弧に制限することにより得られる  $S$  の整数彩色を  $\lambda|_S$  で表わす。

$$M_S(\lambda|_S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$



とおく。帰納法の仮定より  $a + d = b + c$  であり、 $f_S(\lambda|_S)$  は  $S$  の整数彩色  $\lambda|_S$  の選び方に依らない。I と同様の考察により、

$$\lambda(\text{NE}) = (n+1)b - nd, \quad \lambda(\text{SE}) = nb - (n-1)d$$

であることがわかる。よって、

$$\begin{aligned} \lambda(\text{NW}) + \lambda(\text{SE}) &= a + (nb - (n-1)d) \\ &= (b + c - d) + (nb - (n-1)d) \\ &= ((n+1)b - nd) + c = \lambda(\text{NE}) + \lambda(\text{SW}) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  のとき、

$$f_T(\lambda) = \frac{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{NW})}{\lambda(\text{NE}) - \lambda(\text{SE})} = \frac{(n+1)b - nd - a}{(n+1)b - nd - (nb - (n-1)d)} = \frac{(b-a) + n(b-d)}{b-d}$$

となる。帰納法の仮定より、 $k := \frac{b-a}{b-d} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  は  $\lambda$  に依らない。

$$f_T(\lambda) = \frac{(b-a) + n(b-d)}{b-d} = n + \frac{b-a}{b-d} = n + k$$

と書き換えられるので、 $f_T(\lambda)$  は  $\lambda \in \text{Col}(T)$  の選び方に依らないことがわかる。

以上で帰納法が完成し、補題は証明された。  $\square$

補題 4-4 の証明より、任意の有理タングルの (有理タングル図式とは限らない) 図式  $T$  に対し  $\text{Col}^-(T) \neq \emptyset$  であることがわかる。特に、 $T$  が有理タングル図式の場合、左上の端点 NW が乗っている部分弧と、NW から出発して最初に出会う交差点に接続する下側の部分弧のうち、左側にある方の部分弧に対して、任意の整数を割り振れば、 $T$  の整数彩色が一意的に決まる。

補題 4-3 と補題 4-4 より次が示される。

#### 命題 4-5

有理タングル  $t$  に対して、

$$f(t) := f_T(\lambda) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \quad (T \text{ は } t \text{ の図式、} \lambda \in \text{Col}^-(T))$$

は  $T$  および  $\lambda$  に依らない定数である。したがって、 $f(t)$  は有理タングル  $t$  の位相不変量 (すなわち、 $\mathbb{B}^3$  の境界を固定するイソトピーの下での不変量) である。

(証明)

$T'$  を  $t$  の 1 つの有理タングル図式として固定する。 $T'$  は  $T$  に有限回の Reidemeister 移動を行って得ることができる。補題 4-3 より全単射  $\varphi: \text{Col}(T) \rightarrow \text{Col}(T')$  が存在し、 $f_{T'} \circ \varphi = f_T$  となる。補題 4-4 より  $f_{T'}(\lambda')$  は  $\lambda' \in \text{Col}^-(T')$  に依らない定数 ( $\infty$  も含む) である。したがって、 $f_T(\lambda) = (f_{T'} \circ \varphi)(\lambda) = f_{T'}(\varphi(\lambda))$  は  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  に依らない定数である。さらに、 $f_T(\lambda) = f_{T'}(\varphi(\lambda))$  より、この値は  $t$  の図式  $T$  の選び方にも依らない。  $\square$



**定理 4-6 (Kauffman and Lambropoulou [52; Theorem 4])**

有理タングル  $t$  の位相不変量  $f(t)$  は以下の性質 (1),(2),(3),(4) を満たす。したがって、 $T$  を有理タングルの連分数形式とすると、 $f(t) = F(T)$  が成り立つ。

(1) 有理タングル  $t$  と整数  $k$  に対して  $f(t + [k]) = f(t) + k$ .

(2) 有理タングル  $t$  に対して  $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{f(t)}$ .

(3) 有理タングル  $t$  に対して  $f(-t) = -f(t)$ .

(4) 有理タングル  $t$  と整数  $k$  に対して  $f\left(t * \frac{1}{[k]}\right) = f(t) * \frac{1}{k}$ .

(証明)

(1) と (4) はすでに補題 4-4 の証明の中で示されている。このことと任意の  $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  に対して  $f([k]) = k$ ,  $f\left(\frac{1}{[k]}\right) = \frac{1}{k}$  となることから  $T$  を有理タングルの連分数形式とすると、 $f(t) = F(T)$  が成り立つことがわかる。

∴)

$T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$ ,  $f(T) = f_T(\lambda)$  とおく (ここで  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  は任意である)。

$n = 1$  のとき、 $f([a_1]) = a_1 = F([a_1])$  となり成立する。

$n = 2$  のとき、(1) と系 3-10 より

$$\begin{aligned} f([[a_1], [a_2]]) &= f\left([a_1] + \frac{1}{[a_2]}\right) = f\left(\frac{1}{[a_2]} + [a_1]\right) \\ &= f\left(\frac{1}{[a_2]}\right) + a_1 = \frac{1}{a_2} + a_1 = [a_1, a_2] = F([[a_1], [a_2]]) \end{aligned}$$

となり成立する。

$n \geq 3$  とし、 $n > k \geq 1$  を満たす任意の  $[[b_1], \dots, [b_k]]$  に対して  $f([[b_1], \dots, [b_k]]) = F([[b_1], \dots, [b_k]])$  が成り立っているとす。  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  に対して  $T' = [[a_3], [a_4], \dots, [a_n]]$  とおくと、

$$\begin{aligned} f(T) &= f\left([a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{T'}}\right) \\ &= f\left([a_1] + \left(\frac{1}{[a_2]} * T'\right)\right) \quad (\text{補題 3-13}) \\ &= a_1 + \left(\frac{1}{a_2} * f(T')\right) \quad ((1), (4), \text{系 3-10}) \\ &= a_1 + \left(\frac{1}{a_2} * F(T')\right) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= F([[a_1], [a_2], [a_3], \dots, [a_n]]) \quad (\text{補題 4-1 の証明の冒頭部分}) \\ &= F(T) \end{aligned}$$

となる。よって、 $T$  のときも成り立つ。 □

(2) と (3) は、今示した  $f(t) = F(T)$  と補題 4-1 から直ちに従うが、ここでは  $F$  の性質を用いない直接的な証明を与えよう。

(3) を先に示す。  $T$  を  $t$  の有理タングル図式とする。  $T' = (-T)^{\text{flip}}$  とおき、  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  から定まる  $T'$  の整数彩色を  $\lambda'$  とおくと、補題 4-2(3) より  $f_{T'}(\lambda') = -f_T(\lambda) = -f(t)$  が成り立つ。有理タングルについては  $(-T)^{\text{flip}} \sim -T$  である (補題 3-9) から、命題 4-5 より、  $f(-t) = f_{T'}(\lambda')$  となる。故に、  $f(-t) = f_{T'}(\lambda') = -f(t)$  を得る。

(2)  $T$  を  $t$  の有理タングル図式とする。  $\frac{1}{T}$  の定義 (補題 3-13 の上を参照) より、  $-\frac{1}{T} = (-T)^i = T^{\text{rot}}$  である。  $\lambda \in \text{Col}^-(T)$  とすると、これは  $T^{\text{rot}}$  の整数彩色  $\lambda^{\text{rot}} \in \text{Col}^-(T^{\text{rot}})$  を誘導し、補題 4-2(2) より

$$f\left(-\frac{1}{t}\right) = f_{-\frac{1}{T}}(\lambda^{\text{rot}}) = f_{T^{\text{rot}}}(\lambda^{\text{rot}}) = -\frac{1}{f_T(\lambda)} = -\frac{1}{f(t)}$$

を得る。(3) より、  $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{f(t)}$  が成り立つ。 □

### ● 4-3 : 有理タングルの分類

次の定理の結果は Conway [10; p.331-332] に書かれており、その明確な証明は Cromwell の本 [11; Chapter 8] や Bonahon と Siebenmann によるモノグラフ [6; Proposition 1.3] にある。Goldman と Kauffman [28] により初めて初等的な証明が与えられ、その後、Kauffman と Lambropoulou [52; Theorem 3] が以下で紹介する証明を与えた。

命題 4-5 と定理 4-6 より、有理タングル  $t$  に対して、  $F(t)$  が  $t$  の図式  $T$  を 1 つ取り、  $F(t) = F(T)$  により定まる。

#### 定理 4-7 (Conway の有理タングル分類定理)

有理タングル  $s, t$  がイソトープであるための必要十分条件は  $F(s) = F(t)$  となることである。したがって、有理タングルに対して正準形は一意的であり、有理タングルのイソトピー類全体は  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  によってパラメータライズされる。

#### (証明)

$s$  と  $t$  がイソトープならば、命題 4-5 より  $F(s) = F(t)$  となる。

逆に、  $F(s) = F(t)$  が満たされているとき、  $s$  と  $t$  がイソトープであることを示す。

次の事実に注意する。

$$\begin{cases} \bullet t \neq [0], [\infty] \text{ ならば、} t \text{ の図式として正準形を選ぶことにより、} F(t) \in \mathbb{Q} - \{0\}, \\ \bullet F(0) = 0. \end{cases}$$

これより、  $F(t) = \infty$  ならば、  $t \sim [\infty]$  と分かる。

同様に、  $F(t) = 0$  ならば、  $t \sim [0]$  と分かる。

よって、証明を完成させるには、  $s, t$  が  $F(s) = F(t) =: r \in \mathbb{Q} - \{0\}$  を満たすとき、  $s \sim t$  となることを示せばよい。  $s$  と  $t$  の図式  $S, T$  として正準形  $S = [[a_1], [a_2], \dots, [a_m]]$ ,  $T = [[b_1], [b_2], \dots, [b_n]]$  を選ぶ。このとき、

$$F(s) = [a_1, a_2, \dots, a_m], \quad F(t) = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

であり、これらは連分数の正準形である。 $[a_1, a_2, \dots, a_m] = r = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  であり、連分数の正準形の一意性 (定理 2-12) から  $m = n$  であって、 $a_i = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) であることがわかる。よって、 $S = T$  であり、これよりまた、 $s$  と  $t$  はイソトープである。  $\square$

## §5. タングルの Kauffman ブラケット

Conway [10] により導入された有理タングル  $t$  の連分数不変量  $F(t)$  は、Goldman と Kauffman の研究 [27, 28] により、Kauffman ブラケット多項式に基づいて理解することができる。ここではタングルに対して Kauffman ブラケットを定義し、その性質を調べる。さらに、Kauffman と Lambropoulou [53; §4] と Goldman と Kauffman [28] に基づき、有理タングルの連分数不変量が Kauffman ブラケット多項式から得られることを示す。

### ● 5-1 : Kauffman ブラケット多項式

Kauffman ブラケット多項式 [48] はもともと絡み目図式に対して定義される、文字  $A$  に関する整数係数の Laurent 多項式であるが、タングル図式に対しても定義は本質的に同じである。タングル図式  $T$  に対する Kauffman ブラケット  $\langle T \rangle$  は次の 2 つの規則 (KB1) と (KB2) に基づいて、文字  $A$  に関する整数係数の Laurent 多項式で表わされる式として定義される：

$$(KB1) \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \rangle,$$

$$(KB2) \langle T \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \langle T \rangle, \text{ 但し, } \delta = -A^2 - A^{-2}.$$

$\langle T \rangle$  をタングル図式  $T$  の **Kauffman ブラケット** と呼ぶ。

**注意：**(KB1) のブラケット  $\langle \rangle$  の中身には絡み目図式の「断片」しか描かれていないが、これは描かれた部分だけが異なり、残りの部分は同一であるような 3 つの絡み目図式の間の等式を表わしている。(KB1) を  $90^\circ$  回転させて眺めると、次の関係式が得られる。

$$(KB1)' \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle + A \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \rangle$$

$\langle T \rangle$  は、(KB1) と (KB2) を繰り返し用いることにより、最終的に次の形に書き表わされることになる：

$$(5.1) \quad \langle T \rangle = d_T \langle [0] \rangle + n_T \langle [\infty] \rangle \quad (d_T, n_T \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]).$$

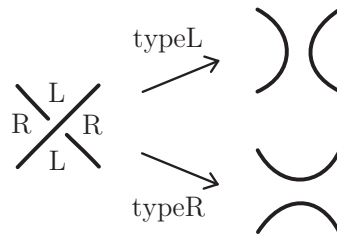
タングル図式の代わりに絡み目図式  $D$  に対して同じ操作をすると、最終的に  $\langle D \rangle = a \langle \bigcirc \rangle$  ( $a \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ ) の形になる。そこで、絡み目図式の Kauffman ブラケット多項式の計算においては

$$(KB3) \langle \bigcirc \rangle = 1$$

という規約を設ける。すると、 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  となる。これを絡み目図式  $D$  の Kauffman ブラケット多項式と呼ぶ。

タングル図式  $T$  に対して (KB1), (KB2) を繰り返し適用すれば  $\langle T \rangle$  は (5.1) の形にすることができるが、交差を解消していく順番は沢山ある。しかしながら、どのような順番で交差解消を行っても最終的に得られる (5.1) の形は同じである。このことは以下のように考えることでわかる。

$T$  の各交差点において、次図のタイプ R かまたはタイプ L の操作のどちらを行うかを指定したものを  $T$  の **状態 (state)** または **ステイト** という。そのステイトに従って交差を解消した図もステイトと呼ばれる。



ここで、タイプLの交差解消とは、上を通る弧を交差点を中心に反時計回りに回転させて下を通る弧に重ねたときに通過する領域が開かれる交差解消であり、タイプRの交差解消とは、そうでない領域が開かれる交差解消である。

各交差点での交差解消の仕方は2通りであるから、 $T$ の交差点の総数が $n$ であるときには、 $T$ のステイトは $2^n$ 個存在する。 $T$ のステイト全体からなる集合を $\text{State}(T)$ により表わす。ステイト $S \in \text{State}(T)$ に対して

$$\langle T|S \rangle := A^{(T \text{ から } S \text{ を作る時のタイプLの交差点の個数}) - (T \text{ から } S \text{ を作る時のタイプRの交差点の個数})}$$

$$\|S\| := (S \text{ における単純閉曲線の個数})$$

とおく。各 $S$ から単純閉曲線を取り除くと、 $(\partial\mathbb{D}^2)$ を固定する $\mathbb{D}^2$ 内のイソトピーで動かせば、 $]0]$ または $[\infty]$ の形の2-タングル図式が得られる。これを $R_S$ で表わす。すると、 $\langle T \rangle$ は

$$(5.2) \quad \langle T \rangle := \sum_{S \in \text{State}(T)} \langle T|S \rangle \delta^{\|S\|} \langle R_S \rangle$$

と表わされることがわかる(逆に、これを $\langle T \rangle$ の定義として採用すれば、それが(KB1),(KB2)を満たすことは容易にわかる)。

絡み目図式 $D$ の場合には、 $\text{State}(D)$ および各 $S \in \text{State}(D)$ に対して、 $\langle D|S \rangle$ ,  $\|S\|$ をタングル図式のステイトに対するものと同じ式で定義すると、

$$\langle D \rangle = \sum_{S \in \text{State}(D)} \langle D|S \rangle \delta^{\|S\|-1}$$

が成り立つことがわかる。

一般に、集合 $R$ への関数 $\varphi: \{\text{絡み目図式 (あるいはタングル図式) 全体}\} \rightarrow R$ が平面のイソトピーおよび Reidemeister 移動 (RI), (RII), (RIII) の下で不変であるとき、 $\varphi$ は**正則イソトピー不変量** (*regular isotopy invariant*) であると呼ばれる。

補題 5-1

(1)  $\langle D \rangle$  は絡み目図式  $D$  の正則イソトピー不変量である。同様に、 $\langle T \rangle$  はタングル図式  $T$  の正則イソトピー不変量である。したがって、

$$(5.3) \quad \langle T \rangle = d_T \langle [0] \rangle + n_T \langle [\infty] \rangle$$

により定まる  $d_T = d_T(A)$ ,  $n_T = n_T(A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  もタングル図式  $T$  の正則イソトピー不変量である。

$$(2) \quad \langle \text{⌋} \rangle = -A^3 \langle \text{⌋} \rangle, \quad \langle \text{⌌} \rangle = -A^{-3} \langle \text{⌌} \rangle.$$

$$(3) \quad A \langle \text{⌋} \rangle - A^{-1} \langle \text{⌌} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \text{⌋} \rangle \langle \text{⌌} \rangle.$$

(証明)

(1) • Reidemeister 移動 (RII) の下で不変性：

$$\begin{aligned} \langle \text{⌋} \rangle &= A \langle \text{⌋} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌌} \rangle \\ &= A \{ A \langle \text{⌋} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌌} \rangle \} + A^{-1} \{ A \langle \text{⌋} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌌} \rangle \} \\ &= A^2 \langle \text{⌋} \rangle + \delta \langle \text{⌋} \rangle + \langle \text{⌋} \rangle \langle \text{⌌} \rangle + A^{-2} \langle \text{⌋} \rangle \\ &= \langle \text{⌋} \rangle \langle \text{⌌} \rangle. \end{aligned}$$

$\langle \text{⌌} \rangle = \langle \text{⌋} \rangle \langle \text{⌌} \rangle$  も同様に示される。

• Reidemeister 移動 (RIII) の下で不変性：

$$\begin{aligned} \langle \text{⌋} \rangle &= A \langle \text{⌋} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌌} \rangle, \\ \langle \text{⌌} \rangle &= A \langle \text{⌌} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌋} \rangle \end{aligned}$$

ここで、

$$\langle \text{⌋} \rangle = \langle \text{⌋} \rangle = \langle \text{⌌} \rangle$$

より、

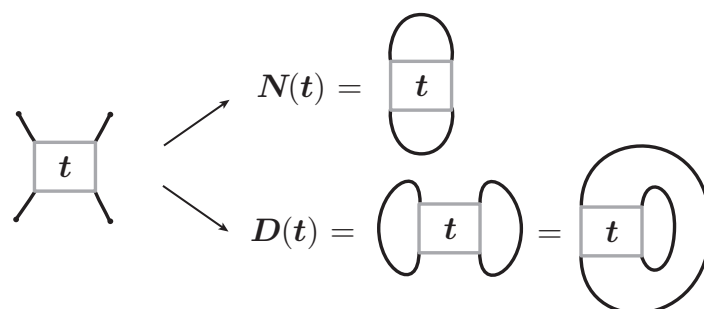
$$\langle \text{⌋} \rangle = \langle \text{⌌} \rangle$$

を得る。 $\langle T \rangle$  がタングル図式  $T$  の正則イソトピー不変量であることも全く同じように示される。

(2) (1) と同様に示すことができる。

(3) (KB1) と (KB1)' から直ちに従う。 □

2-タングル (図式)  $t$  から次の図の操作で  $S^3$  内の 2 つの絡み目 (図式)  $N(t)$  と  $D(t)$  を作る  
ことができる。



$N(t)$  と  $D(t)$  をそれぞれ  $t$  の**分子 (閉包)**(numerator)、**分母 (閉包)**(denominator) と呼ぶ。  
 $D(t) = N(t^{\text{rot}})$  である。

**補題 5-2**

2-タンゲル図式  $T$  に対して、

(1)  $T$  の分子閉包と分母閉包の Kauffman ブラケットは、 $T$  の Kauffman ブラケットから次のように計算される。

$$(5.4) \quad \langle N(T) \rangle = d_T \delta + n_T$$

$$(5.5) \quad \langle D(T) \rangle = d_T + n_T \delta$$

(2)  $d_T, n_T$  は同時に 0 になることはない。

**(証明)**

(1)  $N([0]) = \bigcirc \amalg \bigcirc, N([\infty]) = \bigcirc$  であるから、

$$\langle N(T) \rangle = d_T \langle N([0]) \rangle + n_T \langle N([\infty]) \rangle = d_T \delta + n_T$$

を得る。同様に、 $D([0]) = \bigcirc, D([\infty]) = \bigcirc \amalg \bigcirc$  であるから、

$$\langle D(T) \rangle = d_T \langle D([0]) \rangle + n_T \langle D([\infty]) \rangle = d_T + n_T \delta$$

を得る。

(2) 絡み目図式  $D$  に対して、 $\langle D \rangle$  に  $A = 1$  を代入したものを  $\langle D \rangle_{A=1}$  とすると、補題 5-1(3) より、

$$\langle \times \rangle_{A=1} = \langle \times \rangle_{A=1}$$

が成り立つ。よって、 $D$  が  $m$  個の成分からなる絡み目の図式ならば、 $\langle D \rangle_{A=1}$  は  $m$ -成分の自明な絡み目  $O^m = \overbrace{\bigcirc \amalg \cdots \amalg \bigcirc}^m$  に対するブラケット多項式の  $A = 1$  での値に等しい。よって、(KB2), (KB3) により

$$\langle D \rangle_{A=1} = \langle O^m \rangle_{A=1} = (-2)^{m-1}$$

となる。これより特に、任意の絡み目図式  $D$  に対して、 $\langle D \rangle \neq 0$  であることが従う。

今、2-タンゲル図式  $T$  が  $d_T = n_T = 0$  を満たしていたとすると、(1) より  $\langle N(T) \rangle = \langle D(T) \rangle = 0$  となり矛盾が生じる。よって、 $d_T, n_T$  は同時に 0 になることはない。  $\square$

補題 5-3

(1) 2-タンゲル図式  $T, U$  の和  $T + U$  について、

$$\begin{aligned} d_{T+U} &= d_T d_U, \\ n_{T+U} &= n_T d_U + d_T n_U + n_T n_U \delta. \end{aligned}$$

(2) 2-タンゲル  $T, U$  の積  $T * U$  に対して

$$\begin{aligned} d_{T*U} &= d_T n_U + n_T d_U + d_T d_U \delta, \\ n_{T*U} &= n_T n_U \end{aligned}$$

(証明)

(1) 最初に  $U$  の部分をそのままにして  $T$  の部分において交差解消を行い、次に  $U$  の部分で交差解消を行う。すると、

$$\begin{aligned} \langle T + U \rangle &= d_T \langle [0] + U \rangle + n_T \langle [\infty] + U \rangle \\ &= d_T (d_U \langle [0] \rangle + n_U \langle [\infty] \rangle) \\ &\quad + n_T (d_U \langle [\infty] + [0] \rangle + n_U \langle [\infty] + [\infty] \rangle) \\ &= d_T d_U \langle [0] \rangle + (d_T n_U + n_T d_U + n_T n_U \delta) \langle [\infty] \rangle \end{aligned}$$

となることがわかる。よって、補題の最初の 2 式が成り立つ。

(2) も (1) と同様に示される。 □

$i$  を虚数単位とし、 $A$  に  $\omega := \sqrt{i} = \exp(\frac{\pi}{4}i)$  を代入する。すると、

$$\delta = -A^2 - A^{-2} = -i - i^{-1} = -i + i = 0$$

となる。このことから、タンゲル図式 (あるいは絡み目図式)  $T$  の Kauffman ブラケット  $\langle T \rangle$  において  $A = \omega$  を代入したものを  $\langle T \rangle_{A=\omega}$  と記すと、任意の 2-タンゲル図式  $T, U$  に対して次が成り立つことがわかる。

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \langle T + U \rangle_{A=\omega} &= d(T) d(U) \langle [0] \rangle_{A=\omega} + (n(T) d(U) + d(T) n(U)) \langle [\infty] \rangle_{A=\omega}, \\ \langle T * U \rangle_{A=\omega} &= (d(T) n(U) + n(T) d(U)) \langle [0] \rangle_{A=\omega} + n(T) n(U) \langle [\infty] \rangle_{A=\omega}. \end{aligned}$$

但し、 $d(T), d(U), n(T), n(U)$  はそれぞれ  $d_T, d_U, n_T, n_U$  において  $A = \omega$  を代入した値を表わす。補題 5-2 より、

$$(5.7) \quad \langle N(T) \rangle_{A=\omega} = n(T), \quad \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = d(T)$$

も成立する。

2-タンゲル図式  $T$  に対して、鏡像  $-T$ , 反転  $T^{\text{in}}$ , 回転  $T^{\text{rot}}$  を行うと、 $A = \omega$  におけるブラケット多項式  $\langle T \rangle_{A=\omega}$  は次の補題のように影響を受ける。



**補題 5-4**

2-タンクル図式  $T$  に対して  $\langle T \rangle_{A=\omega} = d(T)\langle [0] \rangle_{A=\omega} + n(T)\langle [\infty] \rangle_{A=\omega}$  とおくと、

$$(1) \langle -T \rangle_{A=\omega} = \overline{d(T)}\langle [0] \rangle_{A=\omega} + \overline{n(T)}\langle [\infty] \rangle_{A=\omega}$$

$$(2) \langle T^{\text{rot}} \rangle_{A=\omega} = n(T)\langle [0] \rangle_{A=\omega} + d(T)\langle [\infty] \rangle_{A=\omega}$$

$$(3) \langle T^{\text{in}} \rangle_{A=\omega} = \overline{n(T)}\langle [0] \rangle_{A=\omega} + \overline{d(T)}\langle [\infty] \rangle_{A=\omega}$$

但し、 $\overline{\phantom{x}}$  は複素共役を表わす。

**(証明)**

以下の証明においては  $\langle \phantom{x} \rangle_{A=\omega}$  を単に  $\langle \phantom{x} \rangle$  で表わす。

(1) 交差点の個数に関する帰納法で証明する。

I. 交差点の個数が 0 個のとき、 $T$  は  $[0]$  または  $[\infty]$  に正則イソトピックである。このとき、 $-T$  は  $T$  に正則イソトピックであるから、 $\langle -T \rangle = \langle T \rangle$  であり、 $(d(T), n(T))$  は  $(1, 0)$  か  $(0, 1)$  のどちらかであるから、(1) の等式が成立する。

II.  $k \in \mathbb{N}$  とし、交差点の個数が  $(k-1)$  個のタンクル図式に対して (1) の等式が成立すると仮定する。

$T$  を交差点の個数が  $k$  のタンクル図式とする。 $T$  の 1 つの交差点  $c$  においてタイプ L、タイプ R の交差解消をして得られるタンクル図式をそれぞれ  $S, U$  とおくと、

$$\langle T \rangle = A\langle S \rangle + A^{-1}\langle U \rangle$$

が成り立つ。このとき、 $-T$  の交差点  $c$  においてタイプ L、タイプ R の交差解消をして得られるタンクル図式はそれぞれ  $-U, -S$  となるから

$$\langle -T \rangle = A\langle -U \rangle + A^{-1}\langle -S \rangle$$

が成り立つ。

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \langle S \rangle &= d(S)\langle [0] \rangle + n(S)\langle [\infty] \rangle, \\ \langle U \rangle &= d(U)\langle [0] \rangle + n(U)\langle [\infty] \rangle \end{aligned}$$

とおくと、帰納法の仮定より、

$$\begin{aligned} \langle -S \rangle &= \overline{d(S)}\langle [0] \rangle + \overline{n(S)}\langle [\infty] \rangle, \\ \langle -U \rangle &= \overline{d(U)}\langle [0] \rangle + \overline{n(U)}\langle [\infty] \rangle \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= (Ad(S) + A^{-1}d(U))\langle [0] \rangle + (An(S) + A^{-1}n(U))\langle [\infty] \rangle \\ \langle -T \rangle &= (A\overline{d(U)} + A^{-1}\overline{d(S)})\langle [0] \rangle + (A\overline{n(U)} + A^{-1}\overline{n(S)})\langle [\infty] \rangle \end{aligned}$$

を得る。 $A = \sqrt{i}$  のとき、 $A^{-1} = \overline{A}$ 、 $A = \overline{A^{-1}}$  であるから、

$$\langle -T \rangle = \overline{Ad(S) + A^{-1}d(U)}\langle [0] \rangle + \overline{An(S) + A^{-1}n(U)}\langle [\infty] \rangle = \overline{d(T)}\langle [0] \rangle + \overline{n(T)}\langle [\infty] \rangle$$

と書き換えられる。故に、交差点の個数が  $k$  のタンクル図式  $T$  に対しても (1) の等式は成り立つ。

(2) 交差点の個数に関する帰納法で証明する。

I. 交差点の個数が 0 個のとき、 $T$  は  $[0]$  または  $[\infty]$  に正則イソトピックである。 $T$  が  $[0]$  に正則イソトピックならば、 $T^{\text{rot}}$  は  $[\infty]$  に正則イソトピックであり、 $T$  が  $[\infty]$  に正則イソトピックならば、 $T^{\text{rot}}$  は  $[0]$  に正則イソトピックであるから、 $\langle T \rangle$  における  $\langle [0] \rangle$ ,  $\langle [\infty] \rangle$  の係数と  $\langle T^{\text{rot}} \rangle$  における  $\langle [0] \rangle$ ,  $\langle [\infty] \rangle$  の係数は入れ替わる。よって、(2) の等式が成立する。

II.  $k \in \mathbb{N}$  とし、交差点の個数が  $(k-1)$  個のタンクル図式に対して (1) の等式が成立すると仮定する。

$T$  を交差点の個数が  $k$  のタンクル図式とする。 $T$  の 1 つの交差点  $c$  においてタイプ L、タイプ R の交差解消をして得られるタンクル図式をそれぞれ  $S, U$  とおくと、

$$\langle T \rangle = A\langle S \rangle + A^{-1}\langle U \rangle$$

が成り立つ。このとき、 $T^{\text{rot}}$  の交差点  $c$  においてタイプ L、タイプ R の交差解消をして得られるタンクル図式はそれぞれ  $U^{\text{rot}}, S^{\text{rot}}$  となるから

$$\langle T^{\text{rot}} \rangle = A\langle S^{\text{rot}} \rangle + A^{-1}\langle U^{\text{rot}} \rangle$$

が成り立つ。 $\langle S \rangle$ ,  $\langle U \rangle$  を (5.8) のようにおくと、帰納法の仮定より、

$$\langle S^{\text{rot}} \rangle = n(S)\langle [0] \rangle + d(S)\langle [\infty] \rangle,$$

$$\langle U^{\text{rot}} \rangle = n(U)\langle [0] \rangle + d(U)\langle [\infty] \rangle$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= (Ad(S) + A^{-1}d(U))\langle [0] \rangle + (An(S) + A^{-1}n(U))\langle [\infty] \rangle \\ \langle T^{\text{rot}} \rangle &= (An(S) + A^{-1}n(U))\langle [0] \rangle + (Ad(S) + A^{-1}d(U))\langle [\infty] \rangle \\ &= n(T)\langle [0] \rangle + d(T)\langle [\infty] \rangle \end{aligned}$$

を得る。故に、交差点の個数が  $k$  のタンクル図式  $T$  に対しても (2) の等式は成り立つ。

(3)  $T^{\text{in}} = (-T)^{\text{rot}}$  であるから、(1), (2) より (3) の等式が成り立つことがわかる。  $\square$

### ● 5-2 : ブラケット多項式によるタンクルの位相不変量の構成

$R = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  とおき、 $\tilde{Q}(R)$  を  $R \times R$  上に次のような同値関係  $\sim$  を入れたときの商集合とする：

$$(p, q) \sim (r, s) \iff \exists u, v \in R - \{0\} \text{ s.t. } (up, uq) = (vr, vs).$$

$(p, q)$  の同値類を  $\frac{p}{q}$  により表わす。

$\tilde{Q}(R)$  上に和を

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \quad (p, q, r, s \in R)$$

により定める。 $\tilde{Q}(R)$  はこの和に関してアーベル群をなす。

2-タンクル図式  $T$  に対して

$$(5.9) \quad \text{Frac}_T(A) := \frac{n_T(A)}{d_T(A)} \in \tilde{Q}(R)$$

を考える。

**補題 5-5**

$\text{Frac}_T(A)$  は 2-タンクルのアンビエント・イソトピー不変量である。さらに、2-タンクル図式  $T, U$  について、 $d_T \neq 0$  かつ  $d_U \neq 0$  ならば、

$$\text{Frac}_{T+U}(A) = \text{Frac}_T(A) + \text{Frac}_U(A) + \frac{n_T n_U}{d_T d_U} \delta.$$

したがって、 $A = \omega$  を代入したとき  $d_T \neq 0$  かつ  $d_U \neq 0$  ならば、

$$\text{Frac}_{T+U}(\omega) = \text{Frac}_T(\omega) + \text{Frac}_U(\omega)$$

が成り立つ。

**(証明)**

$d_T, n_T$  は正則イソトピー不変量なので、 $\text{Frac}_T(A)$  もそうである。Reidemeister 移動 I の下での不変性は、補題 5-1(2) により、分子と分母がともに  $-A^3$  倍または  $-A^{-3}$  倍されることからわかる。タンクルの和に関する公式は補題 5-3(1) より直ちに従う。□

2-タンクル図式  $T$  に対して

$$(5.10) \quad F(T) := i \frac{n(T)}{d(T)} \in \tilde{Q}(\mathbb{Z}[\omega])$$

と定める。ここで、 $\tilde{Q}(\mathbb{Z}[\omega])$  は  $\tilde{Q}(R)$  と同様に定義された加法群である。

**注意：** $F(T)$  は、補題 4-1 のように定義される連分数と同じ記号であるが、有理タンクルに対しては両者は一致することが後の命題 5-7 からわかる。したがって、同じ  $F(T)$  という記号を使っても混乱は生じない。次が成り立つ。

**補題 5-6**

任意の 2-タンクル図式  $T$  に対して

$$F(T) = i \frac{\langle N(T) \rangle_{A=\omega}}{\langle D(T) \rangle_{A=\omega}}$$

と表わされ、 $n_T(\omega) = d_T(\omega) = 0$  でなければ、 $F(T) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  とみなすことができる。

**(証明)**

$F(T)$  が補題のように書き表わされることは、 $F(T)$  の定義と (5.7) からすぐわかる。

後半の主張が成り立つことを示す。自然な包含写像  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\omega]$  はアーベル群の間の単射準同型  $\tilde{Q}(\mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{Q}(\mathbb{Z}[\omega])$  を誘導する。この写像により、 $\tilde{Q}(\mathbb{Z}) \subset \tilde{Q}(\mathbb{Z}[\omega])$  とみなす。和を含めて同一視  $\tilde{Q}(\mathbb{Z}) - \{0\} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  することができるから、後半の主張を示すには、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  でないとき、 $F(T) \in \tilde{Q}(\mathbb{Z}) - \{0\}$  となることを示せばよい。そのために、まず、次の主張を証明する。

