

# 正規化された山田多項式から得られる $\theta$ -curve に対する Vassiliev 不変量 [改訂版]

12M6002 吉田 英生 (表現論研究室)

2014年3月12日

## 序文

この論文は、2014年2月に提出した修士論文 [13] に Appendix(第3章)として、正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve に対する位数3以下の Vassiliev 不変量に関する結果を付け加えたものである。

空間グラフ理論においては、3次元空間内に2つの空間グラフが与えられたとき、それらが空間内での連続変形、すなわち、ambient isotopy による変形で、互いに移りあうかどうかを判定することは中心的な問題である。それを解決するために有効な方法は空間グラフに対する不変量を用いることである。空間グラフの不変量とは、空間グラフに数値または多項式を対応させる写像であって、同値な空間グラフに対しては同じ値をとるものをいう。

この論文で扱う山田多項式 [11] は山田修司が1989年に定義した多項式型の不変量である。山田多項式は ambient isotopy 不変量ではなく、もう少し制限の強い同値関係の下での不変量、具体的には regular isotopy 不変量である。山田多項式を ambient isotopy 不変量にするために正規化する方法はいくつか知られている。山田 [11] は  $\theta$ -グラフに対し、半谷 [3] は完全グラフ  $K_4$  に対して正規化の方法を与えている。2011年に石井 [5] は writhe の概念を導入することで、 $\theta$ -グラフに限らず、各頂点の次数が3で bridge(除去するとグラフ  $G$  の連結成分が増える  $G$  の辺) をもたないグラフに対し、山田多項式を ambient isotopy 不変量にする正規化の方法を与えた。 $\theta$ -グラフの場合には Huh と Jin [4] により正規化された山田多項式から Vassiliev 不変量の系列が得られ、一般の場合には石井により正規化された山田多項式から Vassiliev 不変量の系列が得られることが示されている。

Vassiliev 不変量 [10] とは、1990年に Vassiliev が円周  $S^1$  の特異な埋め込み全体の空間のコホモロジー群を用いて定義した、結び目に対する不変量である。その後、1993年に Birman と Lin [1] によって、Vassiliev が定義した不変量は組合せ的に再定義され、その再定義の方法はそのまま、絡み目の場合に拡張された。そして、1996年、Stanford [9] によって、Birman と Lin が再定義した Vassiliev 不変量は空間グラフの場合に拡張された。複素数に値をもつ位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量の全体は関数の和とスカラー倍に関して  $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間になるため、Vassiliev 不変量は扱いやすく、有用な不変量として数多くの研究結果が知られている。

この論文では、 $\theta$ -curve ( $\theta$ -グラフを3次元空間内に埋め込んだ空間グラフ) に対して、正規化された山田多項式から得られる Vassiliev 不変量について研究する。金信 [6] により、 $\theta$ -curve に対する位数2以下の Vassiliev 不変量については、定数関数とコンウェイ多項式の2次係数の1次結合で、位数3以下の Vassiliev 不変量については、定数関数とコンウェイ多項式の2次係数、3次係数とジョーンズ多項式の第3次導関数の1次結合で表現できることが知られている。これらの公式を用いて、正規化された山田多項式から得られる Vassiliev 不変量のうち、位数2以下のものをコンウェイ多項式の2次の係数を用いて計算するための公式と位数3以下のものをコンウェイ多項式の2次係数、3次係数とジョーンズ多項式の第3次導関数を用いて計算するための公式を導くことができる。それらの公式から正規化された山田多項式から得られる位数2以下の Vassiliev 不変量は、任意の  $\theta$ -curve  $T$  に対して0でない整数値をとり、さらに、それは5を法として、 $T$  の“二重化”から定まる3つの結び目に対するコンウェイ多項式の2次係数の和の-1倍であることが分かり、位数3以下の Vassiliev 不変量は、任意の  $\theta$ -curve  $T$  に対して偶数値をとり、さらに、それは11を法として、 $T$  の“二重化”から定まる絡み目の任意の2成分から成る sublink に対するコンウェイ多項式の3次係数の-1倍であることが分かる。これらの結果より、正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve に対する位数  $i$  以下の Vassiliev 不変量  $u_i$  は  $i$  が3より大きい場合でも整数値をとり、さらに、それは  $i(i+1)-1$  を法として、 $T$  の“二重化”から定まる絡み目 (または結び目) に対するコンウェイ多項式の  $i$  次係数 (の和) の-1倍であることが期待される。

この論文は次のように構成されている。第1章では、空間グラフの定義と不変量について説明する (第1.1節)。さらに、Vassiliev 不変量の定義と性質と例を述べ (第1.2節)、結び目に対する位数0, 1, 2の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間の次元と基底がどう与えられるのかを説明する (第1.3節)。二重点をもつ結び目に対して、その二重点の情報だけを含む簡単な図式 (chord diagram) を導入し (第1.4節)、結び目の chord diagram に対して、位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量のベクトル空間の基底となる結び目を考え、Vassiliev 不変量を計算する上で実用的な表である actuality table を導入する (第1.5節)。 $\theta$ -curve に対する Vassiliev 不変量を考察するために、結び目の actuality table を応用し、 $\theta$ -curve の actuality table を作成する。そして、金信が導いた公式について説明する (節1.6)。第2章では、山田多項式の定義と性質について説明し (第2.1節)、第2.2節と第2.3節と第2.4節で、各頂点の次数が3で bridge をもたないグラフに対する石井による正規化の方法を説明する。第2.5節では、 $\theta$ -curve に対して、正規化された山田多項式から得られる位数2以下の Vassiliev 不変量をコンウェイ多項式の2次係数を用いて計算するための公式を導き、その応用を述べる。第3章では、 $\theta$ -curve に対して、正規化された山田多項式から得られる位数3以下の Vassiliev 不変量をコンウェイ多項式の2次係数、3次係数とジョーンズ多項式の第3次導関数を用いて計算するための公式を導き、その応用を述べる。

第1章、第2章は修士論文と全く同じであり、第3章のみ新たに書き加えた。

# 目次

<b>1</b>	<b>Vassiliev 不変量</b>	<b>1</b>
1.1	spatial embedding と ambient isotopy . . . . .	1
1.2	Vassiliev 不変量の定義と性質 . . . . .	4
1.3	結び目に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量 . . . . .	7
1.4	Chord diagrams . . . . .	14
1.5	Basic knots and actuality table . . . . .	15
1.6	$\theta$ -curve に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量 . . . . .	18
<b>2</b>	<b>山田多項式</b>	<b>22</b>
2.1	山田多項式の定義と性質 . . . . .	22
2.2	グラフの writhe による山田多項式の補正 . . . . .	34
2.3	グラフの oriented cycle の集合 $\Gamma$ に対する writhe $wr_{\Gamma}$ . . . . .	38
2.4	$wr_{\Gamma}$ による山田多項式の正規化と Vassiliev 不変量 . . . . .	45
2.5	Main Results . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Appendix (<math>\theta</math>-curve に対する正規化された山田多項式と位数 3 以下の Vassiliev 不変量)</b>	<b>53</b>
3.1	ジョーンズ多項式 . . . . .	53
3.2	Additional Main Results . . . . .	53

# 1 Vassiliev 不変量

Vassiliev[10] は、1990 年に円周  $S^1$  の特異な埋め込み全体の空間を考え、その空間のコホモロジー群を用いることで、結び目の不変量全体の中の特別なクラスの定義を与えた。後に Birman と Lin[1] によって、Vassiliev が定義した不変量は組合せ的に再定義され、その再定義の方法はそのまま、絡み目の場合に拡張された。そして、Stanford[9] によって、Birman と Lin が再定義した Vassiliev 不変量は空間グラフの場合に拡張された。

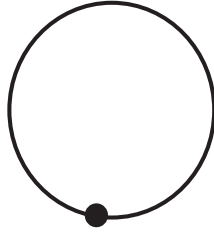
この章では、最初に、空間グラフの定義と空間グラフの不変量について説明する。次に、論文 [2] に基づいて Vassiliev 不変量の定義と性質を説明し、位数 0, 1, 2 以下の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間の次元と基底について述べる。さらに、特異点 (二重点) をもつ結び目のその二重点の情報だけを含む図式 (chord diagram) を導入し、Vassiliev 不変量のなすベクトル空間の基底となる結び目 (basic knot) について説明する。そして、chord diagram と basic knot を用いて作成される、Vassiliev 不変量を計算する上で実用的な表 (actuality table) について説明する。最後に、結び目の actuality table を応用して、空間グラフ  $\theta$ -curve の actuality table を作成し、金信 [6] が示した  $\theta$ -curve に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量のなす空間の次元と基底に関する定理について説明する。

## 1.1 spatial embedding と ambient isotopy

この論文全体を通して、グラフは有限グラフを表しているものとする。

**定義 1.1** (空間グラフ).  $G$  をグラフとする。3次元球面  $S^3$  への埋め込み  $f : G \rightarrow S^3$  を  $G$  の *spatial embedding* といい、 $f(G)$  を **空間グラフ** (*spatial graph*) という。  $G$  の spatial embedding 全体の集合を  $SE(G)$  と表す。

**定義 1.2** (結び目). 円周  $S^1$  の  $S^3$  への埋め込み  $f : S^1 \rightarrow S^3$  および、その像  $f(S^1)$  を **結び目** (*knot*) という。一般に、 $n$  個の円周の disjoint union  $S^1_1 \amalg \cdots \amalg S^1_n$  の  $S^3$  への埋め込み  $f : \amalg_{i=1}^n S^1_i \rightarrow S^3$  および、その像  $f(S^1_1) \cup \cdots \cup f(S^1_n)$  を  $n$  成分からなる **絡み目** (*link*) という。結び目はグラフ  $G$  がループである特別な場合の spatial embedding および、空間グラフ  $f(G)$  のことに他ならない。ただし、ループとは次の図で表されるグラフである。



**定義 1.3** (空間グラフの同値). グラフ  $G$  の 2 つの spatial embeddings  $f, g : G \rightarrow \mathbb{S}^3$  が *ambient isotopic* であるとは、 $\phi \circ f = g$  となる  $\mathbb{S}^3$  上の向きを保つ自己同相写像  $\phi$  が存在するときをいう。ambient isotopic な 2 つの spatial embeddings, あるいはそれらの像 (空間グラフ) は空間グラフとして同じものとみなされる。

任意の空間グラフ  $f(G)$  は、平面上に射影した図式で表現することができる。すなわち、空間グラフの射影図とは、 $\mathbb{S}^3$  から  $\mathbb{S}^3$  内の平面  $P$  への射影  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow P$  を考えたときのその像  $\pi(f(G))$  のことである。射影図  $\pi(f(G))$  の多重点はすべて二重点であり、その二重点は  $f(G)$  の頂点でないとする。さらに、二重点の個数は有限個であるとする。このとき、平面  $P$  に直交する方向から  $f(G)$  を見た図を  $f(G)$  の **正則図** という。正則図は各二重点において、交わる 2 辺に上下の情報を付けたものと考えられる。正則図を平面上に図示するときには、二重点の箇所を図 1 のように表す。

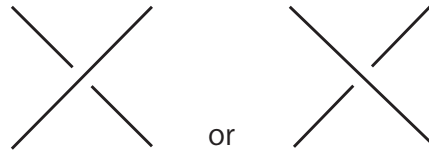
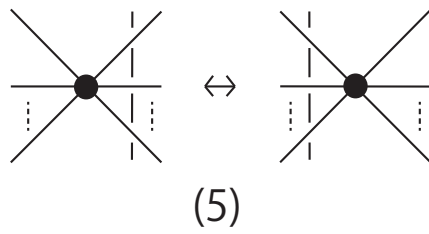
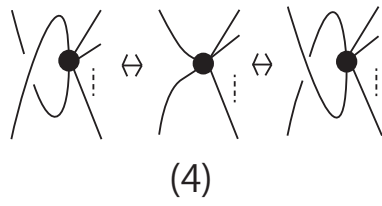
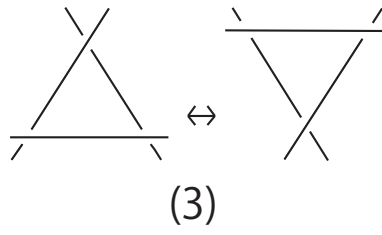
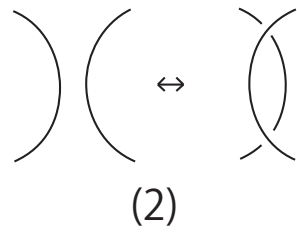
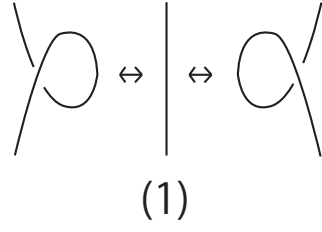


図 1: 上下の情報をもつ二重点

与えられた空間グラフを ambient isotopy で動かすことにより、同じ空間グラフがさまざまな正則図で表現される。例えば、2 つの正則図が次の定義 1.4 で与えられる変形で移り合うとき同じ空間グラフを表す。

**定義 1.4** 空間グラフの正則図に対する次の (1), ..., (5) の変形を *R-move* とよぶ。特に、(1), (2), (3) の変形を絡み目の *R-move* という。



逆に、2つの空間グラフ  $G_1, G_2$  (または絡み目  $K_1, K_2$ ) に対し、それらの正則図の間に R-moves(1), ..., (5) (絡み目の場合は (1), (2), (3)) と平面の isotopy によって関連づけられた有限列が存在するとき、 $G_1$  と  $G_2$  (または絡み目  $K_1$  と  $K_2$ ) は ambient isotopic である [8, 定理 3.1.4]。

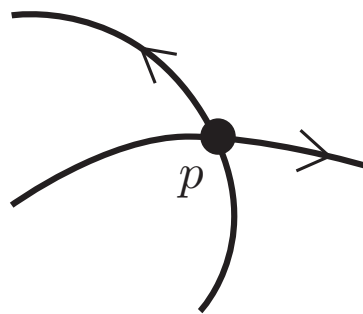
ここで、グラフ  $G$  に対して、 $D_G = \{D \mid D \text{ はグラフ } G \text{ の spatial embedding の正則図}\}$  とする。また、結び目の正則図の集合を  $D_K$  とする。

**定義 1.5** (空間グラフに対する不変量).  $S$  を集合、 $v: D_G \rightarrow S$  を写像とする。このとき、 $v$  が  $G$  の  $S^3$  への埋め込みに関する **空間グラフの ambient isotopy 不変量** であるとは、R-moves(1), ..., (5) のもとで不変であるときをいう。また、 $v$  が **regular isotopy 不変量** であるとは、R-moves(2), (3), (5) のもとで不変であるときをいう。

**定義 1.6** (結び目に対する不変量).  $S$  を集合、 $v: D_K \rightarrow S$  を写像とする。このとき、 $v$  が **結び目の ambient isotopy 不変量** であるとは、 $v$  が R-moves(1), (2), (3) のもとで不変であるときをいう。

## 1.2 Vassiliev 不変量の定義と性質

**定義 1.7** (埋め込みの二重点).  $f: G \rightarrow S^3$  をグラフ  $G$  の  $S^3$  への埋め込みとする。このとき、 $p \in f(G)$  が  $f$  の **二重点** であるとは、 $f(t) = p$  となる  $t \in G$  がちょうど 2 つあり、 $p$  の十分小さい近傍において、次の図のように  $f(G)$  の 2 つの弧が横断的に交差しているときをいう。



