

数の繰り返し模様の数理

和久井道久 (関西大学システム理工学部)

2021年11月6日

高大連携セミナー「関大の研究を体験する」

関西大学千里山キャンパスにて

目次

- §1. 正多角形の分割と分割の総数
- §2. 正多角形の分割から数の繰り返し模様へ
- §3. 繰り返し模様の発展—数から変数へ—

付録. Excel で CCF とそれを基礎にした繰り返し模様を作成する方法

このノートは、2021年11月6日に関西大学千里山キャンパスで開催された高大連携セミナー「関大の研究を体験する」において、私が講義した際に配布した資料を元に作成されている。HPに掲載するにあたり、一部を書き改め、付録と文献を追加した。

上記のセミナーは理工系のさまざまな学科の先生が講義と実験を行って、体験を通じて理工系の楽しさを実感してもらうことを目的に開催され、今回は現役高校生約30名(事前申し込み制・抽選)が参加した。高1から高3までバランスの良い割合だった。

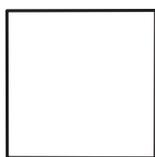
セミナーではスライドを用いて、約50分にわたり講義を行ったが、途中で「問題」を考察する時間を各1分程度設けた(最後まで解くためには到底1分では足りないが、ほんの少しでも「素材」に触れてもらいたいとの思いからそうした)。質問は出なかったが理解しようとする意欲は高く感じられ、そのことは講義後のアンケート・感想からも十分に受け取ることができた。講義終了後の質疑応答の時間に、初期データから自動でCCFを生成して、それをさらに繰り返し模様に変換するExcelファイルを見せた(作り方は付録を参照)。講義後のアンケート・感想に、それがとてもおもしろかったと書いてくれた学生がいて、嬉しかった。

§1. 正多角形の分割と分割の総数

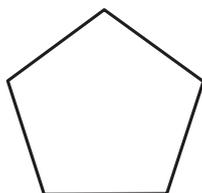


問 1 正多角形を、新たに頂点を加えずに三角形に分割する方法は何通りあるか？但し、回転で移りあうものは同じと考える。

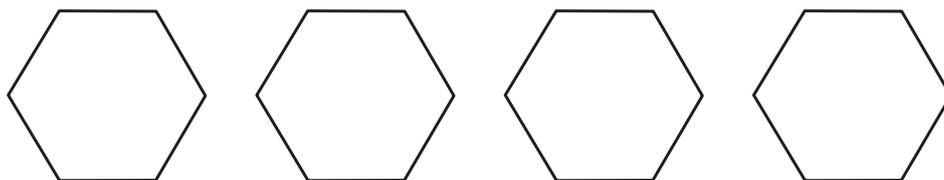
(正方形の場合) 次の 1 通りである。



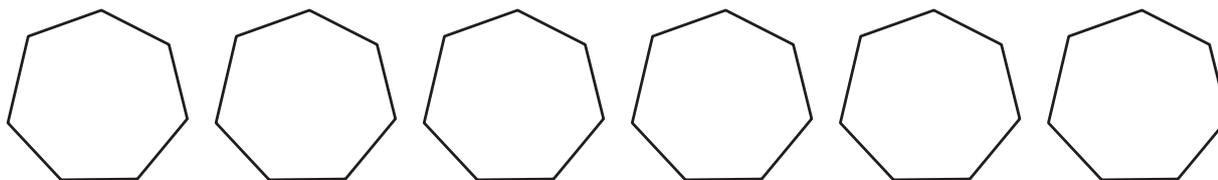
(正 5 角形の場合) 次の 1 通りである。



(正 6 角形の場合) 次の 4 通りである。



(正 7 角形の場合) 次の 6 通りである。



Brown [22], Bowman と Regev [20; Theorem 29.2] により、次の結果が知られている。

定理 1-1 (Brown [22], Bowman and Regev [20]) $n \geq 3$ に対して、正 n 角形を新たに頂点を加えずに三角形に分割する方法は、回転で移りあうものは同じと考えると、全部で

$$(1.1) \quad \frac{1}{n}C_{n-2} + \frac{1}{2}C_{\frac{n}{2}-1} + \frac{2}{3}C_{\frac{n}{3}-1}$$

個ある。ここで、 C_k は k が非負整数のときは k 次カタラン数であり、そうでないときは 0 である：

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} {}_{2k}C_k & (k \text{ が非負整数のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

但し、 ${}_{2k}C_k$ は $2k$ 個の中から k 個を取り出す組み合わせの数である。

定理の検証： n が小さい値のとき、定理の公式 (1.1) を用いて出てくる値と、実際に正 n 角形の三角形分割を列挙して数えた値が一致するかどうか、確かめて見よう。

まず、カタラン数の値は次のようになる：

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42$$

これを用いて、(1.1) の値を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} n=3 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_{\frac{3}{2}-1} + \frac{2}{3}C_0 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1, \\ n=4 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{2}{3}C_{\frac{4}{3}-1} = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} + 0 = 1, \\ n=5 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{5}C_3 + \frac{1}{2}C_{\frac{5}{2}-1} + \frac{2}{3}C_{\frac{5}{3}-1} = \frac{1}{5} \cdot 1 + 0 + 0 = 1, \\ n=6 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{6}C_4 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{2}{3}C_1 = \frac{1}{6} \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 4, \\ n=7 \text{ のとき} & \quad \frac{1}{7}C_5 + \frac{1}{2}C_{\frac{7}{2}-1} + \frac{2}{3}C_{\frac{7}{3}-1} = \frac{1}{7} \cdot 42 + 0 + 0 = 6 \end{aligned}$$

これらは、回転で移りあうものは同じものと考えたときの、正 n 角形の三角形分割を列挙して数えた値に一致している。

注意 1-2 一般の凸 n 角形を三角形に分割する方法は、回転で移りあっても異なると考えた場合、 $(n-2)$ 次カタラン数 C_{n-2} に等しい。これは、上記の定理に比べると、簡単に証明できる。証明については、例えば、[4; 第 3 章] または [2; 第 8 章] または [1; 7] を参照。

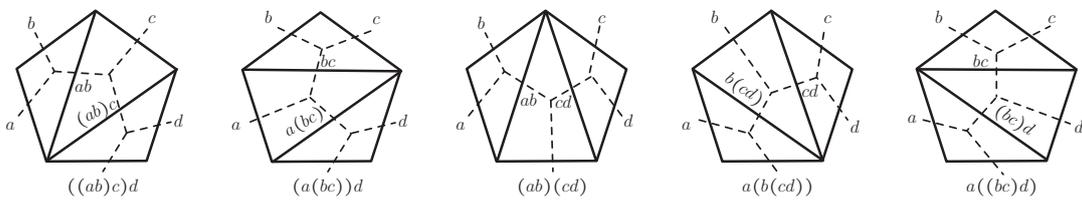
注意 1-3 カタラン (Eugène Charles Catalan, 1814–1894) はベルギーの数学者である。カタラン数は、多角形の三角形への分割方法を数える問題において、オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783) により最初に考察された。その問題の解決には、オイラーとともにゼーグネル (Johann Andreas von Segner, 1704–1777) も重要な貢献をしていることから、古くは Segner 数あるいは Euler-Segner 数とも呼ばれていたようである ([3; §9], [1; 7])。カタラン数と呼ばれるようになった