**主張 1** : 任意の絡み目図式  $D$  に対して、

$$\langle D \rangle_{A=\omega} = up$$

と書ける。但し、 $u$  は  $\|S\| = 1$  となる任意の  $S \in \text{State}(D)$  –このような  $S$  は**モノサイクリック** (*monocyclic*) であると呼ばれる [65; Definition2]– を用いて  $u = \langle D|S \rangle$  により与えられる複素数であり、 $p$  は整数である。

(主張 1 の証明)

$A = \omega$  のときは  $\delta = 0$  であるから、

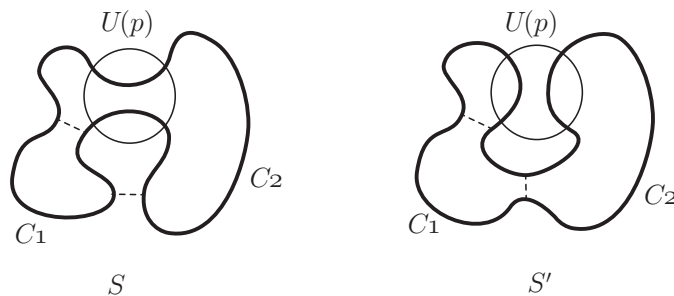
$$\langle D \rangle_{A=\omega} = \sum_{\substack{S \in \text{State}(D) \\ \|S\|=1}} \langle D|S \rangle$$

と表わされる。任意の  $S, S' \in \text{State}(D)$  は  $D$  のいくつかの交差点において再交差解消を行う (タイプ L のものをタイプ R に、タイプ R のものをタイプ L に変更する) ことにより得られる。よって、モノサイクリックな  $S \in \text{State}(D)$  を固定すると、別のモノサイクリックな  $S' \in \text{State}(D)$  は  $S$  から有限回の再交差解消を行うことにより得られる。実は、 $S'$  は  $S$  から「単純閉曲線の個数を 1 に保つような  $D$  の 2 箇所交差点において、同時に再交差解消を行う操作」を有限回施して得られる。

∴)

1 つの単純閉曲線になっているステイト  $S$  について 1 箇所だけで再交差解消を行うと、2 つの単純閉曲線が生じるから、 $S$  から  $S'$  を得る過程で行う再交差解消の回数は偶数回であることに注意する。

$S' \neq S$  とする。 $S'$  と  $S$  は  $D$  の  $2k$  個の交差点において異なった交差解消を行って得られている違いがあるものとする。そのうちの 1 箇所の交差点  $p$  の近傍  $U(p)$  を考える。 $U(p)$  の境界は次図のように  $S$  と 4 点で横断的に交わっているとす。



$S$  は単純閉曲線であるから、 $U(p)$  の外側で 2 つの単純弧に分かれる。それを  $C_1, C_2$  としておく。 $D$  の交差点を解消したことから生じる  $S$  の部分のうち  $U(p)$  の外側にあるものを、小さな破線でつないでその痕跡を示すことにする。その破線の端点が  $C_1$  同士、 $C_2$  同士のものしかないならば、そもそも  $D$  のステイトで 1 つの単純閉曲線をなすものは  $S$  だけしか存在しないことになる。よって、 $S$  以外に 1 つの単純閉曲線になっている

ステイトが存在するときには、一方の端点は  $C_1$  上にあり、もう一方の端点は  $C_2$  上にあるような破線が存在しなければならない。そのような破線が  $S$  と  $S'$  においてすべて一致していたとすると、 $S'$  には  $C_1$  同士か  $C_2$  同士に端点を持つ破線が存在し、しかもその部分では  $S$  と異なった交差解消をしていることになるので、 $S'$  は 2 つ以上の単純閉曲線からなることになる。これは矛盾である。したがって、一方の端点は  $C_1$  上にあり、もう一方の端点は  $C_2$  上にあるような破線の中に、 $S$  と  $S'$  において異なる交差解消になっているものが存在する。その箇所に対応する  $D$  の交差点を  $q$  とし、 $S$  において  $p$  と  $q$  において同時に再交差解消を行い、ステイト  $S_1$  を作る。このステイトは 1 つの単純閉曲線になっており、 $S'$  と  $S_1$  は  $D$  の  $2(k-1)$  個の交差点において異なった交差解消を行って得られている違いがある。よって、帰納法により、 $S'$  は  $S$  から「単純閉曲線の個数を 1 に保つような  $D$  の 2 箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作」を有限回施して得られることが示される。  $\square$

$S, S'$  をモノサイクリックな  $D$  のステイトであって、 $S'$  は  $S$  から  $D$  の 2 箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られているものとする。その 2 箇所の交差点を  $p, q$  とおく。

①  $S$  が  $p$  においてタイプ L の交差解消、 $q$  においてタイプ R の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、

$$\langle D|S \rangle = AA^{-1} \cdot (p, q \text{ 以外の交差点での交差解消から生じる } A, A^{-1} \text{ の積})$$

と書くことができる。 $S'$  は  $p$  においてタイプ R の交差解消、 $q$  においてタイプ L の交差解消を施して  $D$  から得られていることになるから、

$$\langle D|S' \rangle = A^{-1}A \cdot (p, q \text{ 以外の交差点での交差解消から生じる } A, A^{-1} \text{ の積})$$

となる。よって、この場合、 $\langle D|S \rangle = \langle D|S' \rangle$  が成立する。

①'  $S$  が  $p$  においてタイプ R の交差解消、 $q$  においてタイプ L の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、①と同様に、 $\langle D|S \rangle = \langle D|S' \rangle$  であることがわかる。

②  $S$  が  $p, q$  においてタイプ L の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、

$$\langle D|S \rangle = A^2 \cdot (p, q \text{ 以外の交差点での交差解消から生じる } A, A^{-1} \text{ の積})$$

と書くことができる。 $S'$  は  $p, q$  においてタイプ R の交差解消を施して  $D$  から得られていることになるから、

$$\langle D|S' \rangle = A^{-2} \cdot (p, q \text{ 以外の交差点での交差解消から生じる } A, A^{-1} \text{ の積})$$

となる。よって、

$$\langle D|S' \rangle = A^{-4} \langle D|S \rangle = -\langle D|S \rangle$$

となる。

③  $S$  が  $p, q$  においてタイプ R の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、②と同様にし  
て  $\langle D|S' \rangle = A^4 \langle D|S \rangle = -\langle D|S \rangle$  となることがわかる。

①, ②, ③およびモノサイクリックなステイト  $S, S' \in \text{State}(D)$  に対して、 $S'$  は  $S$  から「単  
純閉曲線の個数を 1 に保つような  $D$  の 2 箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操  
作」を有限回施して得られることから、モノサイクリック・ステイト  $S \in \text{State}(D)$  を任意に  
固定すると

$$\langle D \rangle_{A=\omega} = \sum_{\substack{S \in \text{State}(D) \\ \|S\|=1}} \langle D|S \rangle = \langle D|S \rangle \times (\text{整数})$$

と表わされることがわかる。これで主張 1 は証明された。

$T$  を 2-タングル図式とする。 $\langle D|S \rangle$  は  $A = \omega = \sqrt{i}$  の冪乗の形をしているから、主張 1 に  
より、 $\omega$  の適当な冪乗  $u, u'$  と適当な  $p, q \in \mathbb{Z}$  を用いて

$$\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = up, \quad \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = u'q$$

と表わされる。主張 1 の証明より、 $N(T), D(T)$  のモノサイクリック・ステイト  $S, S'$  が存在す  
るならば、そのようなステイト  $S, S'$  を任意にとると、 $u, u'$  は

$$u = \pm \langle N(T)|S \rangle, \quad u' = \pm \langle D(T)|S' \rangle$$

と表わされる。 $N(T)$  のモノサイクリック・ステイト  $S$  を与えることと、 $T$  のステイト  $S$  で  
あって、 $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[\infty]$  に写されるものを与えることは同値である。  
この場合、 $\langle N(T)|S \rangle = \langle T|S \rangle$  が成立する。同様に、 $D(T)$  のモノサイクリック・ステイト  $S'$   
を与えることと、 $T$  のステイト  $S'$  であって、 $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[0]$  に写さ  
れるものを与えることは同値である。この場合、 $\langle D(T)|S' \rangle = \langle T|S' \rangle$  が成立する。よって、補  
題の証明を完成させるためには、次の主張が示されればよい。

**主張 2 :**  $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  かつ  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  ならば、 $T$  のステイト  $S, S'$  であって、それぞ  
れ  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[\infty], [0]$  に写され、

$$\frac{\langle T|S \rangle}{\langle T|S' \rangle} = \pm i$$

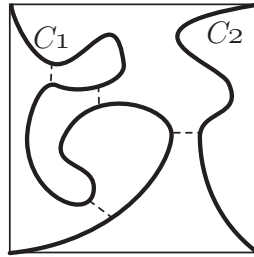
となるものが存在する。

(主張 2 の証明)

主張 1 の証明より、 $\|S\| = 1$  を満たす  $N(T)$  のステイト  $S$  が存在しないならば  $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$   
であり、 $\|S'\| = 1$  を満たす  $D(T)$  のステイト  $S'$  が存在しないならば  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  である。  
今、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  かつ  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  を仮定しているから、 $\|S\| = 1$  を満たす  $N(T)$  のス  
テイト  $S$  と  $\|S'\| = 1$  を満たす  $D(T)$  のステイト  $S'$  は存在することがわかる。したがって、 $T$   
のステイト  $S, S'$  であって、それぞれ  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[\infty], [0]$  に写され  
るものが存在する。

$T$  のステイト  $S$  であって、 $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[\infty]$  に写されるものを 1  
つ固定する。 $S$  において、 $T$  の交差を解消した各近傍内に、その痕跡を示す小さな破線を置く。

$S$  は共有点を持たない 2 つの単純曲線からなり、一方は端点が  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  であるような単純曲線で、もう一方は端点が  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  であるような単純曲線である。前者を  $C_1$  と名付け、後者を  $C_2$  と名付ける。このとき、破線の端点が  $C_1$  同士、 $C_2$  同士のものしかない、という状況は生じない。なぜならば、このような状況の場合、 $\partial\mathbb{D}^2$  を固



$S$

定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[0]$  に写される  $T$  の状態  $S'$  は存在し得ないからである。よって、破線の中に、一方の端点が  $C_1$  上にあり、もう一方の端点が  $C_2$  上にあるようなものが存在する。そのうちの 1 つを選び、そこで  $S$  に再交差解消を行って得られる  $T$  の状態を  $S''$  と定める。 $S''$  は  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーで  $[0]$  に写される  $T$  の状態である。さらに、 $S$  と  $S''$  とは 1 箇所の破線部分だけが異なっており、残りの部分は同じである。したがって、

$$\langle T|S'' \rangle = A^{\pm 2} \langle T|S \rangle = i^{\pm 1} \langle T|S \rangle = \pm i \langle T|S \rangle$$

であることがわかる。これで、主張 2 は証明され、補題の証明が終わった。  $\square$

**命題 5-7**

2-タンクル図式  $T$  に対して (5.10) のように定義される  $F(T)$  は以下の性質を満たす。

- (1) 2-タンクル図式  $T, U$  が  $d(T) \neq 0, d(U) \neq 0$  であるとき、 $F(T+U) = F(T) + F(U)$ .
- (2)  $F([0]) = \frac{0}{1}, F([1]) = \frac{1}{1}, F([\infty]) = \frac{1}{0}$ .
- (3)  $n(T) = d(T) = 0$  でない任意の 2-タンクル図式  $T$  に対して  $F(-T) = -F(T)$ . 特に、 $F([-1]) = -\frac{1}{1}$ .
- (4)  $n(T) = d(T) = 0$  でない任意の 2-タンクル図式  $T$  に対して  $F(T^{\pm \text{rot}}) = -\frac{1}{F(T)}$ . よって、 $F(T^{\pm \text{in}}) = \frac{1}{F(T)}$  であり、任意の有理タンクル図式  $T$  に対して  $F\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{F(T)}$ .

(証明)

(1) は補題 5-5 より従う。

(2) (5.3) より、 $T = [0]$  のとき  $d_T = 1, n_T = 0$  である。よって、 $F([0]) = i \frac{n(T)}{d(T)} = i \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$ .

(KB1) より、

$$\langle [1] \rangle = \langle \times \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \smile \rangle = A^{-1} \langle [\infty] \rangle + A \langle [0] \rangle$$

となる。よって、 $T = [1]$  のとき、 $d_T = A$ ,  $n_T = A^{-1}$  であるから、

$$F([1]) = i \frac{n(T)}{d(T)} = i \frac{A^{-1}}{A} = \frac{i}{A^2} = \frac{i}{i} = 1 = \frac{1}{1}.$$

(5.3) より、 $T = [\infty]$  のとき  $d_T = 0$ ,  $n_T = 1$  である。よって、 $F([\infty]) = i \frac{n(T)}{d(T)} = i \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ .

(3) 補題 5-4 から  $F(-T) = -\overline{F(T)}$  であり、補題 5-6 より  $F(T) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  であるから  $\overline{F(T)} = F(T)$  となる。よって、 $F(-T) = -F(T)$  が成り立つ。

(4) の前半は補題 5-4 から、後半は前半の等式と (3) から従う。  $\square$

$\Phi_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$  とおくと、絡み目図式  $D$  に対して、補題 5-6 の証明の主張 1 より、

$$(5.11) \quad \langle D \rangle_{A=\omega} = up \quad (p \in \mathbb{Z}, u \in \Phi_8)$$

と表わされる。但し、 $u$  はモノサイクリックな任意の  $S \in \text{State}(D)$  により  $u = \langle D|S \rangle$  により与えられる。

**命題 5-8 ([65; Proposition 3])**

$T$  をタンゲル図式とし、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = pu$ ,  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = qv$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $u, v \in \Phi_8$ ) と書く。このとき、少なくとも次のいずれかが成り立つ。

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \frac{u}{v} = i, \quad \frac{u}{v} = -i.$$

**(証明)**

$\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  ならば  $p = 0$  であり、 $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  ならば  $q = 0$  であるから、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  かつ  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} \neq 0$  の場合を考えればよい。この場合、 $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  である。補題 5-6 の証明の主張 2 より、 $T$  の分子ステイト  $S$  と分母ステイト  $S'$  であって、

$$\frac{\langle N(T)|S \rangle}{\langle D(T)|S' \rangle} = \pm i$$

を満たすものが存在する。補題 5-6 の証明より、

$$\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = \langle N(T)|S \rangle \times (\text{整数}),$$

$$\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = \langle D(T)|S' \rangle \times (\text{整数})$$

となるから、ノルムをとって、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = pu$ ,  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = qv$  と比較することにより、

$$\langle N(T)|S \rangle = \pm u, \quad \langle D(T)|S' \rangle = \pm v$$

となることがわかる ( $\langle N(T)|S \rangle$ ,  $\langle D(T)|S' \rangle$  は  $A$  の冪乗の形をしているから、ノルムは 1 であることに注意)。  $\langle N(T)|S \rangle = \langle T|S \rangle$ ,  $\langle D(T)|S' \rangle = \langle T|S' \rangle$  であるから、

$$\frac{u}{v} = \pm \frac{\langle N(T)|S \rangle}{\langle D(T)|S' \rangle} = \pm \frac{\langle T|S \rangle}{\langle T|S' \rangle} = \pm i$$

を得る。  $\square$



## §6. タングルの Krebses 不変量

Krebes [65; §7] は 1 の 8 乗根における Kauffman ブラケットの性質を深く研究し、2-タングルの不変量を構成した。ここでは、その不変量の定義と性質を述べる。Krebes の構成した不変量から  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に値を持つ 2-タングルの不変量が導かれるが、その有理数値不変量は有理タングルに対しては第 4 節で導入された連分数不変量に一致することを示す。したがって、Krebes 不変量は連分数不変量の一般化として捉えられる。応用として、7 交差点以下の素な 2-タングルは Krebses 不変量 (と成分数) により区別されることがわかる [107]。

前節に引き続き、 $\omega = \sqrt{i}$ ,  $\Phi_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$  とする。

### ● 6-1 : Krebses 不変量の定義

タングルの Krebses 不変量を説明するために、**形式商** (*formal fraction*) の概念を導入する。 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  上に同値関係  $\sim$  を次のように定義する。 $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  に対して

$$(p, q) \sim (p', q') \iff (p, q) = (p', q') \text{ or } (p, q) = (-p', -q').$$

$\sim$  に関する  $(p, q)$  の同値類を  $[p, q]$  または  $\frac{p}{q}$  で表わし、商集合を  $\mathbf{A}$  と記す。 $\mathbf{A}$  は分数の和 + の演算により単位元  $\frac{0}{1}$  をもつ結合的な半群をなす：

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

タングル図式  $T$  に対して  $\Psi(T) \subset \mathbb{C}^2$  を

$$(6.1) \quad \Psi(T) = \{ (u\langle N(T) \rangle_{A=\omega}, ui\langle D(T) \rangle_{A=\omega}) \mid u \in \Phi_8 \}$$

によって定義する。

#### 補題 6-1 ([65; Lemma 4])

タングル図式  $T$  に対して  $\Psi(T)$  は  $T$  のアンビエント・イソトピー類のみに依存する。そこで、タングル  $t$  に対して  $\Psi(t) := \Psi(T)$  ( $T$  は  $t$  の図式) と定め、 $t$  の **Krebes 不変量** と呼ぶ。

#### (証明)

$\Psi(T)$  が Reidemeister 移動 (RII), (RIII) の下で不変であることは Kauffman ブラケットがその性質を持つことから従う。

$\Psi(T)$  が Reidemeister 移動 (RI) の下で不変であることは、 $\langle N(T) \rangle$ ,  $\langle D(T) \rangle$  が (RI) の下で、同時に  $-A^{\pm 3} \in \Phi_8$  倍されることによる。□

#### 命題 6-2 (Krebes [65; Theorem-and-Definition 1])

タングル  $t$  に対して  $\tilde{f}(t) := \Psi(t) \cap \mathbb{Z}^2 \in \mathbf{A}$  となる。すなわち、 $\Psi(t) \cap \mathbb{Z}^2$  はある  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  に対して  $\{(p, q), (-p, -q)\}$  により与えられる集合になる。

#### (証明)

次を 3 つを示せばよい。

(i)  $\tilde{f}(t) \neq \emptyset$ .

(ii)  $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z}^2$  が  $(p, q), (p', q') \in \tilde{f}(t)$  を満たすならば、 $(p', q') = (p, q)$  または  $(p', q') = (-p, -q)$ .

(iii)  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  が  $(p, q) \in \tilde{f}(t)$  を満たすならば  $(-p, -q) \in \tilde{f}(t)$ .

$T$  を  $t$  の図式とし、 $\tilde{f}(t)$  を  $\tilde{f}(T)$  と書く。

(i) の証明：

$\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = pu$ ,  $\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = qv$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $u, v \in \Phi_8$ ) と書く。命題 5-8 より、 $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $u = iv$ ,  $u = -iv$  のいずれかが成り立つ。

•  $p = 0$  の場合、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  である。よって、 $\omega := -i\bar{v} \in \Phi_8$  とおくと、 $\omega \langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  であり、かつ、 $\omega i \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = -i\bar{v} \cdot i \cdot qv = q$  となる。よって、 $\tilde{f}(T) = \Psi(T) \cap \mathbb{Z}^2 \neq \emptyset$  である。

•  $q = 0$  の場合、 $\omega = \bar{u} \in \Phi_8$  とおくと、 $\omega \langle N(T) \rangle_{A=\omega} = p$ ,  $\omega i \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  となるので、 $\tilde{f}(T) = \Psi(T) \cap \mathbb{Z}^2 \neq \emptyset$  である。

•  $u = iv$  の場合、 $\omega = i\bar{v} \in \Phi_8$  とおくと、

$$\omega \langle N(T) \rangle_{A=\omega} = i\bar{v} \cdot p(iv) = -p,$$

$$\omega i \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = i\bar{v} \cdot i \cdot qv = -q$$

となるので、 $(-p, -q) \in \tilde{f}(T)$ 。よって、 $\tilde{f}(T) \neq \emptyset$  である。

•  $u = -iv$  の場合も  $\omega = i\bar{v} \in \Phi_8$  とおくと、 $\omega \langle N(T) \rangle_{A=\omega} = i\bar{v} \cdot p(-iv) = p$ ,  $\omega i \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = i\bar{v} \cdot i \cdot qv = -q$  となるので、 $(p, -q) \in \tilde{f}(T)$ 。よって、 $\tilde{f}(T) \neq \emptyset$  である。

(ii) の証明：

$(p, q), (p', q') \in \tilde{f}(T)$  ならば、ある  $u, u' \in \Phi_8$  を用いて

$$p = u \langle N(T) \rangle_{A=\omega}, \quad q = ui \langle D(T) \rangle_{A=\omega},$$

$$p' = u' \langle N(T) \rangle_{A=\omega}, \quad q' = u'i \langle D(T) \rangle_{A=\omega}$$

と書くことができる。

•  $p = 0$  の場合、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$  であり、したがって、 $p' = 0$  である。もし、 $q = 0$  でもあるならば、同様に  $q' = 0$  であることがわかり、したがって、 $(p', q') = (0, 0) = (p, q)$  となる。

$q \neq 0$  ならば、

$$\frac{q'}{q} = \frac{u'}{u} \in \mathbb{Q} \cap \Phi_8 = \{\pm 1\}$$

となる。故に、 $q' = \pm q$ 、したがって、 $(p', q') = (0, \pm q) = \pm(p, q)$  となる。

•  $p \neq 0$  の場合、

$$\frac{p'}{p} = \frac{u'}{u} \in \mathbb{Q} \cap \Phi_8 = \{\pm 1\}$$

であるから、 $p' = \pm p$  である。 $p' = p$  ならば、 $u' = u$  であり、このとき、 $q' = q$  である。 $p' = -p$  ならば、 $u' = -u$  であり、このとき、 $q' = -q$  である。よって、 $(p', q') = \pm(p, q)$  となる。

(iii) の証明：

$(p, q) \in \tilde{f}(T)$  のとき、 $p = u\langle N(T) \rangle_{A=\omega}$ 、 $q = ui\langle D(T) \rangle_{A=\omega}$  ( $u \in \Phi_8$ ) と書ける。このとき、 $-u \in \Phi_8$  であり、 $-p = (-u)\langle N(T) \rangle_{A=\omega}$ 、 $-q = (-u)i\langle D(T) \rangle_{A=\omega}$  と書ける。故に、 $(-p, -q) \in \tilde{f}(T)$  である。  $\square$

**定理 6-3** ([65; Propositions 5, 6])

タングル  $t$  に対して  $\tilde{f}(t) = \Psi(t) \cap \mathbb{Z}^2 \in \mathbf{A}$  はタングルのアンビエント・イソトピー不変量であり、次の性質を満たす。タングル  $s, t$  に対して

- (1)  $\tilde{f}(s+t) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}(t)$  となる。  
(2)  $\tilde{f}(t) = [p, q]$  とおくと、 $\tilde{f}(t^{\text{rot}}) = [-q, p]$ 、 $\tilde{f}(-t) = [-p, q]$ 、 $\tilde{f}(t^{\text{in}}) = [q, p]$  である。

(証明)

$\tilde{f}(t)$  がアンビエント・イソトピー不変量であることは補題 6-1 による。

(1)  $\tilde{f}(s) = [p, q]$ 、 $\tilde{f}(t) = [r, s]$  とおき、 $S, T$  をそれぞれ  $s, t$  のタングル図式とすると、ある  $u, v \in \Phi_8$  を用いて

$$\begin{aligned} p &= u\langle N(S) \rangle_{A=\omega}, & q &= ui\langle D(S) \rangle_{A=\omega} \\ r &= v\langle N(T) \rangle_{A=\omega}, & s &= vi\langle D(T) \rangle_{A=\omega} \end{aligned}$$

と書くことができる。(5.6), (5.7) および

$$\langle D([0]) \rangle_{A=\omega} = 1, \langle N([0]) \rangle_{A=\omega} = 0, \langle D([\infty]) \rangle_{A=\omega} = 0, \langle N([\infty]) \rangle_{A=\omega} = 1$$

より

$$\begin{aligned} \langle D(S+T) \rangle_{A=\omega} &= d(S)d(T) = (-i\bar{u}q)(-i\bar{v}s) = -qs\bar{u}\bar{v}, \\ \langle N(S+T) \rangle_{A=\omega} &= n(S)d(T) + d(S)n(T) = (\bar{u}p)(-i\bar{v}s) + (-i\bar{u}q)(\bar{v}r) = -i\bar{u}\bar{v}(ps + rq) \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$ps + rq = iuv\langle N(S+T) \rangle_{A=\omega}, \quad qs = (iuv) \cdot i\langle D(S+T) \rangle_{A=\omega}$$

となる。ここで、 $iuv \in \Phi_8$  であるから、 $(ps+rq, qs) \in \Psi(S+T)$  がわかる。さらに、 $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$  であるから、これはまた  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  にも属している。よって、

$$\tilde{f}(S+T) = \Psi(S+T) \cap \mathbb{Z}^2 = [ps + rq, qs] = [p, q] + [r, s] = \tilde{f}(S) + \tilde{f}(T)$$

を得る。

(2)  $\tilde{f}(T) = [p, q]$  のとき、 $p = u\langle N(T) \rangle_{A=\omega}$ 、 $q = ui\langle D(T) \rangle_{A=\omega}$  を満たす  $u \in \Phi_8$  が存在する。 $N(T^{\text{rot}}) = D(T)$ 、 $D(T^{\text{rot}}) = N(T)$  となるから (補題 5-4)、

$$\begin{aligned} (\langle N(T^{\text{rot}}) \rangle_{A=\omega}, i\langle D(T^{\text{rot}}) \rangle_{A=\omega}) &= (\langle D(T) \rangle_{A=\omega}, i\langle N(T) \rangle_{A=\omega}) \\ &= (-\bar{u}iq, \bar{u}ip) = \bar{u}i(-q, p) \end{aligned}$$

となる。 $-iu \in \Phi_8$  ゆえ、 $\tilde{f}(T^{\text{rot}}) = [-q, p]$  を得る。

補題 5-4(1) より、 $\langle N(-T) \rangle_{A=\omega} = \overline{\langle N(T) \rangle_{A=\omega}}$ 、 $\langle D(-T) \rangle_{A=\omega} = \overline{\langle D(T) \rangle_{A=\omega}}$  であるから、

$$\begin{aligned} (\langle N(-T) \rangle_{A=\omega}, i \langle D(-T) \rangle_{A=\omega}) &= (\overline{\langle N(T) \rangle_{A=\omega}}, i \overline{\langle D(T) \rangle_{A=\omega}}) \\ &= (up, i(uiq)) = -u(-p, q) \end{aligned}$$

となる。これは  $\tilde{f}(-T) = [-p, q]$  となることを意味する。

$T^{\text{in}} = -T^{\text{rot}}$  であるから、 $\tilde{f}(T^{\text{in}}) = [q, p]$  を得る。 □

**例 6-4**  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $\tilde{f}([n]) = [-n, 1]$ 、 $\tilde{f}\left(\frac{1}{[n]}\right) = [1, -n]$  である。

**解：**

まず、 $\tilde{f}([n]) = [-n, 1]$  について示す。

$n = 0$  の場合、 $N([0]) = \bigcirc \amalg \bigcirc$ 、 $D([0]) = \bigcirc$  であるから、 $\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = 0$ 、 $\langle D([0]) \rangle_{A=\omega} = 1$  となる。よって、 $\Psi([0]) = \{ (0, ui) \mid u \in \Phi_8 \}$  であり、したがって、 $\tilde{f}([0]) = [0, 1]$  を得る。

$n = 1$  の場合、 $N([1]) = \bigcirc$ 、 $D([1]) = \bigcirc$  となる。よって、 $A = \omega$  のとき、

$$\langle N([1]) \rangle = -A^3 = A^{-1}, \quad \langle D([1]) \rangle = -A^{-3} = A$$

となる。これより、

$$-A \langle N([1]) \rangle = -1, \quad (-A)i \langle D([1]) \rangle = -A^2 i = 1$$

であるから、 $\tilde{f}([1]) = [-1, 1]$  を得る。

$n > 1$  の場合、 $[n] = [n-1] + [1]$  であるから、 $\tilde{f}([n-1]) = [-(n-1), 1]$  が示されていると仮定すると、定理 6-3(1) を用いて

$$\tilde{f}([n]) = \tilde{f}([n-1]) + \tilde{f}([1]) = [-(n-1), 1] + [-1, 1] = [-n, 1]$$

となることがわかる。

$n = -1$  の場合、 $n = 1$  のときと同様にして  $A = \omega$  のとき、

$$\langle N([-1]) \rangle = -A^{-3} = A, \quad \langle D([-1]) \rangle = -A^3 = A^{-1}$$

となることがわかる。したがって、

$$-A^3 \langle N([-1]) \rangle = 1, \quad (-A^3)i \langle D([-1]) \rangle = -A^2 i = 1$$

であるから、 $\tilde{f}([-1]) = [1, 1]$  を得る。

$n < -1$  の場合、 $[n] = [n+1] + [-1]$  であるから、 $\tilde{f}([n+1]) = [-(n+1), 1]$  が示されていると仮定すると、定理 6-3(1) を用いて

$$\tilde{f}([n]) = \tilde{f}([n+1]) + \tilde{f}([-1]) = [-(n+1), 1] + [1, 1] = [-n, 1]$$

となることがわかる。

以上で、すべての  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $\tilde{f}([n]) = [-n, 1]$  となることが示された。

すべての  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $\frac{1}{[n]} = [n]^{\text{in}}$  であるから、定理 6-3(2) より、

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{[n]}\right) = \tilde{f}([n]^{\text{in}}) = [1, -n]$$

となる。 □

定理 6-3 と例 6-4 より

**命題 6-5**

タングル図式  $T$  に対して (5.10) のように定義される  $F(T)$  は、定理 6-3 のように定義される  $\tilde{f}(T) \in A$  の自然な射影  $A \rightarrow \tilde{Q}(\mathbb{Z})$  による像  $f(T)$  を用いて

$$F(T) = -f(T)$$

と表わされる。

(証明)

$\tilde{f}(T) = [p, q]$  ( $= \frac{p}{q}$ ) とおく。すると、 $p = un(T)$ ,  $q = uid(T)$  ( $u \in \Phi_8$ ) と書ける。

補題 5-7 より、複素数の形式商を関係  $\frac{z}{w} \sim \frac{\alpha z}{\alpha w}$  ( $z, w, \alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ ) で割った半群の元として

$$F(T) = i \frac{n(T)}{d(T)} = i \frac{p\bar{u}}{-iq\bar{u}} = -\frac{p}{q} = -f(T)$$

が成り立つ。 □

● 6-2 : タングルの Krebses 数と絡み目の行列式

Krebses 不変量  $\Psi(t)$  から次のようにして数を取り出すことができる。

**定義 6-6**

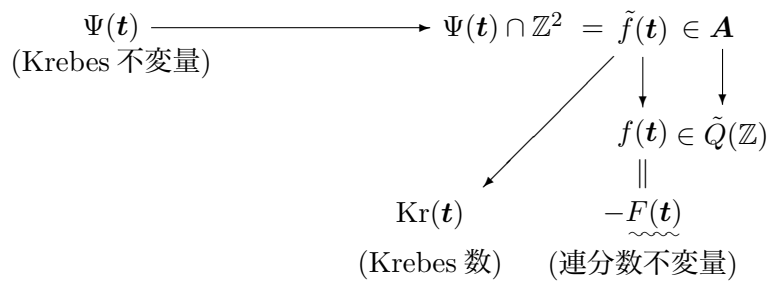
2-タングル  $t$  に対して  $\tilde{f}(t) = [p, q]$  のとき、

$$(6.2) \quad \text{Kr}(t) := \gcd(p, q)$$

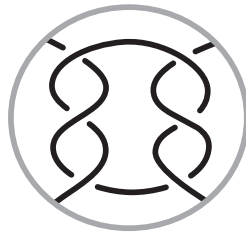
を  $t$  の **Krebses 数** (*Krebses number*) と呼ぶ。但し、 $\gcd(0, 0) = \infty$  と定める。

$\text{Kr}(t)$  は 2-タングル  $t$  のアンビエント・イソトピー不変量である。(注： $p, q$  は負の場合もあり得るが、最大公約数は正の公約数のうちで最大のものと定義するので、 $\gcd(p, q)$  は正の整数である。)

**まとめと注意**： $\text{Kr}(t)$  を Krebses 不変量と呼ぶことが多いが、このノートでは Krebses 数と呼び Krebses 不変量  $\Psi(t)$  と明確に区別することにした。例えば、2 つの 2-タングル  $5_1, 6_1$  に対して  $\text{Kr}(5_1) = \text{Kr}(6_1) = 1$  であるが、 $\Psi(5_1) = [5, -6] \neq [9, -10] = \Psi(6_1)$  となるため、実際に、 $\text{Kr}(t)$  よりも  $\Psi(t)$  の方が詳しい。(記号  $5_1, 6_1$  は [46] に従っている。これらの計算方法は後の第 6-3 節を参照。)



**例 6-7 (Krebes)**  $t$  を次の図式  $T$  によって与えられる 2-タングル (クラスプ (clasp)) とする。



このとき、 $\Psi(t) = [0, 9]$ ,  $\text{Kr}(t) = 9$  である。

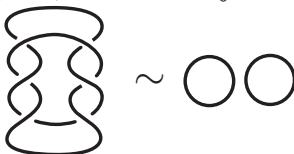
解；

$T = \frac{1}{[-3]} + \frac{1}{[3]}$  であるから、定理 6-3(1) より、 $\tilde{f}(T) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[-3]}\right) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[3]}\right)$  となる。ここで、例 6-4 より  $\tilde{f}\left(\frac{1}{[-3]}\right) = [1, 3]$ ,  $\tilde{f}\left(\frac{1}{[3]}\right) = [1, -3]$  であるから、

$$\tilde{f}(t) = [1, 3] + [1, -3] = [1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3, 3 \cdot (-3)] = [0, -9] = [0, 9]$$

とわかる。よって、 $\Psi(t) = [0, 9]$  でありまた、 $\text{Kr}(t) = \text{gcd}(0, 9) = 9$  がわかる。 □

**注意：** $t$  が有理タングルならば、 $\text{Kr}(t) = 1$  である (定理 A-12(1) を参照)。したがって、上の例の  $t$  は有理タングルではない。この事実はまた次のようにしてもわかる。 $t$  の分子をとると、

$L := N(t) =$    $\sim \bigcirc \bigcirc$  となる。よって、 $L$  の成分を分離する  $S^3$  内の 2 次元球