**定義 1.8** (二重点をもつ空間グラフ). グラフ  $G$  の *singular spatial embedding* とは、連続写像  $f: G \rightarrow S^3$  であって、その特異点は有限個の二重点だけからなり、それ以外の特異点はないものをいう。 $f(G)$  を **二重点をもつ空間グラフ** という。特に、 $G = S^1$  の場合、singular spatial embedding  $f: S^1 \rightarrow S^3$  の像  $f(S^1)$  を **二重点をもつ結び目** という。 $G$  の singular spatial embedding 全体の集合を  $SE_X(G)$  と表す。

**補題 1.9** 複素数体  $\mathbb{C}$  に値をもつ任意の空間グラフの ambient isotopy (あるいは regular isotopy) 不変量  $v$  は次の *Vassiliev skein relation* により、二重点をもつ空間グラフの不変量に拡張される。

$$v \left( \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \times \\ \searrow \quad \swarrow \end{array} \right) = v \left( \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \quad \quad \times \\ \searrow \quad \swarrow \end{array} \right) - v \left( \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \times \end{array} \right)$$

ここで、上の式の3つの正則図は上の式で描かれている1つの交差点以外は全く同じであるとする。

**注意.** Vassiliev skein relation を使うと、どんな空間グラフ不変量も有限個の二重点をもつ空間グラフ不変量に帰納的に拡張できる。Vassiliev skein relation を使って、二重点を分解する順番は様々に取り得るので、拡張の仕方には多くの方法がある。しかし、拡張した結果は順番の選び方によらず1つに定まる。実際、 $n$  個の二重点をもつ空間グラフの正則図  $D_{X\dots X}$  に対する空間グラフ不変量  $v$  を拡張した結果は次の交代和となる。

$$v(D_{X\dots X}) = \sum_{\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)} (-1)^{|\epsilon|} v(D_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})$$

ただし、 $|\epsilon|$  は数列  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  の中にある  $-1$  の個数で  $D_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}$  は二重点を  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  の符号と一致する交差点に変えることにより  $D_{X\dots X}$  から得られる空間グラフである。

空間グラフに対する Vassiliev 不変量は次のように定義される。

**定義 1.10** (空間グラフに対する Vassiliev 不変量).  $v$  を空間グラフに対する ambient isotopy 不変量とする。 $v$  が位数  $n$  以下の **Vassiliev 不変量** であるとは、 $n+1$  個以上の二重点をもつ任意の空間グラフの正則図  $D$  に対して、 $v(D) = 0$  になるときをいう。さらに、 $v$  が位数が  $n$  以下で  $n-1$  以下でないとき、位数  $n$  の Vassiliev 不変量とよばれる。

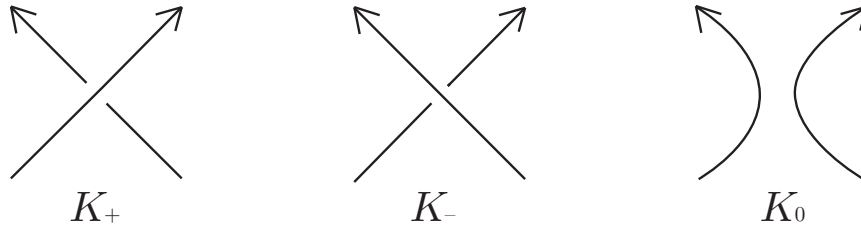
結び目に対する Vassiliev 不変量の例を1つ紹介する。まずはその準備として、絡み目に対する多項式型の不変量であるコンウェイ多項式を定義する。

**定義 1.11** (Conway). 絡み目  $K$  の **コンウェイ多項式**  $\nabla_K(z)$  とは次の (1),(2),(3) によって定義される  $z$  を不定元とする多項式のことである。

- (1)  $K \approx K'$  (ambient isotopic)  $\implies \nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$ .
- (2)  $K \approx \bigcirc$  (自明な結び目)  $\implies \nabla_K(z) = 1$ .
- (3)  $\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z)$ .

ここで、 $K_+, K_-, K_0$  は絡み目の正則図のある1つの交差点の近くで次の図のように異なり、ほかの部分では同じ正則図をもつ、3つの絡み目 (または結び目) である。





**例 1.12** コンウェイ多項式  $\nabla_K(z)$  の  $z^n$  の係数  $a_n$  は位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量である。

**証明.** 簡単のため、 $C(K) = \nabla_K(z)$  とおく。コンウェイ多項式の定義より、

$$C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right) = zC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right)$$

である。また、Vassiliev skein relation より、

$$C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) = C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \swarrow \nearrow \end{array}\right)$$

である。したがって、 $k$  個の二重点をもつ任意の singular knot  $K$  に対して、

$$\begin{aligned} C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \cdots \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \cdots \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) &= C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \cdots \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \cdots \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \cdots \searrow \nearrow \\ \swarrow \nearrow \cdots \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) \\ &= zC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \curvearrowleft \cdots \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \cdots \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) \\ &= \dots \\ &= z^k C\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \curvearrowleft \cdots \curvearrowright \curvearrowleft \end{array}\right). \end{aligned}$$

ここで、コンウェイ多項式は係数が整数の多項式だから、

$$C\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \curvearrowleft \cdots \curvearrowright \curvearrowleft \end{array}\right) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m$$

とおくことができる。ただし、 $b_0, \dots, b_m$  はある整数である。したがって、

$$C\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \cdots \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \cdots \swarrow \nearrow \\ \bullet \end{array}\right) = z^k (b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m)$$

と表される。ゆえに、 $k = n + 1$  とすると、 $C(K)$  の  $z^n$  の係数  $a_n$  は 0 である。よって、コンウェイ多項式の  $z^n$  の係数  $a_n$  は位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量である。□

### 1.3 結び目に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量

$\mathcal{V}_n$  を  $\mathbb{C}$  上に値をもつ位数  $n$  以下の結び目に対する Vassiliev 不変量の集合とする。 $\mathcal{V}_n$  は関数の和とスカラー倍に関して  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間をなす。位数 0, 1, 2 以下の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  についてはその次元が知られている。ここでは、それらの次元と基底の 1 組がどのように与えられるのかを述べる。

**命題 1.13** 位数 0 以下の任意の Vassiliev 不変量  $v \in \mathcal{V}_0$  は定数関数である。すなわち、 $\mathcal{V}_0 = \{\text{const.}\}$  であり、したがって、 $\dim \mathcal{V}_0 = 1$  である。

**証明.**  $v \in \mathcal{V}_0$  とする。定義 1.10 より、1 つの二重点をもつ singular knot に対する  $v$  の拡張の値は 0 である。すなわち、

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \times \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \nwarrow \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = 0.$$

これより

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \nwarrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right)$$

である。ここで、任意の結び目  $K$  をとると、有限回の crossing change で  $K$  のすべての正則図は自明な結び目  $K_0$  の正則図に変形することができる。つまり、 $K$  の正則図を下降的な正則図、すなわち、 $K$  上に基点を指定し、その基点から  $K$  の向きに従って進んだとき、 $K$  同士の交差点では上の交差点に先に到達するという条件を満たす正則図になるように crossing change していけばよい。

以上より、 $K$  から  $K_0$  になるまでに必要なだけ crossing change をすることにより、

$$v(K) = v(K_1) = \dots = v(K_0)$$

が得られる。よって、 $v$  は定数関数である。 □

**命題 1.14**  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0$ .

**証明.**  $v \in \mathcal{V}_1$  とすると、定義 1.10 より、

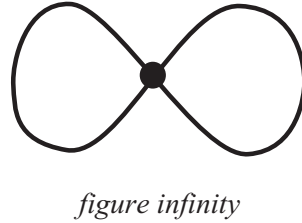
$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \times \nearrow \times \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \times \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \times \nearrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = 0$$

だから、

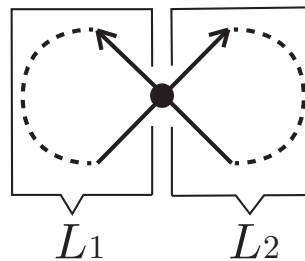
$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \times \nwarrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \times \nearrow \\ \searrow \nearrow \end{array}\right)$$

である。したがって、crossing change をしても 1 つの二重点をもつ singular knot に対する  $v$  の値は変化しない。ここで、1 つの二重点をもつ任意の結び目  $K$  をとる。

**主張.**  $K$  のすべての正則図は有限回の crossing change で figure infinity の正則図に変形することができる。次の図が figure infinity である。

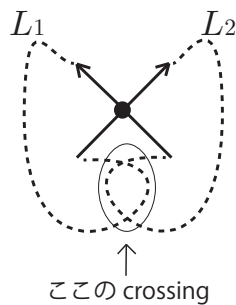


**主張の証明.**  $K$  を次の図のように 2つの部分  $L_1, L_2$  に分ける。



次の2つの操作を行う。

(1)  $L_1$  と  $L_2$  の間 (次の図の丸枠内) のすべての crossing において  $L_1$  が  $L_2$  の上になるように crossing change を行う。



(2)  $L_1$  または  $L_2$  同士の弧の crossing については、 $L_1$  と  $L_2$  のそれぞれで下降的な正則図になるように crossing change を行う。

(1), (2) の操作により、 $K$  は figure infinity の正則図に変わる。

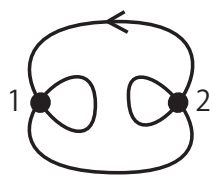
命題の証明に戻る。主張より、

$$\begin{aligned}
 v(K) &= v\left(\text{diagram of two circles with a crossing}\right) \\
 &= v\left(\text{diagram of two circles with a crossing, one crossing changed}\right) - v\left(\text{diagram of two circles with a crossing, other crossing changed}\right) \\
 &= v\left(\text{diagram of a single circle with a crossing}\right) - v\left(\text{diagram of a single circle with a crossing}\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

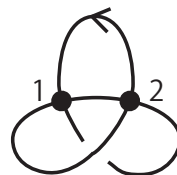
したがって、 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 (= \{\text{const.}\})$  である。 □

**命題 1.15**  $\dim \mathcal{V}_2 = 2$ .

**証明.** 2個の二重点をもつ結び目を取り、crossing change と ambient isotopy による変形を使って、basic knots  $K_1$  または  $K_2$  に変形する。ただし、 $K_1, K_2$  は次の図のような singular knots である。



Basic knot  $K_1$



Basic knot  $K_2$

**主張 1.** 2個の二重点をもつ任意の結び目は crossing change と ambient isotopy による変形を使って、basic knots  $K_1, K_2$  のどちらか1つに変形させることができる。

**主張 1 の証明.** まず、 $v \in \mathcal{V}_2$  をとると、定義 1.10 より、

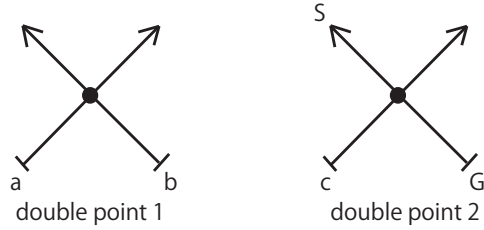
$$v\left(\text{diagram of three crossings}\right) = v\left(\text{diagram of three crossings, one crossing changed}\right) - v\left(\text{diagram of three crossings, other crossing changed}\right) = 0$$

だから、

$$v\left(\text{diagram of three crossings}\right) = v\left(\text{diagram of three crossings, one crossing changed}\right)$$

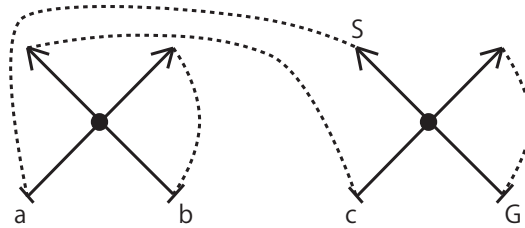
である。したがって、2個の二重点をもつ singular knot に関しては、crossing change をしても  $v$  の値は変わらない。

また、2個の二重点をもつ singular knot の正則図は二重点に接続している弧のつなぎ方に応じて、次の (1), ..., (6) のいずれの状況になる。



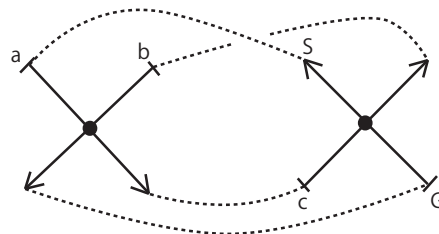
に対して、

(1)  $S \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow G$  :



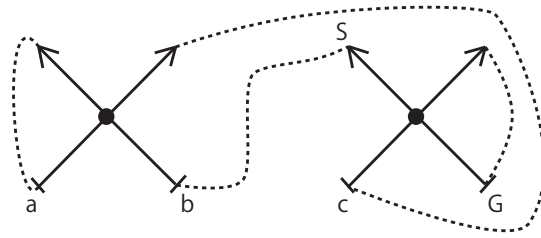
これは  $K_1$  に変形することができる。

(2)  $S \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow G$  :



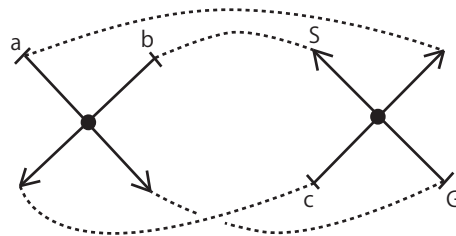
これは  $K_2$  に変形することができる。

(3)  $S \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow G$  :



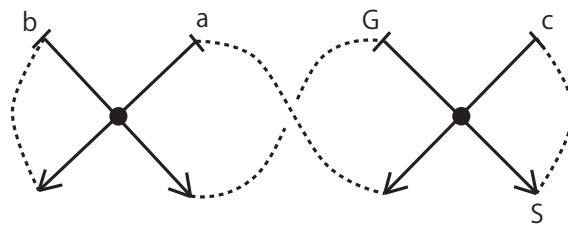
これは  $K_1$  に変形することができる。

(4)  $S \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow G$  :



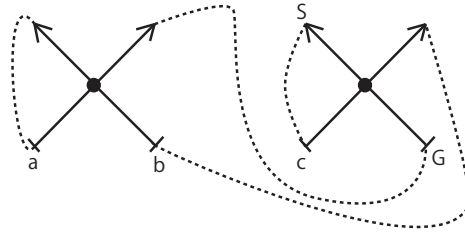
これは  $K_2$  に変形することができる。

(5)  $S \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow G$  :



これは  $K_1$  に変形することができる。

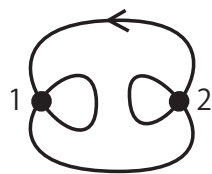
(6)  $S \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow G :$



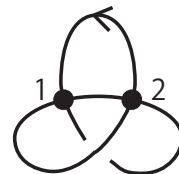
これは  $K_1$  に変形することができる。

**主張 2.** これら 2 つの basic knots  $K_1$  と  $K_2$  は一方からもう一方を得ることはできない。

**主張 2 の証明.**  $K_1$  と  $K_2$  の本質的な違いは曲線上にある二重点の順列の違いにある。そのことを説明するために、 $K_1$  と  $K_2$  の二重点に 1 と 2 というラベルを付ける。

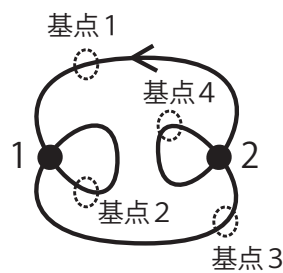


Basic knot  $K_1$

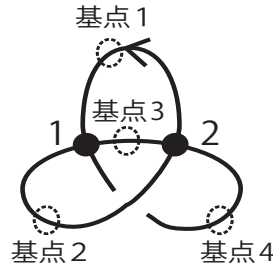


Basic knot  $K_2$

下の図の基点 1 から結び目  $K_1$  をたどると、順列 1122 が得られる。また、基点 2 からたどるときは 1221, 基点 3 からたどるときは 2211, 基点 4 からたどるときは 2112 となる。これらの順列は巡回置換を許して同じものとみなす。