たのは、1968 年以降、より広く使われ出したのは 1976 年の Martin Gardner が雑誌「Scientific American」に寄せたコラム以後のことのようである。

カタラン数はさまざまな数学の分野に現れる。 $(n + 1)$ 個の数に、演算を施す方法を総数はカタラン数 C_n に一致する。例えば、 a, b, c, d に対して、演算を施す方法は、

$$((a * b) * c) * d, \quad (a * (b * c)) * d, \quad (a * b) * (c * d), \quad a * (b * (c * d)), \quad a * ((b * c) * d)$$

の $5 (= C_3)$ 通りである。この 5 つと 5 角形の三角形分割との対応は下図をみると理解できる。



カタラン数 C_n はまた、 $2n$ 人が 1 つの円上に並んで、交差せずに握手をする方法の総数にも一致する (証明は例えば、[28; 定理 1-2])。

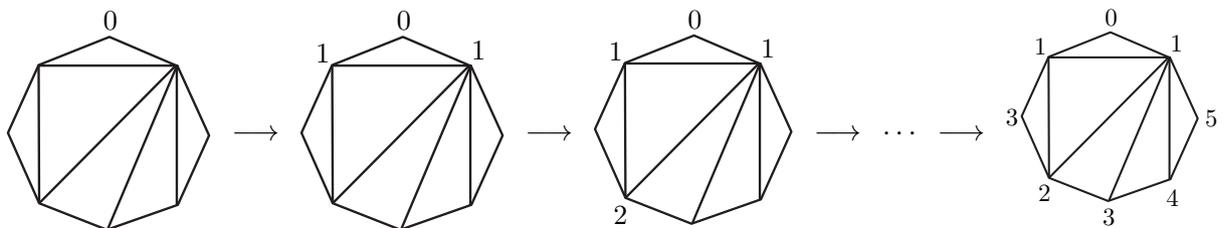
§2. 正多角形の分割から数の繰り返し模様へ

三角形分割された正 n 角形を考える。このとき、次のルールに基づいて、正 n 角形の各頂点に非負整数を割り当てる [7]。

規則 1 頂点を 1 つ選び、0 を割り当てる。

規則 2 0 を割り当てた頂点と辺で結ばれるすべての頂点に 1 を割り当てる。

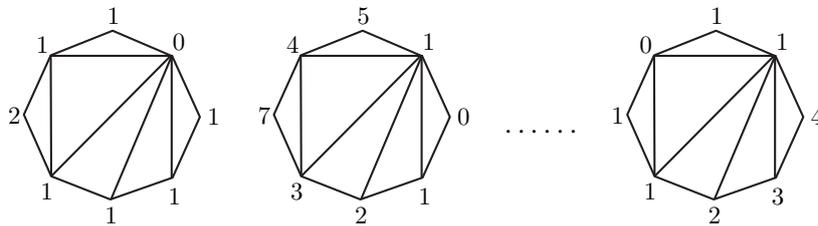
規則 3 三角形の 3 つの頂点のうち、2 つの頂点に非負整数 a, b が割り当てられているとき、残りの頂点には $a + b$ を割り当てる。



0 が割り当てられた頂点から出発して、時計回りに 1 周して、頂点に割り当てられた数を順番に取り出し、0 を除いて左上から右下に向かって斜めに配置する (最上段の 1 のすぐ下と、最下段の 1 のすぐ上に線を引いているのは見やすくするためのもの)。

	1												
...		5											...
			4										
...				3									...
					2								
...						3							...
							1						

次に、0 の位置を時計回りに 1 つずらして、上記と同じルールで各頂点に非負整数を割り当てる。



そして、割り当てられた数を時計回りに順番に取り出し、0 を除いて先ほど並べた数の列の右隣に配置する。

	1	1												
...		5	1											...
			4	1										
...				3	1									...
					2	2								
...						3	1							...
							1	1						

これを 0 の位置が最初に選んだ位置に戻るまで繰り返す。すると、互い違いに並んだ数の表が得られる。さらに、右と左に同じパターンをコピーしていけば、帯状に並んだ数の繰り返し模様ができ上がる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	5	1	2	2	3	1	3	1	5	1	2	...	
	4	4	1	3	5	2	2	2	4	4	1	3	
...	3	3	1	7	3	3	1	7	3	3	1	...	
	5	2	2	2	4	4	1	3	5	2	2	2	
...	3	1	3	1	5	1	2	2	3	1	3	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

このような数の配置は **Conway-Coxeter フリーズ (パターン)** (Conway-Coxeter frieze) と呼ばれている [6]。

一般に、**Conway-Coxeter フリーズ** (略して CCF と記す) とは、以下の 3 条件を満たすように正の整数を「帯状に」配置した表のことをいう。

(CCF1) 行は有限であり、各行は左右に無限に延びている。

(CCF2) 最初と最後の行は 1 が並ぶ。

(CCF3) 各隣接する 4 つの要素 a, b, c, d は次図のようにダイヤモンドの形を成し、ユニモジュラー規則 $ad - bc = 1$ を満たす。

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

問 2 次の配列が CCF の条件を満たすように、数字を埋めなさい。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1									
		2								
			3							
				4						

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(答え)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1									
		2								
			3							
				4						

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

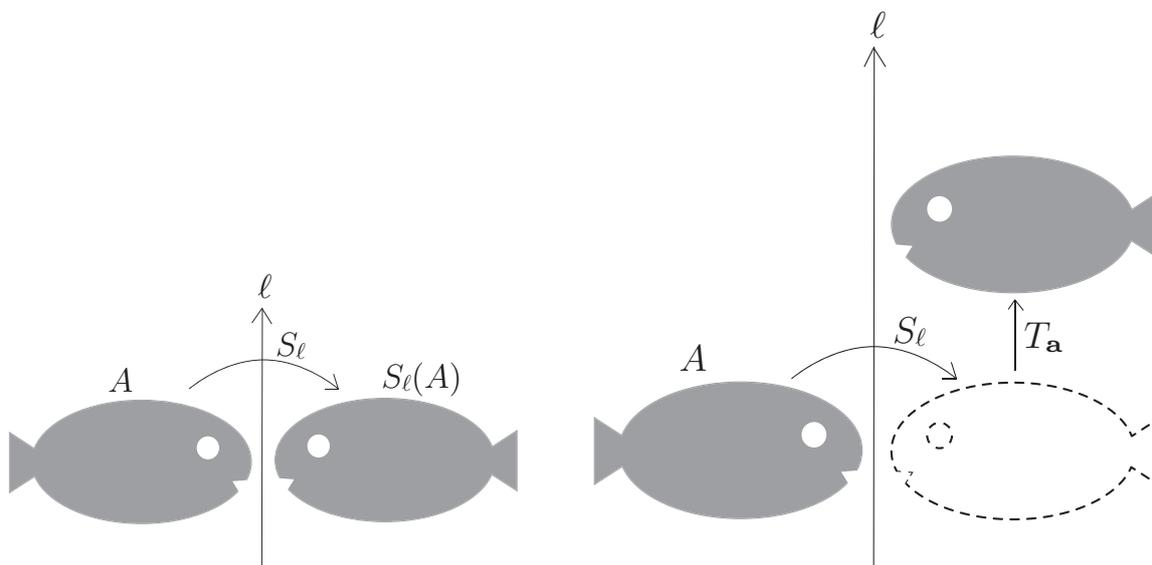
CCF において、最初と最後の行に並ぶ 1 を除いた行数を**幅**と呼ぶ。Conway-Coxeter フリーズは次の性質を持つ。