面が存在するので、 $L$  は素ではない。任意の有理絡み目 (= 有理タングルの分子に同値な絡み目) は素である [2; p.67] から、 $t$  は有理タングルではない。

絡み目に対して行列式が定義される。タングルの Krebes 数は分子と分母の行列式の最大公約数に等しい。この事実を示す。その前に、絡み目の行列式のブラケット多項式に基づく定義を述べよう。絡み目図式  $D$  に対して

$$(6.3) \quad |\langle D \rangle| := |\langle D \rangle_{A=\omega}|$$

と定める。(5.11) より、 $|\langle D \rangle|$  は 0 以上の整数値をとる。

**命題 6-8**

絡み目  $L$  に対して、 $|\langle D \rangle|$  は  $L$  の図式  $D$  の選び方によらない。すなわち、 $|\langle D \rangle|$  は  $L$  のアンビエント・イソトピー不変量である。 $\det(L) := |\langle D \rangle|$  とおき、これを  $L$  の行列式 (*determinant*) と呼ぶ。

**(証明)**

$|\langle D \rangle|$  が Reidemeister 移動 (RI), (RII), (RIII) の下で不変であることを示せばよい。Kauffman ブラケット多項式の定義より、 $\langle D \rangle$  は (RII), (RIII) の下で不変である。したがって、 $|\langle D \rangle|$  もそうである。

$|\langle D \rangle|$  が (RI) の下で不変なことを示す。 $D$  の弧に正のカール  $\rho$  を付け加えた図式を  $D_1$  とし、負のカール  $\bar{\rho}$  を付け加えた図式を  $D_{-1}$  とする。すると、

$$\langle D_1 \rangle = -A^3 \langle D \rangle, \quad \langle D_{-1} \rangle = -A^{-3} \langle D \rangle$$

が成り立つ。 $A = \omega$  のとき、 $|-A^{\pm 3}| = 1$  なので、

$$|\langle D_1 \rangle| = |-A^3| \cdot |\langle D \rangle| = |\langle D \rangle|, \quad |\langle D_{-1} \rangle| = |-A^{-3}| \cdot |\langle D \rangle| = |\langle D \rangle|$$

を得る。よって、 $|\langle D \rangle|$  は (RI) の下で不変である。  $\square$

**系 6-9**

2-タングル  $t$  に対して、その図式を  $T$  とおく。

$$\langle T \rangle_{A=\omega} = d(T) \langle [0] \rangle_{A=\omega} + n(T) \langle [\infty] \rangle_{A=\omega}$$

とおくと、

$$(6.4) \quad \det(N(t)) = |n(T)|, \quad \det(D(t)) = |d(T)|$$

が成り立つ。

**(証明)**

(5.7) より、

$$\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = n(T), \quad \langle D(T) \rangle_{A=\omega} = d(T)$$

である。この結果と命題 6-8 より、

$$\det(N(T)) = |\langle N(T) \rangle| = |n(T)|, \quad \det(D(T)) = |\langle D(T) \rangle| = |d(T)|$$

を得る。  $\square$

**系 6-10**

2-タングル  $t$  に対して、 $T$  を  $t$  の図式とすると、

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \text{Kr}(t) &= \gcd(\det(D(t)), \det(N(t))) \\ &= \gcd(|d(T)|, |n(T)|) \end{aligned}$$

と表わされる。

(証明)

$\tilde{f}(t) = [p, q]$  とすると、Krebes 数の定義より、 $Kr(t) = \gcd(|p|, |q|)$  である。一方、 $\tilde{f}(t)$  の定義より  $\tilde{f}(t) \in \Psi(T)$  であるから

$$p = u\langle N(T) \rangle_{A=\omega} = un(T), \quad q = ui\langle D(T) \rangle_{A=\omega} = uid(T) \quad (u \in \Phi_8)$$

と表わされる。したがって、系 6-9 より、 $|p| = |n(T)| = \det(N(t))$ ,  $|q| = |d(T)| = \det(D(t))$  となることがわかる。これより、系の等式が従う。  $\square$

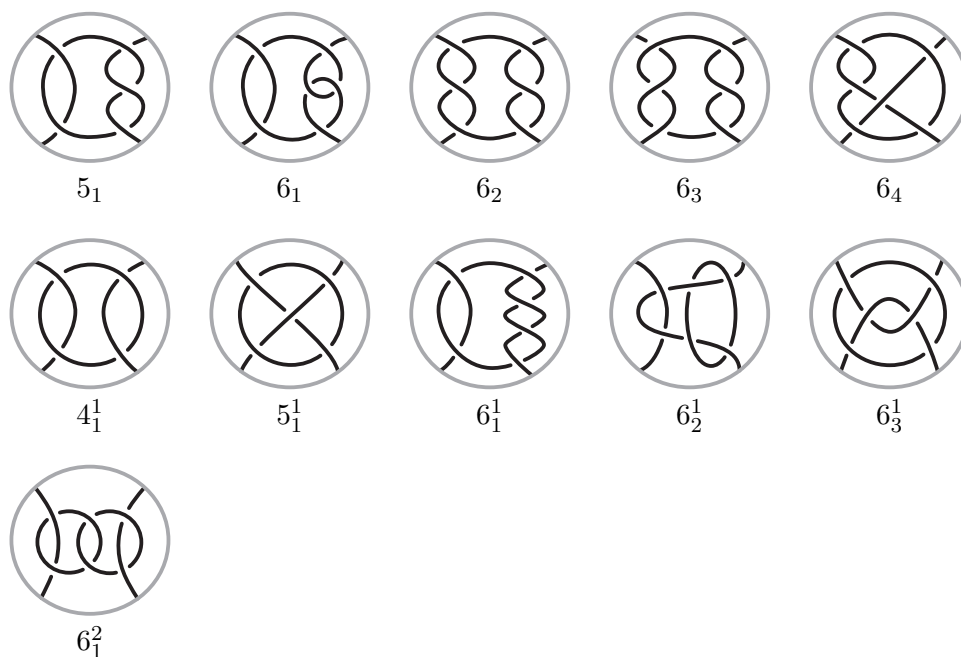
● 6-3 : Krebes 不変量の計算と交点数が 6 以下の素なタングルの分類

2-タングル  $(\mathbb{B}^3, t)$  が素 (*prime*) であるとは次の 2 条件が満たされるときをいう [66], [77; 1.3& Proposition 1.5]。

- (i) (非分離性)  $\mathbb{B}^3$  内に  $t$  の成分を分離する 2 次元球面は存在しない。
- (ii) (局所自明性)  $\mathbb{B}^3$  内において  $t$  と 2 点で横断的に交わる任意の 2 次元球面  $S$  に対して、 $\partial B = S$  かつ  $(B, B \cap t)$  が自明な 1-タングルとなる 3 次元球体  $B$  が存在する。

金信泰造、斉藤啓亮、佐藤進は [46] の中で 7 交点以下の素なタングルを、弱い意味で同値、すなわち、境界上の 4 点は固定されなくても集合として保っているようなイソトピーの下で移り合うものを区別しない、という条件の下で決定している。その論文には、交点数が 6 以下の素なタングルの決定は斉藤氏の修士論文においてなされたこと、Yamano もまた独立に同じ結果を得ており、彼の結果と同じ結果であることがその論文の中で報告されている。[46] によると、

交点数が 7 以下の素なタングルは、弱い意味での同値を法として、閉じたループを含まないものが 23 個、閉じたループを含むものが 16 個ある。このうち、交点数が 6 以下の素なタングルは次の 11 個である。





これらの Krebs 不変量、Krebs 数を計算するには次の公式が役に立つ (証明は演習問題として残しておく)。以下、 $A = \omega = \sqrt{i}$  とする。

**補題 6-11**

(1) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$\begin{aligned} \langle [n] \rangle_{A=\omega} &= A^n \langle [0] \rangle_{A=\omega} + nA^{n-2} \langle [\infty] \rangle_{A=\omega} \\ \left\langle \frac{1}{[n]} \right\rangle_{A=\omega} &= nA^{-n+2} \langle [0] \rangle_{A=\omega} + A^{-n} \langle [\infty] \rangle_{A=\omega} \end{aligned}$$

(2) タングル図式  $T$  の一部分の辺を  に置き換えてタングル図式  $T'$  を作る時

(6.6)  $\langle T' \rangle_{A=\omega} = 2\langle T \rangle_{A=\omega}.$

(3) 任意の 0 以上の整数  $n$  に対して、

$$\left\langle \left( \bigotimes_{i=1}^n \right) \right\rangle_{A=\omega} = 2A^n \left\langle \left( \bigcirc \right) \right\rangle_{A=\omega} + (2n+1)A^{n-2} \left\langle \left( \bigcirc \bigcirc \right) \right\rangle_{A=\omega}$$

**演習.** 上の補題を証明せよ。

Krebs 不変量の計算を行う際には、タングルの和  $\oplus$  と  $\mathbb{C}$  における和  $+$  の両方を用いることがある。前者の和の計算規則は (5.6) に基づくため、同じ記号を使うと混乱が生じやすい。そこで以下の計算においてはタングルの和を  $\otimes$  で表わすことにする。

•  $5_1$  の Krebs 不変量:

$5_1 = \frac{1}{[2]} \otimes \frac{1}{[3]}$  であるから、

$$\tilde{f}(5_1) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[3]}\right) = [1, -2] + [1, -3] = [5, -6]$$

であり、 $\text{Kr}(5_1) = \text{gcd}(5, 6) = 1$  を得る。

•  $6_1$  の Krebs 不変量:

$6_1 = \frac{1}{[2]} \otimes \left( \frac{1}{[1]} * [2] * \frac{1}{[1]} \right)$  である。ここで補題 3-3(3) を用いると、

$$6_1 \sim \frac{1}{[2]} \otimes \left( \frac{1}{[2]} * [2] \right) \sim \frac{1}{[2]} \otimes \frac{1}{[2] \otimes \frac{1}{[2]}} = \frac{1}{[2]} \otimes \left( [2] \otimes \frac{1}{[2]} \right)^{\text{in}}$$

となることがわかる。

$$\tilde{f}\left([2] \otimes \frac{1}{[2]}\right) = \tilde{f}([2]) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) = [-2, 1] + [1, -2] = [-5, 2]$$

であるから、定理 6-3(2) より

$$\tilde{f}\left(\left([2] \otimes \frac{1}{[2]}\right)^{\text{in}}\right) = [2, -5]$$

と計算され、したがって、

$$\tilde{f}(6_1) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) + \tilde{f}\left(\left([2] \bowtie \frac{1}{[2]}\right)^{\text{in}}\right) = [1, -2] + [2, -5] = [-9, 10] = [9, -10]$$

を得る。よって、 $\text{Kr}(6_1) = \text{gcd}(9, 10) = 1$  を得る。

•  $6_2$  の Krebses 不変量：

$$6_2 = \frac{1}{[3]} \bowtie \frac{1}{[3]} \text{ であるから}$$

$$\tilde{f}(6_2) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[3]}\right) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[3]}\right) = [1, -3] + [1, -3] = [6, -9]$$

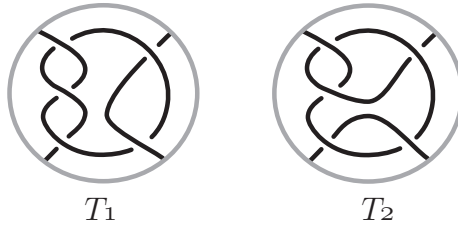
である。よって、 $\text{Kr}(6_2) = \text{gcd}(6, 9) = 3$  を得る。

•  $6_3$  の Krebses 不変量：

$$6_3 \text{ は例 6-7 と同じタングルなので、} \tilde{f}(6_3) = [0, 9], \text{ Kr}(6_3) = 9 \text{ である。}$$

•  $6_4$  の Krebses 不変量：

$6_4$  の右上から左下へ接続する曲線上の交差点のうち、真ん中の交差点において交差解消を行う。すると、図のような 2 つのタングル図式  $T_1, T_2$  が得られる ( $T_1 = ((5_1)^{\text{rot}})^{\text{rot}}$ )。



$$\langle 6_4 \rangle_{A=\omega} = A \langle T_1 \rangle_{A=\omega} + A^{-1} \langle T_2 \rangle_{A=\omega}$$

である。 $T_1, T_2$  の Kauffman ブラケット多項式を計算する。補題 6-11 より (以下の計算において  $\langle \rangle_{A=\omega}$  は省略する)、

$$\begin{aligned} \langle 6_4 \rangle_{A=\omega} &= A \langle T_1 \rangle_{A=\omega} + A^{-1} \langle T_2 \rangle_{A=\omega} \\ &= A(-A^3) \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} + A^{-1} \left\{ A \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} + A^{-1} \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} \right\} \\ &= 2 \left\langle \frac{1}{[3]} \right\rangle_{A=\omega} + A^{-2} \left\{ A \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} + A^{-1} \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} \right\} \\ &= 2 \left\{ 3A^{-1} \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} + A^{-3} \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} \right\} \\ &\quad + A^{-1}(-A^3)^2 \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} + A^{-3} \left( 2 \langle \text{link} \rangle_{A=\omega} \right) \end{aligned}$$

$$= 6A^{-1} \left( \text{Diagram 1} \right) - 5A \left( \text{Diagram 2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 3} &= A \left( \text{Diagram 4} \right) + A^{-1} \left( \text{Diagram 5} \right) \\ &= A \left\{ A \left( \text{Diagram 6} \right) + A^{-1} \left( \text{Diagram 7} \right) \right\} + A^{-1} \left\{ A \left( \text{Diagram 8} \right) + A^{-1} \left( \text{Diagram 9} \right) \right\} \\ &= A^2 \left( \text{Diagram 10} \right) + (-A^{-3}) \left( \text{Diagram 11} \right) \\ &\quad + A \left( \text{Diagram 12} \right) + A^{-1} \left( \text{Diagram 13} \right) + A^{-2}(-A^{-3}) \left( \text{Diagram 14} \right) \\ &= A^2 \left( \text{Diagram 15} \right) - A^{-3} \left( \text{Diagram 16} \right) + A \left( \text{Diagram 17} \right) + 2A^{-1} \left( \text{Diagram 18} \right) \\ &= 7A \left( \text{Diagram 19} \right) + 6A^{-1} \left( \text{Diagram 20} \right) \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\text{Diagram 3} = -i \left( 13i \left( \text{Diagram 19} \right) + 11 \left( \text{Diagram 20} \right) \right)$$

となり、 $\text{Kr}(6_4) = \text{gcd}(11, 13) = 1$  がわかる。

•  $4_1^1$  の Krebs 不変量：

$4_1^1 = \frac{1}{[2]} \bowtie \frac{1}{[2]}$  であるから、

$$\tilde{f}(4_1^1) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) = [1, -2] + [1, -2] = [4, -4]$$

である。したがって、 $\text{Kr}(4_1^1) = 4$  とわかる。

•  $5_1^1$  の Krebs 不変量：

中央の交差点を  $A$  領域が繋がるように交差解消すると  $4_1^1$  が生じ、 $A^{-1}$  領域が繋がるように交差解消すると  $(4_1^1)^{\text{in}}$  が生じる。よって、

$$\langle 5_1^1 \rangle_{A=\omega} = \omega \langle 4_1^1 \rangle_{A=\omega} + \omega^{-1} \langle (4_1^1)^{\text{in}} \rangle_{A=\omega}$$

となる。 $A^4 = -1$  に注意すると、 $\langle 4_1^1 \rangle_{A=\omega}$  は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3} \\
 &= A(-A^3) \text{Diagram 4} + A^{-1} \left\{ A \text{Diagram 5} + A^{-1} \text{Diagram 6} \right\} \\
 &= 4 \text{Diagram 7} - 4i \text{Diagram 8}.
 \end{aligned}$$

補題 5-4 より、

$$\langle (4_1^1)^{\text{in}} \rangle_{A=\omega} = 4i \text{Diagram 7} + 4 \text{Diagram 8}$$

とわかる、故に、

$$\text{Diagram 9} = A^{-1} \left( 8i \text{Diagram 7} + 8 \text{Diagram 8} \right)$$

とわかる。これは  $\tilde{f}(5_1^1) = [8, -8]$  であることを意味し、したがって、 $\text{Kr}(5_1^1) = 8$  である。

•  $6_1^1$  の Krebs 不変量：

$$6_1^1 = \frac{1}{[2]} \bowtie \frac{1}{[4]} \text{ であるから、}$$

$$\tilde{f}(6_1^1) = \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[4]}\right) = [1, -2] + [1, -4] = [6, -8]$$

である。したがって、 $\text{Kr}(6_1^1) = \text{gcd}(6, 8) = 2$  とわかる。

•  $6_2^1$  の Krebs 不変量：

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 10} &= A \text{Diagram 11} + A^{-1} \text{Diagram 12} \\
 &= A \left\{ A \text{Diagram 13} + A^{-1} \text{Diagram 14} \right\} + A^{-1}(-A^{-3}) \text{Diagram 15} \\
 &= A^2 \langle 4_1^1 \rangle_{A=\omega} + (-A^{-3}) \text{Diagram 16} + \text{Diagram 17}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$4_1^1 = \text{Diagram 18} \bowtie \text{Diagram 19}$$

であるから、補題 6-11 より、

$$\langle 4_1^1 \rangle_{A=\omega} = 4 \text{Diagram 7} + 4A^{-2} \text{Diagram 8}$$

であり、同様に、補題 6-11 より、

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= 2A \text{Diagram 2} + 3A^{-1} \text{Diagram 3}, \\ \text{Diagram 4} &= 2A^2 \text{Diagram 2} + 5 \text{Diagram 3} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \langle 6_2^1 \rangle_{A=\omega} &= (4A^2 - A^{-3}(2A) + 2A^2) \text{Diagram 2} + (4 - A^{-3}(3A^{-1}) + 5) \text{Diagram 3} \\ &= 8i \text{Diagram 2} + 12 \text{Diagram 3} \end{aligned}$$

であるから、 $\tilde{f}(6_2^1) = [12, -8]$  であり、 $\text{Kr}(6_2^1) = \gcd(|8i|, |12|) = 4$  と計算される。

•  $6_3^1$  の Krebses 不変量：

$$\text{Diagram 1} = A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= \text{Diagram 4} = \text{Diagram 5} * \left( \text{Diagram 6} \boxtimes \text{Diagram 7} \right) \\ \text{Diagram 3} &= \text{Diagram 8} = -A^{-3} \text{Diagram 9} = -A^{-3} \text{Diagram 10} \\ &= -A^{-3} \left\{ \text{Diagram 11} \boxtimes \left( \text{Diagram 12} * \text{Diagram 13} \right) \right\} \end{aligned}$$

であり、補題 6-11 より

$$\begin{aligned} \text{Diagram 6} &= 3A^{-1} \text{Diagram 2} - A \text{Diagram 3}, \\ \text{Diagram 12} &= -A \text{Diagram 2} + 3A^{-1} \text{Diagram 3}, \\ \text{Diagram 13} &= 2 \text{Diagram 2} + A^{-2} \text{Diagram 3}, \\ \text{Diagram 5} &= A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \left( A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3} \right) \\
 &\quad * \left( 3 \text{Diagram 2} + 4A^{-2} \text{Diagram 3} \right) \quad (\because (5.7)) \\
 &= 7A^{-1} \text{Diagram 2} + 4A^{-3} \text{Diagram 3}, \\
 \text{Diagram 4} &= -A^{-3} \left\{ \left( A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3} \right) \right. \\
 &\quad \left. \bowtie \left( 5A^{-1} \text{Diagram 2} + 3A^{-3} \text{Diagram 3} \right) \right\} \\
 &= 5A \text{Diagram 2} + 8A^{-1} \text{Diagram 3} \quad (\because (5.7))
 \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned}
 \langle 6_3^1 \rangle_{A=\omega} &= \text{Diagram 4} = A \text{Diagram 1} + A^{-1} \text{Diagram 4} \\
 &= (A(7A^{-1}) + A^{-1}(5A)) \text{Diagram 2} + (A(4A^{-3}) + A^{-1}(8A^{-1})) \text{Diagram 3} \\
 &= 12 \text{Diagram 2} - 12i \text{Diagram 3}
 \end{aligned}$$

であり、これより、 $\tilde{f}(6_3^1) = [12, -12]$ ,  $\text{Kr}(6_3^1) = \gcd(|12|, |-12i|) = 12$  とわかる。

•  $6_1^2$  の Krebses 不変量 :

$6_1^2 = 4_1^1 \bowtie \frac{1}{[2]}$  であるから、

$$\tilde{f}(6_1^2) = \tilde{f}(4_1^1) + \tilde{f}\left(\frac{1}{[2]}\right) = [4, -4] + [1, -2] = [12, -8]$$

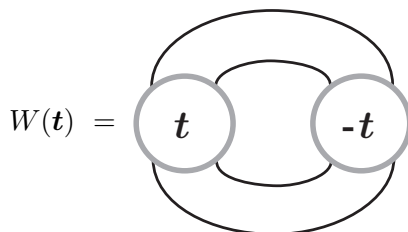
である。したがって、 $\text{Kr}(6_1^2) = \gcd(12, 8) = 4$  とわかる。

以上より、次の表が得られた。

タンブル $t$	$Kr(t)$	$\det(D(t))$	$\det(N(t))$	$\Psi(t)$
$4_1^1$	4	4	4	$[4, -4]$
$5_1$	1	6	5	$[5, -6]$
$5_1^1$	8	8	8	$[8, -8]$
$6_1$	1	10	9	$[9, -10]$
$6_2$	3	9	6	$[6, -9]$
$6_1^1$	2	8	6	$[6, -8]$
$6_3$	9	9	0	$[0, 9]$
$6_2^1$	4	8	12	$[12, -8]$
$6_4$	1	13	11	$[11, -13]$
$6_3^1$	12	12	12	$[12, -12]$
$6_1^2$	4	8	12	$[12, -8]$

以上の考察から、交点数が 6 以下の素なタンブルは Krebs 不変量  $\Psi(t)$  と成分数により区別されていることがわかる。

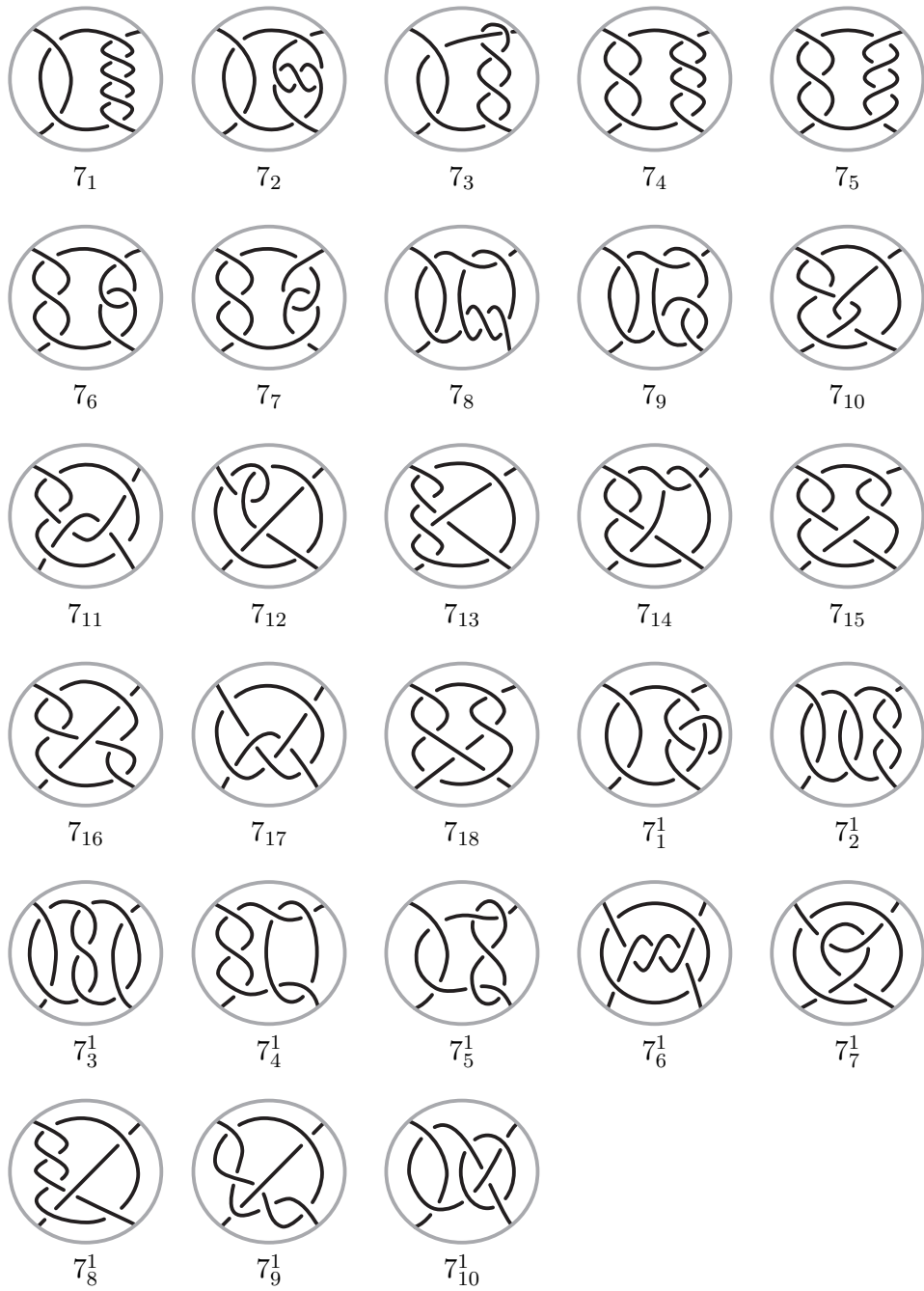
**注意 6-12** まず、 $S^1$  に同相な成分を何個含むかによって、 $5_1$  から  $6_4$  までのグループと  $4_1^1$  から  $6_3^1$  までのグループと  $6_1^2$  単独のグループの 3 つに分けられ、これらのグループの中のどの 2-タンブル同士も同値にならないことがわかる。それぞれのグループの中では Krebs 不変量が異なっている 2-タンブル同士は同値でない。よって、ここまでの考察で区別がつかない 2-タンブルは  $5_1, 6_1, 6_4$  の 3 つと、 $4_1^1, 6_2^1$  の 2 つである。金信と斉藤と佐藤 [46] により、p.88 と後述の p.96 に挙げられている交点数が 7 以下の素な 2-タンブルは、Krebs 数とタンブルのダブルによって区別されることが示されている。特に、 $5_1, 6_1, 6_4$  の 3 つと、 $4_1^1, 6_2^1$  の 2 つはタンブルのダブルの Jones 多項式により区別される (Jones 多項式の定義は第 8-3 節を参照)。ここで 2-タンブル (図式)  $t$  の**ダブル**とは、絡み目  $W(t) := N(t + (-t))$  のことをいう。 $t$  と  $t'$  が同値な 2-タンブルならば、 $W(t)$  と  $W(t')$  は同値な絡み目である。



Jones 多項式は向きづけられた絡み目の不変量であるが、 $W(t)$  に任意に向きを与えたときの Jones 多項式は、向きの与え方によらないことが知られている。したがって、 $t$  と  $t'$  が (向きを考えずに) 同値な 2-タンブルならば、 $V_{W(t)}(t) = V_{W(t')}(t)$  となる。

#### ● 6-4 : 交点数が 7 の素なタンブルの Krebs 不変量

交点数が 7 の素なタンブルは、弱い意味で同値なものを除くと、次の表で与えられるタンブルのいずれかと同値である [46]。



これらのタングルの Krebses 不変量と Krebses 数は次の表で与えられる [46, 107]。



タングル $t$	$\text{Kr}(t)$	$\det(D(t))$	$\det(N(t))$	$\Psi(t)$
$7_1$	1	10	7	$[7, -10]$
$7_2$	1	14	13	$[13, -14]$
$7_3$	1	14	11	$[11, -14]$
$7_4$	1	12	7	$[7, -12]$
$7_5$	1	12	1	$[1, -12]$
$7_6$	1	15	11	$[11, -15]$
$7_7$	1	15	1	$[1, 15]$
$7_8$	1	10	17	$[17, -10]$
$7_9$	1	14	19	$[19, -14]$
$7_{10}$	1	20	17	$[17, -20]$
$7_{11}$	1	19	16	$[16, -19]$
$7_{12}$	1	19	21	$[21, -19]$
$7_{13}$	5	20	15	$[15, -20]$
$7_{14}$	1	18	19	$[19, -18]$
$7_{15}$	7	21	14	$[14, -21]$
$7_{16}$	3	21	15	$[15, -21]$
$7_{17}$	3	21	24	$[24, -21]$
$7_{18}$	5	5	10	$[10, -5]$
$7_1^1$	2	16	14	$[14, -16]$
$7_2^1$	4	12	16	$[16, -12]$
$7_3^1$	4	12	16	$[16, -12]$
$7_4^1$	4	12	16	$[16, -12]$
$7_5^1$	16	16	16	$[16, -16]$
$7_6^1$	16	16	16	$[16, -16]$
$7_7^1$	20	20	20	$[20, -20]$
$7_8^1$	2	18	14	$[14, -18]$
$7_9^1$	18	18	18	$[18, -18]$
$7_{10}^1$	8	16	24	$[24, -16]$

上の表より、96 に挙げられている交点数が 7 の素な 2-タングルのうち、Krebes 不変量で区別されないものの組は  $\{7_2^1, 7_3^1, 7_4^1\}$  と  $\{7_5^1, 7_6^1\}$  のみである。

$7_2^1, 7_3^1, 7_4^1$  はどれも結び目成分をもつが、その結び目成分は  $7_2^1$  と  $7_4^1$  は自明な結び目であるのに対して、 $7_3^1$  は三葉結び目になっている [46; p.138]。よって、結び目成分を比較することで、 $7_2^1, 7_4^1$  と  $7_3^1$  は同値でないことがわかる。さらに、 $7_2^1, 7_4^1$  から結び目成分を取り除くと、 $7_2^1$  の方は局所的な結び目が生じているのに対して、 $7_4^1$  の方はそれがないので、同値でないことがわかる。

$7_2^1, 7_3^1, 7_4^1$  から結び目成分を除いた 2-タングルを順に  $(7_2^1)', (7_3^1)', (7_4^1)'$  と表わすことにすると、 $(7_3^1)' = [\infty]$ ,  $(7_4^1)' = \frac{1}{[3]}$  である。 $(7_2^1)'$  については次のように  $\langle (7_2^1)' \rangle_{A=\omega}$  が計算される。

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &= A \text{Diagram 2} + A^{-1} \text{Diagram 3} \\
&= A(-A^3)^2 \text{Diagram 4} + 2A^{-1} \text{Diagram 5} \\
&= 3A^{-1} \text{Diagram 6}
\end{aligned}$$

よって、 $(7_2^1)', (7_3^1)', (7_4^1)'$  の Krebses 不変量は次のようになる。

タングル $t$	$\text{Kr}(t)$	$\det(D(t))$	$\det(N(t))$	$\Psi(t)$
$(7_2^1)'$	3	0	3	$[3, 0]$
$(7_3^1)'$	1	0	1	$[1, 0]$
$(7_4^1)'$	1	3	1	$[1, -3]$

故に、 $7_2^1, 7_3^1, 7_4^1$  は結び目成分を取り除いて得られる 2-タングルの Krebses 不変量により区別される。

次に、 $7_5^1, 7_6^1$  について考察する。 $7_5^1, 7_6^1$  から結び目成分を取り除くと、それぞれ  $\frac{1}{[2]}, [-3]$  となる。よって、 $(7_5^1)', (7_6^1)'$  を  $7_5^1, 7_6^1$  から結び目成分を取り除いて得られる 2-タングルとすると、例 2-2(4) と (3) よりそれらの Krebses 不変量は次のようになる。

タングル $t$	$\text{Kr}(t)$	$\det(D(t))$	$\det(N(t))$	$\Psi(t)$
$(7_5^1)'$	1	2	1	$[1, -2]$
$(7_6^1)'$	1	1	3	$[3, 1]$

故に、 $7_5^1$  と  $7_6^1$  は結び目成分を取り除いて得られる 2-タングルの Krebses 不変量により区別される。

以上の考察から、金信と斉藤と佐藤 [46] により与えられた交点数が 7 以下の素な 2-タングルのリスト (p.88, p.96) 内の 2-タングルに関しては、Krebses 不変量が同じ場合には結び目成分を取り除いて得られる 2-タングルの Krebses 不変量を使えば区別されることがわかる。

## §7. 回文と有理絡み目の分類

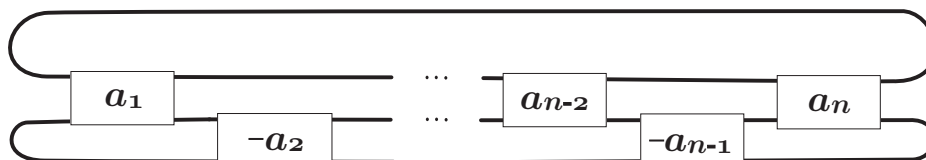
回文とは「たけやぶやけた」のように上から読んでも下から読んでも (横書きの場合は左から読んでも右から読んでも) 同じになる文のことをいう。連分数の場合には、その表示における数字を逆から並べ変えても同じ連分数になっているものをいう。ここでは、有理数の連分数表示とその表示における数字を逆から並べた連分数との関係を調べる。回文連分数は有理絡み目の分類に深く関わっている [51]。

### ● 7-1 : 有理絡み目の定義

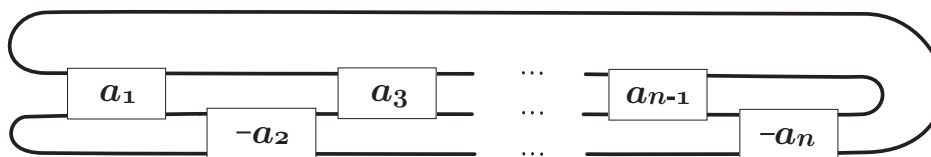
**有理絡み目** (*rational link*) とは有理タングルの分子と同値であるような絡み目のことをいう。

例 3-17 より、任意の有理絡み目は次の形をした図式で表わされる。

- $n$  が奇数のとき、



- $n$  が偶数のとき、



但し、

$$\boxed{n} = \begin{cases} \overleftarrow{\text{X} \cdots \text{X}}^n & (n \geq 0), \\ \overleftarrow{\text{X} \cdots \text{X}}^{-n} & (n < 0) \end{cases}$$

$n$  が偶数、奇数のいずれの場合も、上の図式は有理タングル図式  $T = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  の分子  $N(T)$  になっている。有理絡み目の上記の図式による表示を  $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$  と書き、**Conway の標準形** (*Conway's normal form*) と呼ぶ。

有理絡み目の入門的・解説的な本や記事として [2], [43] を奨めたい。[59; 第 2 章, 結び目のデータ表] は結果や考え方を端的に知るのに有用である。

### ● 7-2 : 回文連分数

連分数はまた 2 次正方行列の積を用いて表示することができる ([35; 第 7 章 §3] または [51; Lemma 1])。この表示は回文定理の証明に使われるのでこれについて説明する。

無限個の変数  $x_1, x_2, \dots$  を用意し、連分数の計算と同様に  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  を定め、これを計算して  $\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$  の形にする。そのときの分子と分母をそれぞれ  $F_n, G_n \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  とおく。

例.  $[x_1] = x_1 = \frac{x_1}{1}$  より  $F_1 = x_1, G_1 = 1$ .

$$[x_1, x_2] = x_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1x_2 + 1}{x_2} \quad \text{より } F_2 = x_1x_2 + 1, G_2 = x_2.$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{x_1[x_2, x_3] + 1}{[x_2, x_3]} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1 + x_3}{x_2x_3 + 1}$$

より  $F_3 = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3, G_3 = x_2x_3 + 1$ .