一方、 $K_2$  については、基点 1, 3 からたどるときは順列 1212, 基点 2, 4 からたどるときは順列 2121 が得られる。これらの順列は巡回置換を許して同じものとみなす。



しかしながら、巡回置換を許したとしても、2つの列 1122(または、1221, 2211, 2112)と 1212(または、2121)は異なる。

命題の証明に戻る。今、2個の二重点をもつ任意の singular knot  $K$  をとる。もし、 $K$  をたどるときの二重点の順列が 1122 ならば、有限回の crossing changes と ambient isotopy による変形で  $K$  を  $K_1$  に変形できる。もし、順列が 1212 ならば、 $K$  を  $K_2$  に変形できる。このことは、位数 2 の Vassiliev 不変量  $v$  が  $\{K_1, K_2\}$  上の値によって決まることを示している。したがって、 $f \in \mathcal{V}_2$  を  $(f(K_1), f(K_2)) \in \mathbb{C}^2$  に対応させる線形関数  $\Phi: \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  が定義される。

**主張 3.**  $\text{Ker} \Phi = \mathcal{V}_1$ .

**主張 3 の証明.** 任意の  $f \in \text{Ker} \Phi$  をとると、 $f(K_1) = f(K_2) = 0$  である。したがって、2個の二重点をもつ任意の singular knot  $K$  に対して、 $f(K) = 0$  だから、 $\text{Ker} \Phi \subset \mathcal{V}_1$  である。また、 $\mathcal{V}_1$  の定義より、 $\mathcal{V}_1 \subset \text{Ker} \Phi$  である。よって、 $\text{Ker} \Phi = \mathcal{V}_1$  である。

命題の証明に戻る。任意の結び目不変量  $f$  に対して、

$$f(K_1) = f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array}\right) = 0$$

であるから、 $(f(K_1), f(K_2)) = (0, f(K_2))$  より、 $\text{Im} \Phi$  は 1 次元以下である。したがって、 $\Phi$  に準同型定理を適用して、

$$\text{Im} \Phi \cong \mathcal{V}_2 / \text{Ker} \Phi = \mathcal{V}_2 / \mathcal{V}_1$$

を得る。よって、 $\Phi(f_2) = (0, 1) \in \text{Im} \Phi$  となるある  $f_2 \in \mathcal{V}_2$  が存在し、任意の  $f \in \mathcal{V}_2$  に対して、

$$\Phi(f) = (0, a) = a(0, 1) = a\Phi(f_2) \quad (a \in \mathbb{C})$$

となる。よって、

$$\Phi(f) - a\Phi(f_2) = \Phi(f - af_2) = 0$$

である。これは  $f - af_2 \in \text{Ker} \Phi$  同値である。また、 $\text{Ker} \Phi = \mathcal{V}_1 = \{bf_1 \mid b \in \mathbb{C}\}$  であるから、 $f - af_2 \in \{bf_1 \mid b \in \mathbb{C}\}$  である。ゆえに、 $f - af_2 = bf_1$  とおくと、



$f = bf_1 + af_2$  である。したがって、 $\dim \mathcal{V}_2 \leq 2$  である。実際、コンウェイ多項式の  $z^2$  の係数  $a_2$  は定数ではない (三葉結び目に対するコンウェイ多項式の  $z^2$  の係数は 1 である [8, 例 3.2.7]) ので、 $\dim \mathcal{V}_2 = 2$  である。  $\square$

## 1.4 Chord diagrams

二重点をもつ空間グラフから、その二重点の情報だけを含む簡単な図式 (chord diagram とよばれる) を作ることができる。ここでは、結び目の chord diagram について説明する。

**定義 1.16** 結び目の位数  $n$  の chord diagram とは、相異なる  $n$  個の点の互いに素な対の集合を伴う、向きづけられた円周のことをいう。向きを保つ同相写像で移り合うものは同一視して考える。

ここで、位数  $n$  の chord diagram の集合を  $A_n$  とかくことにする。また、chord diagram における円周の向きづけは省略し、反時計回りに向きづけられているとする。

**例 1.17**

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left\{ \text{---} \right\}, \\
 A_2 &= \left\{ \text{---}, \text{---} \right\}, \\
 A_3 &= \left\{ \text{---}, \text{---}, \text{---}, \text{---}, \text{---} \right\}
 \end{aligned}$$

**定義 1.18**  $n$  個の二重点をもつ singular knot  $K$  に対して、chord diagram  $\sigma(K) \in A_n$  を結び目の  $n$  個の二重点の像を  $n$  本の chord に対応させることにより定義する。

**例 1.19**

$$\sigma \left( \text{---} \right) = \text{---}, \quad \sigma \left( \text{---} \right) = \text{---}$$

**命題 1.20** 位数  $n$  以下 Vassiliev 不変量  $v$  の値は  $n$  個の二重点をもつ結び目の chord diagram にだけ依存する。すなわち、 $n$  個の二重点をもつ結び目  $K_1, K_2$  に対して、

$$\sigma(K_1) = \sigma(K_2) \Rightarrow v(K_1) = v(K_2).$$

**証明.**  $\sigma(K_1) = \sigma(K_2)$  と仮定する。  $K_1$  の chord diagram と  $K_2$  の chord diagram とが等しいので、両方の chord diagrams の chord の間に 1 対 1 の対応がある。したがって、  $K_1$  と  $K_2$  の二重点の間にも 1 対 1 の対応がある。各々対応している二重点の付近が  $K_1$  と  $K_2$  とで全く一致するように  $\mathbb{R}^3$  内に  $K_1$  と  $K_2$  を置く。すると、二重点付近に手を加えず、 crossing changes と ambient isotopy による変形だけで  $K_1$  から  $K_2$  に変形できる。  $K_1, K_2$  の二重点の個数は  $n$  で、  $v$  の位数が  $n$  以下であるから補題 1.9 より、 crossing changes と ambient isotopy による変形を施しても  $v$  の値は変化しない。したがって、  $v(K_1) = v(K_2)$  である。  $\square$

## 1.5 Basic knots and actuality table

位数  $n$  以下の結び目の Vassiliev 不変量は  $n$  個の二重点をもつ結び目  $K$  の chord diagram にだけ依存している (命題 1.20)。しかし、 chord diagram から直接値を求めることは不可能であるから、各 chord diagram に対して、代表的な basic singular knot を選ばなければならない。そして、それらを表にしたものが actuality table であり、実際に Vassiliev 不変量を計算するときに使われる。位数 3 までの basic singular knots は次の表で与えられる。

	$A_0$	$A_1$	$A_2$		$A_3$				
chord diagrams									
basic singular knots									



**命題 1.21**  $K$  を任意の結び目、  $v$  を位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量とする。このとき、  $v(K)$  は高々  $n$  個の二重点をもつ basic singular knots に対する  $v$  の値の 1 次結合で表現できる。

**証明.** Vassiliev skein relation より、

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array}\right) + v\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right), \quad v\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right)$$

である。

$K$  を crossing changes と ambient isotopy による変形で、自明な結び目に変形し、  $v(K)$  が自明な結び目に対する  $v$  の値と 1 個の二重点をもついくつかの結び目に対

する  $v$  の値の和でかけることを示す。その際に、crossing change しなければならない正の crossing  と負の crossing  がそれぞれ  $x_0$  個、 $y_0$  個あるとする。このとき、

$$\begin{aligned}
 v(K) &= v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &= v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad + v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &= v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad + v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad + v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &= \dots \\
 &= v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad + \sum_{i_0=1}^{x_0} v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

↑  
 $i_0$ 番目

ここで、

$$(*x_0) = \sum_{i_0=1}^{x_0} v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)$$

↑  
 $i_0$ 番目

とすると、

$$\begin{aligned}
 v(K) &= v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad - v \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + (*x_0) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v \left( \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \right) \\
&\quad - \sum_{j_0=1}^{y_0} v \left( \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \\ \uparrow \\ x_0 + j_0 \text{ 番目} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \right) + (*x_0)
\end{aligned}$$

であり、

$$(*y_0) = \sum_{j_0=1}^{y_0} v \left( \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \\ \uparrow \\ x_0 + j_0 \text{ 番目} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \right)$$

とすると、

$$v(K) = v \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right) + (*x_0) - (*y_0)$$

である。ただし、 $(*x_0), (*y_0)$  は 1 個の二重点をもつ singular knot に対する  $v$  の値の和である。したがって、 $v(K)$  は自明な結び目に対する  $v$  の値と 1 個の二重点をもついくつかの結び目に対する  $v$  の値の和でかける。

同様にすると、1 個の二重点をもつ結び目  $K_1$  に対する  $v$  の値は

$$v(K_1) = v \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right) + (*x_1) - (*y_1)$$

とかける。ただし、 $(*x_1), (*y_1)$  は 2 個の二重点をもつ singular knot に対する  $v$  の値の和である。そして、 $v(K)$  を高々  $n$  個の二重点をもつ basic singular knots に対する  $v$  の値と  $n+1$  個の二重点をもつ singular knots に対する  $v$  の値の和で表示するまでこの操作を繰り返す。 $K_n$  を  $n$  個の二重点をもつ結び目とすると、

$$v(K_n) = v(K_n^b) + (*x_n) - (*y_n)$$

である。ただし、 $K_n^b$  は  $n$  個の二重点をもつ basic singular knot であり、 $(*x_n), (*y_n)$  は  $n+1$  個の二重点をもつ singular knot に対する  $v$  値の和である。今、 $v$  は位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量だから、 $(*x_n) = 0, (*y_n) = 0$  である。したがって、 $v(K_n) = v(K_n^b)$  である。

以上より、

$$v(K) = v(K_0^b) + a_1 v(K_1^b) + a_2 v(K_2^b) + \cdots + a_n v(K_n^b) \quad (a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z})$$

と表されることがわかる。ただし、 $K_i^b$  ( $0 \leq i \leq n$ ) は  $i$  個の二重点をもつ basic singular knot である。□

## 1.6 $\theta$ -curve に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量

結び目に対する Vassiliev 不変量は basic singular knots に対する Vassiliev 不変量の 1 次結合で表現できた (命題 1.21)。それと同様に、金信 [6] により  $\theta$ -curve に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量は定数関数と Conway 多項式の 2 次係数の 1 次結合で表現できることが知られている。ここではその方法を述べる。

**定義 1.22** ( $\theta$ -curve).  $\theta$ -グラフとは、2つの頂点  $p_+, p_-$  と 3つの辺  $e_1, e_2, e_3$  からなる次の図 2 のような順序と向きがついたグラフのことをいう (ただし、 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ )。  $\theta$ -グラフ  $\theta$  の  $S^3$  への埋め込み  $T: \theta \rightarrow S^3$  の像  $T(\theta)$  を  $\theta$ -curve という。

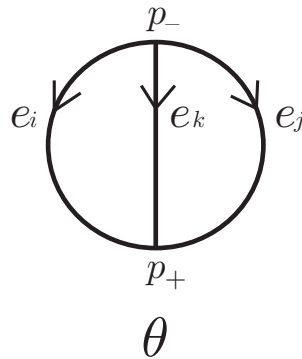


図 2:  $\theta$ -グラフ

結び目の場合と同様にして、 $\theta$ -curve の位数 2 までの actuality table を作成する。ただし、 $\theta$ -curve の辺と区別するために各 chord diagram の chord を点線で表す。また、 $\theta$ -curve の頂点と二重点を区別するために頂点は表記しない。

	$A_0$	$A_1$		$A_2$		
chord diagrams						
basic singular theta-curves						

2 個の二重点をもつ  $\theta$ -curve の chord diagram は上の actuality table 中の  $A_2$  における 3 つの図以外も考えられるが、その他の chord diagram はそれらの chord diagram を用いて表される [6, 命題 9]。

$\theta$ -curve  $T$  に対して、 $w_{ij}$  を  $e_i$  と  $e_j$  の交点数とし、 $n_1, n_2, n_3$  を連立方程式

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = -2(w_{11} + w_{22} - w_{12}) \\ n_2 + n_3 = -2(w_{22} + w_{33} - w_{23}) \\ n_1 + n_3 = -2(w_{11} + w_{33} - w_{13}) \end{cases}$$

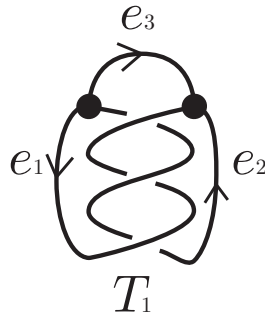
の整数解とする。各辺  $e_i$  に平行にバンドを付けて  $\theta$ -curve  $T$  を二重化し、絡み目  $L'(T)$  を作る。その絡み目  $L'(T)$  の  $e_i$  に対応するバンドに、 $n_i$  回の half twists を加えて絡み目  $L''(T)$  を作る。このとき、その絡み目  $L''(T)$  のザイフェルト曲面は  $T$  をスパインにもち、そのザイフェルト形式は 0 となる [5]。

このとき、 $\theta$ -グラフの向きづけられた3辺  $e_1, e_2, e_3$  に対して、3つの cycles  $c_1, c_2, c_3$  を

$$\begin{aligned} c_1 &= (T(e_2)) \cup (-T(e_3)), \\ c_2 &= (T(e_3)) \cup (-T(e_1)), \\ c_3 &= (T(e_1)) \cup (-T(e_2)) \end{aligned}$$

と定める。ただし、 $-T(e_1), -T(e_2), -T(e_3)$  はそれぞれ  $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$  とは反対の向きが付いた辺とする。 $c_1, c_2, c_3$  に対応する  $L''(T)$  の各成分をそれぞれ  $K_1(T), K_2(T), K_3(T)$  とおく。順序と向きがついた絡み目  $L(T)$  を  $L(T) = K_1(T) \cup K_2(T) \cup K_3(T)$  と定める。

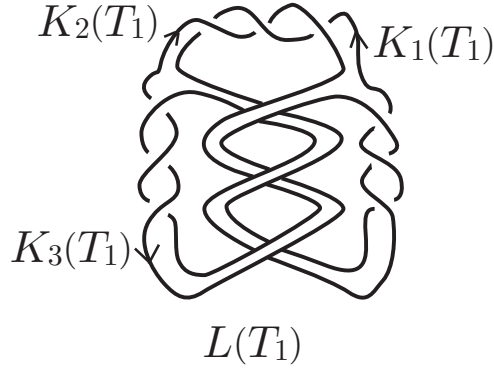
**例 1.23**  $T_1$  を次の図のような  $\theta$ -curve とする。



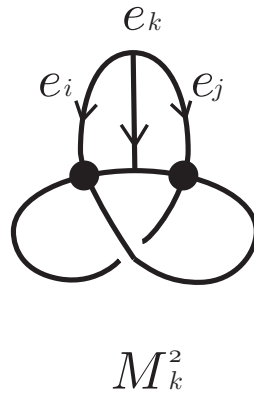
このとき、連立1次方程式

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = -2(0 + 0 - (-3)) \\ n_2 + n_3 = -2(0 + 0 - 0) \\ n_1 + n_3 = -2(0 + 0 - 0) \end{cases}$$

を解くと、 $n_1 = n_2 = -3$ ,  $n_3 = 3$ である。したがって、 $L(T_1) = K_1(T_1) \cup K_2(T_1) \cup K_3(T_1)$  は次の図のような絡み目となる。