定理 2-1 (Coxeter [5]) (1) 幅 m の Conway-Coxeter フリーズは $(m + 3)$ を周期を持つ。特に、各行に並ぶ数字の列は周期 $(m + 3)$ を持つ。 $(m + 3)$ はその Conway-Coxeter フリーズの**位数** (order) と呼ばれる。

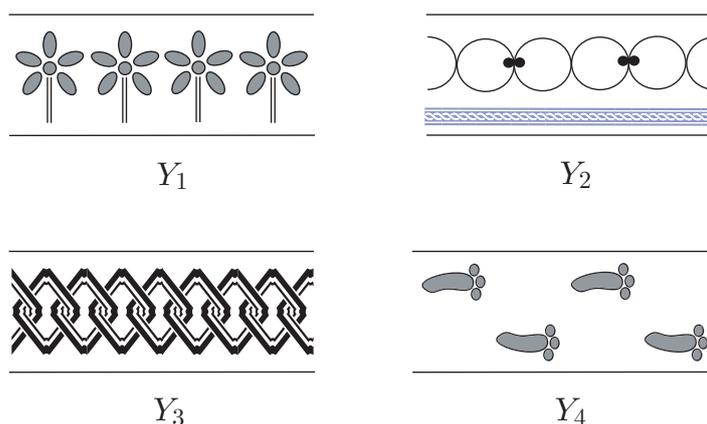
(2) Conway-Coxeter フリーズは水平中央線に関して映進対称性を持つ。言い換えると、Conway-Coxeter フリーズは水平方向の移動と鏡映に関して基本領域を持つ。

(3) Conway-Coxeter フリーズにおいて、第 2 行には少なくとも 1 つ「1」が現れる。

注意 2-2 (鏡映と映進について) 平面における**鏡映**とは、ある直線 ℓ に沿った折り返しによる移動 (線対称移動) のことをいい、**映進**とは、ある方向に平行移動したのち、移動した方向に関する鏡映を行う移動のことをいう。



ある方向への平行移動は**並進**と呼ばれる。平面上の図形が、鏡映 (または映進または並進) により変わらないとき、その図形は鏡映対称性 (または映進対称性または並進対称性) をもつと呼ばれる。



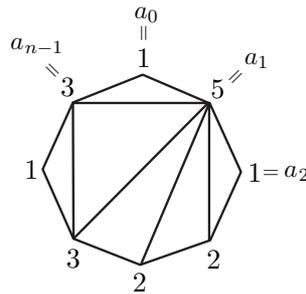
(水平な) 一直線に沿って同じ図形が無限に繰り返して並んでできている文様のことを**帯状文様**という。帯状文様は並進対称性をもつが、多くの帯状文様はまた、鏡映対称性あるいは映進対称性を持っている。

2018 年度に私のゼミ生だった橋本浩介君の特別研究報告集において、多角形の三角形分割の対称性と Conway-Coxeter フリーズの対称性との間の関係が調べられている [8]。

正 n 角形の三角形分割から得られる CCF には、定理 2-1 の他に、もう一つ面白い特徴がある。この正 n 角形の各頂点について、

(2.1) その頂点を端点にもつ三角形の辺の個数から 1 を引いた数

を考える。今、正 n 角形の各頂点に先の 3 つの規則に基づいて非負整数が割り当てておき、0 が割り当てられた頂点に対する (2.1) の値を a_0 とおき、その頂点から時計回りに数えて i 番目の頂点に対する (2.1) の値を a_i とおく。



定理 2-3 (Conway and Coxeter) 三角形に分割された凸 n 角形において、0 が割り当てられた頂点から時計回りに数えて i 番目の頂点に、規則 1、2、3 に基づいて割り当てられる非負整数を f_i とする。このとき、

$$(2.2) \quad f_{i+1} = a_i f_i - f_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

が成り立つ。但し、 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n-1} = 1, f_n = 0$ とする。等式 (2.2) は**離散 Strum-Liouville 方程式**と呼ばれる。

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ は、対応する CCF の第 2 行目に現れることが観察される。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	5	1	2	2	3	1	3	1	5	1	2	...		
	4	4	1	3	5	2	2	2	4	4	1	3		
...	3	3	1	7	3	3	1	7	3	3	1	...		
	5	2	2	2	4	4	1	3	5	2	2	2		
...	3	1	3	1	5	1	2	2	3	1	3	...		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

定理 2-3 を CCF を用いて解釈すると、次の定理になる。

定理 2-4 (Conway and Coxeter [6; (17)–(24)]) Conway-Coxeter フリーズ Γ において、第 2 行に並ぶ数を順次取り出して数列 $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を作る。 Γ の幅を $(n-3)$ ($n \geq 4$) としておく。さらに、 Γ の“対角線”(= 左上から右下に並ぶ数字上に引いた直線)の中で a_1 を通るものを考えて、その線上に並ぶ数字を順次取り出して有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^n$ を作る。但し、

$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n-1} = 1, f_n = 0$ である。さらに、 $g_0 = -1$ とし、 $g_j (j = 1, 2, \dots, n)$ を f_{j-1} の右隣りに並ぶ数字とする。

	1	1	1	1	1	1	1	...
...	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
...	...	f_3	g_4
...	...	f_4	g_5
...	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	...
...	f_{n-2}	g_{n-1}
...	1	1	1	1	1	1	1	...