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{x_1[x_2, x_3, x_4] + 1}{[x_2, x_3, x_4]} = \frac{x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1}{x_2x_3x_4 + x_2 + x_4}$$

より  $F_4 = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1, G_4 = x_2x_3x_4 + x_2 + x_4$ .

一般に、

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_n] &= [x_1, [x_2, \dots, x_n]] = \frac{x_1[x_2, \dots, x_n] + 1}{[x_2, \dots, x_n]} \\ &= \frac{x_1F_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + G_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}{F_{n-1}(x_2, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

であるから、

$$(7.1) \quad \begin{cases} F_n = x_1F_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + G_{n-1}(x_2, \dots, x_n), \\ G_n = F_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

が成り立つ。この式から  $G_n$  は  $F_{n-1}$  から決まること、および

$$F_n = x_1F_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + F_{n-2}(x_3, \dots, x_n)$$

が成り立つことがわかるが、変数がずれているので、本当の漸化式とは言いにくい。実際には、次の漸化式が成り立つ。

#### 補題 7-1

$n \geq 2$  を満たす任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{cases} F_{n+1} = x_{n+1}F_n + F_{n-1}, \\ G_{n+1} = x_{n+1}G_n + G_{n-1} \end{cases}$$

(証明)

帰納法で示す。 $n = 2$  のときは直接成立することが確かめられる。 $n$  を 2 以上の整数とし、

$$\begin{cases} F_n = x_nF_{n-1} + F_{n-2}, \\ G_n = x_nG_{n-1} + G_{n-2} \end{cases}$$

が成り立つと仮定する。

便宜上、

$$F'_{n-1} := F_{n-1}(x_2, \dots, x_n), \quad G'_{n-1} := G_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

とおく。すると、(7.1) より、任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$(7.2) \quad \begin{cases} F_{k+1} = x_1 F'_k + G'_k, \\ G_{k+1} = F'_k \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] &= \frac{x_1 F'_n + G'_n}{F'_n} \quad (\because (7.1) \text{ の直前の式}) \\ &= \frac{x_1(x_{n+1} F'_{n-1} + F'_{n-2}) + x_{n+1} G'_{n-1} + G'_{n-2}}{x_{n+1} F'_{n-1} + F'_{n-2}} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{x_{n+1}(x_1 F'_{n-1} + G'_{n-1}) + x_1 F'_{n-2} + G'_{n-2}}{x_{n+1} F'_{n-1} + F'_{n-2}} \\ &= \frac{x_{n+1} F_n + F_{n-1}}{x_{n+1} G_n + G_{n-1}} \quad (\because (7.2)) \end{aligned}$$

を得る。これは

$$F_{n+1} = x_{n+1} F_n + F_{n-1}, \quad G_{n+1} = x_{n+1} G_n + G_{n-1}$$

であることを意味する。これで帰納法が完成し、補題は証明された。  $\square$

**注意：**上の補題より、 $F_n$  は回文的である、すなわち、次の等式を満たすことがわかる。

$$F_n(x_n, x_{n-2}, \dots, x_1) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

(証明)

帰納法で証明する。 $n = 1, 2$  のときは自明に成り立つので、 $n \geq 2$  とし、 $n, n-1$  のときに上の回文等式が成り立つと仮定して、 $n+1$  のときにも回文等式が成り立つことを証明する。

補題 7-1 と帰納法の仮定より、

$$F_{n+1} = x_{n+1} F_n(x_n, \dots, x_1) + F_{n-1}(x_{n-1}, \dots, x_1) \quad \dots\dots\dots (*)$$

が成り立つ。一方、(7.1) より、

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x_{n+1}, x_n, \dots, x_1) &= x_{n+1} F_n(x_n, \dots, x_1) + G_n(x_n, \dots, x_1) \\ &= x_{n+1} F_n(x_n, \dots, x_1) + F_{n-1}(x_{n-1}, \dots, x_1) \end{aligned}$$

であるから、(\*) と合わせて  $F_{n+1} = F_{n+1}(x_{n+1}, x_n, \dots, x_1)$  であることがわかる。  $\square$

補題 7-1 の等式は行列の積を用いて次のように表現することができる：

$$(7.3) \quad \begin{pmatrix} F_n & G_n \\ F_{n-1} & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & G_{n-1} \\ F_{n-2} & G_{n-2} \end{pmatrix}.$$

これを繰り返し用いて次の等式を得る。

$$\begin{pmatrix} F_n & G_n \\ F_{n-1} & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & G_2 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} F_2 & G_2 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 1 & x_2 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、結局、

$$\begin{pmatrix} F_n & G_n \\ F_{n-1} & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされることがわかる。両辺の転置をとって次を得る。

$$(7.4) \quad \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

整数  $a$  に対して

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める。先の考察より、次を得る。

### 補題 7-2

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n)e_1 =: \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおく。但し、 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  である。このとき、 $p, q$  は互いに素であり、 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  の元として

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q}$$

が成り立つ。

(証明)

$p, q$  が互いに素であることを示す。

$$M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n) = \begin{pmatrix} p & x \\ q & y \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

とおくことができる。 $\det M(a_i) = -1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) なので、上式の両辺の行列式をとると、

$$(-1)^n = py - qx$$

が成り立つ。この等式は  $p, q$  が互いに素であることを意味している。

$F_n, G_n$  の定め方から、

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{F_n(a_1, \dots, a_n)}{G_n(a_1, \dots, a_n)}$$

であり、(7.4) より、

$$\begin{pmatrix} F_n(a_1, \dots, a_n) \\ G_n(a_1, \dots, a_n) \end{pmatrix} = M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n)e_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

である。よって、 $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q}$  である。□

補題 7-2 を用いて次の定理が証明される。

**定理 7-3 (連分数の回文定理)**

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \frac{p'}{q'} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

とおく (既約分数表示とする)。  $p > 0, p' > 0$  のとき、  $p = p'$  かつ  $qq' \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}$  となる。

**(証明)**

証明は [51; Theorem 4] の証明に従う。

$$M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}, \quad M(a_n)M(a_{n-1}) \cdots M(a_1)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p}' \\ \tilde{q}' \end{pmatrix}$$

とおくと、補題 7-2 より、  $\tilde{p} = \pm p, \tilde{q} = \pm q$  (複号同順) であり、  $\tilde{p}' = \pm p', \tilde{q}' = \pm q'$  (複号同順) である。

$$M := M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n), \quad M' := M(a_n)M(a_{n-1}) \cdots M(a_1)$$

とおく。各  $M(a_i)$  は対称行列であるから、  $M^T = M'$  が成立している。ここで、  $M^T$  は  $M$  の転置行列を表わす。

$$M\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}, \quad M'\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p}' \\ \tilde{q}' \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{p} & x \\ \tilde{q} & y \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} \tilde{p}' & x' \\ \tilde{q}' & y' \end{pmatrix} \quad (x, y, x', y' \in \mathbb{Z})$$

と表わすことができる。  $M^T = M'$  であるから、

$$\tilde{p} = \tilde{p}', \quad y = y', \quad x = \tilde{q}', \quad \tilde{q} = x'$$

となる。  $p, p'$  はともに正であるから  $\tilde{p} = \tilde{p}'$  より  $p = p'$  を得る。よって、  $\tilde{q} = \pm q$  と  $\tilde{q}' = \pm q'$  は複号同順である。

$$\det M = \tilde{p}y - x\tilde{q} = \tilde{p}y - \tilde{q}'\tilde{q} = \tilde{p}y - q'q$$

であるが、一方、  $M = M(a_1)M(a_2) \cdots M(a_n)$  であり、  $\det M(a_i) = -1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) なので  $\det M = (-1)^n$  である。故に、

$$\tilde{p}y - q'q = (-1)^n$$

を得る。よって、

$$(-1)^n = \tilde{p}y - \tilde{q}'\tilde{q} \equiv -qq' \pmod{p}$$

すなわち、

$$qq' \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}$$

である。 □

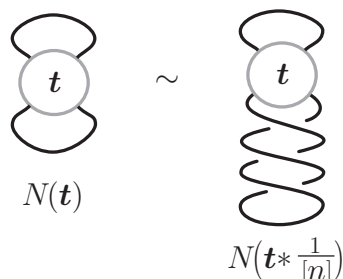
● 7-3 : 底ツイストと回文操作

有理絡み目の分類結果を述べるために、同じ分子を生み出す有理タングルについて調べる。

$t$  を 2-タンクル (図式) とする。  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$t' := t * \frac{1}{[n]}$$

によって定義される 2-タンクル (図式) を  $t$  の  $n$  底ツイスト (bottom twist) という。



$t$  が有理タンクルで、  $F(t) = \frac{p}{q}$  のとき、

$$F\left(t * \frac{1}{[n]}\right) = \frac{p}{q} * \frac{1}{n} = \frac{1}{n + \frac{q}{p}} = \frac{p}{pn + q}$$

となる。よって、  $n \neq 0$  ならば  $F(t) \neq F\left(t * \frac{1}{[n]}\right)$  であるから、  $t$  と  $t * \frac{1}{[n]}$  はタンクルとして同値ではない。しかし、  $N(t)$  と  $N\left(t * \frac{1}{[n]}\right)$  は絡み目として同値である。このように、有理タンクルとして同値でなくてもそれらの分子として得られる有理絡み目は同値になり得る。

上の計算より、  $n > 0$  のとき、  $n$  底ツイストを行うと、  $F(t)$  の分母の絶対値は大きくなることわかる。一般に、次が成り立つ。

#### 補題 7-4

$t$  を  $F(t) = \frac{p}{q}$  となる有理タンクルとする。  $t$  が非自明な底ツイストを含まない、すなわち、  $t \sim t' * \frac{1}{[n]}$  を満たす有理タンクル  $t'$  と整数  $n \neq 0$  が存在しないならば、  $|p| > |q|$  である。

(証明)

$q = 0$  の場合、  $t \sim [\infty]$  となる。  $t' = \frac{1}{[-1]}$  とおくと、  $t' * \frac{1}{[1]} = [\infty] \sim t$  となり、仮定に反する。よって、  $q \neq 0$  である。

一般性を失うことなく  $q > 0$  と仮定してよい。

$|p| \leq q$  と仮定し、矛盾を導く。

•  $p > 0$  の場合：  $p = |p| \leq q$  であるから、

$$q = np + r \quad (n, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < p)$$

のように表わすことができる。このとき、

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{n + \frac{r}{p}}$$



となる。そこで、 $t'$  を  $F(t') = \frac{p}{r}$  を満たす有理タングルとすると、

$$F\left(t' * \frac{1}{[n]}\right) = \frac{1}{n + \frac{r}{p}} = \frac{p}{q} = F(t)$$

となることがわかる。故に、Conway による有理タングルの分類定理 (定理 4-7) より、 $t' * \frac{1}{[n]} \sim t$  となる。これは仮定に反する。

•  $p < 0$  の場合：  $-p = |p| \leq q$  であるから、

$$q = n(-p) + r \quad (n, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < -p)$$

のように表わすことができる。このとき、

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{-n + \frac{r}{p}}$$

となる。そこで、 $t'$  を  $F(t') = \frac{p}{r}$  を満たす有理タングルとすると、

$$F\left(t' * \frac{1}{[-n]}\right) = \frac{1}{-n + \frac{r}{p}} = \frac{p}{q} = F(t)$$

となることがわかる。故に、Conway による有理タングルの分類定理 (定理 4-7) より、 $t' * \frac{1}{[-n]} \sim t$  となる。これは仮定に反する。

いずれにしても、 $|p| \leq q$  と仮定すると矛盾が生じるから、 $|p| > q$  である。 □

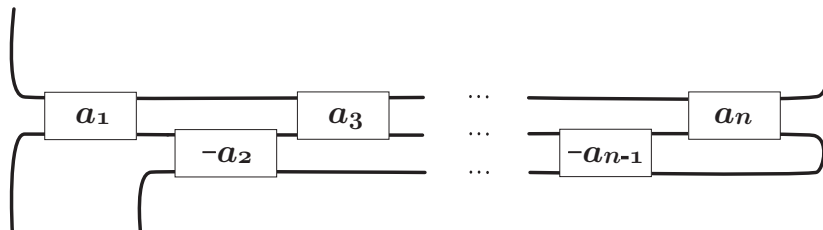
有理タングル  $t = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  に対して有理タングル  $t^{\text{pal}} = [[a_n], [a_{n-1}], \dots, [a_1]]$  を  $t$  の回文 (palindrome) という。

### 補題 7-5

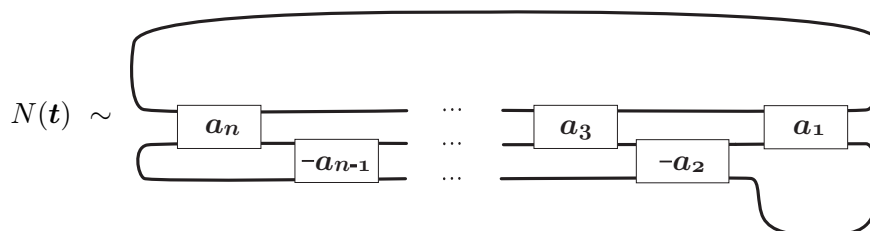
有理タングル  $t = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]]$  において  $n$  が奇数であるとき、 $N(t) \sim N(t^{\text{pal}})$  である。

(証明)

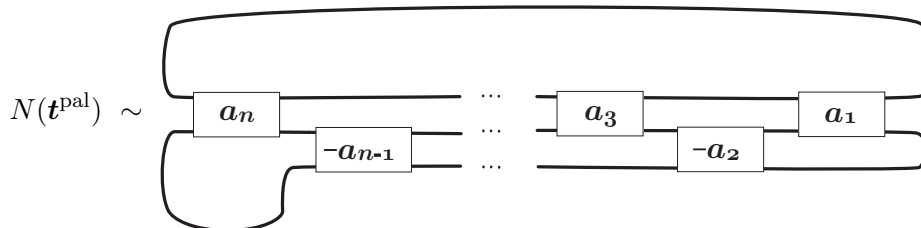
(3.4) より、 $t$  は次の形をした有理タングルに同値である。



この図式を“垂直軸”のまわりに  $180^\circ$  回転させることにより、 $N(t)$  は次の形をした絡み目に同値であることがわかる。



一方、(3.4) より、 $N(t^{\text{pal}})$  は次の形をした有理タングルに同値である。



上の 2 つの図は明らかに同値であるから、 $N(t) \sim N(t^{\text{pal}})$  が成り立つ。 □

### ● 7-4 : 有理絡み目の分類

#### 定義 7-6

既約分数  $\frac{p}{q}$ ,  $\frac{p'}{q'}$  が算術同値 (arithmetically equivalent) であるとは、次の条件が成り立つときをいう。

- ①  $p = p'$  かつ
- ②  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$  または  $q \equiv q' \pmod{p}$ .

**注意 1** : この定義において  $q = 0$  または  $q' = 0$  でもよい。

**注意 2** : 0 でない任意の既約分数は  $\frac{p}{q}$  ( $q$  は奇数,  $0 < |q| < p$ ) の形の既約分数に算術同値である。

(証明)

既約分数  $\alpha := \frac{p}{q}$  ( $\neq 0$ ) を任意に考える。  $\alpha < 0$  のときには  $q < 0$  にとることで、以下  $p > 0$  とする。  $q = mp + r$  ( $m, r \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < |r| < p$ ) とおくと、  $\gcd(p, r) = \gcd(q, p) = 1$  であるから、  $\frac{p}{r}$  は既約であり、  $q \equiv r \pmod{p}$  なので、  $\alpha$  に算術同値である。 よって、  $q$  は  $0 < |q| < p$  を満たしているとしてよい。

$q$  が偶数の場合、  $q = 2^k q'$  ( $q'$  は奇数,  $k \in \mathbb{N}$ ) とおく。  $q$  と  $p$  は互いに素であるから、  $qx \equiv 1 \pmod{p}$  となる  $x \in \mathbb{Z}$  が存在する。 すると、  $\frac{p}{q}$  と  $\frac{p}{x}$  は算術同値であり、  $2^k q' x \equiv 1 \pmod{p}$  となる。  $q$  は偶数で、  $q$  と  $p$  は互いに素であるから、  $p$  は奇数である。 よって、  $2^k$  と  $p$  は互いに素である。 よって、  $q' x \equiv 1 \pmod{p}$  が成り立つので、  $\frac{p}{q}$  と  $\frac{p}{q'}$  は算術同値である。 算術同値は同値関係であるから、  $\frac{p}{q}$  と  $\frac{p}{q'}$  は算術同値である。  $|q'| < |q|$  であるから、  $q$  が偶数の場合、  $\frac{p}{q}$  に取り直すことで  $q$  を奇数に選ぶことができる。 □

**演習**. 算術同値は既約分数の全体からなる集合上の同値関係であることを示せ。

#### 補題 7-7

有理タングル  $t$  と任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、  $F(t)$  と  $F\left(t * \frac{1}{[n]}\right)$  は算術同値であり、かつ、  $N\left(t * \frac{1}{[n]}\right) \sim N(t)$  である。

(証明)

$F(t) = \frac{p}{q}$  ( $p$  と  $q$  は互いに素) とおくと、補題 7-4 の上で計算したように、 $F\left(t * \frac{1}{[n]}\right) = \frac{p}{np+q}$  となることがわかる。 $p' := p$ ,  $q' := np+q$  とおくと、 $p'$  と  $q'$  は互いに素であり、 $q' \equiv q \pmod{p}$  であるから、既約分数  $F(t) = \frac{p}{q}$  と  $F\left(t * \frac{1}{[n]}\right) = \frac{p'}{q'}$  は算術同値である。  
 $N\left(t * \frac{1}{[n]}\right) \sim N(t)$  となることは第 7-3 節の最初で示されている。  $\square$

**命題 7-8**

有理タングル  $s, t$  は  $F(s) = \frac{p}{q}$ ,  $F(t) = \frac{p'}{q'}$  を満たしているとし、これらの分数は既約であるとする。 $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$  が算術同値であるとき、 $N(s) \sim N(t)$  である。

(証明)

$q = 0$  ならば、 $s \sim [\infty]$  である。 $\frac{p}{q}$  は既約より  $p = 1$  であり、よって、①より  $p' = p = 1$  である。 $F(t) = \frac{1}{q'}$  ゆえ、 $t \sim \frac{1}{[q']}$  である。したがって、

$$N(t) \sim N\left(\frac{1}{[q']}\right) \sim (\text{自明な結び目}) \sim N([\infty]) \sim N(s)$$

となる。 $q' = 0$  のときも同様であるから、以下、 $q \neq 0$ ,  $q' \neq 0$  とする。 $p, p'$  のうちどちらか一方が 0 ならば①より両方とも 0 であり、このとき  $s \sim [0] \sim t$  であるから  $N(s) \sim N(t)$  である。

そこで、以下、 $p, p', q, q'$  はいずれも 0 でないと仮定する。 $s$  が非自明な底ツイストを含むとき、それを取り除いた有理タングルを  $s'$  とおくと、補題 7-7 より、 $F(s)$  と  $F(s')$  は算術同値であり、 $N(s) \sim N(s')$  である。同様に、 $t$  が非自明な底ツイストを含むとき、それを取り除いた有理タングルを  $t'$  とおくと、 $F(t)$  と  $F(t')$  は算術同値であり、 $N(t) \sim N(t')$  である。よって、命題の証明を完成させるためには、 $s, t$  が非自明な底ツイストを含まないときに証明すればよい。以下、これを仮定する。

$\frac{p}{q}$  と  $\frac{p'}{q'}$  は算術同値であるから、 $p = p'$  であり、 $qq' \equiv 1 \pmod{p}$  または  $q \equiv q' \pmod{p}$  が成り立つ。

- $q \equiv q' \pmod{p}$  であるとき、 $q' = np + q$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) と表わされる。すると、

$$F(t) = \frac{p'}{q'} = \frac{p}{np+q} = F\left(t * \frac{1}{[n]}\right)$$

となる。これは 2-タングルとして  $t \sim t * \frac{1}{[n]}$  となることを意味し、 $n \neq 0$  ならば  $t$  が非自明な底ツイストを含まないとしたことに矛盾が生じる。よって、 $n = 0$  であり、このとき、 $q' = q$  となる。これは  $t \sim s$  となることを意味するから  $N(t) \sim N(s)$  が成り立つ。

- $qq' \equiv 1 \pmod{p}$  であるときを考える。定理 3-18 の下の注意より、

$$s = [[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] \quad (n \text{ は奇数})$$

と表わすことができる。このとき、 $\mathbf{s}^{\text{pal}} = [[a_n], [a_{n-1}], \dots, [a_1]]$  を考え、

$$F(\mathbf{s}^{\text{pal}}) = \frac{p''}{q''} \quad (p'' \text{ と } q'' \text{ は互いに素})$$

とおくと、 $n$  が奇数であることに注意し、定理 7-3 を適用すると、 $p'' = p$  かつ  $qq'' \equiv 1 \pmod{p}$  であることがわかる。したがって、

$$qq'' \equiv 1 \equiv qq' \pmod{p}$$

が成り立つ。 $p$  と  $q$  は互いに素であるから、上の合同式から  $q'' \equiv q' \pmod{p}$  を得る。 $\mathbf{t}$  は非自明な底ツイストを含まないとしているので、「 $q \equiv q' \pmod{p}$  であるとき」の証明と同様にして  $q'' = q'$  であることがわかる。故に、

$$F(\mathbf{s}^{\text{pal}}) = F([[a_n], [a_{n-1}], \dots, [a_1]]) = \frac{p''}{q''} = \frac{p'}{q'} = F(\mathbf{t})$$

が成り立つ。これより、2-タングルとして  $\mathbf{s}^{\text{pal}} \sim \mathbf{t}$  となるので、補題 7-5 を適用して  $N(\mathbf{s}) \sim N(\mathbf{s}^{\text{pal}}) \sim N(\mathbf{t})$  となることがわかる。□

Schubert は 1956 年に命題 7-8 の逆が成り立つことを示している [93]。すなわち、次が成り立つ (定理の主張については [75; 定理 9.3.3] も参照)。

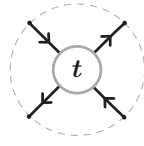
#### 定理 7-9 (Schubert の有理絡み目の分類定理)

有理タングル  $\mathbf{s}, \mathbf{t}$  は  $F(\mathbf{s}) = \frac{p}{q}$ ,  $F(\mathbf{t}) = \frac{p'}{q'}$  を満たしているとし、これらの分数は既約であるとする。このとき  $N(\mathbf{s}) \sim N(\mathbf{t})$  であるための必要十分条件は  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$  が算術同値であることである。

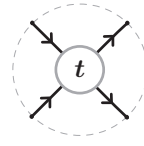
有理絡み目は別の文脈では 2 本橋絡み目と呼ばれる。上の定理は通常、2 本橋絡み目で分岐する 3 次元球面  $S^3$  上の 2 重分岐被覆がレンズ空間と呼ばれる 3 次元多様体になることから、レンズ空間の分類に帰着させることにより証明される [58; 特講 S.2.]。2 本橋絡み目と有理絡み目との関係やその分類に関しては [75] と [11; Chapter 8] に明快な解説がある。一方、Kauffman と Lambropoulou [51; Subsection 3.1, p.375–384] は、Tait のフライプ定理を用いて、その初等的な証明を与えている (Tait のフライプ定理については Appendix C を参照)。しかし、Tait のフライプ定理自身の証明は易しくないので、Tait のフライプ定理を使わない真に初等的な証明が望まれる。

**注意 7-10** 向きづけられた有理絡み目の分類定理もまた Schubert [93] により発見されている。その分類結果を Kauffman と Lambropoulou [51; p.359, 398–405] の定式化に従って述べる。

有理タングルが向きづけられているとは、その各連結成分が向きづけられているときをいう。NW, NE における向きをそれぞれ「上から下へ」「下から上へ」となるように指定すると、有理タングルに対して次の 2 通りの向きづけ方 (1 型と 2 型) が考えられる。

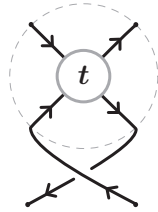


1 型



2 型

2つの向きづけられた有理タングル  $s$  と  $t$  の向きが**両立している** (compatible) とは、ともに 1 型であるか共に 2 型であるときをいう。2 型の向きづけられた有理タングルは、整数タングル [1] との積をとる (すなわち、1 底ツイストを行う) と、1 型になることに注意する。



向きづけられた有理タングル  $s, t$  は向きが両立しているとし、それらを向きを忘れた有理タングルとみたとき  $F(s) = \frac{p}{q}$ ,  $F(t) = \frac{p'}{q'}$  であり、これらの分数は既約であるとする。さらに、 $q, q'$  は奇数であるとする。このとき向きづけられた絡み目として  $N(s)$  と  $N(t)$  が同値であるための必要十分条件は次の 2 条件が満たされることである：

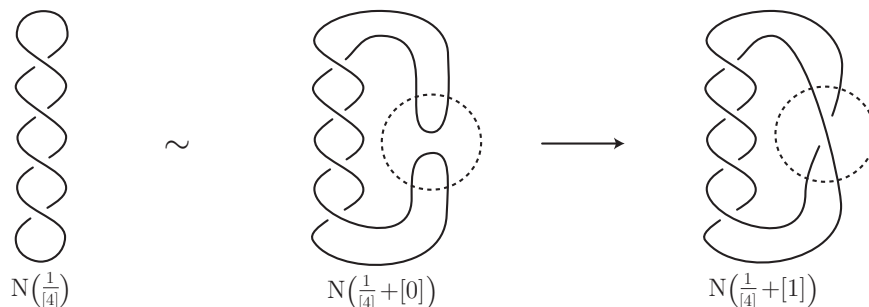
- ①  $p = p'$  かつ
- ②  $qq' \equiv 1 \pmod{2p}$  または  $q \equiv q' \pmod{2p}$ .

## §8. DNA トポロジー、カイラリティ問題への応用

この節では有理絡み目の分類結果を始めとするその理論の分子生物学、高分子化学への応用を説明する。この節のより詳しい内容については、アダムス [2; 第 7 章]、村杉 [75; 第 13, 14 章]、金信 [43]、河内 [56, 57]、下川と Vazquez [94] や [24, 32, 88, 99, 108, 109] 等を参照して欲しい。

### ● 8-1 : DNA トポロジーへの応用

まず、分子生物学、特に、DNA トポロジーへの応用について説明する。通常の DNA はヌレオクチドと呼ばれる小分子が鎖状に連なった長い二重螺旋構造をしている。さらに、細菌、ウィルス、バクテリアなどの細胞核を持たない生物は環状に閉じた DNA を持つことが知られている。DNA にトポイソメラーゼと呼ばれる酵素が働くことにより、DNA の複製、転写、組み換えが行われる。一般に、DNA の組み換え (*DNA recombination*) が行われる部位は非常に短い。さらに、その組み換えが特定の部位で生じる場合、部位特異的 (*site-specific*) な組み換えと呼ばれる。このような組み換えは、それが行われる部位が (酵素の働きにより) 引きつけ合って切断され、もとのつながり方とは異なるつながり方で再結合される形で行われる。最も単純な部位特異的な組み換えは、数学的にはタングル  $s$  に対して  $N(s + [0])$  から  $N(s + [1])$  を生み出す操作として捉えることができる。こういった問題を数学の問題として最初に扱い、先駆的な研究成果を挙げたのは Ernst と Summers [22] である。現在では多くの数学者による研究成果がある (例えば [8, 19, 50, 94] 等を参照)。



より一般の設定で考える。 $s$  をタングルとし、 $N(s) \sim N(s + [0])$  における  $[0]$  を特別なタングル  $r$  に置き換えて絡み目  $N(s + r)$  を作る操作を考える。組み換えが行われる前の DNA を **基質 DNA** (*substrate DNA*)、組み換え後に生み出された DNA を **生成物** (*product*) と呼ぶことに習って、 $s$  を **基質タングル** (*substrate tangle*) といい、タングル  $N(s + r)$  を **生成絡み目** (*product link*) と呼ぶ。今、 $s$  に  $r$  を連続して組み替える操作を行い、絡み目

$$N(s) = \mathbf{K}_0, \quad N(s + r) = \mathbf{K}_1, \quad N(s + r + r) = \mathbf{K}_2, \quad N(s + r + r + r) = \mathbf{K}_3, \quad \dots$$

を作る。逆に、 $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots$  を既知としたとき、上の等式を満たすタングル  $s$  と  $r$  を求めることができるだろうか？ 有理タングルに限ると、次の結果が知られている。

**定理 8-1 (Kauffman and Lambropoulou [50; Theorem 9.1])**

有理絡み目の列  $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots$  が与えられているとする。等式  $\mathbf{K}_n = N(\mathbf{s} + n\mathbf{r})$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) を満たす有理タングル  $\mathbf{s}$  と整数タングル  $\mathbf{r} = [r]$  ( $r \neq 0$ ) は、 $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N$  の位相型から一意的に決定される。ここで、 $F(\mathbf{s}) = \frac{p}{q}$  ( $p > 0, q \neq 0$ ) とおいたとき、 $N > |q| - \frac{p}{qr} + \frac{1}{|qr|}$  である。

**(証明)**

$N(\mathbf{s} + n\mathbf{r})$  の代わりに  $N(\frac{p}{q} + nr)$  または  $N(\frac{p+qnr}{q})$  と書く。

既約分数  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$  が算術同値であるとき、整数  $q, q'$  は  $p$  に関して算術的に関連していると呼ぶことにする。

$p, q, r$  の一意性を示すため、整数  $p', q', r'$  ( $p' > 0, q' \neq 0, r' \neq 0$ ) もまた  $\mathbf{K}_n = N(\frac{p'}{q'} + nr')$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を満たしているとする。

$n = 0$  のときを考えると、 $N(\frac{p}{q}) = \mathbf{K}_0 = N(\frac{p'}{q'})$  である。有理絡み目の分類定理より、 $p = p'$  であり、 $q, q'$  は  $p$  に関して算術的に関連している。

$n = 1$  のときを考えると、 $N(\frac{p+qr}{q}) = \mathbf{K}_1 = N(\frac{p'+q'r'}{q'})$  である。有理絡み目の分類定理と  $p = p'$  より、 $qr = q'r'$  を得る。

さらに、 $n$  のときを考えて、すべての  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、 $q, q'$  は  $p + qnr$  に関して算術的に関連していることがわかる。今、 $n$  を  $|p + qnr| > \max\{|qq' - 1|, |q - q'|\}$  を満たすくらい大きくとる。 $q, q'$  は  $p + qnr$  に関して算術的に関連しているので、この  $n$  に対して  $qq' \equiv 1 \pmod{(p+qnr)}$  または  $q \equiv q' \pmod{(p+qnr)}$  が成り立つ。もし、 $qq' \equiv 1 \pmod{(p+qnr)}$  であつたとすると、 $|p + qnr| > |qq' - 1|$  なので、 $qq' = 1$  となることがわかる。 $q, q'$  は整数なので  $q = q' = 1$  または  $q = q' = -1$  である。もし、 $q \equiv q' \pmod{(p+qnr)}$  であつたとすると、 $|p + qnr| > |q - q'|$  なので、 $q = q'$  が成り立つ。いずれにしても、 $q = q'$  が成り立つ。このとき、 $qr = q'r'$  から  $r = r'$  を得る。こうして、 $p, q, r$  の一意性が示された。

次に、 $n$  をどのくらい大きくとれば  $p, q, r$  が一意的となるのかを調べる。上の考察より、そのような  $n$  は  $|p + qnr| > \max\{|qq' - 1|, |q - q'|\}$  を満たしていればよい。

$$|qq' - 1| \leq |q| \cdot |q'| + 1 \leq |q| \cdot (|q| \cdot |r|) + 1$$

であり (最後の不等式では  $qr = q'r'$  と  $r, r' \neq 0$  を使った)、

$$|q - q'| \leq |q| + |q'| \leq |q| + |q| \cdot |r|$$

である。ここで、

$$|q| + |q| \cdot |r| \leq |q| \cdot (|q| \cdot |r|) + 1 = |q^2 r| + 1$$

である。

∴)

$|q| = 1$  の場合は自明に成立する。 $|q| \geq 2$  の場合、 $1 \leq (|q| - 1)|r|$  であるから

$$\left| \begin{array}{l} |q| + |q| \cdot |r| \leq (|q| - 1) \cdot (|q| \cdot |r|) + |q| \cdot |r| < (|q| - 1) \cdot (|q| \cdot |r|) + |q| \cdot |r| + 1 \\ \text{となる。} \end{array} \right. \quad \square$$

よって、 $|p + qnr| > |q^2r| + 1$  を満たす  $n$  は  $|p + qnr| > \max\{|qq' - 1|, |q - q'|\}$  を満たす。  
 $qr > 0$  の場合、 $p > 0$  なので、 $p + qnr > |q^2r| + 1$  となる。したがって、

$$n > \frac{|q^2r| + 1 - p}{qr} = |q| - \frac{p - 1}{qr}.$$

$qr < 0$  の場合、十分大きな  $n$  に対して  $p + qnr < 0$  なので、その  $n$  が  $|p + qnr| > |q^2r| + 1$  を満たすとき、 $-p - qnr > |q^2r| + 1$  となる。したがって、

$$n > \frac{|q^2r| + 1 + p}{-qr} = |q| + \frac{p + 1}{-qr}.$$

どちらの場合も  $n$  が

$$n > |q| - \frac{p}{qr} + \frac{1}{|qr|}$$

を満たしていれば  $|p + qnr| > |q^2r| + 1$  が成り立ち、したがって、 $|p + qnr| > \max\{|qq' - 1|, |q - q'|\}$  が成り立つ。  $\square$