$U$  を自明な  $\theta$ -curve,  $M_k^2$  を次の図のような 2 個の二重点をもつ  $\theta$ -curve とする。



金信は  $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量について次の結果を示した。

**定理 1.24** (金信 [6, 定理 1])  $\theta$  を  $\theta$ -グラフ、 $v$  を  $\theta$  の  $S^3$  への埋め込み  $T$  に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量とする。このとき、

$$v(T) = A + \sum_{i=1}^3 B_i a_2(K_i(T))$$

が成り立つ。ただし、 $A = v(U)$ ,  $B_i = v(M_i^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) であり、 $a_2$  はコンウェイ多項式の 2 次係数である。さらに、 $\{c, a_2(K_1(T)), a_2(K_2(T)), a_2(K_3(T))\}$  は  $\theta$ -curve に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間  $\mathcal{V}_2$  の基底である。ただし、 $c$  はすべての  $T$  に対して、1 を対応させる定数不変量である。□

この公式より、 $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量  $v$  は定数関数とコンウェイ多項式の 2 次係数の 4 つの基底の 1 次結合で表現できることがわかる。 $v$  がグラフの順序と向きづけによらない場合には、 $v(M_1^2) = v(M_2^2) = v(M_3^2)$  となる [6, 定理 3]。



## 2 山田多項式

空間グラフ不変量の中に、山田修司 [11] が定義した多項式型の不変量–山田多項式–がある。実は、山田多項式は ambient isotopy 不変量ではなく、もう少し制限の強い同値関係の下での不変量、具体的には regular isotopy 不変量である。山田多項式に補正を加えて、ambient isotopy 不変量を作る方法はいくつか知られている [3],[11] が、石井 [5] は空間グラフの cycle の集合に対して writhe [5] の概念を導入し、それを用いて山田多項式を ambient isotopy 不変量にするための正規化の方法を与えた。重要な点はその方法で正規化された山田多項式からは空間グラフに対する Vassiliev 不変量の系列が得られるということである。

この章では、まず、論文 [5],[8] に基づいて山田多項式の定義と性質を説明する。そして、論文 [5] に基づいて、各頂点の次数が3で bridge をもたないグラフに対する石井による正規化の方法を述べる。最後に、主結果を含む正規化された山田多項式から得られる Vassiliev 不変量に関する公式について述べる。

### 2.1 山田多項式の定義と性質

山田多項式は (空間に埋め込む前の) グラフ  $G$  に対する 2 変数多項式を用いて定義される。そこで、まずは、その 2 変数多項式の定義を述べる。

**定義 2.1**  $i = 0, 1$  に対し、 $\beta_i(G)$  をグラフ  $G = (V, E, \phi)$  の  $i$  次元ベッチェイ数とする。すなわち、グラフ  $G$  の頂点と辺と連結成分の個数をそれぞれ  $p, q, s$  とおくと、 $\beta_0 = s$ ,  $\beta_1 = q - p + s$  である。グラフ  $G$  に対して、 $x, y$  を不定元とする多項式  $f(G)$  を  $f(G) = x^{\beta_0(G)} y^{\beta_1(G)}$  と定め、

$$h(G) := h(G)(x, y) = \sum_{F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G - F)$$

と定める。ただし、 $F \subset E$  に対して、 $G - F$  は  $G - F = (V, E - F, \phi|_{E-F})$  により定義される  $G$  の部分グラフであり、 $|F|$  は集合  $F$  の元の個数を表す。 $h(G)$  の定義式における和は  $F = \emptyset, F = E$  の場合も含む。

**命題 2.2**  $e$  を  $G$  のループでない辺とする。このとき、

$$h(G) = h(G/e) - \frac{1}{x} h(G - \{e\})$$

が成り立つ。ただし、 $G/e$  は  $G$  で  $e$  を 1 点に縮めたグラフである。

**証明.**

$$\begin{aligned}
h(G) &= \sum_{F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G - F) \\
&= \sum_{e \notin F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G - F) + \sum_{e \in F \subset E} (-x)^{-|F|} f(G - F) \\
&= \sum_{F \subset E - e} (-x)^{-|F|} f(G/e - F) - \frac{1}{x} \sum_{F' \subset E - e} (-x)^{-|F'|} f(G - \{e\} - F') \\
&= h(G/e) - \frac{1}{x} h(G - \{e\}).
\end{aligned}$$

□

2つのグラフ  $G_1$  と  $G_2$  の disjoint union を  $G_1 \amalg G_2$  で表示し、 $G_1$  と  $G_2$  の 1 点共有和を  $G_1 \vee G_2$  で表示する。

**命題 2.3**  $h(G)$  は次の性質をもつ。

- (1)  $h(G_1 \amalg G_2) = h(G_1)h(G_2)$ .
- (2)  $h(G_1 \vee G_2) = \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2)$ .
- (3)  $G$  が切断辺 (その辺を  $G$  から除くと  $G$  の連結成分が増えるような辺) をもつならば、 $h(G) = 0$  である。

**証明.**

- (1)  $G_1 = (V_1, E_1, \phi_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2, \phi_2)$  とすると、 $G_1 \amalg G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \phi)$  である。このとき、

$$\begin{aligned}
h(G_1)h(G_2) &= \left( \sum_{F_1 \subset E_1} (-x)^{-|F_1|} f(G_1 - F_1) \right) \left( \sum_{F_2 \subset E_2} (-x)^{-|F_2|} f(G_2 - F_2) \right) \\
&= \sum_{F_1 \cup F_2 \subset E_1 \cup E_2} (-x)^{-(|F_1| + |F_2|)} f(G_1 \amalg G_2 - (F_1 \cup F_2)) \\
&= h(G_1 \amalg G_2).
\end{aligned}$$

- (2)  $G_1 \amalg G_2$  の頂点と辺と連結成分の個数をそれぞれ  $p, q, s$  とおくと、 $G_1 \vee G_2$  の頂点と辺と連結成分の個数はそれぞれ  $p - 1, q, s - 1$  である。したがって、

$$\begin{aligned}
h(G_1 \vee G_2) &= \sum_{F \subset E_1 \cup E_2} (-x)^{-|F|} x^{\beta_0(G_1 \vee G_2 - F)} y^{\beta_0(G_1 \vee G_2 - F)} \\
&= \sum_{F \subset E_1 \cup E_2} (-x)^{-|F|} x^{\beta_0(G_1 \amalg G_2 - F) - 1} y^{\beta_0(G_1 \amalg G_2 - F)} \\
&= x^{-1} \sum_{F \subset E_1 \cup E_2} (-x)^{-|F|} x^{\beta_0(G_1 \amalg G_2 - F)} y^{\beta_0(G_1 \amalg G_2 - F)} \\
&= \frac{1}{x} h(G_1)h(G_2).
\end{aligned}$$

(3)  $e$  を  $G$  の切断辺とすると、 $G$  のある部分グラフ  $G_1$  と  $G_2$  を用いて、 $G - e = G_1 \amalg G_2$ ,  $G/e = G_1 \vee G_2$  とかける。命題 2.2 と (1),(2) より、

$$\begin{aligned} h(G) &= h(G/e) - \frac{1}{x}h(G - \{e\}) \\ &= h(G_1 \vee G_2) - \frac{1}{x}h(G_1 \amalg G_2) \\ &= \frac{1}{x}h(G_1)h(G_2) - \frac{1}{x}h(G_1)h(G_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**定理 2.4**  $e_1, e_2$  を次数 2 の 1 つの頂点  $v$  を共有するループでない  $G$  の 2 辺とすると、

$$h(G) = h(G/e_1),$$

すなわち、次式が成り立つ。

$$h\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \bullet \\ \xrightarrow{e_1} \bullet \xrightarrow{e_2} \bullet \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) = h\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \bullet \\ \xrightarrow{e_2} \bullet \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}\right).$$

**証明.** グラフ  $G$  は切断辺  $e_2$  をもつから、 $h(G - e_1) = 0$  である。よって、命題 2.2 より

$$h(G) = h(G/e_1) - \frac{1}{x}h(G - e_1) = h(G/e_1).$$

□

グラフ  $G$  の山田多項式は次のように定義される。

**定義 2.5** (山田多項式).  $G$  をグラフ、 $f : G \rightarrow \mathbb{S}^3$  を埋め込み、 $D$  を  $f(G)$  の 1 つの正則図とする。  $D$  の交差点  $c$  に対して、次の図 3 のように正スピン  $S_+$ , 負スピン  $S_-$ , 0 スピン  $S_0$  を定める。正則図  $D$  の各交差点を 3 つのスピンのどれかに置き換えて  $D$  から得られる平面グラフを  $D$  上の**ステイト**という。  $D$  が  $n$  個の交差点をもつとすると、 $3^n$  個のステイトが存在する。  $D$  上のすべてのステイトの集合を  $S(D)$  で表す。ステイト  $S$  に含まれる正スピン、負スピンの個数をそれぞれ  $p, q$  として、 $\{D \mid S\} = A^{p-q}$  とおく。ここで、 $A$  は不定元である。このとき、 $A$  に関するローラン多項式  $R(D)(A)$  を

$$R(D) = R(D)(A) := \sum_{S \in S(D)} \{D \mid S\} H(S)$$

と定める。ここで  $H(S) = h(S)(-1, -A - 2 - A^{-1})$  である。特に、 $R(\phi) = 1$  と定める。この様にして定義されるローラン多項式  $R(D)(A)$  を正則図  $D$  の**山田多項式**という。

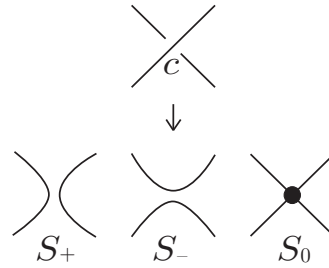


図 3: 3つのスピン

**命題 2.6** 山田多項式は次の性質をもつ。

$$(1) R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = AR\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}\right).$$

$$(2) R\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}\right).$$

(3) グラフの正則図  $D_1, D_2$  の disjoint union  $D_1 \amalg D_2$  に対して、 $R(D_1 \amalg D_2) = R(D_1)R(D_2)$ .

(4) グラフの正則図  $D_1, D_2$  の 1 点共有和  $D_1 \vee D_2$  に対して、 $R(D_1 \vee D_2) = -R(D_1)R(D_2)$ .

(5) 正則図  $D$  が切断辺をもつとき、 $R(D) = 0$ .

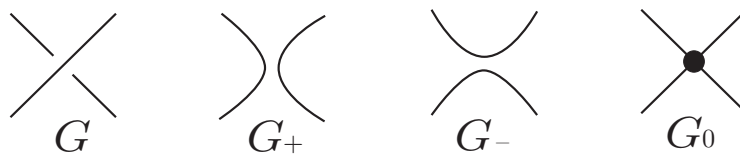
$$(6) R\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \end{array}\right) = A + 1 + A^{-1}.$$

$$(7) R\left(D \sqcup \begin{array}{c} \text{fan} \end{array}\right) = (-1)^{n-1}(A + 1 + A^{-1})^n R(D).$$

ただし、 $n$  は  に含まれるループの個数である。

**証明.**

(1) グラフ  $G, G_+, G_-, G_0$  を 1 つの交差点の近傍だけ下の図のように異なっていて、それ以外は全く同じグラフとする。



$G, G_+, G_-, G_0$  の正則図をそれぞれ  $D, D_+, D_-, D_0$  として、

$$S(D) = \{S \mid D \text{ 上の状態}\}, S(D_+) = \{S \mid D_+ \text{ 上の状態}\}, \\ S(D_-) = \{S \mid D_- \text{ 上の状態}\}, S(D_0) = \{S \mid D_0 \text{ 上の状態}\}$$

とする。このとき、 $S(D)$  は  $S(D_+), S(D_-), S(D_0)$  の非交和でかける。したがって、

$$\begin{aligned} R(D) &= \sum_{S \in S(D)} \{D \mid S\} H(S) \\ &= \sum_{S \in S(D_+)} \{D \mid S\} H(S) + \sum_{S \in S(D_-)} \{D \mid S\} H(S) \\ &\quad + \sum_{S \in S(D_0)} \{D \mid S\} H(S) \\ &= \sum_{S \in S(D_+)} A \{D_+ \mid S\} H(S) + \sum_{S \in S(D_-)} A^{-1} \{D_- \mid S\} H(S) \\ &\quad + \sum_{S \in S(D_0)} \{D_0 \mid S\} H(S) \\ &= A \sum_{S \in S(D_+)} \{D_+ \mid S\} H(S) + A^{-1} \sum_{S \in S(D_-)} A^{-1} \{D_- \mid S\} H(S) \\ &\quad + \sum_{S \in S(D_0)} \{D_0 \mid S\} H(S) \\ &= AR(D_+) + A^{-1}R(D_-) + R(D_0) \end{aligned}$$

である。これは (1) の等式に等しい。

(2) 命題 2.2 より

$$h\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) = -\frac{1}{x} h\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagleft \\ \bullet \\ \diagleft \quad \diagdown \end{array}\right) + h\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right)$$

だから、

$$H\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) = H\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagleft \\ \bullet \\ \diagleft \quad \diagdown \end{array}\right) + H\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right)$$

である。また、上の式の 3 つの正則図は交差点の個数が等しいから、

$$S\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right), S\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagleft \\ \bullet \\ \diagleft \quad \diagdown \end{array}\right), S\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right)$$

の元の個数も等しい。したがって、

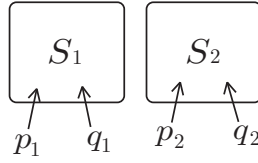
$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}(\begin{array}{c} \rightarrow \leftarrow \\ \rightarrow \leftarrow \end{array})} \left\{ \begin{array}{c} \rightarrow \leftarrow \\ \rightarrow \leftarrow \end{array} \middle| S \right\} &= \sum_{S \in \mathcal{S}(\begin{array}{c} \rightarrow \leftarrow \\ \rightarrow \leftarrow \end{array})} \left\{ \begin{array}{c} \rightarrow \leftarrow \\ \leftarrow \rightarrow \end{array} \middle| S \right\} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}(\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array})} \left\{ \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \middle| S \right\} \end{aligned}$$

である。よって (2) の等式を得る。

(3) 山田多項式の定義より、

$$R(D_1 \amalg D_2) = \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1 \amalg D_2)} \{D_1 \amalg D_2 \mid S\} H(S)$$

が成り立つ。ここで、 $S$  の連結成分を  $S_1, S_2$  とすると、 $S = S_1 \amalg S_2$  とかける。さらに、 $p_1, q_1$  をそれぞれ  $S_1$  と  $S_2$  における正スピンの個数、 $q_1, q_2$  をそれぞれ  $S_1$  と  $S_2$  における負スピンの個数とする。



このとき、

$$\{D_1 \amalg D_2 \mid S\} = A^{(p_1+p_2)-(q_1+q_2)} = A^{p_1-q_1} A^{p_2-q_2} = \{D_1 \mid S\} \{D_2 \mid S\}$$

が成り立つ。また、命題 2.3 の (1) より

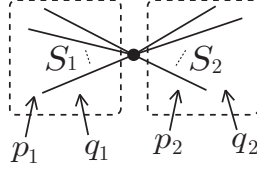
$$H(S) = H(S_1 \amalg S_2) = H(S_1)H(S_2)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} R(D_1 \amalg D_2) &= \left( \sum_{S_1 \in \mathcal{S}(D_1)} \{D_1 \mid S_1\} H(S_1) \right) \left( \sum_{S_2 \in \mathcal{S}(D_2)} \{D_2 \mid S_2\} H(S_2) \right) \\ &= R(D_1)R(D_2) \end{aligned}$$