このとき、有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^n$ は離散 Sturm-Liouville 方程式を満たす。

この定理の証明は、[9; Proposition 5], [10; Theorem 3.10] に書かれている。

さて、正 n 角形の三角形分割から幅が $(n-3)$ の Conway-Coxeter フリーズが構成されたが、逆に、幅が $(n-3)$ の Conway-Coxeter フリーズから、正 n 角形の三角形分割を読み取ることができる。次に、その方法を説明しよう [24, 25]。

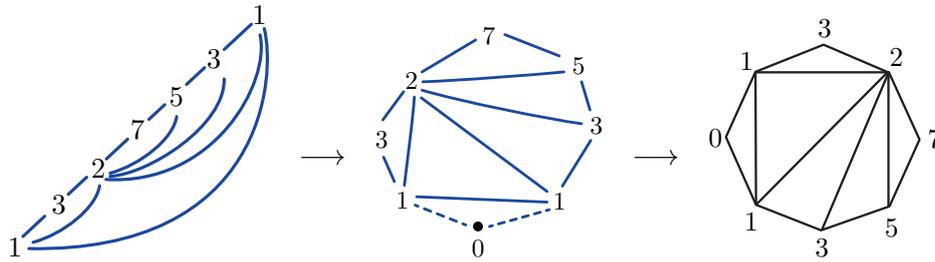
先ほどの CCF を考える。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	5	1	2	2	3	1	3	1	5	1	2	...	
...	4	4	1	3	5	2	2	2	4	4	1	3	
...	3	3	1	7	3	3	1	7	3	3	1	...	
...	5	2	2	2	4	4	1	3	5	2	2	2	
...	3	1	3	1	5	1	2	2	3	1	3	...	
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

この表において、左下から右上に伸びる斜めの直線で最大の数を含むものを考える。その直線上に並ぶ数字で、最大の数の両隣の数を弧で結ぶ。次に、両隣の数のうち、大きな数の方について、直線上に並ぶ数字で、和がその数になる 2 数を弧で結ぶ。この操作を次々に繰り返すと、次のような CCF の上に線で結ばれた図形を描くことができる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	5	1	2	2	3	1	3	1	5	1	2	...
...	4	4	1	3	5	2	2	2	4	4	1	3
...	3	3	1	7	3	3	1	7	3	3	1	...
...	5	2	2	2	4	4	1	3	5	2	2	2
...	3	1	3	1	5	1	2	2	3	1	3	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

この図形を多角形の形に整形し、0 の番号を持つ頂点を 1 と 1 の間に付け加えることで、8 角形の三角形分割が得られる。

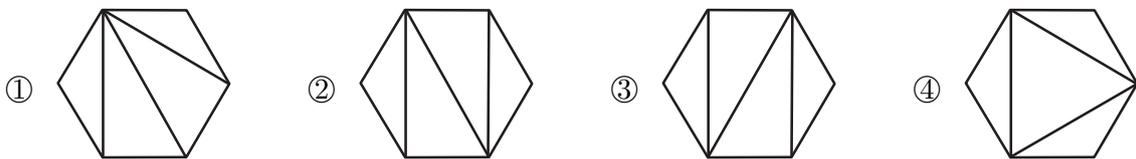


これは、最初に与えた 8 角形の三角形分割と同じであり、番号の付け方のルールとぴったり合っている。このように、幅 $(n-3)$ の CCF が与えられると、それに応じて凸 n 角形の三角形分割を得ることができる。定理としてまとめておくと、次の結果が成り立つ。

定理 2-5 (Conway and Coxeter) 正 n 角形の、新たに頂点を追加しない三角形分割の全体と幅 $(n-3)$ の CCF の全体との間に 1 対 1 対応が存在する。ここで、正 n 角形の三角形分割については、回転で移り合うものは同一視し、幅 $(n-3)$ の CCF については、平行移動で同じ配列となるものは同一視して扱う。

注意. 正 n 角形の三角形分割が、三辺が正 n 角形の内部に含まれるような三角形を含まないとき、対応する CCF には第 2 行から第 $(n-2)$ 行まで 1 が連続して繋がった列が存在し、その逆も成り立つ。このような CCF は**ジグザグ型**と呼ばれ、有理数の連分数展開や結び目理論と密接に関連することが、城西大学の小木曾岳義氏との共同研究により詳しく調べられている [24-26]。

例 2-6 $n=6$ の場合、正 6 角形の新たに頂点を追加しない三角形分割は、回転で移り合うものを同一視すると、次の 4 つがある。



それぞれの三角形分割から構成される CCF は、順に以下ようになる。

①に対応する CCF

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	4	1	2	2	2	1	...	
	3	1	3	3	1	3	3	1	3	
...	1	2	2	2	1	4	1	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

②に対応する CCF

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...		2	1	3	2	1	3	2	1	1	...
...	5		1	2	5	1	2	3	5	1	2
...		2		1	3	2	1	3	2	1	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

③に対応する CCF

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...		3	1	2	3	1	2	3	1	1	...
...	2		2	1	5	2	1	5	2	1	1
...		1		1	2	3	1	2	3	1	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

④に対応する CCF

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...		3	1	3	1	3	1	3	1	1	...
...	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2
...		1		3	1	3	2	3	1	3	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

このうち、最初の 3 つはジグザグ型である。

CCF において、引いた斜めの線に加えて 1 つ左の斜めの線にも注目する。すると、次のような興味深い現象が観察できる [24, 25]。今、引いた斜めの線に加えて 1 つ左の斜めの線にも注目する。2 つの斜めの線上の数を図のように、2 つずつペアにして、

$$\frac{(\text{後から引いた斜めの線の数})}{(\text{最初に引いた斜めの線の数})}$$

という分数を作る。

	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1			
...		5	1	2	2	3	1	3	1	5	1	2	...		
...	4		4	1	3	5	2	2	2	4	4	1	3		
...		3		3	1	7	3	3	1	7	3	3	1	...	
...	5		2		2	2	4	4	1	3	5	2	2	2	
...		3		1		3	1	5	1	2	2	3	1	3	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

すると、弧で結ばれた 2 つの分数の分子同士を足す、分母同士を足すと (これは学校では「やってはいけない」と教わっている計算方法だが)、真ん中の分数が得られることがわかる。例

えば、

$$\frac{3}{7} = \frac{1+2}{2+5}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}, \quad \frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+2}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1+0}{2+1}$$

となっている。

2つの既約分数 $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ が **Farey*ネイバー** (Farey neighbor) であるとは、

$$rq - ps = 1$$

であるときをいう。 $q = 0$ のときには $p = 1$ にとり、 $\infty = \frac{1}{0}$ も既約分数として扱う。 $\frac{p}{q}$ を既約分数というときには、 $q \geq 0$ を仮定する。

既約分数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s}$$

と定めると、これは再び既約分数になる。この有理数は有理数 $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ の **Farey 和** (Farey sum) と呼ばれる。もし、 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が Farey ネイバーならば、 $\frac{p}{q}, \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ および $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}, \frac{r}{s}$ は共に Farey ネイバーである。

問 3 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ を、Farey ネイバーであるような既約分数の Farey 和の形に分解しなさい。

(答え)

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{7} = & \frac{2}{7} = & \frac{3}{7} = \\ \frac{4}{7} = & \frac{5}{7} = & \frac{6}{7} = \end{array}$$

補題 2-7 (1) 任意の非負有理数は $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ から \oplus を有限回施すことにより得られる。