**例 8-2**  $K_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) を次の図式で与えられる結び目とする。

$$K_0 = \bigcirc, \quad K_1 = \text{trefoil}, \quad K_2 = \text{figure-eight}, \quad K_3 = \text{component link}$$

$N(s + nr) = K_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) を満たす有理タングル  $s$  と整数タングル  $r$  を求めよう。

$K_1 = N([1], [2])$ ,  $K_2 = N([2], [2])$  と表わされる (下図の変形を参照)。

$$[[1], [2]] = \text{link} \sim \text{link} \sim \text{trefoil}$$

$$[[2], [2]] = \text{link} = \text{link} \sim \text{figure-eight}$$

さらに、

$$K_3 = \text{link} \sim \text{link} = N\left(\frac{1}{[2]} + [3]\right)$$

と表わされる。よって、 $K_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) はすべて有理結び目である (注:  $K_0 = N([0], [2])$  と表わされる)。



$$F(\mathbf{s}) = \frac{p}{q}, \mathbf{r} = [r] \text{ とおく。}$$

$$F(\mathbf{s} + n\mathbf{r}) = \frac{p}{q} + nr = \frac{p + nqr}{q}$$

であり、

$$F([1], [2]) = [1, 2] = \frac{3}{2}, \quad F([2], [2]) = [2, 2] = \frac{5}{2}, \quad F\left(\frac{1}{[2]} + [3]\right) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

であるから、 $N(\mathbf{s} + n\mathbf{r}) = \mathbf{K}_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) のとき、定理 7-9 より、 $\frac{p + nqr}{q}$  と  $\frac{2n + 1}{2}$  は算術同値である。よって、 $n = 0, 1, 2, 3$  に対して

$$\begin{cases} p + nqr = 2n + 1 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 2q \equiv 1 \pmod{p + nqr} \text{ または } q \equiv 2 \pmod{p + nqr} & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を解けばよい。①において  $n = 0$  として  $p = 1$  が得られ、 $n = 1$  として  $qr = 2$  が得られる。故に、 $(q, r) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1)$  (複号同順) である。 $n = 1$  のときの②より  $(q, r) = (2, 1), (-1, -2)$  に絞ることができ、 $n = 2$  のときの②より  $(q, r) = (2, 1)$  でなければいけないことがわかる。実際、 $(q, r) = (2, 1)$  ならば  $N(\mathbf{s} + n\mathbf{r}) = \mathbf{K}_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) を満たす。

$$3 > 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = |q| - \frac{p}{qr} + \frac{1}{|qr|}$$

であるから、定理 8-1 より、 $N(\mathbf{s} + n\mathbf{r}) = \mathbf{K}_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) を満たす有理タングル  $\mathbf{s}, \mathbf{r}$  は

$$\mathbf{s} = \text{図}, \quad \mathbf{r} = \text{図}$$

に限られることがわかる。

□

**演習** (Ernst and Sumners [22, 43]).  $\mathbf{K}_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) を次の図式で与えられる絡み目とする。

$$\mathbf{K}_0 = \text{図}, \quad \mathbf{K}_1 = \text{図}, \quad \mathbf{K}_2 = \text{図}, \quad \mathbf{K}_3 = \text{図}$$

このとき、 $N(\mathbf{s} + n\mathbf{r}) = \mathbf{K}_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) を満たす有理タングル  $\mathbf{s}, \mathbf{r}$  を求めよ。

定理 8-1 において有理絡み目の列  $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_N$  が短かったり、いくつか欠けているときには、タングル方程式  $\mathbf{K}_n = N(\mathbf{s} + n\mathbf{r})$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ) を満たす有理タングル  $\mathbf{s}, \mathbf{r}$  は一意に決まらない。次のような例がある [40; §3.3]。

**例 8-3**  $\mathbf{K}_0 = \text{図}$  とする。タングル方程式

$$N(\mathbf{s} + [1]) = \mathbf{K}_0$$

を満たす有理タングル  $\mathbf{s}$  に対して  $[-1]$  を加えるとどのような有理絡み目が現れると予測されるかを調べよう。

$F(s) = \frac{p}{q}$  とおく。  $K_0 = N([\infty])$  であり、  $F([\infty]) = \frac{1}{0}$  なので、  $N(s + [1]) = K_0$  と定理 7-9 より、  $\frac{p+q}{q}$  と  $\frac{1}{0}$  とは算術同値である。 よって、  $p+q = 1$  かつ 「 $0 \equiv 1 \pmod{1}$  または  $q \equiv 0 \pmod{1}$ 」 でなければいけない。 後者は自明に成立する条件であるから、

$$p + q = 1$$

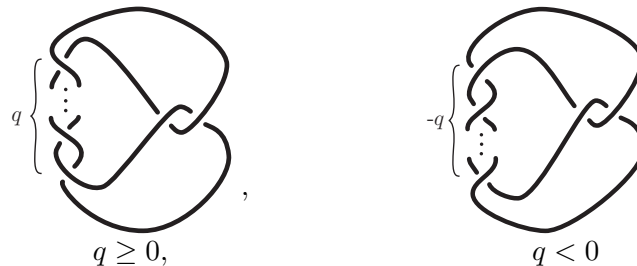
だけが条件となる。 このとき、

$$F(s + [-1]) = \frac{p-q}{q} = \frac{1-2q}{q} = \frac{1}{q} - 2$$

となる。 よって、

$$N(s + [-1]) = N\left(\frac{1}{[q]} + [-2]\right)$$

となる。  $q$  は任意であるから、  $N(s + [-1])$  として生じる絡み目は次の図で与えられるものである：



□

定理 8-1 において、連続生成される絡み目  $K_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は有理絡み目であることを仮定したが、有理絡み目に限る根拠はない。しかし、次の結果が知られている：

**定理 8-4 (Ernst and Sumners [22])** -----

$s, r$  はある  $m \geq 2$  に対して  $N(s + mr)$  が有理絡み目となるようなタングルであるとする。  
 $N(s + mr) \neq N(s + nr)$  を満たす  $n \in \mathbb{N}$  が存在するならば、 $r$  は有理タングルである。もし、 $m \geq 3$  ならば、 $r$  は整数タングルである。 □

証明については [14, 23] を参照。有理絡み目、Montesinos 絡み目のタングル方程式の解に関しては、上述の Ernst と Sumners [22, 23] の他、Darcy [14–16]、平澤と下川 [31]、Moon [72] など多くの結果がある。

Darcy [14] は特定の酵素の作用が DNA の特定の形の置き換えを引き起こす現象を数学的に定式化し、次の**タングル距離** (*tangle distance*) という概念を導入した。

**定義 8-5 ([14; §4])** -----

$p, r$  を 2 つの 2-タングルとする。

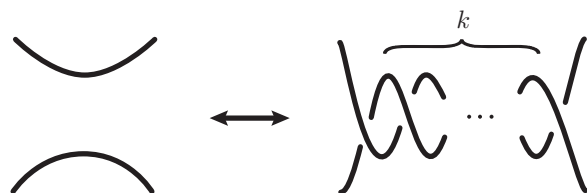
(1) 絡み目図式  $D_2$  が絡み目図式  $D_1$  から  $(p, r)$ -**移動**により得られるとは、 $D_1$  が部分タングル図式として  $p$  の図式を含んでおり、かつ、その図式を  $r$  の図式で置き換えることによ

り得られるときをいう。

(2) 絡み目  $L_1, L_2$  の間の  $(p, r)$ -距離とは、 $L_2$  の図式に  $(p, r)$ -移動を有限回施して  $L_1$  の図式を得るとき、施す移動の回数のすべての図式に渡る最小値のことをいう。これを  $d_{(p,r)}(L_1, L_2)$  により表わす。

**注意 8-6** Darcy の  $(p, r)$ -移動を行う際には、 $p$  を  $r$  に置き換えることのみが許されていることに注意する。このため、 $(p, r)$ -距離は  $\infty$  の場合もあり得る [18]。また、 $(p, r)$ -距離は距離の公理を満たすとは限らない (個人的には「順序」と呼んだほうがよいように思える)。

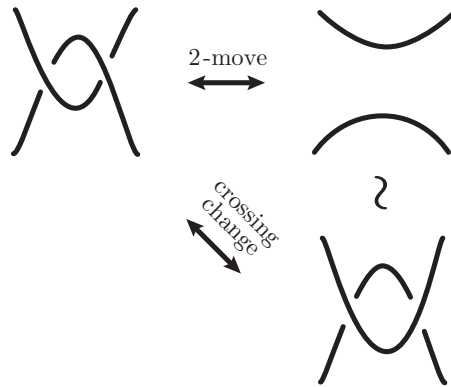
$p$  から  $r$  への一方向だけでなく、その逆も許す場合は Montesinos [71] や内田 [106] 等により導入されている ( $p = [0]$  で  $r$  が整数タングル  $[k]$  の場合は、もっと古く、樹下 [61] において扱われている)。彼らの論文では自明なタングル部分を  $\frac{p}{q}$ -有理タングルで置き換える操作およびその逆操作 (これを  $\frac{p}{q}$ -移動と呼ぶ) が結び目解消操作との関連で考察されている。ここで、**結び目解消操作** (*unknotting operation*) とは、結び目図式に対する局所的な変形のこと、その操作と Reidemeister 移動を有限回施すことにより、自明な結び目を得ることができるものをいう。結び目解消操作の対象として絡み目を含める場合があり、その場合、有限回で自明な絡み目を得ることができる変形を結び目解消操作と呼ぶ。結び目解消操作を含む絡み目の局所変形の理論については非常に多くの結果がある。日本語による入門的な文献として [59; 第 11 章] と中西康剛による [78–80] を挙げておきたい。



絡み目の局所変形のうち整数  $k \geq 1$  に対して  $k$ -移動に関しては昔からよく研究されている。次のことは簡単にわかる。

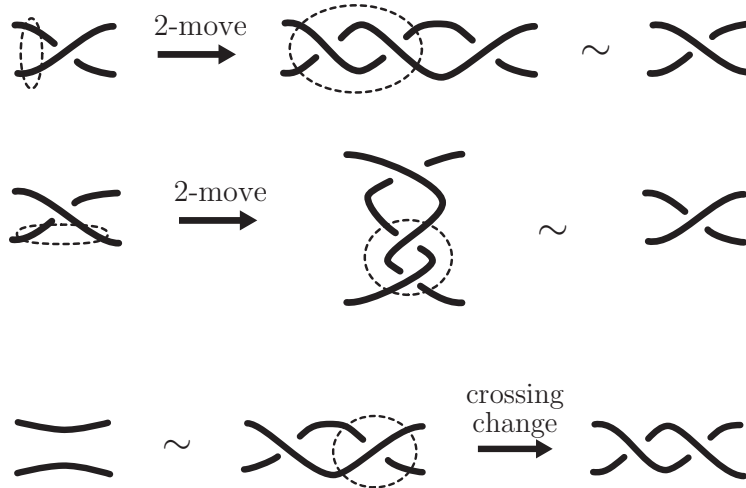
- $k = 1$  のときは明かに結び目解消操作であるが、成分数は変化する。
- $k = 2$  のときも同様に結び目解消操作であり、成分数を変えずに自明な絡み目にすることができる。実際、2-移動は本質的に交差交換である (下図参照)。

しかし、 $k = 3$  となると難しい問題となり、Montesinos と中西により 3-移動と Reidemeister 移動の有限回により、どんな絡み目も自明な絡み目にできるという予想が立てられたものの長らく未解決であった ([62; p.38] を参照)。そして 2002 年に、Dabkowski と Przytycki [13] により、自明な絡み目にできない絡み目があることが絡み目の第 3 次 Burnside 群を用いて証明された。結び目解消操作の視点による  $\frac{p}{q}$ -移動に関する多くの予想が Przytycki の講義録 [84] や Kirby の問題集 [62; Chapter 1] にまとめられている。石渡 [34] のスライドは全体像を理解するのに役に立つ。



**注意 8-7** 定義より、 $d_{(p,r)}(L_1, L_2) = d_{(r,p)}(L_2, L_1)$  が成り立つ。

タングルの置き換えによる上記の移動のうち、特に、 $([0], [2])$ -移動を行うことと交差交換 ( $([-1], [1])$ -移動および  $([1], [-1])$ -移動) を行うことは同値である (下図参照)。



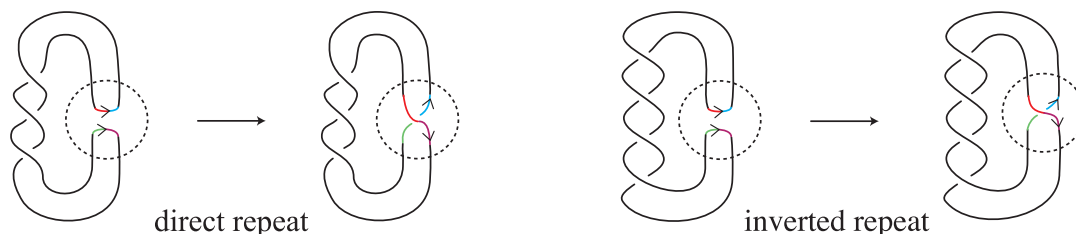
したがって、上記のタングル距離は絡み目の X 型ゴルディアン距離、すなわち、交差交換に基づく距離の一般化と見ることができる。

2 つの有理絡み目 (= 2 本橋絡み目) に対して、それらの X 型ゴルディアン距離が 1 となる場合が金信と村上斉 [45]、Kohn [64]、Darcy と Sumners [17]、鳥巢 [105] により決定されている (決定の経緯については [17] を参照)。Darcy と Sumners [18] は、それらの一般化に当たる、タングル距離が 1 であるような 2 つの有理絡み目 (= 2 本橋絡み目) の組を決定している ([14; Theorem 5] も参照)。

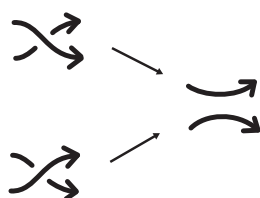
その他、絡み目  $L_2$  が絡み目  $L_1$  から 1 回の有理タングルによる  $(p, r)$ -移動により得られるための必要十分条件が Darcy と Sumners [18] により与えられている (その結果については [14; Theorem 6] を参照)。

このノートでは絡み目に向きを与えていないが、部位特異的な組み換えでは DNA 上の特定の塩基配列に作用を及ぼすため、その塩基配列から誘導される局所的な向きがその組み換えの下で保たれていなければならないという制約がある。組み換えにおける 2 つの部位の局所的な

向きから誘導される全体の向きが一致する、あるいは2つの部位が異なる成分にある場合には**同方向反復配列組み換え** (*direct repeat recombination*) と呼ばれ、そうでない場合には**逆方向反復配列組み換え** (*inverted repeat recombination*) と呼ばれる。



したがって、同方向反復配列組み換えの数学的モデルとして絡み目を研究する際には、それに向きを与えてタングルの置き換えや距離を考えることも重要である。石原と Buck により研究された **nullification 距離** [33] はそのうちの1つである。この距離は次図の2種類の局所的な置き換えの下での最小回数として定義される。



交点数の少ない絡み目に対する nullification 距離は [7, 21, 33, 95] 等で求められており、また、他の不変量との関係も調べられている。

## ● 8-2: カイラリティへの応用

高分子化学における重要な問題の1つに、分子構造を表わす空間グラフ(分子グラフ)がカイラルかどうかを判定する問題がある [56, 57]。一般に、空間内の図形や物体や現象が、鏡像と重ね合わせることができない性質をもつとき**カイラル** (*chiral*) または**キラル** と呼ばれ、鏡像と重ね合わせることができるとき**アカイラル** (*achiral*) または**アキラル** と呼ばれる。Wikipedia の「キラリティー」の説明 [110] には、chiral の語源はギリシャ語で「手」を意味する「*Xειρ* (*cheir*)」であり、右手と左手は同じ向きには重ね合わせることができないことから来しているとある。複雑な構造の分子、例えばアミノ酸の多くはカイラルである。生物は互いに鏡像であるようなカイラルな2つの化合物の違いを分子レベルで識別し、生体を維持している。しかし、鏡像体同士は物理的な方法で区別することは難しい上、それらの特性や作用は大きく異なることが多い。そのため、鏡像の関係にある2つの化合物のうち必要な方だけを取り込んだり、作り出したりする手法を開発することは高分子化学の重要な課題である [88, 109]。

話を数学に戻す。絡み目に対してはカイラル・アカイラルは次のように定義される。(向きづけられていない)絡み目  $L$  が**アカイラル**であるとは、その鏡像  $-L$  (文献によって  $L!$  と記されることもある) とアンビエント・イソトピックであるときをいい、そうでないとき**カイラル**で

あると呼ばれる。例えば、三葉結び目 (例 8-2 における  $K_1$ ) はカイラルであり、8 の字結び目 (例 8-2 における  $K_2$ ) はアカイラルである。

$L$  が有理絡み目の場合には次の結果が成り立つ [59; 問 2.1.4], [75; 定理 9.3.3(3)]。

**定理 8-8** (c.f. [93; Korollar zu Satz 4])

有理絡み目  $L$  を有理タングル  $t$  の分子として表わす:  $L = N(t)$ .  $F(t) = \frac{p}{q}$  ( $p > 0$ ) と  $q$  ( $\neq 0$ ) は互いに素) とする。このとき、 $L$  がアカイラルであるための必要十分条件は  $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$  となることである。

(証明)

証明は [50; Theorem 6.1] に従う。

補題 4-1 より、 $-L = N(-t)$  と表わされ、 $F(-t) = \frac{p}{-q}$  となる。よって、 $-L = N(-t)$  が  $L = N(t)$  と同値ならば、既約分数  $\frac{p}{-q}$  と  $\frac{p}{q}$  は算術同値である。したがって、 $q(-q) \equiv 1 \pmod{p}$  または  $q \equiv -q \pmod{p}$  が成り立つ。

$q \equiv -q \pmod{p}$ 、すなわち、 $2q \equiv 0 \pmod{p}$  であつたと仮定する。 $q' \in \{1, \dots, p-1\}$  を  $q' \equiv q \pmod{p}$  となるようにとると、 $2q' \equiv 0 \pmod{p}$  が成り立つ。 $0 < 2q' < 2p$  であつて、 $2q'$  は  $p$  で割り切れるので、 $2q' = p$  しか起こりえない。ユークリッドの互除法により  $\gcd(q, p) = \gcd(p, q')$  であるから、 $\gcd(q, p) = 1$  と合わせて  $\gcd(p, q') = 1$  を得るから、 $2$  は  $p$  で割り切れることになる。よって、 $p = 1, 2$  であるが、 $p = 1$  とすると、 $2q' = 1$  となり矛盾が生じる。したがって、 $p = 2$  であり、このとき、 $q' = 1$  となる。以上の考察をまとめると、 $q \equiv -q \pmod{p}$  ならば、 $p = 2$  であり、 $q \equiv 1 \pmod{p}$  となる。これは  $q(-q) \equiv 1 \pmod{p}$  を満たすから、結局、 $L$  がアカイラルならば、 $q(-q) \equiv 1 \pmod{p}$ 、すなわち、 $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$  となることがわかった。

逆に、 $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$  であると仮定する。系 2-9(2) より、 $\frac{p}{q}$  を

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (n \in \mathbb{N} \text{ は偶数, } a_1 \in \mathbb{Z}, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N})$$

のように一意的に表わすことができる。連分数  $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1]$  を既約分数で  $\frac{p'}{q'}$  のように表わすと、定理 7-9 より、 $p' = p$  かつ  $qq' \equiv -1 \pmod{p}$  が成り立つ。よって、 $qq' \equiv q^2 \pmod{p}$  となる。 $p$  と  $q$  は互いに素であるから、この合同式は  $q' \equiv q \pmod{p}$  に同値である。故に、 $q' = q + kp$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) と書くことができる。したがって、

$$t' := [[a_n], [a_{n-1}], \dots, [a_2], [a_1]]$$

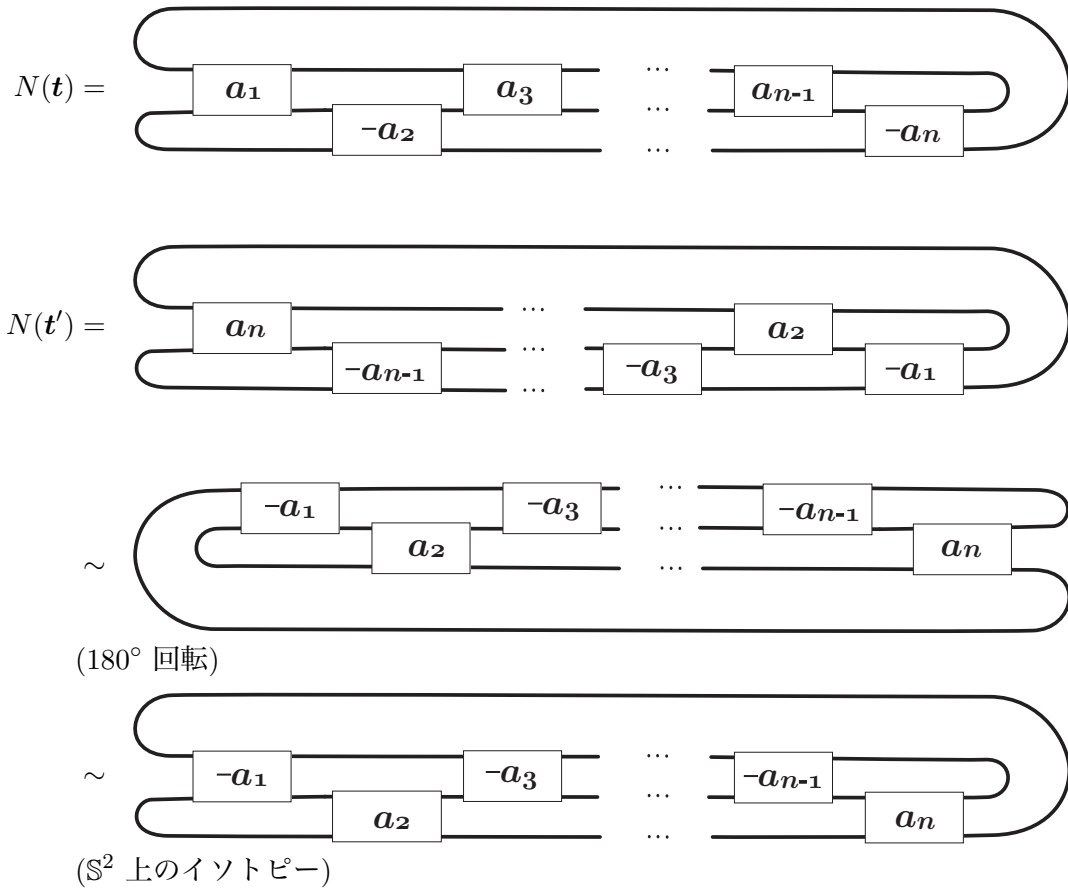
とおくと、

$$F(t') = \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q + kp} = F\left(t * \frac{1}{[k]}\right)$$

となる。故に、 $t' \sim t * \frac{1}{[k]}$  であり、従って、

$$(8.1) \quad N(t') \sim N\left(t * \frac{1}{[k]}\right) \sim N(t)$$

となる。ここで、



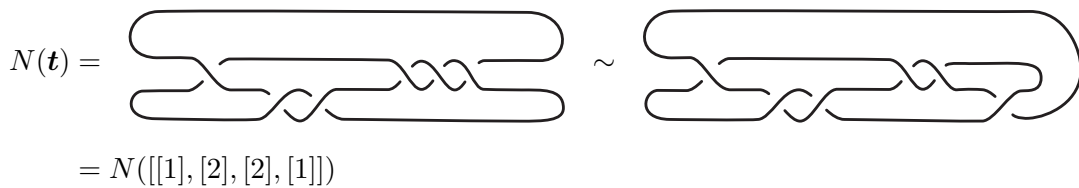
であるから、 $N(t')$  は  $L = N(t)$  の鏡像に同値なことがわかる。(8.1) より、 $L$  は自分自身の鏡像と同値であり、したがって、アカイラルである。□

**例 8-9** (1) 有理絡み目が次の形の有理タングルの分子として得られるならばアカイラルである。

$$[[a_1], [a_2], \dots, [a_k], [a_k], \dots, [a_2], [a_1]] \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}).$$

実は、この逆も成立する (証明は門上 [41; Lemma 4.8] を参照)。

(2)  $t = [[1], [2], [3]]$  とする。 $N(t)$  はアカイラルである。実際、



となる。

(3) 左手系の三葉結び目を  $K$  とおくと、 $K = N([[1], [2]])$  と表わされる (例 8-2 を参照)。したがって、左手系の三葉結び目の鏡像である右手系の三葉結び目  $-K$  は  $-K = N([[ -1], [ -2]])$

と表わされる (補題 3-16(3) を参照)。

$$F([1], [2]) = [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad F([-1], [-2]) = [-1, -2] = -1 + \frac{1}{-2} = \frac{3}{-2}$$

である。  $2 \cdot (-2) = -4 \not\equiv 1 \pmod{3}$  であり、  $2 \not\equiv -2 \pmod{3}$  であるから、  $\frac{3}{2}$  と  $\frac{3}{-2}$  は算術同値でない。よって、定理 7-9 より、  $K$  はカイラルである。



有理絡み目については上述の例 (3) のように Schubert の定理 (定理 7-9) を使ってカイラリティの問題を解決することができる。一般の絡み目に対しては Jones 多項式が有効である。

### ● 8-3 : Jones 多項式

Jones [39] によって作用素環の研究において発見された Jones 多項式は向きづけられた絡み目に対するアンビエント・イソトピー不変量であり、Kauffman ブラケット多項式を用いて定義することができる [48]。ここでその定義を紹介しておこう。

Kauffman 流の Jones 多項式の定義を述べるために、向きづけられた絡み目図式  $D$  のライジング数  $wr(D)$  を定義しよう。向きづけられた絡み目図式  $D$  の交点  $p$  が**正の交点** (*positive crossing*) であるとは、 $p$  を中心に上弧を反時計回りに回転させて下弧に重ねるとき、弧の向きが同じ向きになるときをいう。そうでないとき、交点  $p$  は**負の交点** (*negative crossing*) であるという。



$D$  の各交点  $p$  に、次の規則で符号  $\varepsilon(p)$  を対応させる：

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} +1 & (p \text{ が正の交点のとき}), \\ -1 & (p \text{ が負の交点のとき}). \end{cases}$$

これらの符号の総和を  $wr(D)$  とおき、 $D$  の**ライジング数** (*writhe*) と呼ぶ：

$$wr(D) = \sum_{p: \text{crossing of } D} \varepsilon(p).$$

$wr(D)$  は Reidemeister 移動 (RII), (RIII) の下で不変である。しかし、(RI) の下では  $\pm 1$  だけ変化することに注意しよう。

$L$  を向きづけられた絡み目とし、 $D$  のその図式とする。

$$f_L(A) := (-A^3)^{-wr(D)} \langle D \rangle$$





と定義する。ライジング数  $\text{wr}(D)$  は正則イソトピー不変量であり、Kauffman ブラケット多項式  $\langle D \rangle$  もまた正則イソトピー不変量である (補題 5-1(1)) から、 $f_L(A)$  は  $D$  の正則イソトピー不変量である。さらに、Reidemeister 移動 I の下でも不変であることがライジング数の性質

$$(8.2) \quad \text{wr}(\uparrow \circlearrowleft) = \text{wr}(\uparrow) + 1, \quad \text{wr}(\uparrow \circlearrowright) = \text{wr}(\uparrow) - 1$$

と補題 5-1(2) を用いてわかるので、次の定理が得られる。

**定理 8-10 (Kauffman [48])**

$f_L(A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  は  $L$  の図式の選び方によらない。すなわち、 $f_L(A)$  は向きづけられた絡み目  $L$  の不変量である。さらに、変数  $t$  を用意し、

$$V_L(t) = f_L(t^{-\frac{1}{4}})$$

と置き換えると、

$$V_{\bigcirc}(t) = 1$$

であり、 $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$  は次の回帰公式を満たす。

$$(8.3) \quad t^{-1}V_{\nearrow}^{\searrow}(t) - tV_{\searrow}^{\nearrow}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{\nearrow}^{\nearrow}(t).$$

$V_L(t)$  を  $L$  の **Jones 多項式** と呼ぶ。

**定理 8-11**

向き付けられた絡み目  $L$  とその鏡像  $-L$  の Jones 多項式の間には次の関係式が成立する。

$$(8.4) \quad V_{-L}(t) = V_L(t^{-1}).$$

したがって、 $V_L(t)$  が  $t \mapsto t^{-1}$  の下で対称でなければ  $L$  は (向き付けられた絡み目として) カイラルである。

**(証明)**

$L$  の Jones 多項式  $V_L(t)$  は Kauffman ブラケット多項式  $\langle \rangle$  を用いて、

$$V_L(t) = (-A^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle \Big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}}$$

によって与えられる。但し、 $D$  は  $L$  の図式である。定義から、 $D$  の鏡像  $-D$  の Kauffman ブラケット多項式は、 $\langle D \rangle$  において  $A$  を  $A^{-1}$  に置き換えたものに等しい。また、 $\text{wr}(-D) = -\text{wr}(D)$  となるから、 $f_L(A) = (-A^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle$  について

$$f_{-L}(A) = f_L(A^{-1})$$

が成り立つ。よって、

$$V_{-L}(t) = f_{-L}(t^{-\frac{1}{4}}) = f_L(t^{\frac{1}{4}}) = V_L(t^{-1})$$

となることがわかる。□

**注意：**Alexander-Conway 多項式  $\Delta_K(t)$  (定義は Appendix A を参照) は Jones 多項式よりも以前に発見されていた有用な不変量であるが、結び目  $K$  とその鏡像  $-K$  を区別しないため、 $\Delta_K(t)$  と  $\Delta_{-K}(t)$  を比較することでは  $K$  がカイラルかどうかは判定できない。しかし、河内と Hartley の一連の研究 [55], [30], [29] において、アカイラルな結び目の Alexander-Conway 多項式は特別な形をしていることが示されている。したがって、Alexander-Conway 多項式の形を調べることで結び目のカイラリティがわかることがある。Alexander-Conway 多項式が結び目のカイラリティを区別する情報を持っていることに関しては上記の論文のほか Stoimenow [97] においても詳しく研究されている。

**命題 8-12**

結び目  $K$  に対する Jones 多項式  $V_K(t)$  は向きによらない。したがって、 $V_K(t)$  が  $t \mapsto t^{-1}$  の下で対称でなければ  $K$  はカイラルである。

(証明)

$K$  の図式  $D$  をとる ( $D$  は  $K$  の向きにより向きづけられているものとする)。Kauffman ブラケット多項式は向きのない図式に対する正則イソトピー不変量であるから、 $\langle D \rangle$  は  $D$  の向きに依らない。 $D^*$  を  $D$  の向きを逆にした図式とする。このとき、 $K$  が結び目であることから、すべての交差点で一斉に向きが反対になる。したがって、 $\text{wr}(D) = \text{wr}(D^*)$  となる。故に、定理 8-11 の証明中の  $f_K(A)$  は  $K$  の向きによらない。したがってまた、 $V_K(t)$  も  $K$  の向きによらない。□

**注意 1°：**命題の後半の主張の逆は成立しない。つまり、 $V_K(t)$  が対称であるようなカイラルな結び目  $K$  が存在する [75; 問題 11.2.2]。

**注意 2°：**[75; 付録] によると、交点数が 8 以下の素な結び目のうち、アカイラルな結び目は  $4_1, 6_3, 8_3, 8_9, 8_{12}, 8_{17}, 8_{18}$  のみであることが知られている。また、交点数が 7 以下の素な結び目はすべて有理結び目であり、交点数が 8 の素な結び目のうち、 $8_5, 8_{10}, 8_{15}, 8_{16}, 8_{17}, 8_{18}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}$  の 9 個以外はすべて有理結び目である (その 9 個の結び目は 3 本橋結び目である)。

**例 8-13**  $8_5$  の Jones 多項式は

$$V_{8_5}(t) = 1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 4t^5 + 3t^6 - 2t^7 + t^8$$

であり、これは  $t \mapsto t^{-1}$  の下で対称でないので、 $8_5$  はカイラルであることがわかる。□

**演習.** 左手系三葉結び目  $K$  とその鏡像  $-K$  の Jones 多項式を計算・比較し、 $K$  がカイラルであることを示せ。

## Appendix A. Jones 多項式の特特殊値と絡み目の行列式と Fox 彩色

この付録では、絡み目の行列式と Jones 多項式の特特殊値との関係、絡み目の行列式と Fox 彩色、結び目解消操作との関係、絡み目内にタングルが内在する可能性や有理絡み目か否かの Krebs 不変量による判定法などを説明する。

### ● A-1 : 分子ステイトと分母ステイト

絡み目図式  $D$  に対して、補題 5-6 の証明の主張 1 より、

$$\langle D \rangle_{A=\omega} = up \quad (p \in \mathbb{Z}, u \in \Phi_8 = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1 \})$$

と書けることを思い出そう。但し、 $\omega = \sqrt{i}$  である。

補題 5-6 の証明の中の主張 1 の証明において、次のことが示されている。

#### 補題 A-1

$S, S'$  を絡み目図式  $D$  の 2 つのモノサイクリック・ステイトとする。このとき、 $S'$  は  $S$  から  $D$  の偶数箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られる。 □

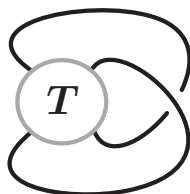
タングル図式  $T$  の**分子ステイト** (*numerator state*) および**分母ステイト** (*denominator state*) とは、平面のイソトピーによりそれぞれタングル図式  $[\infty]$ ,  $[0]$  に変形される  $T$  のステイトのことをいう [65; p.10]。

#### 命題 A-2

$T$  をタングル図式とする。 $T$  の任意の分子ステイトは分母ステイトから適当な奇数箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られる。

(証明)

タングル図式  $T$  に対して、絡み目図式  $D$  を  $D = N(T + [1])$  によって定義する (次図参照)。



$T$  の任意の分子ステイト  $S$  に対して、 $N(S + [0])$  は  $D$  のモノサイクリック・ステイトであり、任意の分母ステイト  $S'$  に対して、 $N(S' + [\infty])$  は  $D$  のモノサイクリック・ステイトである (次図参照)。



補題 A-1 より、 $N(S + [0])$  は  $N(S' + [\infty])$  から  $D$  の偶数箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られる。したがって、 $S$  は  $S'$  から奇数箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られる。  $\square$

● **A-2 : 絡み目の行列式と Jones 多項式の特特殊値と 2-タングルの型**

向きづけられた絡み目  $L$  の **Alexander-Conway 多項式** (Conway による正規化された Alexander 多項式)  $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$  は次の 2 条件により定まる [67; p.82, Theorem 8.6]。

(AC1)  $\Delta_{\bigcirc}(t) = 1$

(AC2)  $\Delta_{\nearrow}(t) - \Delta_{\searrow}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{\updownarrow}(t)$ .