である。

(4) (3) と同様に、



$p_1, p_2$  をそれぞれ  $S_1$  と  $S_2$  における正スピンの個数、 $q_1, q_2$  をそれぞれ  $S_1$  と  $S_2$  における負スピンの個数とすると、

$$\{D_1 \vee D_2 \mid S\} = \{D_1 \mid S\}\{D_2 \mid S\}$$

が成り立つ。また、命題 2.3 の (2) より

$$H(S) = H(S_1 \vee S_2) = -H(S_1)H(S_2).$$

よって

$$\begin{aligned} R(D_1 \vee D_2) &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1 \vee D_2)} \{D_1 \vee D_2 \mid S\} H(S) \\ &= \left( \sum_{S_1 \in \mathcal{S}(D_1)} \{D_1 \mid S_1\} \right) \left( \sum_{S_2 \in \mathcal{S}(D_2)} \{D_2 \mid S_2\} \right) \{-H(S_1)H(S_2)\} \\ &= -R(D_1)R(D_2). \end{aligned}$$

(5)  $D$  が切断辺をもつから命題 2.3 の (3) より  $H(S) = 0$  である。したがって、

$$R(D) = \sum_{S \in \mathcal{S}(D)} \{D \mid S\} H(S) = 0.$$

(6)

$$h\left(\textcircled{\bullet}\right)(x, y) = (-x)^0 x^1 y^1 + (-x)^{-1} x^1 y^0 = xy - 1$$

より、

$$\begin{aligned} H\left(\textcircled{\bullet}\right) &= h\left(\textcircled{\bullet}\right)(-1, -A - 2 - A^{-1}) \\ &= -(-A - 2 - A^{-1}) - 1 \\ &= A + 1 + A^{-1} \end{aligned}$$

である。よって、

$$R\left(\text{circle with dot at bottom}\right) = A^{0-0}H\left(\text{circle with dot at bottom}\right) = A + 1 + A^{-1}$$

である。

(7)

$$\begin{aligned} R\left(D \sqcup \text{leaf pointing left}\right) &= R\left(\text{leaf pointing left}\right)R(D) \\ &= -R\left(\text{leaf pointing right}\right)R\left(\text{leaf pointing left}\right)R(D) \\ &= -R\left(\text{leaf pointing right}\right)(A + 1 + A^{-1})R(D) \\ &= (-1)^2R\left(\text{leaf pointing left}\right)(A + 1 + A^{-1})^2R(D) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n-1}R\left(\text{leaf pointing right}\right)(A + 1 + A^{-1})^{n-1}R(D) \\ &= (-1)^{n-1}(A + 1 + A^{-1})^nR(D). \end{aligned}$$

□

**命題 2.7** 山田多項式は次の等式を満たす。

$$(-A)^{-2}R\left(\text{loop}\right) = R\left(\text{vertical line}\right) = (-A)^2R\left(\text{loop with dot}\right) \quad (2.1)$$

$$(-A)^{-1}R\left(\text{loop with dot and line}\right) = R\left(\text{Y-junction}\right) = (-A)R\left(\text{loop with dot and line}\right) \quad (2.2)$$

**証明.** まず、等式 (2.1) を確かめる。

$$\begin{aligned} R\left(\text{loop}\right) &= AR\left(\text{circle}\right) + A^{-1}R\left(\text{Y-junction}\right) + R\left(\text{loop with dot}\right) \\ &= AR\left(\text{circle}\right)R\left(\text{vertical line}\right) + A^{-1}R\left(\text{vertical line}\right) - R\left(\text{circle}\right)R\left(\text{vertical line}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (1 + A + A^2)R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + (-A^{-1} - 1 - A)R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&= A^2R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)
\end{aligned}$$

であるから、

$$(-A)^{-2}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)$$

である。同様にして、

$$R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) = (-A)^2R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)$$

も示せる。

次に、等式 (2.2) を確かめる。

$$\begin{aligned}
R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) &= AR\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \circlearrowleft + A^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&= -AR\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \bullet + A^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&\quad + R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&= -A\left\{ R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \left( R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \right) \right\} \\
&\quad + A^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&= A^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) + (-A^{-1} - 1 - A)R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) \\
&= -AR\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)
\end{aligned}$$

より、

$$(-A)^{-1}R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)$$

である。同様にして、

$$R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right) = (-A)^1R\left(\begin{array}{|} \hline \hline \end{array}\right)$$

も示せる。 □

**定理 2.8** (山田 [11])  $f \in \text{SE}(G)$  の正則図  $D_f$  に対して、 $R(D_f)$  は  $f$  の regular isotopy 不変量である。

**証明.**  $R(D_f)$  が R-moves(2),(3),(5) のもとで不変であることを示せばよい。まず、R-move(2) のもとで不変であることを示す。これは次の計算によりわかる。

$$\begin{aligned}
R\left(\text{Diagram 1}\right) &= AR\left(\text{Diagram 2}\right) + A^{-1}R\left(\text{Diagram 3}\right) + R\left(\text{Diagram 4}\right) \\
&= A^{-1}R\left(\text{Diagram 5}\right) \\
&\quad + A^{-1}\left(AR\left(\text{Diagram 6}\right) + A^{-1}R\left(\text{Diagram 7}\right) + R\left(\text{Diagram 8}\right)\right) \\
&\quad + AR\left(\text{Diagram 9}\right) + A^{-1}R\left(\text{Diagram 10}\right) + R\left(\text{Diagram 11}\right) \\
&= A^{-1}R\left(\text{Diagram 5}\right) + R\left(\text{Diagram 6}\right) + A^{-2}R\left(\text{Diagram 12}\right) + A^{-1}R\left(\text{Diagram 8}\right) \\
&\quad + AR\left(\text{Diagram 9}\right) - A^{-1}(A+1+A^{-1})R\left(\text{Diagram 5}\right) \\
&\quad + R\left(\text{Diagram 13}\right) + R\left(\text{Diagram 14}\right) \\
&= R\left(\text{Diagram 6}\right) - R\left(\text{Diagram 5}\right) + (A+A^{-1})R\left(\text{Diagram 8}\right) \\
&\quad + R\left(\text{Diagram 12}\right) + R\left(\text{Diagram 9}\right) - (A+1+A^{-1})R\left(\text{Diagram 8}\right) \\
&= R\left(\text{Diagram 6}\right).
\end{aligned}$$

次に、R-move(5) のもとで不変であることを示す。 $v$  を R-move(5) に現れる頂点とする。頂点  $v$  の次数についての帰納法で証明する。 $\deg(v) = 1$  のときは正則図は切断辺をもつので、R-move(5) を行う前後の正則図に対する山田多項式はどちらも 0 である。ゆえに、 $\deg(v) = 1$  のとき R-move(5) は成立する。 $\deg(v) = 2$  のときは



$$\begin{aligned}
&= (A^2 + A^{-2} + 1 + A + A^{-1})R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) + (A + A^{-1})R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) \\
&\quad + AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) \\
&\quad - AR\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \end{array}\right)R\left(\begin{array}{c} / \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \end{array}\right)R\left(\begin{array}{c} \backslash \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) \\
&\quad - R\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \end{array}\right)\left\{R\left(\begin{array}{c} / \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{c} \backslash \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)\right\} \\
&\quad + \left\{R\left(\begin{array}{c} / \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \backslash \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)\right\} + \left\{R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right)\right\} \\
&= \{A^2 + A^{-2} + 1 + A + A^{-1}\}R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) \\
&\quad \{-A(A^{-1} + 1 + A) - A^{-1} - A(A^{-1} + 1 + A)\}R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) \\
&\quad + (A + A^{-1} + 1)R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) + AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) \\
&\quad - R\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \end{array}\right)R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) + \left\{R\left(\begin{array}{c} / \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \backslash \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)\right\} \\
&= AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) \\
&\quad + \{A + A^{-1} + 1 + 1 - (A^{-1} + 1 + A)\}R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) \\
&= AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right)
\end{aligned}$$

である。一方、

$$\begin{aligned}
R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) &= AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right) \\
&= AR\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \frown \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \wedge \end{array}\right)
\end{aligned}$$

だから、

$$R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \end{array}\right)$$

である。したがって、

$$R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagup \quad \diagdown \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right)$$

である。  $\deg(v) > 3$  のときは、命題 2.6(2) と帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) &= R\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right). \end{aligned}$$

最後に、R-move(3) のもとで不変であることを示す。

$$\begin{aligned} R\left(\begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) &= AR\left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) \\ &= AR\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array}\right). \end{aligned}$$

以上より、R-moves(2),(3),(5) のもとで不変であるから  $R(D_f)$  は  $f$  の regular isotopy 不変量である。  $\square$

## 2.2 グラフの writhe による山田多項式の補正

この節では論文 [5] において導入された writhe の概念を説明し、山田多項式を ambient isotopy 不変量に正規化する方法を述べる。

**定義 2.9** 任意のグラフ  $G$  に対して、閉区間  $[0, 1]$  と同相な  $G$  の辺の有限列を  $G$  の *path* といい、円周  $S^1$  と同相な  $G$  の辺の有限列を  $G$  の *cycle* という。path (または cycle)  $\omega = e_1 \cdots e_n$  の長さ  $l(\omega)$  とは、 $e_1, \dots, e_n$  の個数  $n$  のことをいう。

ここで、 $\Omega_n = \{\omega \mid \omega \text{ は } l(\omega) = n \text{ となる path または cycle}\}$  とする。

**定義 2.10** 写像  $\sigma : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  に対して、 $G$  の  $\sigma$ -writhe とは、次の等式を満たす regular isotopy 不変量  $W : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  のことをいう。

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \end{array}\right) - \sigma(e) = W\left(\begin{array}{c} | \\ e \end{array}\right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \end{array}\right) + \sigma(e) \quad (2.3)$$

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \\ e' \end{array}\right) - \sigma(e \cup e') = W\left(\begin{array}{c} e \\ | \\ e' \end{array}\right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \\ e' \end{array}\right) + \sigma(e \cup e') \quad (2.4)$$

ただし、

$$e \cup e' = \begin{cases} e & \text{if } e = e', \\ ee' & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**定義 2.11**  $\tau_G : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\tau_G(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{if } \omega \in \Omega_1(G), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する。写像  $W : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  に対して、 $S_W$  を

$$S_W(D) = (-A)^{W(D)} R(D) \quad (D \in D_G)$$

によって定義する。

**定義 2.12** すべての頂点の次数が 3 であるグラフを *trivalent graph* または、*3-regular graph* という。

**補題 2.13** (石井 [5, 補題 2.1])  $G$  をループを含まない trivalent graph とし、 $f \in \text{SE}(G)$  の正則図  $D_f$  に対して、 $R(D_f)$  の最小次数を  $m_R(D_f)$  とかく。このとき、

- (A)  $m_R$  は  $G$  の  $\tau_G$ -writhe となる。
- (B)  $W$  を  $G$  の  $\tau_G$ -writhe とすると、 $f \in \text{SE}(G)$  の正則図  $D_f$  に対して、 $S_W(D_f)$  は  $f$  の ambient isotopy 不変量となる。

**証明.** まず、(A) から示す。山田多項式  $R(D_f)$  は regular isotopy 不変量だから、R-moves(2),(3),(5) のもとで不変である。したがって、山田多項式の最小次数  $m_R(D_f)$  も R-moves(2),(3),(5) のもとで不変である。ゆえに、 $W : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  は regular isotopy 不変量となる。 $W$  が定義 2.10 の 2 つの等式 (2.3),(2.4) を満たすことを示す。

まず、 $W$  が等式 (2.3) を確かめる。(2.1) 式より、

$$(-A)^{-2}R\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) = (-A)^2R\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right)$$

が成り立ち、

$$R\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right), R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right), R\left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right)$$

の最小次数をそれぞれ  $m_{R_1}, m_{R_2}, m_{R_3}$  とすると、

$$m_{R_1} - 2 = m_{R_2} = m_{R_3} + 2$$

となるから、

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right) - 2 = W\left(\begin{array}{c} | \\ | \\ e \end{array}\right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right) + 2$$

となる。今、 $e \in \Omega_1(G)$  であるから、 $\tau_G(e) = 2$  である。したがって、

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right) - \tau_G(e) = W\left(\begin{array}{c} | \\ | \\ e \end{array}\right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ \text{loop} \end{array}\right) + \tau_G(e)$$

である。

$W$  が等式 (2.4) を満たすことを確かめる。(2.2) 式より、

$$(-A)^{-1}R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right) = (-A)R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right)$$

が成り立ち、

$$R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right), R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right), R\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right)$$

の最小次数をそれぞれ  $m'_{R_1}, m'_{R_2}, m'_{R_3}$  とすると、

$$m'_{R_1} - 1 = m'_{R_2} = m'_{R_3} + 1$$

となるから、

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right) - 1 = W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \text{loop} \\ e' \end{array}\right) + 1$$

となる。ここで、 $G$ はループを含まないので、 $e \neq e'$ であるから、 $ee' \notin \Omega_1(G)$ より、 $\tau_G(ee') = 1$ である。したがって、

$$W\left(\begin{array}{c} e \\ \circlearrowleft \\ e' \end{array} \right) - \tau_G(ee') = W\left(\begin{array}{c} e \\ \circlearrowright \\ e' \end{array} \right) = W\left(\begin{array}{c} e \\ \circlearrowleft \\ e' \end{array} \right) + \tau_G(ee')$$

である。

次に、(B)を示す。まず、R-moves(2),(3),(5)に関しては $R(D_f)$ は不変であるから、 $R(D_f)$ の最小次数である $W(D_f)$ も不変である。したがって、 $S_W(D_f)$ は不変である。後は、R-moves(1),(4)に関して $S_W(D_f)$ が不変であることを示せばよい。

R-move(1)について：

$$\begin{aligned} S_W\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) &= (-A)^{-w}\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-m_{R_1}} R\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-m_{R_2}-2} R\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-m_{R_2}} (-A)^{-2} R\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-w}\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) \left(= S_W\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right)\right) \\ &= (-A)^{-m_{R_3}-2} R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-m_{R_3}} (-A)^{-2} R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) \\ &= (-A)^{-w}\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right) \\ &= S_W\left(\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}\right). \end{aligned}$$



R-move(4) について：

$$\begin{aligned}
S_W \left( \text{loop with dot} \right) &= (-A)^{-W} \left( \text{loop with dot} \right) R \left( \text{loop with dot} \right) \\
&= (-A)^{-m_{R_1}} R \left( \text{loop with dot} \right) \\
&= (-A)^{-m_{R_2}-2} R \left( \text{loop with dot} \right) \\
&= (-A)^{-m_{R_2}} (-A)^{-2} R \left( \text{loop with dot} \right) \\
&= (-A)^{-W} \left( \text{Y-junction} \right) R \left( \text{Y-junction} \right) \left( = S_W \left( \text{Y-junction} \right) \right) \\
&= (-A)^{-m_{R_3}-2} R \left( \text{Y-junction} \right) \\
&= (-A)^{-m_{R_3}} (-A)^{-2} R \left( \text{Y-junction} \right) \\
&= (-A)^{-W} \left( \text{loop with dot} \right) R \left( \text{loop with dot} \right) \\
&= S_W \left( \text{loop with dot} \right).
\end{aligned}$$

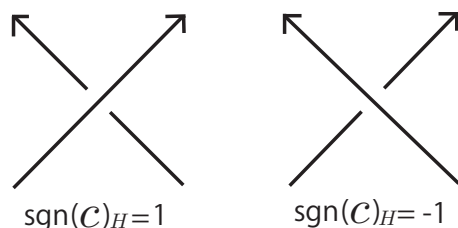
以上より、R-moves(1)~(5)のもとで不変であることが示されたので、 $S_W(D_f)$  は  $f$  の ambient isotopy 不変量である。□

## 2.3 グラフの oriented cycle の集合 $\Gamma$ に対する writhe $w_{R\Gamma}$

前節では、長さ 1 と 2 の path または cycle の集合に対して writhe を考えた。ここでは、oriented cycle の集合に対して writhe を定義する。

**定義 2.14** グラフ  $G$  の *edge orientation* とは、グラフのすべての辺の向きづけを集めたものである。すなわち、グラフ  $G$  のすべての辺に向きを付けたときの辺の向きの集合である。また、*oriented graph* とは 1 つの edge orientation をもつグラフのことをいう。