(2) 任意の有理数 α に対して、

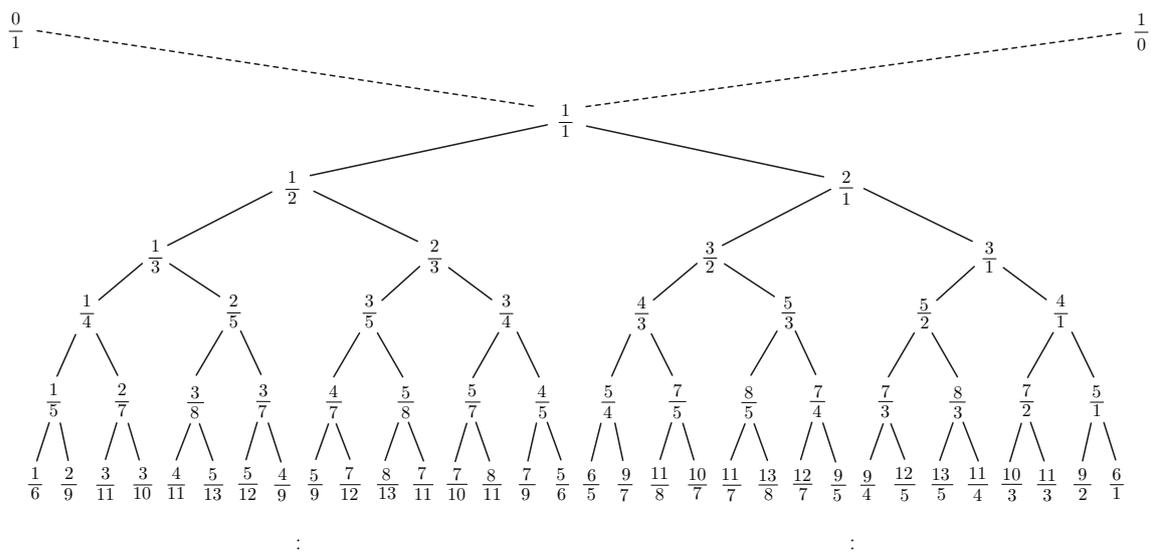
$$(2.3) \quad \alpha = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$$

を満たす Farey ネイバー $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ がただ一組存在する。条件 (2.3) を満たす Farey ネイバーの組 $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ を有理数 α の **親** と呼ぶ。 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ をそれぞれ α の左親、右親と呼ぶ。

補題の証明は [19; Theorem 3.9] を参照。

Stern-Brocot 木 (Stern-Brocot tree) [21, 27] とは、 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ から出発して、次々と Farey 和を付け加えていき、と Farey 和とその親のうち“近い方”の親とを線で結ぶ(但し、 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ およびそれらから延びる線を削除することにより得られる、 $\frac{1}{1}$ から始まる二進木のことをいう。Stern-Brocot 木における左半分の分枝は特に **Farey 木** (Farey tree) と呼ばれ、複素力学系やカオス理論において重要な役割を演じる。

*John Farey(1766–1826), イギリスの地震学者であり、数学者。



補題 2-7(2) より、すべての非負有理数は Stern-Brocot 木の中に現れる。

Stern-Brocot 木に、 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を追加したグラフを考え、これを**拡大 Stern-Brocot 木**と呼ぶ。拡大 Stern-Brocot 木上に、正の有理数 α から始めて (辺を追加して) 次々と親と辺で結び、次々と三角形を描く。

- (i) α とその親を線で結び (辺で繋がっていない方の親については辺を追加する)、それらを頂点とする三角形を描く。
- (ii) α に近い世代の親について、(i) と同様にその親と線で結び、それらを頂点とする三角形を描く。
- (iii) (ii) の操作を $\frac{1}{1}$ に到達するまで繰り返し行い、最後に、 $\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を頂点とする三角形を付け加える。

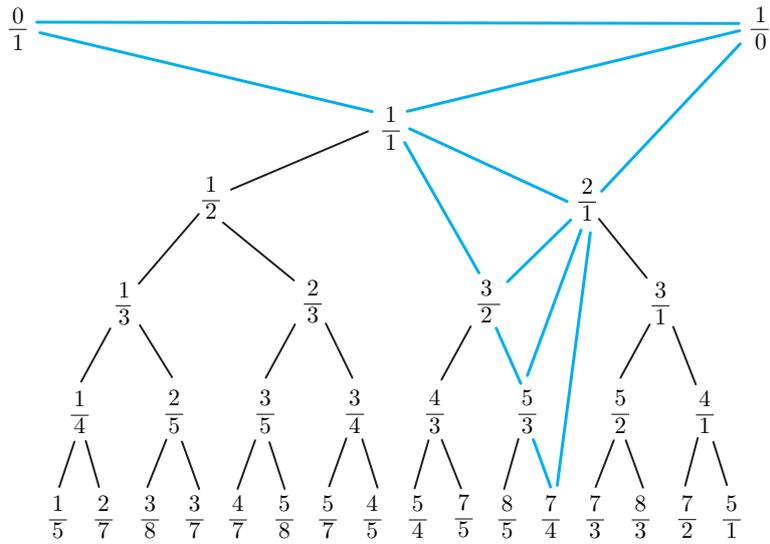
この三角形の「列」を α の祖先三角形といい、 $YAT(\alpha)$ により表わす。この祖先三角形の概念は 2 橋結び目の研究のために、山田修司氏 [29]、Hatcher と Ortel [23] により独立に考え出された。

複数の正の有理数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ からも同様の手続きにより、祖先三角形 $YAT(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ を作ることができる。

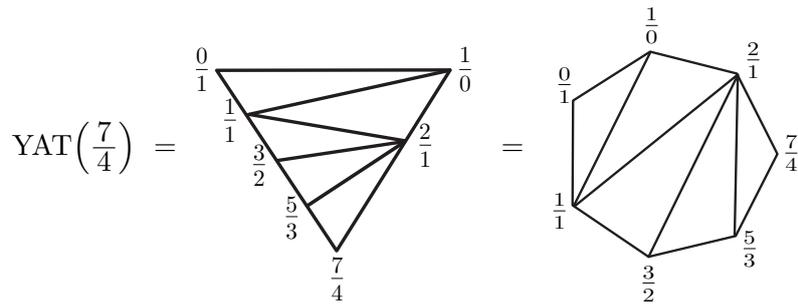
例 2-8 $\alpha = \frac{7}{4}$ の場合、

$$\alpha = \frac{5}{3} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{3} = \frac{3}{2} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2} = \frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \oplus \frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0}.$$