**補題 A-3**

- (1) 向きづけられた絡み目  $L$  に対して、 $V_L(-1) = \Delta_L(-1)$ .
- (2) 向きづけられた絡み目  $L$  に対して、 $V_L(-1) = \pm \det(L)$ .

(証明)

(1)  $t = -1$  のときには、Alexander-Conway 多項式の回帰公式と Jones 多項式の回帰公式は完全に一致し、自明な結び目に対する値もともに 1 で、一致する。よって、 $V_L(-1) = \Delta_L(-1)$  が成り立つ。

(2)  $A = \omega$  の場合、丁度  $t = -1$  であり、 $A^3 = -A^{-1}$  であるから、 $D$  を  $L$  の図式とすると、

$$V_L(-1) = f_L(\omega) = (-A^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle_{A=\omega} = A^{\text{wr}(D)} \langle D \rangle_{A=\omega} = \omega^{\text{wr}(D)} \langle D \rangle_{A=\omega}$$

となる。よって、 $|V_L(-1)| = |\langle D \rangle_{A=\omega}| = |\langle D \rangle|$  となる。命題 6-8 より  $|\langle D \rangle| = \det(L)$  であるから、 $V_L(-1) = \pm \det(L)$  が成り立つ。  $\square$

**注意** : [67; Corollary 9.2] にあるように、 $|\Delta_L(-1)|$  は 3 次元球面  $S^3$  の  $L$  上で分岐する二重被覆  $X_2$  の 1 次元ホモロジー群の位数に等しい :  $|H_1(X_2)| = |\Delta_L(-1)|$ . この事実と上の補題の結果を合わせると、 $\det(L) = |H_1(X_2)|$  であることがわかる。すなわち、向きづけられた絡み目  $L$  の行列式は  $S^3$  の  $L$  上で分岐する二重被覆の 1 次元ホモロジー群の位数に等しい。

**補題 A-4**

$D$  を絡み目図式とする。このとき、 $|\langle D \rangle| \equiv |\langle D \rangle_{A=i}| \pmod{2}$  である。

(証明)

$A = \omega = \sqrt{i}$  のときと同様に、 $A = i$  のときも  $\delta = 0$  であるから、

$$\langle D \rangle_{A=i} = \sum_{\substack{S \in \text{State}(D) \\ \|S\|=1}} \langle D|S \rangle_{A=i}$$

と表わされる。

$S, S'$  を  $D$  のモノサイクリック・ステイトであって、 $S'$  は  $S$  から  $D$  の 2 箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作で得られているものとする。その 2 箇所の交差点を  $p, q$  とおく。補題 5-6 の証明より、次が成り立つ。

- ①  $S$  が  $p$  においてタイプ L (resp. R) の交差解消、 $q$  においてタイプ R (resp. L) の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、 $\langle D|S \rangle = \langle D|S' \rangle$ 。
- ②  $S$  が  $p, q$  において同じタイプ L または同じタイプ R の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、 $\langle D|S' \rangle = A^{\mp 4} \langle D|S \rangle$ 。

したがって、次が成り立つ。

- ①  $S$  が  $p$  においてタイプ L (resp. R) の交差解消、 $q$  においてタイプ R (resp. L) の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、

$$\langle D|S \rangle_{A=\omega} = \langle D|S' \rangle_{A=\omega}, \quad \langle D|S \rangle_{A=i} = \langle D|S' \rangle_{A=i}.$$

- ②  $S$  が  $p, q$  において同じタイプ L または同じタイプ R の交差解消を施して  $D$  から得られている場合、

$$\langle D|S' \rangle_{A=\omega} = -\langle D|S \rangle_{A=\omega}, \quad \langle D|S \rangle_{A=i} = \langle D|S' \rangle_{A=i}$$

モノサイクリック・ステイト  $S \in \text{State}(D)$  を 1 つ固定する。 $S$  以外のモノサイクリック・ステイト  $S' \in \text{State}(D)$  は  $D$  の 2 箇所の交差点において、同時に再交差解消を行う操作を有限回行うことで  $S$  から得られるが、そのうち①の操作を  $p_+(S')$  回、②の操作を  $p_-(S')$  回行ったとすると、

$$\langle D|S' \rangle_{A=\omega} = (-1)^{p_-(S')} \langle D|S \rangle_{A=\omega}, \quad \langle D|S' \rangle_{A=i} = \langle D|S \rangle_{A=i}$$

となる。 $p_-(S')$  が奇数となるような  $S'$  の個数を  $k$ 、 $p_-(S')$  が偶数となるような  $S'$  の個数を  $l$  とおくと、

$$\langle D \rangle_{A=\omega} = (l - k) \langle D|S \rangle_{A=\omega}, \quad \langle D \rangle_{A=i} = (l + k) \langle D|S \rangle_{A=i}$$

と書かれることがわかる。 $|\langle D|S \rangle_{A=\omega}| = |\langle D|S \rangle_{A=i}| = 1$  であるから、

$$|\langle D \rangle_{A=\omega}| = l - k, \quad |\langle D \rangle_{A=i}| = l + k$$

を得る。故に、 $|\langle D \rangle_{A=i}| - |\langle D \rangle_{A=\omega}| = 2k$  すなわち、 $|\langle D \rangle| \equiv |\langle D \rangle_{A=i}| \pmod{2}$  である。  $\square$

#### 系 A-5

$L$  を向きづけられた絡み目とする。このとき、 $|V_L(-1)| \equiv |V_L(1)| \pmod{2}$  である。

(証明)

$D$  を  $L$  の図式とすると、

$$V_L(-1) = f_L(\omega) = (-\omega^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle_{A=\omega},$$

$$V_L(1) = f_L(i) = (-i^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle_{A=i}$$

である。補題 A-4 より、

$$|V_L(-1)| = |\langle D \rangle_{A=\omega}| \equiv |\langle D \rangle_{A=i}| = |V_L(1)| \pmod{2}$$

を得る。 □

**命題 A-6** ([65; Proposition 8])

$L$  を (向きづけられていない) 絡み目とする。このとき、次の 2 つは同値である。

- (i)  $\det(L)$  は偶数である。
- (ii)  $L$  の成分数は 2 以上である。

(証明)

補題 A-3 と系 A-5 より、 $\det(L) = |V_L(-1)| \equiv |V_L(1)| \pmod{2}$  である。ここで、

$$(A.1) \quad V_L(1) = (-2)^{\#L-1}$$

が成り立つことを示す。(8.3) を  $t=1$  のときに考えて、

$$V_{\mathcal{L}}(1) = V_{\mathcal{L}^{\#}}(1)$$

を得る。これより、任意の絡み目  $L$  に対して

$$V_L(1) = V_{\underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{\#L}}(1) = f_{\underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{\#L}}(1) = \langle \underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{\#L} \rangle_{A=1}$$

となる。(KB2), (KB3) より

$$\langle \underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{\#L} \rangle_{A=1} = (-2)^{\#L-1}$$

となることがわかる。これで、(A.1) は証明された。

(A.1) と  $\det(L) \equiv |V_L(1)| \pmod{2}$  より、

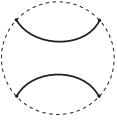
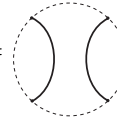
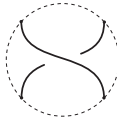
$$\det(L) \equiv 2^{\#L-1} \pmod{2}$$

であることがわかる。よって、 $\#L \geq 2$  ならば  $\det(L)$  は偶数であり、 $\#L = 1$  ならば  $\det(L)$  は奇数になる。これで、命題は証明された。 □

第 6 節で導入されたタングル  $t$  のアンビエント・イソトピー不変量  $\tilde{f}(t) = \Psi(t) \cap \mathbb{Z}^2 \in \mathbf{A}$  の成分の偶奇により、 $t$  のホモトピー型が次のように決まる。

**命題 A - 7 ([65; Proposition 9])**

$t$  を 2-タングルとし、 $\tilde{f}(t) = [p, q]$  とおく。このとき、 $p, q$  の偶奇は  $t$  のホモトピー類に関連して次の表のように決まる。

$p, q$ は偶数	$t$ はループを持つ
$p$ は偶数かつ $q$ は奇数	$t \simeq [0] =$ 
$p$ は奇数かつ $q$ は偶数	$t \simeq [\infty] =$ 
$p, q$ は奇数	$t \simeq [1] =$ 

**(証明)**

$T$  を  $t$  の図式とすると、 $p = u\langle N(T) \rangle_{A=\omega}$ ,  $q = ui\langle D(T) \rangle_{A=\omega}$  ( $u \in \Phi_8$ ) と書ける。 $|p| = |\langle N(T) \rangle|$ ,  $|q| = |\langle D(T) \rangle|$  であるから、系 6-10 より、

- (i)  $p, q$  が偶数のとき、 $N(T)$ ,  $D(T)$  の成分数は 2 以上
- (ii)  $p$  が偶数かつ  $q$  が奇数のとき、 $N(T)$  の成分数は 2 以上だが、 $D(T)$  の成分数は 1
- (iii)  $p$  が奇数かつ  $q$  が偶数のとき、 $N(T)$  の成分数は 1 だが、 $D(T)$  の成分数は 2 以上
- (iv)  $p, q$  が奇数のとき、 $N(T)$ ,  $D(T)$  の成分数は 1

となる。 $T$  の 4 つの端点

$$\text{NW}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{SW}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{NE}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{SE}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

の接続の仕方は次の 3 通りが考えられる。

- (a) NW と SW が結ばれ、NE と SE が結ばれる。
- (b) NW と NE が結ばれ、SW と SE が結ばれる。
- (c) NW と SE が結ばれ、NE と SW が結ばれる。

$T$  が (a),(b),(c) のどの場合でも、ループを持つならば、 $N(T)$ ,  $D(T)$  の成分数は 2 以上となる。これは (i) の場合に相当している。

$T$  が (a) の場合で、ループを持たない場合、 $N(T)$  の成分数は 1 であり、 $D(T)$  の成分数は 2 である。これは (iii) の場合に相当している。

$T$  が (b) の場合で、ループを持たない場合、 $N(T)$  の成分数は 2 であり、 $D(T)$  の成分数は 1 である。これは (ii) の場合に相当している。

$T$  が (c) の場合で、ループを持たない場合、 $N(T)$  と  $D(T)$  の成分数はともに 1 である。これは (iv) の場合に相当している。 □

**系 A-8**

$t$  を 2-タングルとし、 $\tilde{f}(t) = [p, q]$  とおく。このとき、 $N(t)$  が結び目であるための必要十分条件は  $p$  が奇数であることである。

特に、 $t$  が有理タングルで、 $F(t) = \frac{p}{q}$  (既約分数表示) のとき、 $N(t)$  が結び目であるための必要十分条件は  $p$  が奇数であることである。

● **A-3 : 絡み目内にタングルが内在する可能性**

Krebes 数は 2-タングルが自明な絡み目に埋め込み可能か否か、特に、有理タングルか否かを知る際に有用である。ここではこの事実を証明する。

2-タングル  $t$  が絡み目  $L$  の内側にある (*sit inside*) とは、 $L$  と同値な絡み目  $L'$  であって、2-タングルとして  $L' \cap \mathbb{B}^3 \sim t$  となるものが存在するときをいう。

**定理 A-9 (Krebes [65; Theorem 1])**

2-タングル  $t$  が絡み目  $L$  の内側にあるとする。このとき、 $Kr(t) | \det(L)$  である。

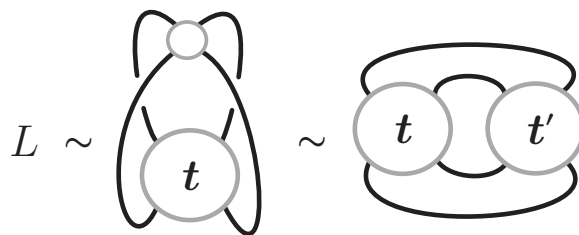
定理を証明するために、補題を 1 つ用意する。

**補題 A-10 ([65; Lemma 5])**

2-タングル  $t$  が絡み目  $L$  の内側にあるならば、 $L \sim N(t+t')$  (アンビエント・イソトピック) となる 2-タングル  $t'$  が存在する。

(証明)

仮定より一般性を失うことなく、 $L$  は  $L \cap \mathbb{B}^3 = t$  を満たしているとしてよい。 $B' := \mathbb{S}^3 - \text{Int } \mathbb{B}^3$  とおくと、 $L \cap B'$  はコンパクトであることを用いて、 $\mathbb{B}^3$  の近傍では恒等的であるような  $\mathbb{S}^3$  のアンビエント・イソトピーを施して、まずは原点から十分遠くにあり、かつ十分小さな 3-球体の中に絡んでいる部分を押し込む (図の左から中央の変形を参照)。



次に、その小さな 3-球体を、やはり  $\mathbb{B}^3$  の近傍では恒等的であるような  $\mathbb{S}^3$  のアンビエント・イソトピーを施して、 $\mathbb{B}^3$  のすぐ右横に移動させる (図の中央から右の変形を参照)。このようにして得られる 2-タングルを  $t'$  とおく。但し、その移動により、4 つの端点を結ぶ 4 つの曲線に交差やひねりが生じた場合にはそれを  $t'$  に含めると、 $L$  は  $N(t+t')$  に同値であることがわかる。 □



(定理 A-9 の証明)

2-タングル  $t$  に対して、 $L \sim N(t+t')$  となるように 2-タングル  $t'$  をとる。 $\tilde{f}(t') = [r, s]$  とおくと、命題 6-5 と補題 5-5 より、

$$\tilde{f}(t+t') = \tilde{f}(t) + \tilde{f}(t') = [p, q] + [r, s] = [ps + qr, qs]$$

となる。定理 6-3 より、 $|ps + qr|$  は  $N(t+t')$  の行列式  $\det(N(t+t'))$  に一致する：

$$|ps + qr| = \det(N(t+t')).$$

行列式は絡み目のアンビエント・イソトピー不変量であるから (命題 6-8)、 $\det(N(t+t')) = \det(L)$  となる。よって、

$$|ps + qr| = \det(L)$$

を得る。一方、 $\tilde{f}(t) = [p, q]$  と定理 6-3 より、 $|p| = \det(N(t))$ ,  $|q| = \det(D(t))$  となる。よって、 $\text{Kr}(t) = \gcd(|p|, |q|) = \gcd(p, q)$  である。こうして、 $|ps + qr|$  は  $\text{Kr}(t)$  で割り切れる、すなわち、 $\text{Kr}(t)|\det(L)$  となることが示された。□

定理 A-9 の系として次を得る。

系 A-11 ([65; Corollary 1])

2-タングル  $t$  の Krebes 数が 1 より大きいならば、 $t$  は自明な結び目の内側でない。

(証明)

$t$  が自明な結び目  $K$  の内側にあるものとする。すると、定理 A-9 より、 $\text{Kr}(t)|\det(K)$  となる。ところが、 $K$  は自明な結び目であるから、(KB3) より、 $\langle K \rangle = 1$  である。よって、 $\text{Kr}(t)$  は  $\det(K) = |\langle K \rangle_{A=\omega}| = 1$  を割り切らなければならない。これは  $\text{Kr}(t) = 1$  であることを意味する。こうして、 $t$  が自明な結び目の内側にあれば、 $\text{Kr}(t) = 1$  であることが証明された。この対偶をとれば系の主張になる。□

補題 A-12 ([75; 問題 9.3.7])

任意の有理タングル  $t$  に対して、 $N(t+t')$  が自明な結び目になるような有理タングル  $t'$  が存在する。したがって、有理タングルは自明な結び目の内側にある。

(証明)

有理タングル  $t$  は標準形

$$t = \left( \cdots \left( \left( [a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]} \right) + [a_{n-2}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$$

但し、 $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  であり、 $[a_1]$  は  $[0]$  でもよく、 $[a_n]$  は  $[\infty]$  でもよい、で表示することができる。この表示における  $n$  を「長さ」と呼ぶ (便宜上、 $[a_n] = [\infty]$  のときにも長さは  $n$  としておく) と、 $n$  は奇数である。そこで  $n = 2k - 1$  とおき、 $k$  に関する帰納法で証明する。

I.  $t$  が長さ 1 の有理タングルの標準形に同値な場合

$t = [a_1]$  の形をしているとしてよい。 $t' = [-a_1 + 1]$  とすれば  $t+t' \sim [1]$  となるから、 $N(t+t')$  は自明な結び目になる。

II.  $k \in \mathbb{N}$  をとり、長さ  $2k-1$  の有理タングルの標準形に同値な任意の有理タングルに対して、補題は成立しているとする。 $t$  を長さ  $2k+1$  の有理タングルの標準形に同値な有理タングルとする。

$$t = \left( \cdots \left( \left( [a_{2k+1}] * \frac{1}{[a_{2k}]} \right) + [a_{2k-1}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$$

と表示する。

$$u := \left( \cdots \left( \left( [a_{2k+1}] * \frac{1}{[a_{2k}]} \right) + [a_{2k-1}] \right) * \cdots * \frac{1}{[a_4]} \right) + [a_3]$$

とおくとこれは長さ  $2k-1$  であるから、帰納法の仮定により、 $N(u+u')$  が自明な結び目になるような有理タングル  $u'$  が存在する。

$$t = \left( u * \frac{1}{[a_2]} \right) + [a_1]$$

であることに注意して

$$t' := [-a_1] + \left( \frac{1}{[-a_2]} * u' \right)$$

と定めると、(3.2) と補題 3-9(1) より

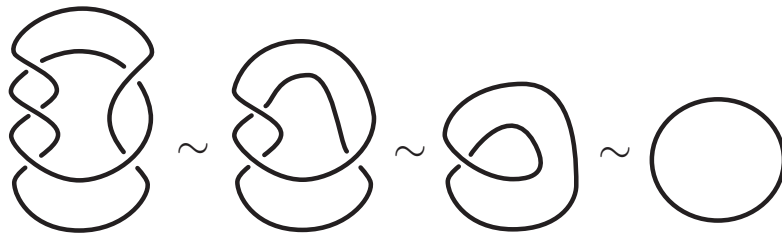
$$t+t' \sim \left( u * \frac{1}{[a_2]} \right) + \left( \frac{1}{[-a_2]} * u' \right) \sim \left( u * \frac{1}{[a_2]} \right) + \left( u' * \frac{1}{[-a_2]} \right)$$

となる。したがって、

$$N(t+t') = \left( \text{Diagram with two components } u \text{ and } u' \text{ and crossings} \right) \sim \left( \text{Diagram with two components } u \text{ and } u' \text{ side-by-side} \right) = N(u+u')$$

となるので、 $N(t+t')$  は自明な結び目  $N(u+u')$  に同値である。これで、長さ  $2k+1$  のときにも補題が成り立つことが示された。□

**注意：** 上の補題の証明の中で、有理タングル  $t$  が  $[a]$  の形的时候には  $t' = [-a+1]$  とすれば  $N(t+t') \sim \bigcirc$  となることは示した。 $t = \frac{1}{[a]}$  の場合には  $t'$  を  $\frac{1}{[-a+1]}$  にとればよい (下図参照)。



**定理 A - 13**

- (1)  $t$  が有理タングルならば、 $\text{Kr}(t) = 1$  である。  
 (2)  $t$  が  $F(t) = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) \neq (0, 0)$ ,  $p, q$  は互いに素) を満たす有理タングルのとき、 $\det(N(t)) = |p|$  である。

**(証明)**

- (1) は系 A-11 と補題 A-12 から従う。  
 (2)  $\tilde{f}(t) = [\tilde{p}, \tilde{q}]$  とおく。定理 6-3(2) により、

$$\det(N(t)) = |\tilde{p}|$$

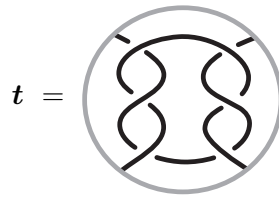
である。一方、命題 6-5 より、 $\tilde{Q}(\mathbb{Z})$  において  $F(t) = -\tilde{f}(t)$  なので、 $d := \text{Kr}(t)$  とおくと、 $d = \gcd(\tilde{p}, \tilde{q})$  であるから、

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) = (\pm dp, \pm dq) \quad (\text{複号任意})$$

となる。特に、 $|\tilde{p}| = d|p|$  が成り立つ。 $t$  が有理タングルならば、(1) より  $d = 1$  であるから、 $|p| = |\tilde{p}| = \det(N(t))$  を得る。 □



**注意** : [11; Theorem 8.7.7] には (2) の直接的な証明がある。

**例 A - 14 (Krebes)**



に対して、 $\text{Kr}(t) = 9$  である (例 6-7)。したがって、 $t$  を内側に含むどんな結び目も自明ではない。特に、 $t$  は有理タングルではない。 □

**注意** : 上の例の  $t$  は有理タングルではないことは次のようにしてもわかる。 $t$  の分子をとると、

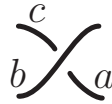
$$L := N(t) = \text{  } \sim \text{  } \text{ となる。よって、} L \text{ の成分を分離する } \mathbb{S}^3 \text{ 内の 2 次元球}$$

面が存在するので、 $L$  は素ではない。任意の有理絡み目 (= 有理タングルの分子に同値な絡み目) は素である [2; p.67] から、 $t$  は有理タングルではないことがわかる。

**● A - 4 : 絡み目の行列式と彩色数**

タングル図式の整数彩色は第 4 節で説明した。ここでは  $p \geq 0$  を整数として  $p$ -彩色の概念を導入し、 $p$ -彩色数と絡み目の行列式との関係を述べる。


タングル図式  $T$  の  $p$ -彩色 ( $p$ -coloring) とは、写像  $\lambda : \{ T \text{ の部分弧全体} \} \rightarrow \mathbb{Z}$  であって、その割り当て方が各交差点において次図で表わされている状況のとき  $a + c \equiv 2b \pmod{p}$  を満たすものをいう。

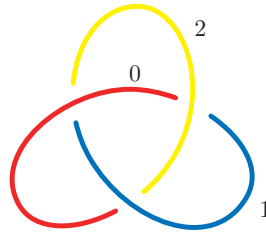


2つの  $p$ -彩色  $\lambda, \lambda'$  は任意の部分弧  $C$  に対して  $\lambda(C) \equiv \lambda'(C) \pmod{p}$  を満たすとき同じと考え、 $\lambda = \lambda'$  と表わす。この約束の下で、 $T$  の  $p$ -彩色の全体を  $\text{Col}_p(T)$  で表わし、 $|\text{Col}_p(T)|$  を  $T$  の  $p$ -彩色数という。0-彩色とは整数彩色のことに他ならない。

2-タンクル図式  $T$  の整数彩色あるいは  $p$ -彩色  $\lambda$  が定値写像であるとき、**自明**であるという。2-タンクル図式  $T$  が  $p$ -彩色可能であるとは、非自明な  $p$ -彩色を持つときをいう。

上では 2-タンクル (図式) に対して、整数彩色と  $p$ -彩色、自明な彩色、 $p$ -彩色可能などを定義したが、これらは絡み目 (図式) に対しても当てはめることができる。

**例 A-15 (Fox [25])**  $D =$   とする。 $D$  の非自明な 3-彩色として次図で表わされるものが存在する。



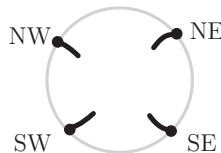
$D$  のすべての  $p$ -彩色を求めたかったら、上図において 0, 1, 2 と割り振られている部分弧のカラーをそれぞれ  $x, y, z$  とおき、連立合同式

$$\begin{cases} y + z \equiv 2x \pmod{p}, \\ x + y \equiv 2z \pmod{p}, \\ x + z \equiv 2y \pmod{p} \end{cases}$$

を解けばよい。 □

2つの  $p$ -彩色  $\lambda, \lambda'$  に対して  $\lambda + \lambda'$  はまた  $p$ -彩色である。したがって、 $\text{Col}_p(T)$  は加法群をなす。さらに、任意の  $\lambda \in \text{Col}_p(T)$  と任意の  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $\lambda'(C) = \lambda(C) + k$  ( $C$  は  $T$  の部分弧) により定義される  $\lambda'$  も  $T$  の  $p$ -彩色である。故に、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  は  $\text{Col}_p(T)$  に作用する (しかし、この作用は先の群構造とは両立しない)。

2-タンクル  $T$  の 4つの端点 NW, NE, SW, SE を図のように定め、各  $\lambda \in \text{Col}_p(T)$  に対して NW, NE, SW, SE を含む弧の彩色をそれぞれ  $\lambda(\text{NW}), \lambda(\text{NE}), \lambda(\text{SW}), \lambda(\text{SE})$  で表わす。



写像  $\xi : \{\text{NW}, \text{NE}, \text{SW}, \text{SE}\} \rightarrow \mathbb{Z}$  のことを 4 点 NW, NE, SW, SE の  $p$ -彩色と呼ぶことにすれば、各  $\lambda \in \text{Col}_p(T)$  から NW, NE, SW, SE の  $p$ -彩色が定まることになる。

さて、関数  $M_T : \text{Col}_p(T) \rightarrow M(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  を

$$M_T(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\text{NW}) & \lambda(\text{NE}) \\ \lambda(\text{SW}) & \lambda(\text{SE}) \end{pmatrix}$$

によって定義することができる。ここで、 $M(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  は  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -係数の 2 次正方行列の全体である。  $M(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  は行列の和に関して群をなし、 $M_T$  は群準同型となる。また、任意の  $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k := \begin{pmatrix} a+k & b+k \\ c+k & d+k \end{pmatrix}$$

により  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  には  $p\mathbb{Z}$  が作用し、 $M_T$  は  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -同変写像である。

補題 4-3 の証明を  $p$  を法として書き換えることにより、次が成り立つことがわかる。

#### 命題 A-16

$p \geq 0$  を整数とする。2-タングル図式  $T$  に Reidemeister 移動 (RI), (RII), (RIII) のうちどれかを 1 回施して得られる 2-タングル図式を  $T'$  とおくと、全単射  $\varphi : \text{Col}_p(T) \rightarrow \text{Col}_p(T')$  が存在し、 $M_{T'} \circ \varphi = M_T$  となる。  $\square$

上の命題の証明から、タングル図式  $T$  に Reidemeister 移動を施して図式  $T'$  を作るとき、 $T$  の非自明な  $p$ -彩色が  $T'$  の非自明な  $p$ -彩色を誘導することがわかる。したがって、次が成立する。

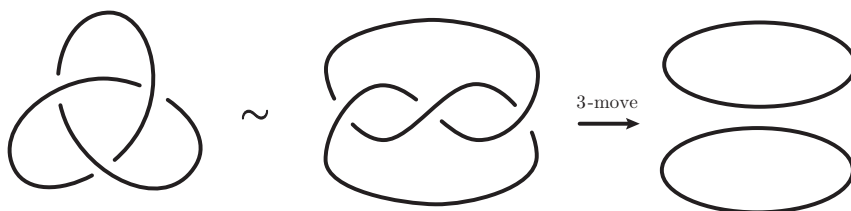
#### 系 A-17

$p \geq 0$  を整数とする。2-タングル  $t$  のある図式が非自明な  $p$ -彩色を持つならば、 $t$  の任意の図式は非自明な  $p$ -彩色を持つ。  $\square$

2-タングル  $t$  が  $p$ -彩色可能であるとは、 $t$  のある図式が非自明な  $p$ -彩色を持つときをいう。系 A-17 により、この定義は  $t$  の図式の選び方によらない。よって、結び目  $L$  が  $p$ -彩色可能、特に、3-彩色可能ならば、 $L$  は自明な結び目に同値でないことがわかる。例えば、例 A-15 より三葉結び目は 3-彩色可能なので、自明な結び目に同値でない。また、Borromean 環が分離しないこともそれが 3-彩色不可能であることからわかる [81]。

**注意 A-18** 注意 8-6 において  $\frac{p}{q}$ -移動について説明した。  $p$  が素数のとき、 $\frac{p}{q}$ -移動の下で絡み目図式  $D$  の  $p$ -彩色数  $|\text{Col}_p(D)|$  は不変であることが知られている [84]。特に、3-移動の下で絡み目図式  $D$  の 3-彩色数は不変である。このことから、成分数が異なる 2 つの自明な絡み目は 3-移動と Reidemeister 移動の有限回により移り合わないことがわかる。

今、三葉結び目  $L$  は次図のように、3-移動と Reidemeister 移動の有限回により、成分数が 2 の自明な絡み目にするができる。この事実からまた、3-移動と Reidemeister 移動の有限回により、自明な結び目にするにはできないことが従う。



次の事実が知られている。

**定理 A - 19**

$K$  を結び目とし、 $p$  を 2 以上の整数とする。 $K$  が  $p$ -彩色可能であるための必要十分条件は、 $p|\det(K)$  となることである。□

上の定理の証明は [69; Lemma 4.3] または [68; §2] を参照。

$t$  が有理タングルで、 $F(t) = \frac{p}{q}$  ( $\gcd(p, q) = 1$ ) のとき、 $\det(N(t)) = |p|$  である (定理 A-13(2))。よって、上の定理と系 A-8 より、 $N(t)$  が結び目、すなわち、 $p$  が奇数ならば、 $N(t)$  は  $|p|$ -彩色可能である。より詳しく、次の定理が成り立つ。

**定理 A - 20 (Jablan, Kauffman and Lopes [36; Theorem 5])**

$L$  を有理絡み目とし、 $m := \det(L)$  とおく。このとき、 $L$  の Schubert 標準形に対して、非自明な  $m$ -彩色であって、すべてのカラーを用いるものが存在する。□

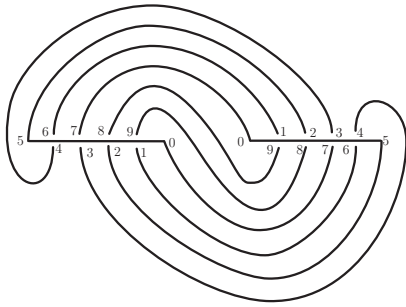
上の定理の証明については [37; Theorem 2] も参照。

**注意 A - 21** 有理絡み目の Schubert 標準形について説明する。 $L$  を有理絡み目とする。すると、ある有理タングル  $t$  を用いて  $L = N(t)$  と表わすことができる。補題 7-4 と補題 7-7 より、 $F(t) = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) \neq (0, 0)$ ,  $\gcd(p, q) = 1$ ) であるとする、 $|p| > |q|$  と仮定することができる。 $p = 0$  なら  $L = N(t)$  は自明な絡み目である。よって、 $L$  が非自明な有理絡み目ならば、 $p \neq 0$  であり、したがって、 $p > 0$  と仮定することができる。つまり、 $L$  が非自明な有理絡み目ならば、 $F(t) = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p > |q| > 0$ ,  $\gcd(p, q) = 1$ ,  $q$  は奇数) を満たすある有理タングル  $t$  を用いて  $L = N(t)$  と表わすことができる (定義 7-6 の下の注意 2)。この状況のとき、次の手順で絡み目図式を作ることができる ([59; 第 2 章], [9; Chapter 12], [38] を参照)。

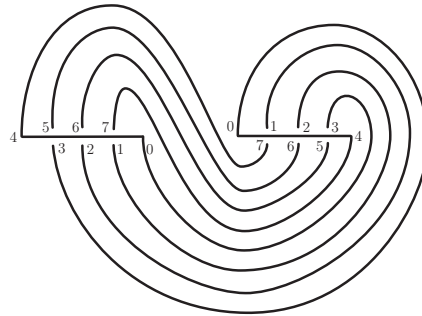
- (i) まず、線分を 2 本用意し、その 2 本を  $xy$ -平面の  $x$ -軸上に重ならないように配置する。各線分を  $p$  等分する。
- (ii) 左側の線分と右側の線分のそれぞれについて、(i) で追加した分点および端点に次図のように番号  $0, 1, \dots, 2p-1$  を振る (各分点には上下に 2 つの番号がつけられている)。



- (iii) 以下、番号は  $2p$  を法として扱う。まず、左側の線分の番号  $0$  の端点を右側の番号  $q$  の点のと反時計回りに曲線をつなぐ。次に、その番号  $q$  の点を左側の線分の番号  $2q$  の点と曲線をつなぐ。但し、先の曲線とは交わらないようにする。次に、その番号  $2q$  の点を右側の線分の番号  $3q$  の点と曲線をつなぐ。但し、先の  $2$  曲線とは交わらないようにする。以下、これを繰り返すと、右側または左側の線分の番号  $p$  の点で止まる。今度はもう  $1$  つの点  $0$  から時計回りに出発して同じ要領で分点を曲線をつないでいく。
- (iv)  $2$  つの線分上の各分点において、線分がすべて上を通るように、上下をつける。



$S(5, -3)$



$S(4, 3)$

この図式によって定まる絡み目  $S(p, q)$  は  $L$  と同値である ([11, 38, 44, 75] 等を参照)。上記の図式による表示を有理絡み目  $L$  の **Schubert 標準形** (Schubert's normal form) と呼ぶ [93]。

**系 A - 22**

$L$  を有理絡み目とし、 $n \geq 2$  を  $n | \det(L)$  を満たす整数とする。このとき、 $L$  の Schubert 標準形に対して、非自明な  $n$ -彩色であって、すべてのカラーを用いるものが存在する。

(証明)

$m := \det(L)$  とおく。 $n | m$  より、自然な全射準同型  $\pi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  が存在する。

$D$  を  $L$  の Schubert 標準形とすると、定理 A-20 より、 $D$  の  $m$ -彩色であって、すべてのカラーを用いるものが存在する。このカラーを  $\pi$  で写すことにより、 $D$  の  $n$ -彩色であって、すべてのカラーを用いるものが得られる。□

## Appendix B. 無理数の連分数展開と無限タングル

実数  $\alpha$  を次の条件 (CFE1), (CFE2), (CFE3) を満たす実数  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n$  を用いて連分数 (2.1) の形に表わすことを  $\alpha$  の  $(n-1)$  次連分数展開と呼ぶのであった。

$$(CFE1) \quad a_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$(CFE2) \quad a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}.$$

$$(CFE3) \quad \alpha_n > 1 \text{ (但し, } n \geq 1 \text{ のとき)}.$$

ここでは、無理数の連分数展開の理論の中から、実数の近似としての連分数と循環連分数の話題を取り上げる。この内容はほぼ [63; 第9章] に基づくが、最後に、Kauffman と Lambropoulou [52] による循環連分数と無限タングルに関する考察に触れる。

### ● B-1 : 実数の近似としての連分数展開

$\alpha$  が無理数ならば、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(n-1)$  次連分数展開  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$  が定まる。その一意性により、 $a_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) は  $n < m$  を満たす  $m$  によらずに決まるから、第2項以降が自然数であるような整数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が定まる。このとき、

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

と書いて、 $\alpha$  の連分数展開と呼ぶ。

#### 補題 B-1

無理数  $\alpha$  の連分数展開を  $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$  とする。数列  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  と  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  を次の漸化式によって定義する：

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = a_2,$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

このとき、 $q_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) であり、

(1) 任意の自然数  $n \geq 2$  と実数  $t > 0$  に対して

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, t] = \frac{t p_n + p_{n-1}}{t q_n + q_{n-1}}.$$

(2) 自然数  $n$  に対して  $c_n \in \mathbb{Q}$  を

$$c_n := [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

と定めると、

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

$c_n$  を  $\alpha$  の第  $n$  次近似分数という。

#### (証明)

任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $q_n > 0$  であることは  $a_m \in \mathbb{N}$  ( $m \geq 2$ ) であることと漸化式の定め方から従う。

(1) 数学的帰納法で示す。



$n = 2$  のとき、

$$[a_1, a_2, t] = \frac{a_1 a_2 t + a_1 + t}{a_2 t + 1} = \frac{t p_2 + p_1}{t q_2 + q_1}$$

となることがわかるので、成立する。

$n > 2$  とし、

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t] = \frac{t p_{n-1} + p_{n-2}}{t q_{n-1} + q_{n-2}}$$

が成り立っていると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots, a_n, t] &= \left[ a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{t} \right] \\ &= \frac{\left( a_n + \frac{1}{t} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left( a_n + \frac{1}{t} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{t(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{t(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{t p_n + p_{n-1}}{t q_n + q_{n-1}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $n$  のときにも等式は成立する。

(2)  $n = 1$  のとき  $c_1 = a_1 = \frac{p_1}{q_1}$  であるから示したい等式は成立している。 $n \geq 2$  のとき (1) より、

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

が成り立つ。右辺は  $p_n, q_n$  の漸化式の定義より、 $\frac{p_n}{q_n}$  に等しい。  $\square$

次の定理により、補題 B-1 のように定義される有理数  $c_n$  は  $\alpha$  の近似分数と呼ぶにふさわしいものであることがわかる。

### 定理 B-2

$\alpha$  を無理数とし、その連分数展開  $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$  から補題 B-1 のように 2 つの数列  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  を定める。このとき、

- (1)  $1 = q_1 \leq q_2 < q_3 < \dots$
- (2)  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \quad (n \geq 2)$ .
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$ .