**定義 2.15**  $H$  をグラフ  $G$  の oriented subgraph (ただし、 $G$  が oriented か unoriented かは気にしない)、 $D_f$  を  $f \in \text{SE}(G)$  の 正則図、 $c$  を  $D_f$  の 1 つの 交差点 とする。このとき、 $c$  に対して  $\text{sgn}(c) \in \{-1, 0, 1\}$  を、 $c$  が  $H$  の 辺同士で 交差している、すなわち、次の 図の 2 つの 矢印がともに  $H$  の 辺であるときは、



と定め、 $c$  が  $H$  の 辺同士で 交差していない、すなわち、上の 図の 2 つの 矢印のうち 少なくとも 1 つは  $H$  の 辺でないときは、 $\text{sgn}(c)_H = 0$  と定める。そして、

$$\text{wr}(D_f)_H := \sum_{c \in C(D_f)} \text{sgn}(c)_H$$

とする。ただし、 $C(D_f)$  は  $D_f$  の 交差点の 集合である。

$G$  の oriented subgraph の 集合  $\mathcal{H}$  に対して、

$$\text{sgn}_{\mathcal{H}}(c) := \sum_{H \in \mathcal{H}} \text{sgn}(c)_H, \quad \text{wr}_{\mathcal{H}}(D_f) := \sum_{H \in \mathcal{H}} \text{wr}(D_f)_H \quad (2.5)$$

と定義する。

### 補題 2.16

$$\text{wr}_{\mathcal{H}}(D_f) = \sum_{c \in C(D_f)} \text{sgn}_{\mathcal{H}}(c).$$

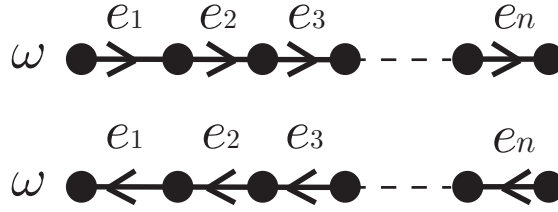
**証明.**

$$\begin{aligned} \text{wr}_{\mathcal{H}}(D_f) &= \sum_{H \in \mathcal{H}} \text{wr}(D_f)_H \\ &= \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{c \in C(D_f)} \text{sgn}(c)_H \\ &= \sum_{c \in C(D_f)} \sum_{H \in \mathcal{H}} \text{sgn}(c)_H \\ &= \sum_{c \in C(D_f)} \text{sgn}_{\mathcal{H}}(c). \end{aligned}$$

□

**定義 2.17** (closed) path の *coherent edge orientation* とは、(closed) path のすべての辺に同調した向きづけの集まりである。すなわち、path の始点から終点に進む向き、あるいは、それと反対の向きを path のすべての辺につけたときのそれらの向きの集合である。また、*coherent oriented (closed) path* とは、*coherent edge orientation* が指定された (closed) path のことをいう。

**注意.** 次の図のように、1つの path  $\omega$  に対して、2つの coherent edge orientation が存在する。



**定義 2.18**  $\omega \in \Omega_n(G)$  を unoriented (closed) path とする。 $\omega$  の 1つの coherent edge orientation を選ぶことによって  $\text{sgn}(c)_\omega$  を定義 2.15 と同様に定義する。 $\text{sgn}(c)_\omega$  は coherent edge orientation の選び方によらないことに注意する。 $\Gamma$  を  $G$  の unoriented (closed) path の集合とし、定義 2.15 の式 (2.5) に  $\mathcal{H} = \Gamma$  を代入することにより、

$$\text{sgn}_\Gamma(c) := \sum_{\omega \in \Gamma} \text{sgn}(c)_\omega, \quad \text{wr}_\Gamma(D_f) := \sum_{\omega \in \Gamma} \text{wr}(D_f)_\omega$$

が定義される。

$\omega \in \Omega_n(G)$  と  $\mathcal{H}$  ( $G$  の subgraph の集合) に対して、

$$|\mathcal{H}|_\omega = |\{H \in \mathcal{H} \mid \omega \subset H\}|$$

と定義する。ただし、右辺は  $\omega \subset H$  となる  $H \in \mathcal{H}$  の個数を表す。

**定義 2.19**  $\mathcal{H}$  の support  $\sigma_\mathcal{H}$  とは、

$$\sigma_\mathcal{H}(\omega) = |\mathcal{H}|_\omega \quad (\omega \in \Omega_1 \cup \Omega_2)$$

によって定義される写像  $\sigma_\mathcal{H} : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  のことをいう。

$\bar{\Gamma}(G)$  を  $G$  の互いに素な coherent oriented cycle からなる subgraph の集合とする。

**補題 2.20** (石井 [5, 補題 3.1])  $G$  をグラフ、 $\Gamma$  を  $\bar{\Gamma}(G)$  の部分集合とする。 $f \in \text{SE}(G)$  の正則図  $D_f$  に対して、 $\text{wr}_\Gamma(D_f)$  は  $G$  の  $\sigma_\Gamma$ -writhe である。

**証明.** まず、 $w_{\Gamma}(D_f)$  が regular isotopy 不変量であることを示す。

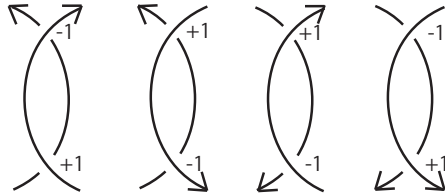
R-move(2) のもとで不変であることを、すなわち、

$$w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$$

を示す。まず、

$$\begin{aligned} w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} c_1 \\ \text{---} \\ c_2 \\ \text{---} \end{array}\right) &= \sum_{c \in C(D_f)} \text{sgn}(c)_{\gamma} \\ &= \text{sgn}(c_1)_{\gamma} + \text{sgn}(c_2)_{\gamma} + \sum_{c \in C(D_f) - \{c_1, c_2\}} \text{sgn}(c)_{\gamma}. \end{aligned}$$

ここで、



より、 $\text{sgn}(c_1)_{\gamma} + \text{sgn}(c_2)_{\gamma} = 0$  であるから、

$$w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} c_1 \\ \text{---} \\ c_2 \\ \text{---} \end{array}\right) = \sum_{c \in C(D_f) - \{c_1, c_2\}} \text{sgn}(c)_{\gamma} = w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$$

である。ゆえに、

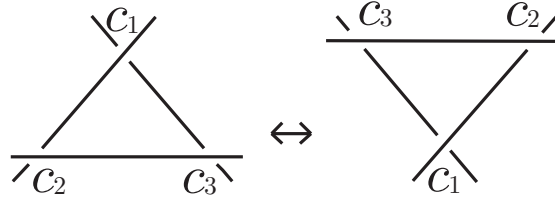
$$w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)_{\gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma} w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)_{\gamma} = w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right).$$

また、同様にして、

$$w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = w_{\Gamma}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$$

も示せる。

R-move(3)のもとで不変であることを示す。



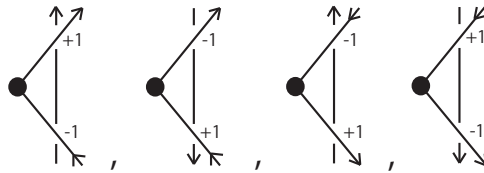
3つの交差点  $c_1, c_2, c_3$  において弧の上下関係は変化していない。弧の向きづけも変化していないので、 $\text{sgn}(c_1)_\gamma, \text{sgn}(c_2)_\gamma, \text{sgn}(c_3)_\gamma$  も変化しない。したがって、

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \hline \end{array} \right)_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right)_\gamma = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right)$$

R-move(5)のもとで不変であることを示す。すなわち、

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \hline \\ \diagleft \end{array} \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right)$$

を示す。ここで、



であるから、

$$\begin{aligned} \text{wr} \left( \begin{array}{c} c_1 \\ \bullet \\ c_2 \\ \hline \end{array} \right)_\gamma &= \text{sgn}(c_1)_\gamma + \text{sgn}(c_2)_\gamma + \sum_{c \in C(D_f) - \{c_1, c_2\}} \text{sgn}(c)_\gamma \\ &= 0 + \sum_{c \in C(D_f) - \{c_1, c_2\}} \text{sgn}(c)_\gamma \\ &= \text{wr} \left( \begin{array}{c} \hline \\ \diagleft \end{array} \right)_\gamma \end{aligned}$$

より

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \hline \end{array} \right)_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \begin{array}{c} \hline \\ \diagleft \end{array} \right)_\gamma = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \hline \\ \diagleft \end{array} \right).$$

また、同様にして

$$\text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} \right. \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right. \right)$$

も示せる。

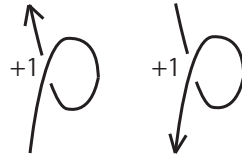
以上より、 $\text{wr}_\Gamma(D_f)$  が regular isotopy 不変量であることが示された。

次に、定義 2.10 の式 (2.3), (2.4) が満たされることを示す。

(2.3) について：

$$\text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) = \sum_{e \subset \gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma + \sum_{e \not\subset \gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma.$$

ここで



より、

$$\text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} c_1 \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma = \text{sgn}(c_1)_\gamma + \sum_{e \in C(D_f) - \{c_1\}} \text{sgn}(e)_\gamma = 1 + \text{wr} \left( \left| \right. \right)_\gamma.$$

よって、

$$\begin{aligned} \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) &= \sum_{e \subset \gamma \in \Gamma} \left( \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma + 1 \right) + \sum_{e \not\subset \gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)_\gamma + \sum_{e \subset \gamma \in \Gamma} 1 \\ &= \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) + \sigma_\Gamma(e). \end{aligned}$$

したがって、

$$\text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) - \sigma_\Gamma(e) = \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right)$$

である。また、同様にして

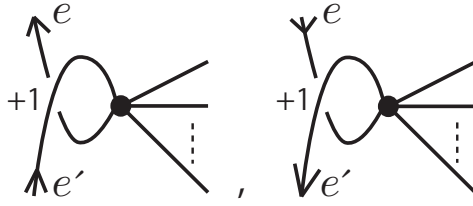
$$\text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} e \\ \rho \end{array} \right. \right) + \sigma_\Gamma(e)$$

も示せる。

(2.4) について：

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) = \sum_{e \cup e' \subset \gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma + \sum_{e \cup e' \not\subset \gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma.$$

ここで、



より、

$$\begin{aligned} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma &= \text{sgn}(c_1)_\gamma + \sum_{c \in C(D_f) - \{c_1\}} \text{sgn}(c)_\gamma \\ &= 1 + \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_\gamma \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) &= \sum_{e \cup e' \subset \gamma \in \Gamma} \left( \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma + 1 \right) + \sum_{e \cup e' \not\subset \gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)_\gamma + \sum_{e \cup e' \subset \gamma \in \Gamma} 1 \\ &= \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) + \sigma_\Gamma(e \cup e'). \end{aligned}$$

したがって、

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) - \sigma_\Gamma(e \cup e') = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right)$$

である。また、同様にして

$$\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} e \\ \text{---} \\ e' \end{array} \right) + \sigma_\Gamma(e \cup e')$$

も示せる。

したがって、 $\text{wr}_\Gamma(D_f)$  は  $G$  の  $\sigma_\Gamma$ -writhe である。

□

## 2.4 $w_{r\Gamma}$ による山田多項式の正規化と Vassiliev 不変量

石井 [5] は前節で導入した特別な writhe  $w_{r\Gamma}$  を使って山田多項式を正規化し、 $A$  に  $e^x$  を代入すると、 $x^i$  の係数が位数  $i$  以下の Vassiliev 不変量になることを示した。ここでは、その結果を説明する。

**定理 2.21** (石井 [5, 定理 4.1])  $G$  を support が  $\tau_G$  である  $\Gamma \subset \bar{\Gamma}(G)$  をもつ trivalent graph とする。 $f \in \text{SE}(G)$  の正則図  $D_f$  に対して

$$S_{w_{r\Gamma}}(D_f) = (-A)^{-w_{r\Gamma}(D_f)} R(D_f)$$

と定めると、これは  $f$  の ambient isotopy 不変量である。さらに、 $S_{w_{r\Gamma}}(D_f)$  に対して次のことが成り立つ。

(1)

$$S_{w_{r\Gamma}} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = a_1 S_{w_{r\Gamma}} \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) + a_2 S_{w_{r\Gamma}} \left( \begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \end{array} \right) + a_3 S_{w_{r\Gamma}} \left( \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right).$$

ただし、 $a_1 = A^{-2\text{sgn}_\Gamma(c)}(A^2 + A^{-2} + A^{-4})$ ,  $a_2 = -A^{-4\text{sgn}_\Gamma(c)}(1 + A^{-2} + A^{-6})$ ,  $a_3 = A^{-6\text{sgn}_\Gamma(c)-4}$  である。

(2)  $S_{w_{r\Gamma}}(f)|_{A=e^x}$  を変数  $x$  のべき級数で表示する。

$$S_{w_{r\Gamma}}(f)|_{A=e^x} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(f)x^i.$$

このとき、 $u_i$  は位数が高々  $i$  の Vassiliev 不変量である。

**注意.** 山田多項式の最小次数  $m_R$  を用いても正規化できるが、これで正規化したものからは Vassiliev 不変量は得られない。また、 $G$  が  $\theta$ -グラフの場合、 $S_{w_{r\Gamma}}$  は twisting number を用いた山田による正規化と一致する。(2) については、 $\theta$ -グラフの場合、Huh と Jin[4] により示されている。

**定理 2.21 の証明.** まず、 $S_{w_{r\Gamma}}(D_f)$  が  $f$  の ambient isotopy 不変量であることを示す。補題 2.13 と補題 2.20 より  $G$  はループをもたないことを示せば十分である。 $G$  がループ  $\omega \in \Omega_1(G)$  をもつと仮定すると、

$$|\Gamma|_\omega = |\{\gamma \in \Gamma \mid \omega \subset \gamma\}| = 1$$

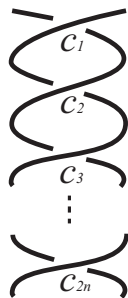
となる。しかし、 $\Gamma$  の support は  $\tau_G(\omega) = 2$  ( $\omega \in \Omega_1(G)$ ) であるから、 $\tau_G(\omega) \neq |\Gamma|_\omega$  となり、矛盾が生じる。したがって、 $G$  はループをもたない。よって、 $S_{w_{r\Gamma}}(D_f)$  は  $f$  の ambient isotopy 不変量である。

(1) を示す。山田多項式の定義より、次の等式が成り立つ。

$$R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = b_1 R \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) + b_2 R \left( \begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \end{array} \right) + b_3 R \left( \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right).$$



ただし、 $b_1 = A^2 + A^{-2} + A^{-4}$ ,  $b_2 = -1 - A^{-2} + A^{-6}$ ,  $b_3 = A^{-4}$  である。また、



に対して、



のように向きがついているとき、

$$\text{sgn}(c_1)_\gamma = \text{sgn}(c_1)_\gamma = \text{sgn}(c_2)_\gamma = \text{sgn}(c_3)_\gamma = \cdots = \text{sgn}(c_{2n})_\gamma = +1$$

であり、



のように向きがついているとき、

$$\text{sgn}(c_1)_\gamma = \text{sgn}(c_1)_\gamma = \text{sgn}(c_2)_\gamma = \text{sgn}(c_3)_\gamma = \cdots = \text{sgn}(c_{2n})_\gamma = -1$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \text{wr}_\Gamma \left( \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right\}^{2n} \right) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right\}^{2n} \right)_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right)_\gamma + 2n \text{sgn}(c)_\gamma \right\} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{wr} \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right)_\gamma + 2n \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{sgn}(c)_\gamma = \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) + 2n \text{sgn}_\Gamma(c) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + 2 \text{sgn}_\Gamma(c), \quad \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) + 4 \text{sgn}_\Gamma(c), \\ \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= \text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + 6 \text{sgn}_\Gamma(c) \end{aligned}$$