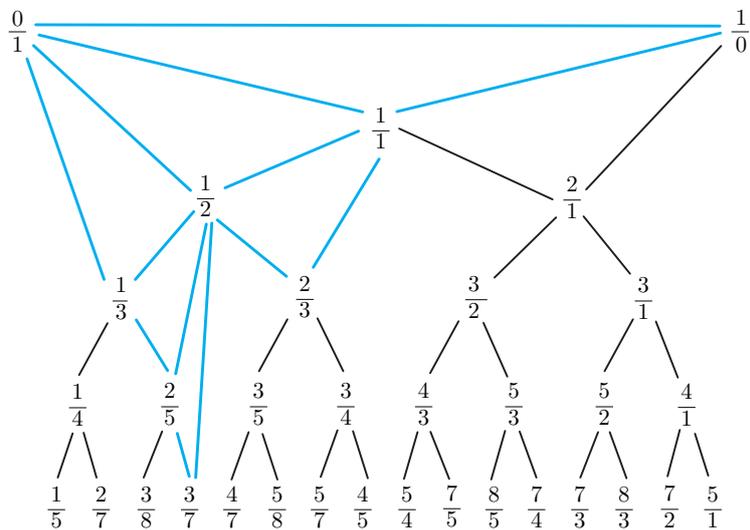
これをもとに、祖先三角形を Stern-Brocot 木に描くと次図の青い線の部分になる。



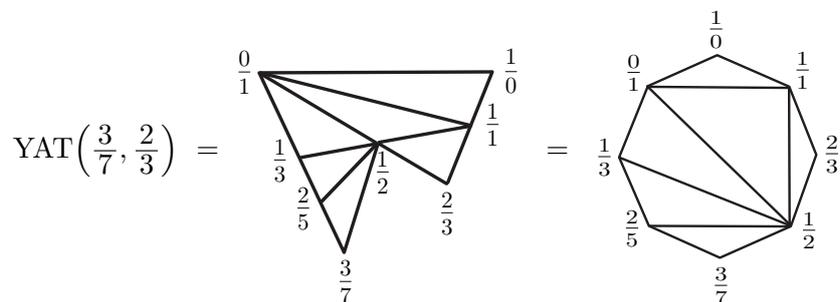
形を整えて、 $\text{YAT}\left(\frac{7}{4}\right)$ は次のようになる。



例 2-9 $\alpha_1 = \frac{3}{7}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ の場合、



形を整えて、 $\text{YAT}\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{3}\right)$ は次のようになる。



§3. 繰り返し模様の発展—数から変数へ—

1 と 1 で挟まれた間の数字を変数に置き換えてみる。例えば、次のような「パターン」を考えよう。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
...	x_1	x_4	x_7	x_{10}	x_{13}	x_{16}	x_{19}	x_{22}	...	x_{-1}	x_2	x_5	x_8	x_{11}	x_{14}	x_{17}	x_{20}	x_{23}	...	
...	x_0	x_3	x_6	x_9	x_{12}	x_{15}	x_{18}	x_{21}	...											
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

ここで、CCF と同じ規則を適用すると、変数の間に次の関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_5 &= \frac{x_3x_4 + 1}{x_2} = \frac{x_2x_3 + x_1 + x_3}{x_1x_2}, \\
 x_6 &= \frac{x_5 + 1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1 + x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}, & x_7 &= \frac{x_5 + 1}{x_4} = \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \\
 x_8 &= \frac{x_6x_7 + 1}{x_5} = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_3}{x_2x_3}, & x_9 &= \frac{x_8 + 1}{x_6} = x_1, \\
 x_{10} &= \frac{x_8 + 1}{x_7} = \frac{x_2 + 1}{x_3}, & x_{11} &= \frac{x_9x_{10} + 1}{x_8} = x_2, \\
 x_{12} &= \frac{x_{11} + 1}{x_9} = \frac{x_2 + 1}{x_1} = x_4, & x_{13} &= \frac{x_{11} + 1}{x_{10}} = x_3
 \end{aligned}$$

このことから、無限個の変数を敷いていっても、CCF と同じ規則を満たすこと要請すると、結局、9 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_8, x_{10}$ が繰り返し現れることがわかる。そして、すべての変数は、分母が x_1, x_2, x_3 の単項式で表わされる。

今、 $x_1 = 1, x_2 = a, x_3 = b$ とおくと、

$$x_4 = a+1, x_5 = \frac{ab+b+1}{a}, x_6 = \frac{(a+1)(b+1)}{ab}, x_7 = \frac{b+1}{a}, x_8 = \frac{a+b+1}{ab}, x_{10} = \frac{a+1}{b}$$

であるから、変数が敷き詰められた CCF から次の CCF が得られる。

	1	1	1		1	1	1		1	1
...	$\frac{a+b+1}{ab}$	1	$a+1$	$\frac{b+1}{a}$	$\frac{a+1}{b}$	b	$\frac{(a+1)(b+1)}{ab}$		1	...
...	$\frac{a+1}{b}$	a	$\frac{ab+b+1}{a}$	$\frac{(a+1)(b+1)}{ab}$	1	$a+1$	$\frac{b+1}{a}$	$\frac{a+b+1}{ab}$	$\frac{a+1}{b}$	
	1	1	1		1	1	1		1	1

この CCF が正の整数の CCF となるための必要十分条件は、 a, b が次の 3 条件を満たすことである。

- ① a, b は自然数である。
- ② $b+1$ は a で割り切れる。
- ③ $a+1$ は b で割り切れる。

②と③より、

$$b+1 = ma, \quad a+1 = nb \quad (m, n \text{ は自然数})$$

と表わすことができる。このとき、 $b+1 = m(nb-1)$ となり、 $b = \frac{m+1}{mn-1}$ となる。よって、 $m+1 \geq mn-1$ すなわち $2 \geq m(n-1)$ でなければならない。これを満たす正の整数 m, n の組は $(m, n) = (m, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3)$ である。このうち、 $n=1$ の場合、

$$b = \frac{m+1}{mn-1} = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$$

となるので、これが整数であるためには $m=2, 3$ でなければならない。以上の考察より、

$$(m, n) = (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3)$$

のいずれかであり、このとき、順に $(a, b) = (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 1), (2, 1)$ となる。

- $(a, b) = (2, 3)$ のとき、次のような CCF になる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	2	1	3	2	1	3	2	1	...
...	5	1	2	5	1	2	5	1	2
...	2	1	3	2	1	3	2	1	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- $(a, b) = (1, 2)$ のとき、次のような CCF になる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	3	1	2	3	1	2	3	1	...
...	2	2	1	5	2	1	5	2	1
...	1	1	2	3	1	2	3	1	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- $(a, b) = (3, 2)$ のとき、次のような CCF になる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	4	1	2	2	2	1	...	
	3	1	3	3	1	3	3	1	3	
...	1	2	2	2	1	4	1	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

- $(a, b) = (1, 1)$ のとき、次のような CCF になる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	4	1	2	2	2	1	4	1	...	
	3	3	1	3	3	1	3	3	1	
...	2	2	1	4	1	2	2	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

- $(a, b) = (2, 1)$ のとき、次のような CCF になる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	3	1	3	1	3	1	3	1	...	
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
...	1	3	1	3	2	3	1	3	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

$(a, b) = (3, 2)$ と $(a, b) = (1, 1)$ のときの CCF は平行移動で移り合うので、実は同じ CCF である。また、 $(a, b) = (2, 3)$ と $(a, b) = (1, 2)$ のときの CCF は垂直方向の鏡映で移り合う。