### (証明)

(1)  $q_1 = 1$  は定義より明らかであり、 $q_2 = a_2 \in \mathbb{N}$  であるから  $q_1 \leq q_2$  である。さらに、 $n \geq 3$  に対しては  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + 1 > q_{n-1}$  となる。

(2)  $\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n$  となることを数学的帰納法で示す。

$n = 2$  のとき、

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + 1 & a_1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 + 1) - a_1 a_2 = 1 = (-1)^2$$

となり、成立する。

$n \geq 3$  とし、 $n-1$  のとき (2) の等式は成立すると仮定する。このとき、

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{vmatrix} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

を得る (最後から 2 番目の等式成立は帰納法の仮定から従う)。これで、2 以上のすべての自然数  $n$  に対して (2) の等式が成り立つことが示された。

(3) 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\alpha_n (> 1)$  を  $\alpha$  の  $(n-1)$  次連分数展開

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$$

から定まる実数とする。補題 B-1(1) より

$$(B.1) \quad \alpha = \frac{\alpha_n p_n + p_{n-1}}{\alpha_n q_n + q_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{p_n}{q_n} - \alpha = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n (\alpha_n q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n (\alpha_n q_n + q_{n-1})}$$

となる。ここで、

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} > a_n$$

であるから、

$$\alpha_n q_n + q_{n-1} > a_n q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$$

という評価式が得られる。これより、

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| = \frac{1}{q_n (\alpha_n q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

を得る (最後の不等式の評価で (1) を用いた)。 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  は自然数からなり、(1) により狭義単調増加数列であるから、 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $+\infty$  に発散する。したがって、上の評価式より、 $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  は  $\alpha$  に収束する。□

## ● B-2 : 2 次無理数の連分数展開

無理数  $\alpha$  の連分数展開  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$  が**循環している** (*periodic*) とは、ある番号から先の項が同じ有限列の繰り返しになっているものをいう。つまり、

$$a_{k+i} = a_{k+d+i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

となる  $k, d \in \mathbb{N}$  が存在するときをいう。このとき、 $\alpha$  の連分数展開を

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{a_k, \dots, a_{k+d-1}}]$$

のように表わす。特に、 $k=1$  のときには、**純循環** (*purely periodic*) であると呼ばれる。例えば、 $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  に対して  $\omega = [\overline{1}]$  と表わされるから、 $\omega$  は純循環連分数展開される。

無理数の中で

$$\frac{m \pm \sqrt{d}}{n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}, d \text{ は平方数でない})$$

の形で与えられるものは2次無理数 (quadratic irrational) と呼ばれる。例えば、平方数でない  $d \in \mathbb{N}$  の正の平方根  $\sqrt{d}$  や黄金比  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  は2次無理数である。次のことは定義から直ちにわかる。

**補題 B-3**

$\alpha \in \mathbb{R}$  が2次無理数であるための必要十分条件は  $\alpha$  が整数係数の2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の有理数解でないことである。

実数が循環連分数展開を持つための必要十分条件は2次無理数であることである。以下、この事実を証明する。まず、簡単な方から示す。

**命題 B-4**

実数  $\alpha$  が循環連分数展開  $\alpha = [a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, \dots, a_{k+d-1}}]$  を持つならば、 $\alpha$  は2次無理数である。

(証明)

I. まず、純循環連分数に展開される場合、つまり、 $\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_d}]$  と展開される場合を考える。

数列  $\{p_n\}_{n=1}^\infty, \{q_n\}_{n=1}^\infty$  を補題 B-1 のように作る。  $\alpha$  の  $d$  次連分数展開  $\alpha = [a_1, \dots, a_d, \alpha_{d+1}]$  に関して補題 B-1(1) を適用すると、

$$(B.2) \quad \alpha = [a_1, \dots, a_d, \alpha_{d+1}] = \frac{\alpha_{d+1}p_d + p_{d-1}}{\alpha_{d+1}q_d + q_{d-1}}$$

と表わすことができる。ここで、 $\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_d}]$  であることから、

$$\alpha_{d+1} = [a_{d+1}, a_{d+2}, \dots, a_{2d}, \dots] = [a_1, a_2, \dots, a_d, \dots] = \alpha$$

である。これを (B.2) に代入すると、

$$\alpha = [a_1, \dots, a_d, \alpha_{d+1}] = \frac{\alpha p_d + p_{d-1}}{\alpha q_d + q_{d-1}}$$

が成り立つ。故に、 $\alpha$  は2次方程式

$$q_d \alpha^2 + (q_{d-1} - p_d) \alpha - p_{d-1} = 0$$

を満たす。 $\alpha$  は循環連分数展開を持つので、有理数ではない (命題 2-4)。よって、 $\alpha$  は2次無理数である。

II. 一般の場合

数列  $\{p_n\}_{n=1}^\infty, \{q_n\}_{n=1}^\infty$  を補題 B-1 のように作る。  $\alpha$  の  $(k-1)$  次連分数展開  $\alpha = [a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$  に関して補題 B-1(1) を適用すると、

$$(B.3) \quad \alpha = [a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

となるのがわかる。ここで、 $\alpha_k$  は純循環連分数展開  $\alpha_k = [\overline{a_k, \dots, a_{k+d-1}}]$  を持つから、Iにより、整数係数のある2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の解である。一方、(B.3) を  $\alpha_k$  に関して

解いて、

$$(B.4) \quad \alpha_k = \frac{p_{k-2} - \alpha q_{k-2}}{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}}$$

を得る。故に、 $\alpha$  は方程式

$$a \left( \frac{p_{k-2} - \alpha q_{k-2}}{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}} \right)^2 + b \left( \frac{p_{k-2} - \alpha q_{k-2}}{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}} \right) + c = 0$$

を満たす。これを整理すれば、 $\alpha$  は整数係数のある 2 次方程式を満たすことがわかる。その 2 次方程式の 2 次の係数が 0 になることが気になるが、 $\alpha$  は循環連分数展開される実数なので、もともと無理数であるため、そのようなことは起こらない。□

命題 B-4 の逆が成り立つことを示すために、共役の概念を導入する。 $d$  を平方数でない自然数とすると、

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{ a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$$

は  $\mathbb{R}$  の部分体をなす。 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  の元  $x = a + b\sqrt{d}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ) に対して、 $x' = a - b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  を  $x$  の**共役** (*conjugate*) と呼ぶ。共役を取る操作は和差積商と両立する。すなわち、 $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  に対して

$$(B.5) \quad (x + y)' = x' + y', \quad (xy)' = x'y', \quad \left( \frac{x}{y} \right)' = \frac{x'}{y'}$$

が成り立つ。但し、商に関しては  $y \neq 0$  を仮定する。

### 定理 B-5 (Lagrange)

$\alpha$  が 2 次無理数ならば、 $\alpha$  は循環連分数展開される。

(証明)

$$\alpha = \frac{b + \sqrt{c}}{a} \quad (a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, c \in \mathbb{N})$$

と書く。右辺の分母・分子に  $|a|$  を掛けると、

$$m_1 := b|a|, \quad d = ca^2, \quad k_1 := a|a|$$

とおくことにより、

$$\alpha = \frac{m_1 + \sqrt{d}}{k_1}$$

と表わされることがわかる。

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$$

を  $\alpha$  の  $(n-1)$  次連分数展開とする。このとき、 $m_i, k_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) を

$$m_{i+1} = a_i k_i - m_i, \quad k_{i+1} = \frac{d - m_{i+1}^2}{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

によって帰納的に定義する (注:  $d$  が平方数でないから、帰納法により、 $k_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) がわかる)。すると、

$$(B.6) \quad \alpha_i = \frac{m_i + \sqrt{d}}{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

と表わされる。

∴)

各  $i$  に対して  $\beta_i := \frac{m_i + \sqrt{d}}{k_i}$  とおく。

$i = 1$  のとき、 $\alpha_1 = \alpha = \beta_1$  となる。

$i \geq 1$  とし、 $\alpha_i = \beta_i$  であると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{i+1}} &= \alpha_i - a_i = \beta_i - a_i = \frac{m_i + \sqrt{d}}{k_i} - a_i \\ &= \frac{-m_{i+1} + \sqrt{d}}{k_i} = \frac{-m_{i+1}^2 + d^2}{k_i(m_{i+1} + \sqrt{d})} = \frac{k_{i+1}}{m_{i+1} + \sqrt{d}} = \frac{1}{\beta_{i+1}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$  が成り立つ。 □

ここで、 $m_i, k_i \in \mathbb{Z}$ ,  $k_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) である。

∴)

帰納法で示す。

$i = 1$  のときは自明である。

$i = 2$  のとき、 $m_2 \in \mathbb{Z}$  は自明である。

$$k_2 = \frac{d - (a_1 k_1 - m_1)^2}{k_1} = 2a_1 k_1 - a_1^2 k_1 + \frac{d - m_1^2}{k_1}$$

となる。ここで、

$$\frac{d - m_1^2}{k_1} = \frac{ca^2 - b^2 a^2}{a|a|} = \pm(c - b^2) \in \mathbb{Z}$$

であるから、 $k_2 \in \mathbb{Z}$  がわかる。

$i \geq 2$  とし、 $m_i, k_{i-1}, k_i$  は整数 であると仮定する。このとき、 $m_{i+1} \in \mathbb{Z}$  はその定義より直ちにわかる。

$$k_{i+1} = \frac{d - m_{i+1}^2}{k_i} = \frac{d - (a_i k_i - m_i)^2}{k_i} = 2a_i k_i - a_i^2 k_i + \frac{d - m_i^2}{k_i} = 2a_i k_i - a_i^2 k_i + k_{i-1}$$

と書ける。よって、 $k_{i+1} \in \mathbb{Z}$  である。

これで帰納法が完成した。 □

よって、 $\alpha_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  である。今、(B.1) より、

$$\alpha = \frac{\alpha_n p_n + p_{n-1}}{\alpha_n q_n + q_{n-1}}$$

と書ける。この両辺の共役をとると、

$$\alpha' = \frac{\alpha'_n p_n + p_{n-1}}{\alpha'_n q_n + q_{n-1}}$$

となることがわかる。すると、

$$(B.7) \quad \alpha'_n = \frac{p_{n-1} - \alpha' q_{n-1}}{\alpha' q_n - p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \left( \frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}} \right)$$

となる。ここで、定理 B-2(3) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1$$

となる ( $\alpha \notin \mathbb{Q}$  であるから  $\alpha' \neq \alpha$  に注意)。よって、 $n$  が十分大きいときには

$$\frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}} > 0$$

となる。これと (B.7) より  $n$  が十分大きいときには  $\alpha'_n < 0$  であることがわかる。一方、連分数展開の定義より、 $n \geq 2$  ならば  $\alpha_n > 1$  である。故に、 $n$  が十分大きいとき、 $\alpha_n - \alpha'_n > 0$  となる。

$$\alpha_n - \alpha'_n = \frac{2\sqrt{d}}{k_n}$$

であるから、 $n$  が十分大きいとき  $k_n > 0$  であることがわかる。

$$k_{n+1}k_n = d - m_{n+1}^2 < d, \quad m_{n+1}^2 < m_{n+1}^2 + k_n k_{n+1} = d$$

であるから、 $n$  が十分大きいとき、 $k_{n+1} \in \{1, \dots, d-1\}$  であり、かつ、 $m_{n+1} \in \{0, \pm 1, \dots, \pm[\sqrt{d}]\}$  となる。ここで、 $[\sqrt{d}]$  は  $\sqrt{d}$  を超えない最大の整数を表わす。したがって、 $I := \{1, \dots, d-1\}$ ,  $J := \{0, \pm 1, \dots, \pm[\sqrt{d}]\}$  とおくと、 $n_0$  を十分大きな自然数の 1 つとすると、写像

$$f: \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \longrightarrow I \times J, \quad f(n) = (k_n, m_n)$$

は単射ではない。よって、

$$k_N = k_{N+d}, \quad m_N = m_{N+d}$$

を満たす 2 つの自然数  $N (\geq n_0)$  と  $d$  が存在する。すると、(B.6) より  $\alpha_N = \alpha_{N+d}$  となるので、

$$\alpha = [a_1, \dots, a_{N-1}, \overline{a_N, \dots, a_{N+d-1}}]$$

のように循環連分数で表わされることがわかる。 □

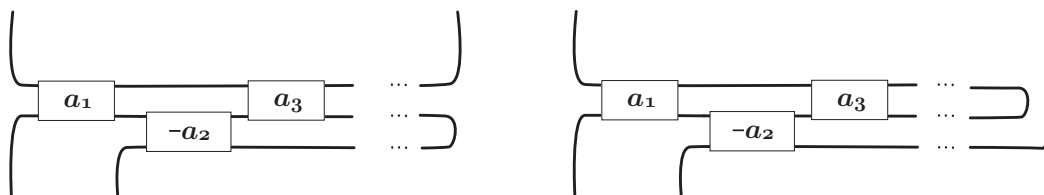
### ● B-3 : 無理数の連分数展開と無限タングル

有理数は連分数展開を通じて有理タングルと 1 対 1 に対応している。無理数に対応するタングルは何になるのだろうか。整数係数の 2 次方程式の解として得られる無理数および複素数についてこのような問題が Kauffman と Lambropoulou [52] において取り上げられているので紹介しよう。

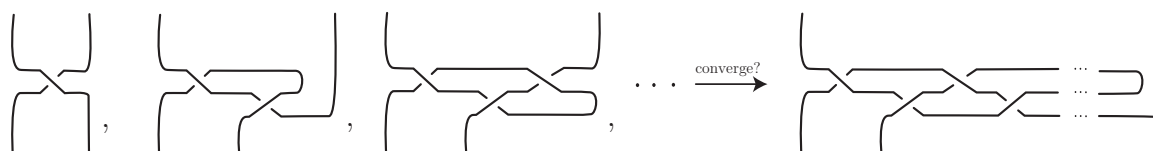
$\alpha$  が無理数の場合、その連分数展開は  $\alpha = [a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots]$  のように無限に項が続く形になる。これに対応する“タングル”を無理矢理定義しようとするれば、

$$[[a_1], \dots, [a_{k-1}], [a_k], \dots] = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{[a_3] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[a_k] + \dots}}}}$$

のようになるであろう。図で表示すれば次図の左あるいは右のようになる。



これはもはや普通のタングルとは呼べないから、“無限タングル”と呼ぶことにしよう。 $\alpha = [a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots]$  の  $n$  次近似分数  $c_n := [a_1, \dots, a_n]$  に対して、有理タングル  $t_n := [[a_1], \dots, [a_n]]$  が対応するので、何らかの意味で上記の無限タングルに有理タングルの列  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  が収束するのではないかと考えられる。



このような無限タングルの理論や収束の問題を定式化することは興味深い問題である。また、収束のことは一旦忘れて、 $n$  次近似分数に対応する有理タングルから作られる列  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  にどのような有理タングルが現れるのか、それらの系列としての共通の性質を調べることも興味深い問題である。

整数係数の 2 次方程式には実数解を持たないものもある。例えば、 $x^2 + x + 1 = 0$  は実数解を持たない。このような方程式の解として得られる虚数について Kauffman と Lambropoulou [52] は次のような考察を行っている。

$a (\neq 0), b, c (\neq 0) \in \mathbb{Z}$  として 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  を考える。この方程式は

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

と同値であり、これは

$$x = -\frac{b}{a} - \frac{cx}{ax^2} = -\frac{b}{a} + \frac{cx}{bx+c} = -\frac{b}{a} + \frac{1}{\frac{b}{c} + \frac{1}{x}}$$

のように変形することができる。したがって、方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解  $\chi$  は

$$\chi = \left[ -\frac{b}{a}, \frac{b}{c}, -\frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \dots \right] = \left[ \overline{-\frac{b}{a}}, \frac{b}{c} \right]$$

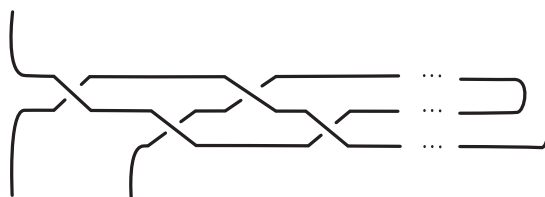
のように項が有理数からなる循環連分数として表わされる。この観点から、 $\chi$  に対応する無限タングル  $[\chi]$  として

$$[\chi] = \left[ \overline{\left[ -\frac{b}{a}, \frac{b}{c} \right]} \right] := \left[ \left[ -\frac{b}{a}, \frac{b}{c} \right], \left[ -\frac{b}{a}, \frac{b}{c} \right], \dots \right]$$

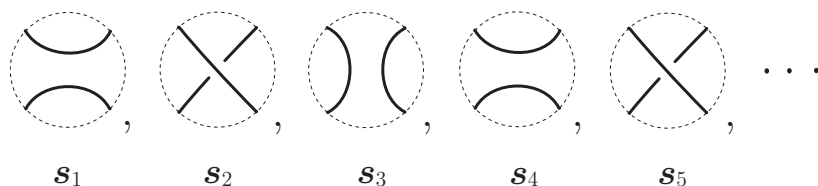
が考えられる。 $t_1 := \left[ -\frac{b}{a} \right]$ ,  $t_2 := \left[ \frac{b}{c} \right]$  とおくと、これらは有理タングルで、

$$[t_1, t_2] = t_1 + \frac{1}{t_2} = \text{Diagram}$$

である。例えば、 $\chi = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  ( $i$  は虚数単位) は  $x^2 - x + 1 = 0$  の解であるから、対応する無限タングルは  $[\chi] = \overline{[1, [-1]]}$  であり、その図式は次図のようになる。



$s_n = \overbrace{[[1, [-1], \dots, [1, [-1]]]}^{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおくと、この有理タングルの列は次のようになる。



定理 B-2 より、無理数  $\alpha$  の連分数展開  $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$  に対して第  $n$  次近似分数  $c_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  のなす有理数列は  $\alpha$  に収束する。その証明において同定理の (2) の等式  $c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$  は重要な役割を果たすが、Kauffman と Lambropoulou は最近その左辺に対応する有理タングルの分子  $\mathbf{K}_n := N([c_n] - [c_{n-1}])$  に注目し、簡単にはほどけない (ハードな) 自明結び目の研究を行っている。詳しくは [54] を参照されたい。

この講義では主として Conway による代数的な方法で有理タングル、有理絡み目の理論を外觀してきたが、一方で有理絡み目には 2 本橋絡み目としての視点があり、極めて幾何学的な対象でもある。特に、補空間の双曲構造や結び目群を通しての 2 本橋絡み目の研究については、作間誠による研究をはじめ、数多くの結果がある ([4, 6, 82, 90] 等を参照)。代数的・組合せ論的側面と幾何学的側面からの研究および成果や手法がどのように結びついているのかを知ることが重要な課題である。これに関しては Bonahon と Siebenmann [6] がよい手引きになるであろう (それに加えて日本語による論説 [89] も概要の理解の助けになるであろう)。



## Appendix C. Tait のフライブ定理について

この付録は、Tait [101] によって予想され、Menasco と Thistlethwaite [70] によって証明された Tait のフライブ定理を簡単に説明する。Tait 予想については [75; 第 11 章] に詳しい説明があるので参照して欲しい。最後に、Tait のフライブ定理の応用としてその有理タングル版を導く。その結果は Kauffman と Lambropoulou [52] により導入されたパンケーキフリップを用いて示される。

### ● C-1 : リジッド頂点付き空間グラフ

$\mathbb{R}^3$  内の単純曲線とは、 $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれたコンパクトで連結な 1 次元多様体、すなわち、閉区間  $[0, 1]$  か単位円周  $S^1$  に同相であるような部分集合のことをいう。 $\mathbb{R}^3$  内の有限個の点からなる集合  $V(\mathbf{G})$  と有限個の単純曲線からなる集合  $E(\mathbf{G})$  との組  $\mathbf{G} = (V(\mathbf{G}), E(\mathbf{G}))$  が次の条件を満たすとき、**空間グラフ** (*spatial graph*) と呼ばれる。

(SG1)  $E \in E(\mathbf{G})$  が  $[0, 1]$  に同相な場合、 $E \cap V(\mathbf{G}) = \partial E$  である (ここで、 $\partial E$  は  $E$  の端点からなる集合である)。

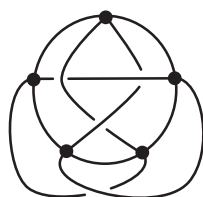
(SG2)  $E \in E(\mathbf{G})$  が  $S^1$  に同相な場合、 $E \cap V(\mathbf{G})$  は 1 点集合である。

$V(\mathbf{G}), E(\mathbf{G})$  の元をそれぞれ空間グラフ  $\mathbf{G}$  の**頂点**、**辺**という。(SG2) を満たす  $\mathbf{G}$  の辺を**ループ**という。絡み目やタングルのときと同様に、 $\mathbf{G}$  の各辺は有限個の折れ線からできていると考える。

$$|\mathbf{G}| := V(\mathbf{G}) \cup \left( \bigcup_{E \in E(\mathbf{G})} E \right)$$

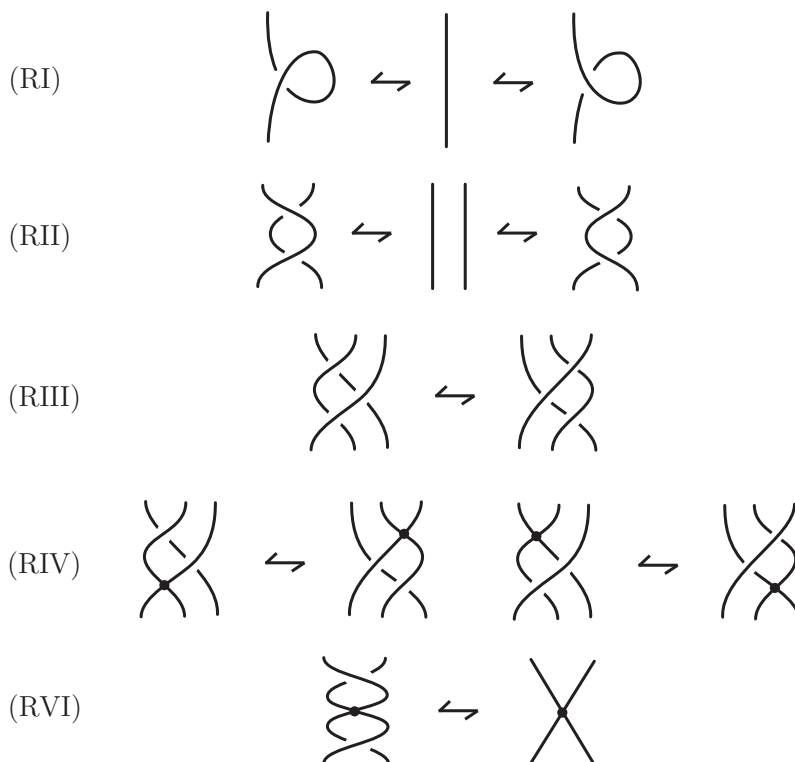
とおく。各  $v \in V(\mathbf{G})$  に対して、十分小さく  $\varepsilon > 0$  をとると、 $v$  の  $\varepsilon$ -近傍  $U(v; \varepsilon)$  内にはループおよび他の頂点が含まれないようにできる。すると、 $|\mathbf{G}| \cap U(v; \varepsilon)$  は  $E(\mathbf{G})$  のいくつかの「断片」からなる。その「断片」の個数を  $v$  の**価数** (*valency*) といい、 $d(v)$  で表わす。 $k \in \mathbb{N}$  とする。任意の  $v \in V(\mathbf{G})$  に対して  $d(v) = k$  となる空間グラフ  $\mathbf{G}$  は  $k$  **価**であると呼ばれる。

空間グラフ  $\mathbf{G}$  が**リジッド頂点付きグラフ** (*rigid-vertex graph*) であるとは、任意の  $v \in V(\mathbf{G})$  に対して、十分小さく  $\varepsilon > 0$  をとると、 $|\mathbf{G}| \cap U(v; \varepsilon)$  がある平面に含まれるときをいう [3]。これは、各頂点に平坦な小さい 2 次元円板が置かれた空間グラフで、各辺がそれらの 2 次元円板に接続しているものとも言える [49]。2 つのリジッド頂点付きグラフ  $\mathbf{G}, \mathbf{G}'$  が**リジッド頂点付き空間グラフとして同値** (*rigid vertex isotopic*) であるとは、頂点を含まない有限回の初等変形により、 $\mathbf{G}$  から  $\mathbf{G}'$  が得られるときをいう。



絡み目やタングルの場合と同様に、リジッド頂点付きグラフ  $G$  の図式を定義することができる。この図式においては絡み目図式の条件 (LD1), ..., (LD4) (第 1-2 節を参照) に加えて、 $G$  の任意の頂点  $v$  の射影  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\pi(x, y, z) = (y, z)$  による像の逆像は  $v$  であるという条件を加える必要がある。この図式において、各頂点の像を黒く塗られた小円板で表わす。

リジッド頂点付き 4 価グラフの図式に対する Reidemeister 移動は、(RI),(RII),(RIII) に加えて、次の (RIV),(RVI) からなる [49]。



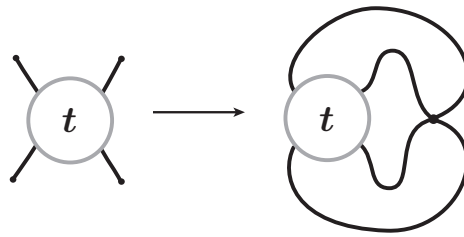
定理 1-3 と同様に、リジッド頂点付き 4 価空間グラフ  $G, G'$  がリジッド頂点付き空間グラフとして同値であるための必要十分条件は、 $G$  のある図式  $D$  から  $G'$  のある図式  $D'$  へ至る有限列であって、隣り合う図式同士が Reidemeister 移動 (RI), (RII), (RIII), (RIV), (RVI) もしくは頂点の近傍を巻き込まない  $S^2$  のイソトピーによって移り合うものが存在することである [49]。

### ● C-2 : 2-タングルの頂点閉包

Tait のフライプ予想は交代絡み目に対する予想であるが、Menasco と Thistlethwaite [70] は交代的な 4 価空間グラフへ拡張して Tait のフライプ予想が成り立つことを証明した。そこで、2-タングル (図式) の頂点閉包の概念を説明する。

#### 定義 C-1

$t$  を 2-タングル (図式) とする。このとき、 $t$  の 4 つの固定された端点を下図のように同一視して、1 つのリジッド頂点付き 4 価空間グラフ (図式)  $V(t)$  を作るができる。この空間グラフ  $V(t)$  を  $t$  の頂点閉包 (vertex closure) と呼ぶ。



$V(t)$  はまた、 $t$  から分子  $N(t)$  を作る際に付け加えた 2 つの辺の極大点と極小点を同一視することにより作ることができる。

2-タングル  $t, t'$  が同値であるための必要十分条件は、4 価空間グラフ  $V(t), V(t')$  がリジッド頂点付き空間グラフとして同値なことである。

リジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式  $D$  の交差点  $p$  が**無駄** (*nugatory*) であるとは、次の図のような状況にあるときをいう。



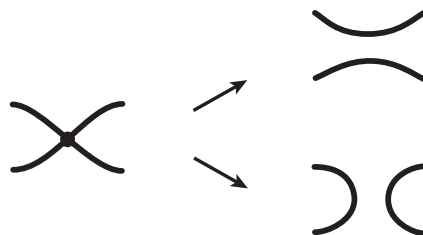
この条件は、 $D$  の交差点  $p$  を平滑化する (つまり、交差点  $p$  の近傍を  $[0]$  または  $[\infty]$  で置き換える) と、2 通りある平滑化のうちの少なくとも一方が連結でなくなることと同値である [52; p.231]。

無駄な交差点を持たないリジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式は**既約** (*reduced*) であると呼ばれる。任意に与えられた有理タングル図式  $T$  から、頂点閉包  $V(T')$  が既約であって、かつ、 $V(T')$  と  $V(T)$  がリジッド頂点付き空間グラフとして同値となる有理タングル図式  $T'$  を作ることができる [96; p.229]。その方法は [51; p.371-374] に書かれている。

### ● C-3 : Tait のフライブ定理とは

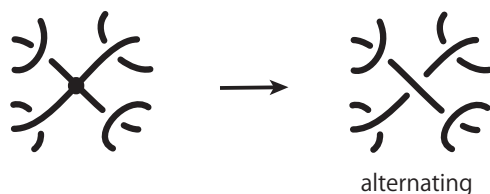
Tait のフライブ定理を記述するためには、リジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式に対する交代的、素の概念が必要なので、順に説明する。

リジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式  $D$  の各頂点において、その近傍を次図のどちらかで置き換えると絡み目図式が得られる。



各頂点での置き換えの選び方は 2 通りあるから、 $D$  の頂点数が  $k$  であるときには、 $2^k$  通りの絡み目図式が得られる。これらの絡み目図式のそれぞれを  $D$  の**頂点を平滑化**することによ

り得られる絡み目図式と呼ぶ。これらのすべてが交代的であるとき、 $D$  は**交代的** (*alternating*) であると呼ばれる [91; Definition 3]。  $D$  が交代的であるための必要十分条件は、 $D$  の各頂点において、その近傍を正もしくは負の交差点で適当に置き換えることにより交代的な絡み目図式が得られることである (下図参照)。



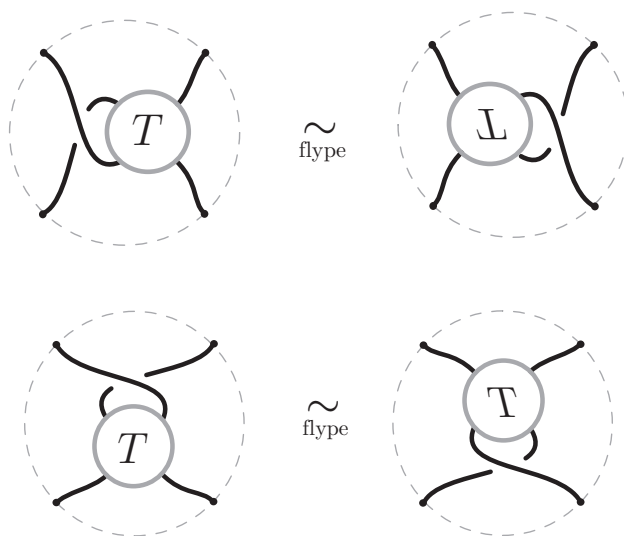
$S^3$  内の絡み目  $L$  が**素** (*prime*) であるとは次の 2 条件が満たされるときをいう [77; 1.8]。

- (i) (非分離性)  $S^3$  内に  $L$  の成分を分離する 2 次元球面は存在しない。
- (ii) (局所自明性)  $L$  と 2 点で横断的に交わる任意の 2 次元球面  $S$  に対して、 $\partial B = S$  かつ  $(B, B \cap L)$  が自明な 1-タングルとなる 3 次元球体  $B$  が存在する。

任意の有理絡み目は素である [2; p.67]。

$S^2$  内の絡み目図式  $D$  が**素** (*prime*) であるとは、連結であって、 $D$  と 2 点で横断的に交わる  $S^2$  内の任意の単純閉曲線  $C$  に対して、 $\partial B = C$  かつ  $(B, B \cap D)$  が自明な 1-タングル図式となる 2 次元円板  $B$  が存在するときをいう [85; p.193]。リジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式  $D$  が**素** であるとは、 $D$  の頂点を平滑化することにより得られるすべての絡み目図式が素であるときをいう [91; Definition 3]。

リジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式に対するフライプも 2-タングル図式に対するフライプと同様に定義される。



但し、 $T$  は内部に 4 価なリジッド頂点を許した 2-タングル図式である。

**定理 C-2 (Menasco and Thistlethwaite (Tait のフライプ定理))**

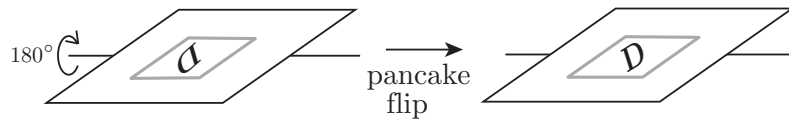
$D, D'$  をリジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式で、既約、交代的、素であるとする。 $D$  と  $D'$  がリジッド頂点付き空間グラフとして同値ならば、 $D$  から  $D'$  へ至るリジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式の有限列であって、隣り合う図式がフライプで移り合うかまたは  $S^2$  上のイソトピーで移り合うものが存在する。□

上の定理の主張は [70; p.117, l.4-7], [100; p.333, l.24-26], [91; Theorem 8] にある。

● C-4 : パンケーキフリップ

Kauffman と Lambropoulou [52] により導入された 2-タングル図式のパンケーキフリップを用いることで、Tait のフライプ定理の応用として、その有理タングル版が導かれる。これを示そう。

$D$  をリジッド頂点付き 4 価空間グラフ図式とする。 $D$  のパンケーキフリップ (*pancake flip*) とは、 $D$  が乗っている平面を、その平面上のある直線を軸として、空間において  $180^\circ$  回転させたときの  $D$  の像のことをいう。



**命題 C-3 (Kauffman and Lambropoulou [52; Proposition 4])**

$T, T'$  を 2 つの交代的な有理タングル図式であって、 $V(T), V(T')$  が既約であるものとする。このとき、 $T \sim T'$  ならば  $T'$  は  $T$  から有理フライプと  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  上のイソトピーを有限回施すことにより得られる。

(証明)

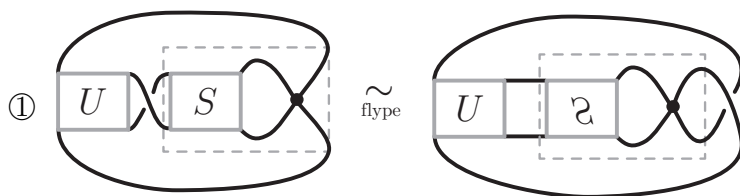
$T, T'$  をイソトープな 2 つの交代的な有理タングル図式であって、 $V(T), V(T')$  が既約であるものとする。 $V(T), V(T')$  は交代的かつ既約であり、 $T, T'$  はイソトープなので、 $V(T)$  と  $V(T')$  はリジッド頂点付き 4 価空間グラフとして同値である。また、任意の有理絡み目が素であることから、 $V(T), V(T')$  は共に素である。したがって、定理 C-2 より、 $V(T)$  と  $V(T')$  の間にはフライプまたは  $S^2$  のイソトピーによって関連づけられた 4 価空間グラフ図式の有限列  $V(T) = D_0, D_1, \dots, D_k = V(T')$  が存在する。このとき、有理タングル図式の有限列  $T = T_0, T_1, \dots, T_k$  であって、 $V(T_i)$  は  $D_i$  とリジッド頂点付き空間グラフ図式として同値 (すなわち、頂点の近傍は一つの固まりとして頂点の近傍に写すことのみを許した  $S^2$  のイソトピーによって移り合う) であり、 $T_i$  は  $T_{i-1}$  から有限回のフライプまたは  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを施して得られるものが存在することを示す。これが示されれば、特に  $V(T_k)$  は  $D_k = V(T')$  とリジッド頂点付き空間グラフ図式として同値なので、 $V(T_k)$  と  $V(T')$  は頂点の近傍は一つの固まりとして頂点の近傍に写すことのみを許した  $S^2$  のイソトピーによって移り

合うので、 $V(T_k)$  から頂点の近傍を除いた部分と  $V(T')$  から頂点の近傍を除いた部分が境界を固定する  $S^2 - (\text{頂点の近傍})$  のイソトピーで移り合うことになる。したがって、 $T_k$  と  $T'$  は  $\partial\mathbb{D}^2$  を固定する  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーによって移り合う、つまり、 $T_k$  と  $T'$  はタングル図式として同値となる。よって、 $V(T')$  が  $V(T)$  に 1 回だけある部分 2-タングルにフライプを施して得られているとき、 $T'$  が  $T$  からフライプと頂点の近傍は一つの固まりとして頂点の近傍に写すことのみを許した  $S^2$  のイソトピーを有限回施して得られることを示せばよい。

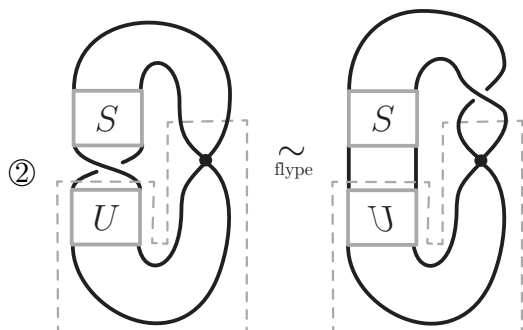
$T$  から  $V(T)$  を作る際に新たに生じた頂点を  $p$  とおく。

$p$  がフライプを施す部分 2-タングルの外側にあるとき、そのフライプは  $T$  におけるフライプである。したがって、 $T'$  は  $T$  から 1 回のフライプを施して得られる。

$p$  がフライプを施す部分 2-タングルの内側にあるとき、次の状況が考えられる。

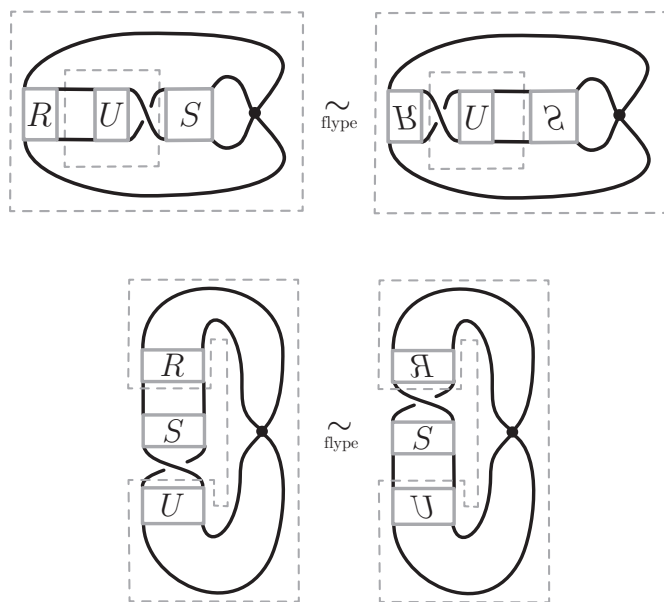


①' ①の左側の図における  $U$  と  $S$  の間の交差点の上下を入れ替えて、右側の図における右端の交差点の上下を入れ替えたもの。

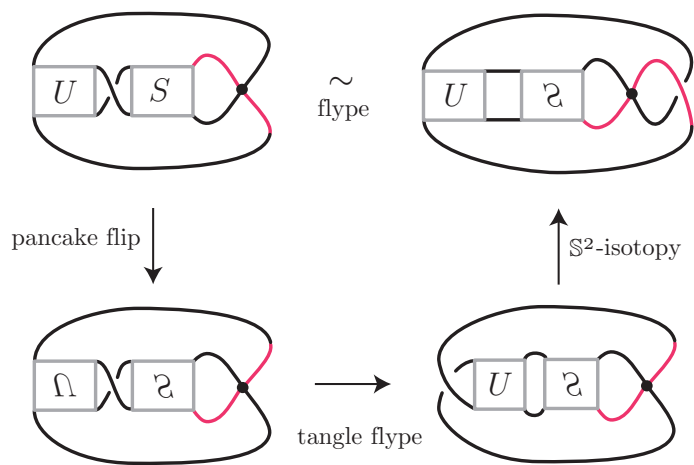


②' ②の左側の図における  $U$  と  $S$  の間の交差点の上下を入れ替えて、右側の図における右上の交差点の上下を入れ替えたもの。

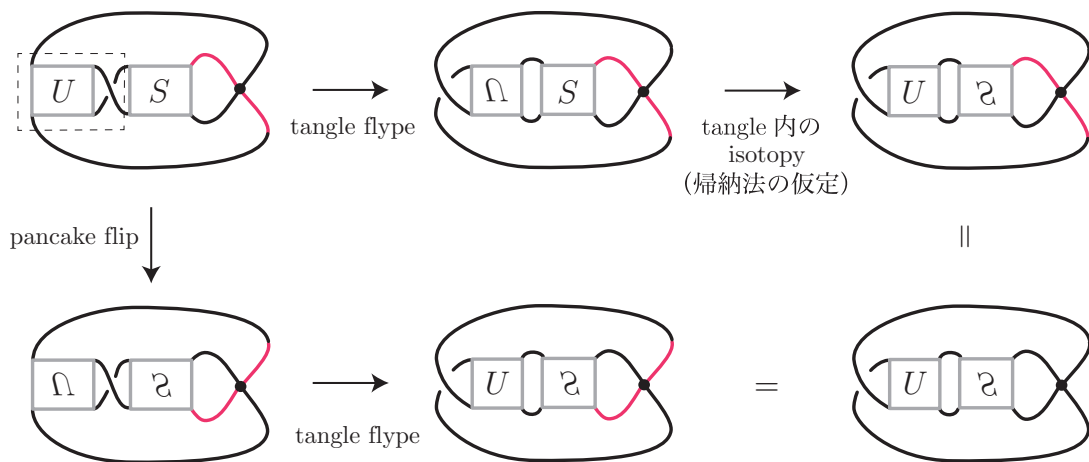
上記のほか、次図のような状況も考えられるが、そのときには①, ①', ②, ②' を施してから頂点を含まない残りの部分 2-タングルでフライプを行えばよいので、頂点が巻き込まれるフライプは ①, ①', ②, ②' のいずれかであると考えて差し支えない。



①のフライプはパンケーキフリップと頂点を巻き込まないフライプ(すなわち、タングルフライプ)と  $S^2$  上のイソトピーの合成により実現される。(次図参照。フライプなどの移動で頂点に接続している辺の移動が追跡しやすいように、一方の辺に色をつけてある。)

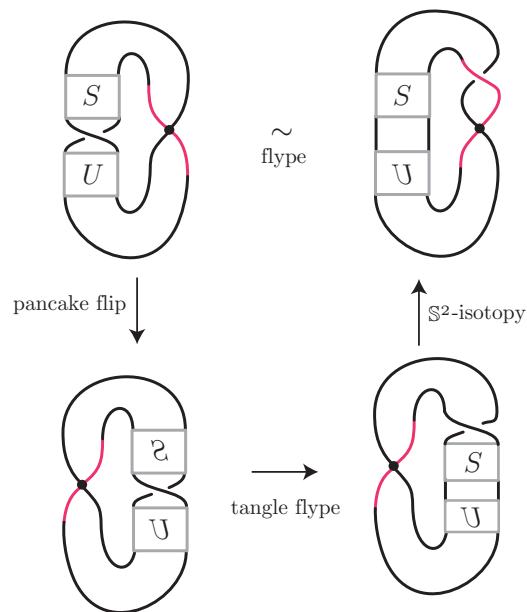


左縦のパンケーキフリップはタングル図式  $U + [+1] + S$  に対して水平フリップを行ってから頂点閉包を行ったものに等しい。補題 3-9(1) により、有理タングル図式  $U^{\text{hflip}}, S^{\text{hflip}}$  はそれぞれもとのタングル図式  $U, S$  に 2-タングルとして同値である。したがって、交点数に関する帰納法で命題を証明することにすれば、 $U$  はタングル図式内のフライプと境界を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して  $U^{\text{hflip}}$  に移り、 $S$  はタングル図式内のフライプと境界を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して  $S^{\text{hflip}}$  に移る。よって、パンケーキフリップ(左側の縦の矢印)を行ってから、タングルフライプ(下側の横の矢印)を行った結果は、タングル図式  $U + [+1] + S$  内のフライプと  $\partial\mathbb{D}^2$  を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して得ることができる(次図参照)。

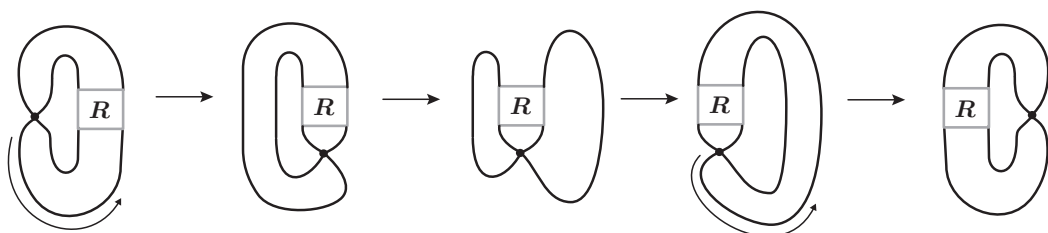


①' についても上の議論において  $U$  と  $S$  の間の交差の上下を入れ換えれば、頂点を巻き込むフライプを行ったときには、タンクル図式  $U + [+1] + S$  内のフライプと  $\partial\mathbb{D}^2$  を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施してから、 $S^2$ -イソトピーを施すことによって実現されることがわかる。

②のフライプはパンケーキフリップと頂点を巻き込まないフライプと  $S^2$  上のイソトピーの合成により実現される。(次図参照。フライプなどの移動で頂点に接続している辺の移動が追跡しやすいように、一方の辺に色をつけてある。)



右側の縦の  $S^2$ -イソトピーは次の図のような変形を行えば実現できる。





ここで、パンケーキフリップはタングル図式  $S * [+1] * U$  に対して垂直フリップを行ってから頂点閉包を行ったものに等しい。補題 3-9(2) により、有理タングル図式  $S^{\text{flip}}, U^{\text{flip}}$  はそれぞれもとのタングル図式  $S, U$  に 2-タングルとして同値である。 $S, U$  の交点数は  $S * [+1] * U$  の交点数よりも少ないから、帰納法の仮定より、 $S$  はタングル図式内のフライプと境界を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して  $S^{\text{flip}}$  に移り、 $U$  はタングル図式内のフライプと境界を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して  $U^{\text{flip}}$  に移る。よって、パンケーキフリップ (左側の縦の矢印) を行ってから、タングルフライプ (下側の横の矢印) を行った結果は、タングル図式  $S * [+1] * U$  内のフライプと  $\partial\mathbb{D}^2$  を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施して得ることができる。

②' についても上の議論において  $U$  と  $S$  の間の交差の上下を入れ換えれば、頂点を巻き込むフライプを行ったときには、タングル図式  $U + [+1] + S$  内のフライプと  $\partial\mathbb{D}^2$  を動かさない  $\mathbb{D}^2$  のイソトピーを有限回施してから、 $\mathbb{S}^2$ -イソトピーを施すことによって実現されることがわかる。 □

## 参考文献

- [1] Z. Abel, “Tangles for knots and links”, 2009, Summer Tutorial 2009, Harvard Mathematics Department, taught by Tanya Koblyatskaya and Ethan Street, [http://zacharyabel.com/papers/Tangles-Knots\\_A09.pdf](http://zacharyabel.com/papers/Tangles-Knots_A09.pdf).
- [2] C.C. Adams, “The knot book”, W.H. Freeman & Co., New York, 1994. (金信泰造・訳『結び目の数学—結び目理論への初等的入門』培風館, 1998.)
- [3] C. Adams, R.Dorman, K.Foley, J.Kravis and S.Payne, “Alternating graphs”, *J. Comb. Theory Series B*, **77** (1999), 96–120.
- [4] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, “Punctured torus groups and 2-bridge knot groups. I”, *Lecture Notes in Math.* **1909**, Springer, Berlin, 2007.
- [5] C. Bankwitz and H.G. Schumann, “Über Viergeflechte”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **10** (1934), 263–284.
- [6] F. Bonahon and L.C. Siebenmann, “New geometric splittings of classical knots and the classification and symmetries of arborescent knots”, June 12, 2010.
- [7] D. Buck and K. Ishihara, “Coherent band pathways between knots and links”, *J. Knot Theory Ramif.* **24** (2015), 1550006 (21pages).
- [8] D. Buck and C.V. Marcotte, “Classification of tangle solutions for integerases, a protein family that changes DNA topology”, *J. Knot Theory Ramif.* **16** (2007), 969–995.
- [9] G. Burde and H. Zieschang, “Knots”, de Gruyter 1985.
- [10] J.H. Conway, “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”, in *Proceedings of the conference on computational problems in abstract algebra held at Oxford 1967*, (J. Leech ed.), Pergamon Press, 1970, 329–358.
- [11] P. Cromwell, “Knots and links”, Cambridge University Press, 2004.
- [12] R.H. Crowell and R.H. Fox, “Introduction to knot theory”, Ginn and Company, New York, 1963 (寺坂英孝・野口広・訳『結び目理論入門』(現代科学選書), 岩波書店, 1967).
- [13] M. K. Dabkowski and J.H. Przytycki, “Burnside obstructions to the Montesinos-Nakanishi 3-move conjecture”, *Geometry & Topology* **6** (2002), 355–360.
- [14] I.K. Darcy, “Biological distances on DNA knots and links: Application to XER recombination”, *J. Knot Theory Ramif.* **10** (2001), 269–294.
- [15] I.K. Darcy, “Solving unoriented tangle equations involving 4-plats”, *J. Knot Theory Ramif.* **14** (2005), 993–1005.
- [16] I.K. Darcy, “Solving oriented tangle equations involving 4-plats”, *J. Knot Theory Ramif.* **14** (2005), 1007–1027.
- [17] I.K. Darcy and D.W. Sumners, “A strand passage metric for topoisomerase action”, in “Knots '96 (Tokyo)”, 267–278, World Scientific, River Edge, NJ, 1997.
- [18] I.K. Darcy and D.W. Sumners, “Rational tangle distances on knots and links”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **128** (2000), 267–278.
- [19] I.K. Darcy, K.Ishikawa, R.K. Medikonduri and K. Shimokawa, “Rational tangle surgery and Xer recombination on catenanes”, *Algebraic & Geometric Topology* **12** (2012), 1183–1210.
- [20] T. Davis, “Conway’s rational tangles”, 2013, [www.geometer.org/mathcircles/tangle.pdf](http://www.geometer.org/mathcircles/tangle.pdf).
- [21] C. Ernst, A. Montemayor and A. Stasiak, “Nullification of small knots”, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* **191** (2011), 66–77.
- [22] C. Ernst and D.W. Sumners, “A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **108** (1990), 489–515.
- [23] C. Ernst and D.W. Sumners, “Solving tangle equations arising in a DNA recombination model”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **126** (1999), 23–36.
- [24] E. Flapan, “When topology meets chemistry”, Cambridge University Press, 2000.

- [25] R.H. Fox, “A quick trip through knot theory”, in ‘Topology of manifolds’, edited by M.K. Fort Jr., Prentice-Hall, U.S.A., 1962.
- [26] D.J. Garity, “Unknotting numbers are not realized in minimal projections for a class of rational knots”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, Suppl.* 2 Vol. XXXII (2001), 59–72.
- [27] J.R. Goldman and L.H. Kauffman, “Knots, tangles, and electrical networks”, *Adv. Appl. Math.* **14** (1993), 267–306.
- [28] J.R. Goldman and L.H. Kauffman, “Rational tangles”, *Adv. Appl. Math.* **18** (1997), 300–332.
- [29] R. Hartley, “Invertible amphicheiral knots”, *Math. Ann.* **252** (1980), 103–109.
- [30] R. Hartley and A. Kawachi, “Polynomials of amphicheiral knots”, *Math. Ann.* **243** (1979), 63–70.
- [31] M. Hirasawa and K. Shimokawa, “Dehn surgeries on strongly invertible knots which yield lens spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 3445–3451.
- [32] 伏見謙, “DNA の幾何学”, *数学セミナー* 1986 年 11 月号, 60–66.
- [33] K. Ishihara and D. Buck, “Nullification distance between links with small crossing numbers”, *結び目の数学 IV 報告集*, 2011, 182–188.
- [34] M. Ishiwata, “5-move equivalence for links up to 9-crossings”, a slide, 研究集会「トポロジーとコンピュータ 2005」, 大阪産業大学梅田サテライト, 2005/11/28, <http://pal.las.osaka-sandai.ac.jp/~math/TopComp2005/Slides/ishiwata.pdf>.
- [35] 岩堀長慶 『2 次行列の世界』 (数学入門シリーズ 4), 岩波書店, 1983.
- [36] S. Jablan, L.H. Kauffman and P. Lopes, “On the maximum number of colors for links”, *J. Knot Theory Ramif.* **22** (2013), 1350013 (19 pages).
- [37] S. Jablan, L.H. Kauffman and P. Lopes, “On the maximum number of colors for links”, arXiv1205.1467v1.
- [38] N.J. Jackson, “Knot classification and enumeration”, MSc dissertation, University of Warwick, 1997.
- [39] V.F.R. Jones, “A polynomial invariant for links via von Neumann algebras”, *Bull. of A.M.S.* **129** (1985), 103–112.
- [40] G.L. Jones, “Modeling knotted proteins with tangles”, Ph.D. thesis, University of Iowa 2013. <http://ir.uiowa.edu/etd/4862>.
- [41] T. Kadokami, “The link-symmetric groups of 2-bridge links”, *J. Knot Theory Ramif.* **20** (2011), 1129–1144.
- [42] T. Kanenobu, “Tangle surgeries on the double of a tangle and link polynomials”, *Kobe J. Math.* **19** (2002), 1–19.
- [43] 金信泰造 「結び目の連立方程式—分子生物学への結び目の数学の応用—」, *数学のたのしみ* No.5, 日本評論社, 1998, 56–71.
- [44] T. Kanenobu and Y. Miyazawa, “2-bridge link projections”, *Kobe J. Math.* **9** (1992), 171–182.
- [45] T. Kanenobu and H. Murakami, “Two-bridge knots with unknotting number one”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), 499–502.
- [46] T. Kanenobu, H. Saito and S. Satoh, “Tangles with up to seven crossings”, *Interdisciplinary Information Sciences* **9** (2003), 127–140.
- [47] O. Karpenkov, “Continued fractions and Generalizations. Lectures and exercises. (Summer 2011)”, <http://www.geometrie.tugraz.at/karpenkov/cf2011s.html>.
- [48] L.H. Kauffman, “State models and the Jones polynomial”, *Topology* **26** (1987), 395–407.
- [49] L.H. Kauffman, “Invariants of graphs in three-space”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989), 697–710.

- [50] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “Classifying and applying rational knots and rational tangles”, in: *Physical knots: knotting, linking, and folding geometric objects in  $\mathbb{R}^3$*  (Las Vegas, NV, 2001), 223–259, *Contemp. Math.*, **304**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [51] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “On the classification of rational knots”, *Enseig. Math.* **49** (2003), 357–410.
- [52] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “On the classification of rational tangles”, *Adv. Appl. Math.* **33** (2004), 199–237.
- [53] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “Tangles, rational knots and DNA”, *Lecture Notes in Math.* **1973**, 99–138, Springer, Berlin, 2009.
- [54] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, “Hard unknots and collapsing tangles”, in: ‘Introductory lectures on knot theory’, 187247, Ser. *Knots Everything*, 46, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.
- [55] A. Kawachi, “The invertibility problem on amphicheiral excellent knots”, *Proc. Japan Acad.* **55** Ser. A (1979), 399–402.
- [56] 河内明夫, “講義 8 : グラフの結び目理論”, <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/kawauchi/InternetLecture/08.html>.
- [57] 河内明夫, “結び目理論の科学への応用～プリオン分子モデルとところのモデルを中心として” *数学通信*第 14 巻第 4 号, 2009 年.
- [58] 河内明夫 『レクチャー結び目理論』(共立叢書 現代数学の潮流), 共立出版, 2007.
- [59] 河内明夫・編著 『結び目理論』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.
- [60] 木村俊一 『連分数のふしぎ』(ブルーボックス), 講談社, 2012.
- [61] S. Kinoshita, “On Wendt’s theorem of knots”, *Osaka Math. J.* **9** (1957), 61–66.
- [62] R. Kirby (ed.), “Problems in low-dimensional topology”, Berkeley, 1996.
- [63] 小林昭七 『なっとくするオイラーとフェルマー』講談社, 2003.
- [64] P. Kohn, “Two-bridge links with unknotting number one”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), 1135–1147.
- [65] D.A. Krebes, “An obstruction to embedding 4-tangles in links”, *J. Knot Theory Ramif.* **8** (1999), 321–352.
- [66] W.B.R. Lickorish, “Prime knots and tangles”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 321–332.
- [67] W.B.R. Lickorish, “An introduction to knot theory”, *Graduate Texts in Math.* **175**, Springer, 1997.
- [68] R. Lopes, “The Alexander polynomial, coloring, and determinants of knots”, preprint.
- [69] M. Medwid, “Generalized  $p$ -colorings of knots”, Master thesis, May 2014.
- [70] W. Menasco and M. Thistlethwaite, “The classification of alternating links”, *Annals of Mathematics* **138** (1993), 113–171.
- [71] J. M. Montesinos, “Lectures on 3-fold simple coverings and 3-manifolds”, in: “Combinatorial Methods in Topology and Algebraic Geometry”, *Contemporary Math.* **44**, edited by J.H. Harper and R. Mandelbaum, A.M.S., 1985, 157–177.
- [72] H. Moon, “Calculating knot distances and solving tangle equations involving Montesinos links”, Ph.D. thesis, University of Iowa 2010. <http://ir.uiowa.edu/etd/859>.
- [73] 村上斉 『新版 結び目のはなし』遊星社(発行), 1990(初版)/2015(新版).
- [74] 村上順 『結び目と量子群』(すうがくの風景 3), 朝倉書店, 2000.
- [75] 村杉邦男 『結び目理論とその応用』日本評論社, 1993.
- [76] K. Murasugi, “Jones polynomial and classical conjectures in knot theory”, *Topology* **26** (1987), 187–194.
- [77] Y. Nakanishi, “Links and tangles”, Thesis, Kobe University, 1983.

- [78] 中西康剛, “結び目解消操作”, 数理科学 1990 年 12 月号, 特集・結び目・絡み目-新しい世界をひらく理論と応用, 32–37.
- [79] 中西康剛, 「Unknotting numbers and knot diagrams」, 箱根セミナー記録 9 6 (1996), 7–11 (c.f. “Unknotting number and knot diagram”, Revista Math. Univ. Complut. Madrid **9** (1996), 359–366).
- [80] 中西康剛, 「結び目をほどく」, 数学のたのしみ No.5, 日本評論社, 1998, 30–41.
- [81] O. Nanyes, “An elementary proof that the Borromean rings are non-splittable”, A.M.S. Monthly (1993), 786–789.
- [82] T. Ohtsuki, R. Reily and M. Sakuma, “Epimorphisms between 2-bridge link groups”, Geom. Topol. Monogr. **14** (2008), 417–450.
- [83] J.H. Przytycki, “ $t_k$ -moves on links”, in “Braids”, Contemporary Math. **78**, edited by J.S. Birman and A. Libgober, A.M.S., 1988, 615–656.
- [84] J.H. Przytycki, “Three talks in Trieste, Fox coloring, Burnside groups, skein modules, Khovanov categorification of skein modules”, 11–29 May, 2009.
- [85] J.H. Przytycki and K. Taniyama, “Almost positive links have negative signature”, J. Knot Theory Ramif. **19** (2010), 187–289.
- [86] K. Reidemeister, “Elemntare Begründung der Knotentheorie”, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 24–32.
- [87] K. Reidemeister, “Knot theory”, Chelsea, New York, 1948 (original German version “Knotentheorie” published by Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. 1, Springer, Berlin, 1932).
- [88] 佐藤健太郎, “Lefty in the Right~分子の世界の右と左”, <http://www.org-chem.org/youki/chirality/L-R.html>.
- [89] 作間誠, “結び目の対称性”, 数理科学 1990 年 12 月号, 特集・結び目・絡み目-新しい世界をひらく理論と応用, 19–25.
- [90] M. Sakuma and J. Weeks, “Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements”, Japan. J. Math. (N.S.) **21** (1995), 393–439.
- [91] J. Sawollek, “Tait’s flyping conjecture for 4-regular graphs”, J. Comb. Theory B **95** (2005), 318–332.
- [92] W. Scharlau and H. Opolka, “From Fermat to Minkowski”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1980(日本語訳: 志賀弘典『フェルマーの系譜』日本評論社, 1994.)
- [93] H. Schubert, “Knoten mit zwei Brüchen”, Math. Z. **65** (1956), 133–170.
- [94] 下川航也, M. Vazquez, “DNA と結び目理論”, 数学 **63** (2011), 237–242.
- [95] D. Sola, “Nullification number and flyping conjecture”, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **86** (1991), 1–16.
- [96] A. Stoimenow, “Vassiliev invariants and rational knots of unkotting unumber one”, Topology **42** (2003), 227–241.
- [97] A. Stoimenow, “Square numbers, spanning trees and invariants of achiral knots”, Comm. Anal. Geom. **13** (2005), 591–631.
- [98] A. Stoimenow, “Generating functions, Fibonacci numbers and rational knots”, arXiv:math/0210174v1, [math.GT], 11 Oct. 2002.
- [99] D.W. Sumners, “Untangling DNA”, Math. Intelligencer **12** (1990), 71–80.
- [100] C. Sundberg and M. Thistlethwaite, “The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles”, Pacific J. Math. **182** (1998), 329–358.
- [101] P.G. Tait, “On knots I”, Trans. Roy. Soc. Edinburgh **28** (1876–7), 145–190.
- [102] 高木貞治『初等整数論講義 第2版』共立出版, 1931(初版)/1971(第2版).

- [103] J. Tanton, “Understanding rational tangles—the mathematical behind rational tangles and the rational tangle dance (plus new dance!)”, <http://www.mathteacherscircle.org/assets/session-materials/JTantonRationalTangles.pdf>.
- [104] M. Thistlethwaite, “A spanning tree expansion for the Jones polynomial”, *Topology* **26** (1987), 297–309.
- [105] I. Torisu, “The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 1565–1671.
- [106] Y. Uchida, “Two-bridge knots with generalized unknotting number one”, in: “Knots 96”, edited by Shin’ichi Suzuki, 1997, World Scientific, 109–113.
- [107] 和久井道久, “7 交点以下の素な 2-タングルの Krebes 不変量の完全性—Kanenobu-Saito-Sato の結果との比較—”, January 10, 2017, January 2, 2023 revised.
- [108] “トポロジーデザインニング—新しい幾何学からはじめる物質・材料設計—”, NTS, 2009.
- [109] 戦略的創造研究推進事業 ERATO, 研究成果集 “八島超構造らせん高分子プロジェクト”, 第 2 章 基本理念, [http://www.jst.go.jp/erato/project/ycr\\_P/ycr\\_G/2.pdf](http://www.jst.go.jp/erato/project/ycr_P/ycr_G/2.pdf).
- [110] <https://ja.wikipedia.org/wiki/キラリティー>.

# 索引

<b>あ行</b>	(空間グラフの) の頂点	145
アカイラル	(空間グラフの) 辺	145
アキラル	(空間グラフの) ループ	145
Alexander-Conway 多項式	偶連分数	25
アンビエント・イソトピック	Krebes 数	85
折れ線絡み目	Krebes 不変量	81
	形式商	81
<b>か行</b>	交代的	44, 148
回文タングル	Conway の有理タングル分類定理	66
カイラル		
Kauffman ブラケット多項式		
価数	<b>さ行</b>	
絡み目	算術同値	106
(絡み目が) 内側にある	三葉結び目	12, 118
絡み目図式	自明なタングル	16
(絡み目の) 鏡像	Schubert の有理絡み目の分類定理	108
(絡み目の) 行列式	循環連分数	138
(絡み目の) 成分	純循環	138
絡み目の同値	Jones 多項式	121
基質タングル	初等変形	12
基質 DNA	垂直鏡映	58
逆方向反復配列組み換え	垂直タングル	30
共役 (2 次無理数)	垂直フリップ	36
キラル	水平フリップ	36
奇連分数	スクエア・ダンス	7
空間グラフ	(図式の) 平滑化	147
(空間グラフ図式が) 既約	ステイト	68

(ステイトが)モノサイクリック	76	Tait のフライプ定理	149
整数彩色	57	同方向反復配列組み換え	117
整数タングル	30		
生成絡み目	110	<b>な行</b>	
生成物	110	nullification 距離	117
正則イソトピー不変量	69	2 次無理数	139
正則な位置	16	<b>は行</b>	
正タングル	44	8 の字結び目	118
正の交点	120	パンケーキフリップ	149
素な絡み目	148	$p$ 彩色可能	132, 133
素な絡み目図式	148	左手系三葉結び目	122
素な空間グラフ図式	148	負タングル	44
素なタングル	88	負の交点	120
<b>た行</b>		部分タングル	34
対角和規則	57	フライプ	35, 148
タングル	15	フリップ補題	37
タングル距離	114	分子ステイト	123
タングル図式	16	分子閉包	71
(タングルの)鏡像	32	分母ステイト	123
(タングルの)交代図式	44	分母閉包	71
(タングルの)正準形	44	平面のイソトピー	14
(タングルの)切片	34	ホップ絡み目	11
(タングルの)ダブル	95	ボロミアン環	11
(タングルの)反転	32, 39	<b>ま行</b>	
部分弧	57	向きづけられた絡み目	12
(タングルの)連分数形式	40	向きづけられた絡み目図式	13
頂点閉包	146	無限連分数展開	136
ツイスト形式	32	結び目	11
底ツイスト	104	結び目解消操作	115



無駄な交差点	147	ライジング数	120
<b>や行</b>		Reidemeister 移動	14, 146
有理絡み目	99	リジッド頂点付きグラフ	145
(有理絡み目の) Conway の標準形	99	連分数	18
(有理絡み目の) Schubert の標準形	135	連分数展開	19, 136
有理タンゲル	30	連分数の回文定理	103
有理タンゲルの標準形	38	(連分数の) 正準形	27
有理的フライプ	36	連分数表示	19
<b>ら行</b>		(連分数表示の) 符号逆転数	45