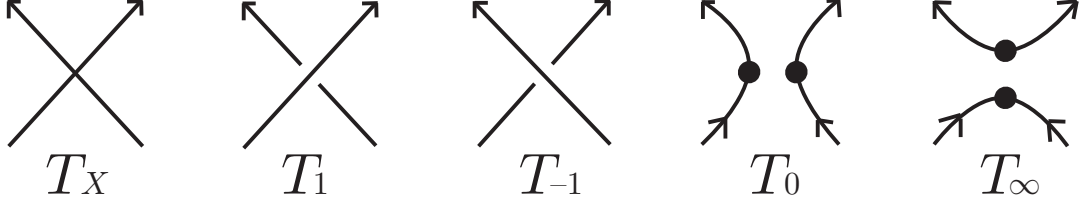
を得る。よって、

$$\begin{aligned} S_{\text{wr}_\Gamma} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= (-A)^{-\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)} R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\ &= (-A)^{-\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)} \left\{ b_1 R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + b_2 R \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) + b_3 R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \right\} \\ &= (-A)^{\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - 2 \text{sgn}_\Gamma(c)} b_1 R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\ &\quad + (-A)^{\text{wr}_\Gamma \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) - 2 \text{sgn}_\Gamma(c)} b_2 R \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) \\ &\quad + (-A)^{\text{wr}_\Gamma \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - 6 \text{sgn}_\Gamma(c)} b_3 R \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\ &= a_1 S_{\text{wr}_\Gamma} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + a_2 S_{\text{wr}_\Gamma} \left( \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| \right) + a_3 S_{\text{wr}_\Gamma} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \end{aligned}$$

(2) を示す。  $G$  の辺に向きを与え、  $\mathcal{H}$  をその有向部分グラフ全体の集合とする。ただし、各  $H \in \mathcal{H}$  の edge orientation は  $G$  の edge orientation とは無関係とする。  $D_{X \dots X}$  を  $n$  個の二重点をもつ  $f \in \text{SE}_X(G)$  の正則図とする。簡単のため、  $S_{\text{wr}_\mathcal{H}}$  を  $S_\mathcal{H}$  とかく。  $S_\mathcal{H}$  は一般に ambient isotopy 不変量ではないが、  $G$  の edge orientation に関

する Vassiliev skein relation を用いて  $S_{\mathcal{H}}$  を定義する。  $S_{\mathcal{H}}(D_{X\dots X}) = (A-1)^n P$  ( $P \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ ) とかけることを示す。

$D_{X\dots X}$  の  $n$  個の二重点を  $T_X^{(1)}, \dots, T_X^{(n)}$  とかく。  $D_{j_1\dots j_n}$  を任意の  $i$  に対して、  $T_X^{(i)}$  を  $T_{j_i}^{(i)}$  ( $j_i \neq X$ ) におきかえることにより、  $D_{X\dots X}$  から得られる正則図とする。ただし、  $T_{j_i}^{(i)}$  は



である。  $T_{j_i}^{(i)}$  が  $D_{X\dots X}$  から得られた正則図  $D_{j_1\dots j_n}$  の二重点であることを強調したいとき  $T_{j_1\dots j_n}^{(i)}$  とかく。また、正則図が  $D_{0X\dots X}, D_{\infty X\dots X}$  であるグラフをそれぞれ  $G_0, G_\infty$  とかく。そして、  $H \in \mathcal{H}$  に対して、  $G_0, G_\infty$  の部分グラフであって、おきかえた二重点に対応する部分以外は  $H$  と全く同じグラフをそれぞれ  $H_0, H_\infty$  とかく。さらに、各  $H$  対して、このような  $H_0, H_\infty$  を集めた集合をそれぞれ  $\mathcal{H}_0 = \{H_0 \mid H \in \mathcal{H}\}$ ,  $\mathcal{H}_\infty = \{H_\infty \mid H \in \mathcal{H}\}$  とする。命題 2.6 の (1) 式より、  $j_2, \dots, j_n \in \{1, -1\}$  に対して、

$$R(D_{1j_2\dots j_n}) - R(D_{-1j_2\dots j_n}) = (A - A^{-1})(R(D_{0j_2\dots j_n}) - R(D_{\infty j_2\dots j_n}))$$

を得る。

$$\begin{aligned} \text{wr}_{\mathcal{H}}(D_{1j_2\dots j_n}) - \text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{1j_2\dots j_n}^{(1)}) &= \text{wr}_{\mathcal{H}_0}(D_{0j_2\dots j_n}) = \text{wr}_{\mathcal{H}_\infty}(D_{\infty j_2\dots j_n}), \\ \text{wr}_{\mathcal{H}}(D_{-1j_2\dots j_n}) - \text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{-1j_2\dots j_n}^{(1)}) &= \text{wr}_{\mathcal{H}_0}(D_{0j_2\dots j_n}) = \text{wr}_{\mathcal{H}_\infty}(D_{\infty j_2\dots j_n}) \end{aligned}$$

であるから、  $j_2, \dots, j_n \in \{1, -1\}$  に対して、

$$\begin{aligned} (-A)^{-\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{1j_2\dots j_n}^{(1)})} S_{\mathcal{H}}(D_{1j_2\dots j_n}) - (-A)^{-\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{-1j_2\dots j_n}^{(1)})} S_{\mathcal{H}}(D_{-1j_2\dots j_n}) \\ = (A - A^{-1})(S_{\mathcal{H}_0}(D_{0j_2\dots j_n}) - S_{\mathcal{H}_\infty}(D_{\infty j_2\dots j_n})) \end{aligned}$$

を得る。また、任意の  $j_2, \dots, j_n, k_2, \dots, k_n$  に対して、  $\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(1)}) = \text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{j_1 k_2 \dots k_n}^{(1)})$  であるから、

$$\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{j_1}^{(1)}) = \text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(1)})$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} (-A)^{-\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_1^{(1)})} S_{\mathcal{H}}(D_{1X\dots X}) - (-A)^{-\text{sgn}_{\mathcal{H}}(T_{-1}^{(1)})} S_{\mathcal{H}}(D_{-1X\dots X}) \\ = (A - A^{-1})(S_{\mathcal{H}_0}(D_{0X\dots X}) - S_{\mathcal{H}_\infty}(D_{\infty X\dots X})) \end{aligned}$$

を得る。すなわち、ある  $a_j \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  に対して、

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{H}}(D_{XX\dots X}) &= S_{\mathcal{H}}(D_{1X\dots X}) - S_{\mathcal{H}}(D_{-1X\dots X}) \\ &= (A-1) \sum_{j \in \{1, -1, 0, \infty\}} a_j S_{\mathcal{H}}(D_{jX\dots X}) \end{aligned}$$

とかける。これで、ある  $P \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  に対して、 $S_{\mathcal{H}}(D_{X\dots X}) = (A-1)^n P$  となることが示された。□

## 2.5 Main Results

金信の公式 (定理 1.24) を用いると、定理 2.21 で与えられた正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量をコンウェイ多項式の 2 次係数を用いて計算するための公式を導くことができる。

定理 2.21 より、正規化された山田多項式  $S_{\text{wr}}(f)|_{A=e^x}$  を変数  $x$  でべき級数展開したときの  $x^2$  の係数  $u_2(f)$  は位数 2 以下の Vassiliev 不変量である。したがって、 $f$  を  $\theta$ -グラフの  $\mathbb{S}^3$  への埋め込み  $T$  とすると (すなわち、グラフを  $\theta$ -グラフに制限する)、 $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量  $u_2(T)$  が得られる。これに、定理 1.24 を適用すると、 $u_2(T)$  は定数不変量とコンウェイ多項式の 2 次係数の 4 つの基底でかけることが分かる。そして、定理 1.24 の式の定数  $A$  と  $B_i$  を計算することにより、以下の公式を得る<sup>1</sup>。

**定理 2.22**  $T : \theta \rightarrow \mathbb{S}^3$  を  $\theta$ -グラフ  $\theta$  の  $\mathbb{S}^3$  への埋め込み、 $u_2$  を  $S_{\text{wr}}(T)|_{A=e^x}$  を変数  $x$  でべき級数展開したときの  $x^2$  の係数、 $a_2$  をコンウェイ多項式の 2 次係数とする。このとき、

$$u_2(T) = -5 + 24 \sum_{i=1}^3 a_2(K_i(T))$$

が成り立つ。すなわち、定理 1.24 の式において  $A = u_2(U) = -5$ ,  $B = u_2(M_i^2) = 24$  ( $i = 1, 2, 3$ ) である。

<sup>1</sup>この論文を書き終えた後、定理 2.22 の公式は、2008 年に半谷により修士論文 (東京女子大学) の定理 3.7 で示されていることを知った。

**証明.** まず、 $u_2(U) = -5$  を示す。

$$\begin{aligned}
R\left(\textcircled{\updownarrow}\right) &= R\left(\textcircled{\bullet}\right) + R\left(\textcircled{\bullet}\right) \\
&= R\left(\textcircled{\bullet}\right) - R\left(\textcircled{\bullet}\right)R\left(\textcircled{\bullet}\right) \\
&= (A^{-1} + 1 + A) - (A^{-1} + 1 + A)^2 \\
&= (A^{-1} + 1 + A)\{1 - (A^{-1} + 1 + A)\} \\
&= (A^{-1} + 1 + A)(-A^{-1} - A) \\
&= -A^{-2} - A^{-1} - 2 - A - A^2
\end{aligned}$$

である。また、 $\text{wr}_\Gamma(U) = 0$  だから、 $S_{\text{wr}_\Gamma}(U) = -A^{-2} - A^{-1} - 2 - A - A^2$  である。したがって、 $u_2(U) = -2 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 2 = -5$  である。

次に、 $u_2(M_i^2) = 24$  を示す。正規化された山田多項式の値は辺の順序づけと向きによらないから、 $S_{\text{wr}_\Gamma}(M_1^2) = S_{\text{wr}_\Gamma}(M_2^2) = S_{\text{wr}_\Gamma}(M_3^2)$ 、よって、 $u_2(M_i^2)$  の値を求めればよい。

$$\begin{aligned}
S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) &= S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) - S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) \\
&= S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) - S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) \\
&\quad - S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) + S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) \\
&= S_{\text{wr}_\Gamma}(U) - S_{\text{wr}_\Gamma}(U) - S_{\text{wr}_\Gamma}(U) + S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) \\
&= S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\updownarrow}\right) - S_{\text{wr}_\Gamma}(U).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
R\left(\textcircled{\updownarrow}\right) &= R\left(\textcircled{\bullet}\right) + R\left(\textcircled{\bullet}\right) \\
&= R(\text{Tr}) + \left\{ R\left(\textcircled{\bullet}\right) - R\left(\textcircled{\bullet}\right) \right\} \\
&= R(\text{Tr}) + A^{-2}R\left(\textcircled{\bullet}\right) - A^{-4}R\left(\textcircled{\bullet}\right) \\
&= R(\text{Tr}) - A^{-3}R(U) - A^{-6}R(\textcircled{\bullet})
\end{aligned}$$

である。ただし、 $Tr$  は三葉結び目、 $U$  は自明な  $\theta$ -curve、 $\bigcirc$  は自明な結び目である。ここで、 $R(Tr)$  を求める。

$$\begin{aligned}
R\left(\text{Tr}\right) &= AR\left(\text{Tr}\right) + A^{-1}R\left(\text{Tr}\right) + R\left(\text{Tr}\right) \\
&= A\left\{ AR\left(\text{Tr}\right) + A^{-1}R\left(\text{Tr}\right) + R\left(\text{Tr}\right) \right\} \\
&\quad + A^{-5}R\left(\bigcirc\right) \\
&\quad + \left\{ R\left(\text{Tr}\right) - R\left(\text{Tr}\right) \right\} \\
&= A^4R\left(\bigcirc\right) + A^{-1}R\left(\bigcirc\right) \\
&\quad + A\left\{ R\left(\text{Tr}\right) - R\left(\text{Tr}\right) \right\} \\
&\quad + A^{-5}R\left(\bigcirc\right) + A^{-2}R(U) - A^{-4}R\left(\bigcirc\right) \\
&= (A^{-2} - 1)R(U) + (A^{-5} - A^{-4} + A^{-2} - A^{-1} + A^4)R(\bigcirc).
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
R\left(\text{Tr}\right) &= (-A^{-3} + A^{-2} - 1)R(U) \\
&\quad + (-A^{-6} + A^{-5} - A^{-4} + A^{-2} - A^{-1} + A^4)R(\bigcirc) \\
&= (-A^{-3} + A^{-2} - 1)(-A^{-2} - A^{-1} - 2 - A - A^2) \\
&\quad + (A^{-5} - A^{-4} + A^{-2} - A^{-1} + A^4)(A^{-1} + 1 + A) \\
&= -A^{-7} + A^{-3} + A^{-1} + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5
\end{aligned}$$

である。また、

$$wr_{\Gamma}\left(\text{Tr}\right) = 3$$

であるから、

$$\begin{aligned}
S_{wr_{\Gamma}}\left(\text{Tr}\right) &= (-A^{-3})R\left(\text{Tr}\right) \\
&= A^{-10} - A^{-6} - A^{-4} - A^{-2} - A^{-1} - 1 - A - A^2
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
S_{\text{wr}\Gamma} \left( \text{Diagram 1} \right) &= S_{\text{wr}\Gamma} \left( \text{Diagram 2} \right) - S_{\text{wr}\Gamma}(U) \\
&= (A^{-10} - A^{-6} - A^{-4} - A^{-2} - A^{-1} - 1 - A - A^2) \\
&\quad - (-A^{-2} - A^{-1} - 2 - A - A^2) \\
&= A^{-10} - A^{-6} - A^{-4} + 1
\end{aligned}$$

より、 $B_i = u_2(M_i^2) = 50 - 18 - 8 + 0 = 24$  である。 □

コンウェイ多項式  $\nabla_K(z)$  の係数は整数である [8, 定理 3.2.8]。このことから、定理 2.22 の応用として次の系を得る。

**系 2.23** 任意の  $\theta$ -curve  $T$  に対して、 $u_2(T)$  は 0 でない整数値をとる。さらに、

- (1)  $u_2(T) \equiv 3 \pmod{8}$ .
- (2)  $u_2(T) \equiv 2 \pmod{3}$ .
- (3)  $u_2(T) \equiv -\sum_{i=1}^3 a_2(K_i(T)) \pmod{5}$ .

### 3 Appendix ( $\theta$ -curve に対する正規化された山田多項式と位数 3 以下の Vassiliev 不変量)

この章では、第 2.5 節と同様にして、正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量  $u_3$  をコンウェイ多項式の 2 次係数、3 次係数とジョーンズ多項式の第 3 次導関数を用いて計算するための公式を導く。そして、この公式をもとにして、 $u_3$  は任意の  $\theta$ -curve に対して偶数値をとることを示す。

#### 3.1 ジョーンズ多項式

主結果を述べるための準備として、まずは、絡み目に対する多項式型の不変量であるジョーンズ多項式の定義と性質について説明する。

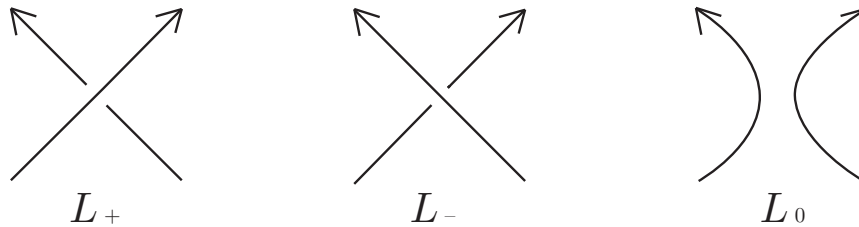
**定義 3.1** (ジョーンズ多項式). 絡み目  $L$  の **ジョーンズ多項式**  $V(L; t)$  とは次の (1), (2), (3) によって定義される  $t^{\frac{1}{2}}$  を不定元とするローラン多項式のことである。

(1)  $L \approx L'$  (ambient isotopic) であるとき  $V(L; t) = V(L'; t)$ .