変数を敷き詰めた CCF に戻ろう。この CCF において 9 個の変数

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, x_5 = \frac{x_2 x_3 + x_1 + x_3}{x_1 x_2}, x_6 = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 + x_3}{x_1 x_2 x_3},$$

$$x_7 = \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_8 = \frac{x_1 x_2 + x_1 + x_3}{x_2 x_3}, x_{10} = \frac{x_2 + 1}{x_3}$$

の和差積およびその複素数倍で表わされる有理式の全体からなる集合を \mathcal{A}_3 で表わし、(係数なしの) A_3 型クラスター代数と呼ぶ [11]。 x_4, \dots, x_8, x_{10} の分母は x_1, x_2, x_3 の単項式になっているので、 \mathcal{A}_3 に属する任意の有理式もまた、分母は x_1, x_2, x_3 の単項式になっている (Laurent 現象)。

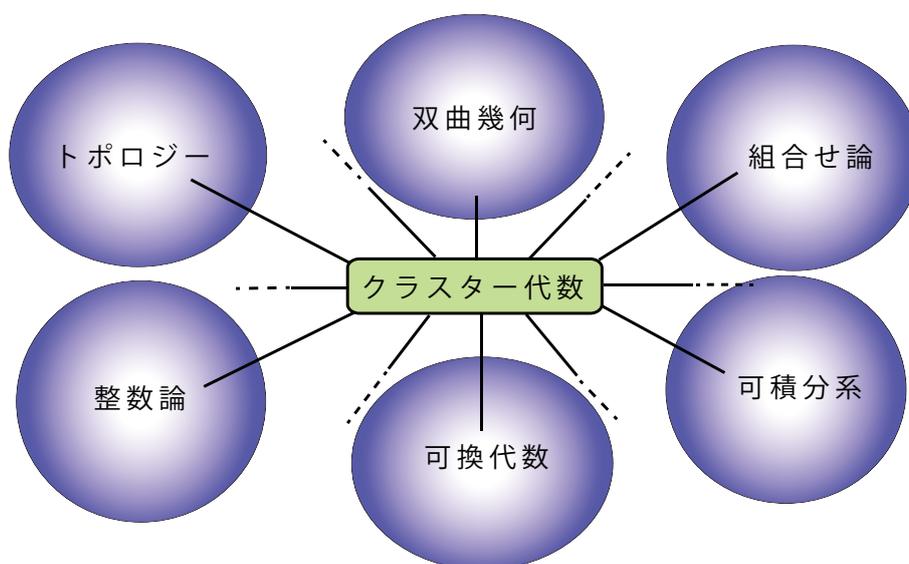
一般に、 x_1, x_2, \dots, x_m の有理式とは、 $\frac{2x_2 - 1}{x_1}, \frac{x_1^2 + x_4 - 5}{x_1 - x_2^2 + 1}$ などのように、

$$\frac{(x_1, x_2, \dots, x_m \text{ の多項式})}{(x_1, x_2, \dots, x_m \text{ の多項式})}$$

の形をした式のことをいい、多項式の係数を複素数の範囲でとったときの有理式の全体を $\mathbb{C}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ で表わす。2 つの有理式の和、差、積、商は有理数のそれらの演算と同じ計

算規則に基づいて計算することができ、したがって、2つの有理式の和、差、積、商は再び有理式となる。

同様に、左上から右下に向かう線上に変数 x_1, x_2, \dots, x_m を配置した幅 m の CCF を考え、ユニモジュラー規則を満たすように変数を埋めていく。その結果得られる各変数を**クラスター変数**と呼び、クラスター変数の和差積およびその複素数倍で表わされる有理式の全体を \mathcal{A}_m で表わし、(係数なしの) A_m 型**クラスター代数** (cluster algebra) と呼ぶ [11]。日本語では団代数と呼ばれることもある。



クラスター代数は Fomin と Zelevinsky [11,12] により 2000 年に導入され、現在、トポロジー、整数論、双曲幾何、可換代数、組合せ論、可積分系など多くの数学の分野と関連し、幅広く研究されている。そのエッセンスを知りたい場合には、井上玲氏の集中講義録 [13] や数理科学の特集 [18] を参照されるとよい。発展的な内容を含む入門的な記事として [14], [15], [16], [17] を挙げておく。

(多角形の三角形分割やカタラン数に関する文献)

- [1] H. デリー『数学 100 の勝利 vol.1 数と関数の問題』(根上生也・訳), シュプリンガー・フェアラーク東京, 1996(再出版:丸善出版, 2012).
- [2] 栢田幹也, 福川由貴子『格子からみえる数学』日本評論社/亀書房, 2013.
- [3] Igor Pak, *History of Catalan numbers*, <https://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf>
- [4] G. ポリア, R.E. タージャン, D.R. ウッズ『組合せ論入門』(今宮淳美・訳), 近代科学社, 1986.

(Conway-Coxeter フリーズに関する文献)

- [5] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.
- [6] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94, 175–183.
- [7] H.S.M. Coxeter and J.F. Rigby, *Frieze patterns, triangulated polygons and dichromatic symmetry*, The Lighter side of Math. 15–27.

- [8] 橋本浩介, 「フリーズパターンと多角形の三角形分割」, 2018 年度関西大学システム理工学部数学科特別研究報告集, 2019, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/soturon_hashimotoK.pdf.
- [9] Claire-Soizic Henry, *Coxeter friezes and triangulations of polygons*, Amer. Math Monthly **120** (2013), 553–558.
- [10] Sigurd Nybø Vagstad, *Frieze patterns and triangulated polygons*, Norges tenisk-naturvitenskapelige universitet, 2015.

(クラスター代数に関する文献)

- [11] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [12] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent Math. **154** (2003), 977–1018.
- [13] 井上玲 (神保道夫・記) 『クラスター代数入門』 (立教大学数理物理学研究センター Lecture Notes 3), 2016.
- [14] 黒木玄, 「フリーズパターン—数の繰返し模様の不思議」, 2013 年 7 月 7 日, <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf>.
- [15] Sophie Morier-Genoud, *Coxeter’s frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics*, arXiv:1503.05049v1, 2015.
- [16] 中島啓 「ディンキン図式をめぐって—数学におけるプラトン哲学」, 平成 21 年度 (第 31 回) 数学入門公開講座公開テキスト, 京都大学数理解析研究所, 2009.
- [17] Matthew Pressland, *From frieze patterns to cluster categories*, 2020, <https://www.icms.org.uk/sites/default/files/downloads/Workshops/Oct-2020/pressland.pdf>.
- [18] 数理解科学 2015 年 3 月号 特集・団代数をめぐって—新たな共通言語の認識—, サイエンス社.