(2)  $L$  が  $k$  成分から成る自明な絡み目であるとき  $V(L; t) = \left(\frac{-(t+1)}{\sqrt{t}}\right)^{k-1}$ .

(3)  $tV(L_+; t) - t^{-1}V(L_-; t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0; t) = 0$ .

ここで、 $L_+, L_-, L_0$  は絡み目の正則図のある 1 つの交差点の近くで次の図のように異なり、ほかの部分では同じ正則図をもつ、3 つの絡み目 (または結び目) である。



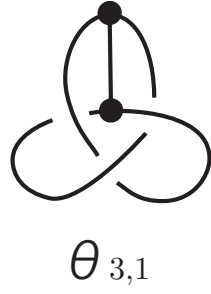
ジョーンズ多項式に関して、金信と宮沢 [12] によって次のことが示されている。

**定理 3.2** (金信-宮沢 [12, 補題 3]). ジョーンズ多項式  $V(L; t)$  の第  $n$  次導関数の  $t = 1$  における値  $V^{(n)}(L; 1)$  は位数  $n$  以下の Vassiliev 不変量である。□

#### 3.2 Additional Main Results

$\theta_{3,1}$  を次の左図、 $\theta_{4,1}$  を次の右図のような  $\theta$ -curve とする。また、 $\theta_{3,1}$  を  $\theta_{3,1}$  の鏡像とする。





金信 [6] は  $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量について次の結果を示した。

**定理 3.3** (金信 [6, 定理 3])  $\theta$  を  $\theta$ -グラフ、 $v$  を  $\theta$  の  $\mathbb{S}^3$  への埋め込み  $T$  に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量で、 $\theta$ -curve  $T$  の辺の順序と向きによらないとする。このとき、

$$v(T) = A + B \sum_{i=1}^3 a_2(K_i(T)) + C \sum_{i=1}^3 V^{(3)}(K_i(T); 1) + Da_3(S)$$

が成り立つ。ただし、

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(U) \\ v(\theta_{3,1}) \\ v(\theta_{3,1}!) \\ v(\theta_{4,1}) \end{bmatrix},$$

$a_i$  ( $i = 2, 3$ ) はコンウェイ多項式の  $i$  次係数、 $V^{(3)}$  はジョーンズ多項式の第 3 次導関数、 $S$  は  $L(T)$  (第 1.6 節を参照) の任意の 2 成分から成る sublink である。さらに、 $\{c, \sum_{i=1}^3 a_2(K_i(T)), \sum_{i=1}^3 V^{(3)}(K_i(T); 1), a_3(S)\}$  は  $\theta$ -curve に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間  $\mathcal{V}_3$  の基底である。ただし、 $c$  はすべての  $T$  に対して、1 を対応させる定数不変量である。  $\square$

正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量  $u_3(T)$  に定理 3.3 を適用すると、 $u_3(T)$  は定数不変量とコンウェイ多項式の 2 次係数、3 次係数とジョーンズ多項式の第 3 次導関数を用いてかけることが分かる。そして、 $u_3(U), u_3(\theta_{3,1}), u_3(\theta_{3,1}!), u_3(\theta_{4,1})$  を計算することによって、定理 3.3 の式の定数  $A, B, C, D$  が定まり、以下の公式を得る。

**定理 3.4**  $T : \theta \rightarrow \mathbb{S}^3$  を  $\theta$ -グラフ  $\theta$  の  $\mathbb{S}^3$  への埋め込み、 $u_3$  を  $S_{\text{wrt}}(T)|_{A=e^x}$  を変数  $x$  でべき級数展開したときの  $x^3$  の係数、 $a_i$  ( $i = 2, 3$ ) をコンウェイ多項式の  $i$  次係

数、 $V^{(3)}$  をジョーンズ多項式の第3次導関数、 $S$  を  $L(T)$  の任意の2成分から成る sublink とする。このとき、

$$u_3(T) = -132 \sum_{i=1}^3 a_2(K_i(T)) + 22 \left( \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 V^{(3)}(K_i(T); 1) \right) - 144a_3(S)$$

が成り立つ。すなわち、 $u_3(U) = 0$ ,  $u_3(\theta_{3,1}) = 120$ ,  $u_3(\theta_{3,1}!) = -120$ ,  $u_3(\theta_{4,1}) = 144$  である。

**証明.** まず、 $u_3(U) = 0$  を示す。定理 2.22 の証明より、 $S_{\text{wrt}}(U) = -A^{-2} - A^{-1} - 2 - A - A^2$  である。したがって、 $u_3(U) = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{8}{6} = 0$  である。

次に、 $u_3(\theta_{3,1}!) = -120$  を示す。定理 2.22 の証明より、

$$S_{\text{wrt}} \left( \text{Diagram} \right) = A^{-10} - A^{-6} - A^{-4} - A^{-2} - A^{-1} - 1 - A - A^2$$

である。よって、 $u_3(\theta_{3,1}!) = -\frac{1000}{6} + \frac{216}{6} + \frac{64}{6} + \frac{8}{6} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{8}{6} = -120$  である。

次に、 $u_3(\theta_{3,1}) = 120$  を示す。正則図  $D$  の鏡像  $D!$  に対して、 $R(D!)(A) = R(D)(A^{-1})$  である [8, 命題 5.1.13]。したがって、

$$R(\theta_{3,1})(A) = R(\theta_{3,1}!)(A^{-1}) = A^{-5} + A^{-4} + A^{-3} + A^{-2} + A^{-1} + A + A^3 - A^7.$$

また、 $\text{wrt}_\Gamma(\theta_{3,1}) = -3$  である。したがって、

$$\begin{aligned} S_{\text{wrt}}(\theta_{3,1}) &= (-A)^3 R(\theta_{3,1}) \\ &= -A^{-2} - A^{-1} - 1 - A - A^2 - A^4 - A^6 + A^{10}. \end{aligned}$$

よって、 $u_3(\theta_{3,1}) = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{8}{6} - \frac{64}{6} - \frac{216}{6} + \frac{1000}{6} = 120$  である。

最後に、 $u_3(\theta_{4,1}) = 144$  を示す。

$$\begin{aligned} R \left( \text{Diagram} \right) &= R \left( \text{Diagram} \right) + R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= R(\text{Fi}) + \left\{ R \left( \text{Diagram} \right) - R \left( \text{Diagram} \right) \right\} \\ &= R(\text{Fi}) + A^{-2}R(\text{Ha}) - A^{-4}R(\text{Ho}). \end{aligned}$$

ただし、Fi は figure eight knot, Ha は hand cuff グラフ, Ho は Hopf link である。ここで、

$$\begin{aligned} R(\text{Fi}) &= (-A - A^2 + A^3)R(\text{Ho}) + (A^{-3} - 2A^{-1})R(U) \\ &\quad + (A^{-6} - A^{-5} + 2A^{-3} - A^{-2} + A^3)R(\bigcirc) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} R\left(\textcircled{\text{S}}\right) &= A^{-2}R(\text{Ha}) + (-A^{-4} - A - A^2 + A^3)R(\text{Ho}) \\ &\quad + (A^{-3} - 2A^{-1})R(U) + (A^{-6} - A^{-5} + 2A^{-3} - A^{-2} + A^3)R(\text{O}). \end{aligned}$$

また、 $A^{-2}R(\text{Ha}) = A^{-2}R(\text{Ho}) + R(U) + A^2R(\text{O})$  であるから、

$$\begin{aligned} R\left(\textcircled{\text{S}}\right) &= (-A^{-4} + A^{-2} - A - A^2 + A^3)R(\text{Ho}) + (A^{-3} - 2A^{-1} + 1)R(U) \\ &\quad + (A^{-6} - A^{-5} + 2A^{-3} - A^{-2} + A^2 + A^3)R(\text{O}). \end{aligned}$$

さらに、 $R(\text{Ho}) = (A^{-3} - A^2 + A^3)R(\text{O}) - AR(U)$  より、

$$\begin{aligned} R\left(\textcircled{\text{S}}\right) &= (2A^{-3} - 3A^{-1} + 1 + A^2 + A^3 - A^4)R(U) \\ &\quad + (-A^{-7} + A^{-6} + 2A^{-3} - A^{-2} - 2A^{-1} + A + A^2 + 2A^3 - 2A^5 + A^6)R(\text{O}) \\ &= -A^{-8} - A^{-5} - A^{-2} - 1 + 2A + A^2 + A^3 - A^5 + A^7 \end{aligned}$$

である。また、

$$\text{wr}_\Gamma\left(\textcircled{\text{S}}\right) = -2$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_{\text{wr}_\Gamma}\left(\textcircled{\text{S}}\right) &= (-A)^{-2}R\left(\textcircled{\text{S}}\right) \\ &= -A^{-6} - A^{-3} - 1 - A^2 + 2A^3 + A^4 + A^5 - A^7 + A^9. \end{aligned}$$

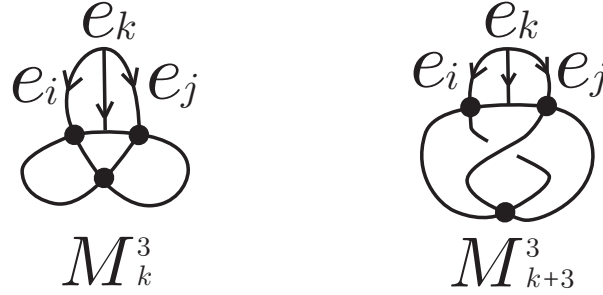
よって、 $u_3(\theta_{4,1}) = \frac{216}{6} + \frac{27}{6} + 0 - \frac{8}{6} + \frac{54}{6} + \frac{64}{6} + \frac{125}{6} - \frac{343}{6} + \frac{729}{6} = 144$  である。  $\square$

定理 3.4 の応用として次の系を得る。

**系 3.5** 任意の  $\theta$ -curve  $T$  に対して、

- (1)  $u_3(T)$  は偶数である。
- (2)  $u_3(T) \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 V^{(3)}(K_i(T); 1) \pmod{3}$ .
- (3)  $u_3(T) \equiv -a_3(S) \pmod{11}$ . ただし、 $S$  は  $L(T)$  の任意の 2 成分から成る sublink である。

**証明.**  $M_k^3$  を次の左図、 $M_{k+3}^3$  を次の右図のような 3 個の二重点をもつ  $\theta$ -curve とする。



(1) を示す。金信 [6] によって、 $\theta$ -curve  $T$  に対する位数 3 以下の Vassiliev 不変量  $v$  は

$$v(T) = v(U) + \sum_{j=1}^3 m_j v(M_j^2) + \sum_{k=1}^6 n_k v(M_k^3) \quad (3.1)$$

であることが示されている。ただし、 $m_j, n_k$  はある整数である。さらに、

$$v(M_1^3) - 2v(M_4^3) = v(M_2^3) - 2v(M_5^3) = v(M_3^3) - 2v(M_6^3) \quad (3.2)$$

を式 (3.1) に代入することにより、

$$v(T) = v(U) + \sum_{j=1}^3 p_j v(M_j^2) + \sum_{k=1}^4 q_k v(M_k^3) \quad (3.3)$$

であることが示されている。ただし、 $p_j, q_k$  はある有理数である。式 (3.2) より、

$$v(M_5^3) = -\frac{1}{2}v(M_1^3) + \frac{1}{2}v(M_2^3) + v(M_4^3), \quad v(M_6^3) = -\frac{1}{2}v(M_1^3) + \frac{1}{2}v(M_3^3) + v(M_4^3)$$

であるから、 $q_1, \dots, q_4$  は  $n_1, \dots, n_6$  を用いて次のように表される。

$$q_1 = n_1 - \frac{1}{2}n_5 - \frac{1}{2}n_6, \quad q_2 = n_2 + \frac{1}{2}n_5, \quad q_3 = n_3 + \frac{1}{2}n_6, \quad q_4 = n_4 + n_5 + n_6. \quad (3.4)$$

ここで、 $v = u_3$  とすると、式 (3.3) より、

$$u_3(T) = \sum_{j=1}^3 p_j u_3(M_j^2) + \sum_{k=1}^4 q_k u_3(M_k^3)$$

である。また、 $u_3(M_1^3) = u_3(M_2^3) = u_3(M_3^3) = u_3(\theta_{3,1}) - u_3(\theta_{3,1}!) = 240$ 、 $u_3(M_4^3) = u_3(\theta_{3,1}) + u_3(\theta_{4,1}!) - 2u_3(U) = -24$  であるから、式 (3.4) より、 $\sum_{k=1}^4 q_k u_3(M_k^3)$  は

偶数である。また、金信により、 $p_j = a_2(K_j(T))$  ( $j = 1, 2, 3$ ) であることが示されていて、 $u_3(M_1^2) = u_3(M_2^2) = u_3(M_3^2) = u_3(\theta_{3,1}) - u_3(U) = -120$  であるから、 $\sum_{j=1}^3 p_j u_3(M_j^2)$  も偶数である。したがって、 $u_3(T)$  は偶数である。

また、(2), (3) は (1) より直ちに従う。  $\square$

**注意.** 論文 [6] の (25) 式と (3.4) 式を用いると、 $V^{(3)}(K_i(T); 1)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は 3 の倍数となることが分かるが、ここでは、より直接的に  $u_3(T)$  が偶数であることを示した。

## 謝辞

この研究テーマに関して有益な助言を与えてくださいました筑波大学の石井敦先生に感謝します。そして、2年間のセミナーで丁寧に、かつ熱心にご指導してくださいました指導教諭の和久井道久先生に感謝します。

## 参考文献

- [1] J.S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math **111**, (1993), 225–270.
- [2] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev knot invariants*, Cambridge University Press, 2012.
- [3] C. Hangai (半谷 千春), 空間グラフの Vassiliev type invariant と Yamada polynomial, 東京女子大学大学院修士論文, (2008).
- [4] Y. Huh and G.T. Jin,  $\theta$ -curve polynomials and finite-type invariants, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **11**, (2002), 555–564.
- [5] A. Ishi, *On normalizations of a regular isotopy invariant for spatial graphs*, International Journal of Mathematics **22**, (2011), 1545–1559.
- [6] T. Kanenobu, *Vassiliev-type invariant of a theta-curve*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **6**, (1997), 455–477.

- [7] L. Kauffman, J. Simon, K. Wolcott and P. Zhao, *Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space*, *Topology and its Applications* **49**, (1993), 193–216.
- [8] K. Kobayashi (小林 一章), 『空間グラフの理論』, 培風館, 1995.
- [9] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links, and graphs*, *Topology* **35**, (1996), 1027–1050.
- [10] V.A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, *Advanced in Soviet Math.* **1**, 1990.
- [11] S. Yamada, *An invariant of spatial graphs*, *J. of Graph theory* **13**, (1989), 537–551.
- [12] T. Kanenobu and Y. Miyazawa, *Homfly polynomials as Vassiliev link invariants*, *Knot theory (Warsaw, 1995)*, 165–185, Banach Center Publ. **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.
- [13] H. Yoshida (吉田 英生), 正規化された山田多項式から得られる  $\theta$ -curve に対する Vassiliev 不変量, 関西大学大学院修士論文, (2014).