(やや専門性の高い文献)

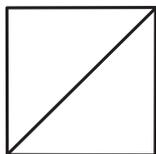
- [19] Martin Aigner, *Markov’s Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture*, Springer, 2013.
- [20] Douglas Bowman and Alon Regev, *Counting symmetry classes of dissections of a convex regular polygon*, Adv. Appl. Math. **56** (2014), 35–55.
- [21] Achille Brocot, *Calcul des rouages par approximation, Nouvelle méthode*, Revue chronométrique **3** (1861), 186–194.
- [22] William G. Brown, *Enumeration of triangulations of the disk*, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 746–768.
- [23] A. Hatcher and U. Ortel: *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology **28** (1989), 453–480.
- [24] Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui, *Kauffman bracket polynomials for Conway Coxeter Friezes*, in: “Proceedings of the Meeting for Study of Number Theory, Hopf algebras and Related Topoics” edited by H. Yamane, T. Kogiso, Y. Koga and I. Kimura, Yokohama Publ., 2019, 51–79.
- [25] Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui, *A bridge between Conway-Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, J. Knot Theory Ramif. **28** (2019), 1950083 (40 pages).
- [26] Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui, *A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag-type by rational links*, arXiv2008.09364, to appear in OJM.
- [27] Moritz A. Stern, *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **55** (1858), 193–220.
- [28] 和久井道久, 「Temperley-Lieb 代数とその応用」, 筑波大学での集中講義録, 2009, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/TL_algebra.pdf.
- [29] 山田修司 「2 橋結び目の Jones 多項式」, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集, 1996 年 2 月, 92–96.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science
 Kansai University
 3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan

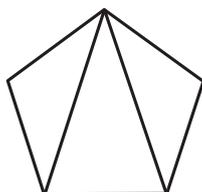
(問題の解答)

[問 1]

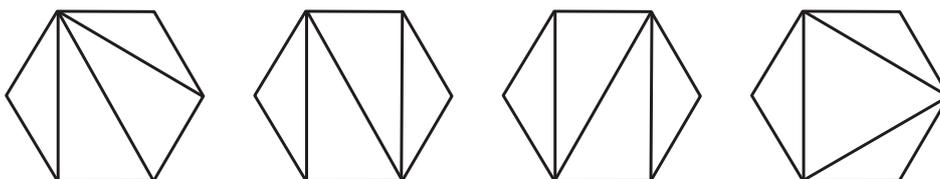
(正方形の場合)



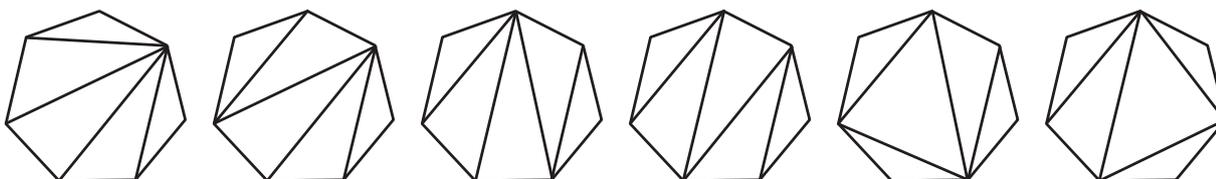
(正 5 角形の場合)



(正 6 角形の場合)



(正 7 角形の場合)



[問 2]

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	2	2	1	4	2	1	3	2		
3	1	2	5	3	1	3	7	1	2	3	5	3
	2	1	4	2	1	3	2	2	1	4	2	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

[問 3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{6}, & \frac{2}{7} &= \frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3}, & \frac{3}{7} &= \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{7} &= \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{5}, & \frac{5}{7} &= \frac{2}{3} \oplus \frac{3}{4}, & \frac{6}{7} &= \frac{5}{6} \oplus \frac{1}{1} \end{aligned}$$

付録：ExcelでCCFとそれを基礎にした繰り返し模様を作成する方法

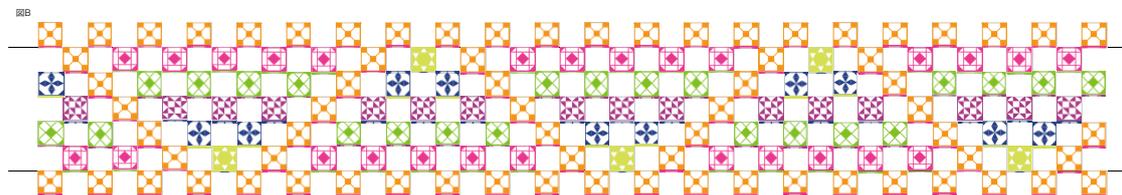
ここでは、幅5のCCFを、Excel for Mac version 16で作成する方法を記す。

- (1) まず、図のファイル(pngファイル、epsファイルなど)を13個用意する。「挿入」－「図形」から選んでもよい。
- (2) 「図」という名前をつけたシートを新規作成し、A列に1行目から順に「図B1」、…、「図B13」を順に打ち込む。
- (3) B列には、図のファイルを「挿入」－「画像」－「画像をファイルから挿入」を選択して、図のファイルを順に読み込む。B列は各セルがどれも同じ大きさの正方形となるように、幅を調整しておく。
- (4) 図を読み込むんだだけではセルからはみ出してしまうので、ちょうどセルに収まるように図を縮小する。
- (5) 図がセルに収まったら、コンロトールキーを押しながら図をワンクリックし、「図の書式設定」を選択する。このとき、ファイルの右端に「図の書式設定」が出てくるので、その中からサイズ調整のアイコンをクリックし、プロパティを選択する。プロパティの中から「セルに合わせて移動やサイズを変更する」を選択する。
- (6) (3)から(5)を13個の図のファイルに繰り返す。
- (7) 次に、「幅5」という名前をつけたシートを新規作成する。「A列1行」に「幅5」と入力する。
- (8) 第2行から第26行までと第B列から第AS列までの各セルが、どれも同じ大きさの正方形となるように、幅を調整する。
- (9) 第2行に、第C列から1を1つおきに入力する。同様に、第8行、第11行、第17行も同じように1を1つおきに入力する。
- (10) 「C列12行」「D列13行」「E列14行」「F列15行」「G列16行」に1を入力する。



- (11) 「C列3行」に「=C12」を、「D列4行」に「=D13」を、「E列5行」に「=E14」を、「F列6行」に「=F15」を、「G列7行」に「=G16」を入力する。

する。この操作が完了すれば、第 20 行から第 26 行の間に、第 2 行から第 8 行の間に出力された CCF に対応する繰り返し模様が自動出力される。



- (19) 最後に、初期データとして入力した “1, 1, 1, 1, 1” の代わりに、“2, 1, 1, 2, 1” や “1, 3, 2, 3, 1” や “5, 4, 3, 2, 3” などを入力して、第 2 行から第 8 行までと、第 20 行から第 26 行までの数と図が自動で置き換わっているか確認してみよう。

注意 1. 完成後、あるいは、途中で図のファイルを変更すると、図の様相が出てこなくなる時がある。そのような場合には、「B 列 20 行」をクリックして、「数式」-「名前の定義」を選択する。「データ範囲の名前」に「図 B」などの適当な文字を入力してリターンをかけると、繰り返し模様が再び現れるようになる。

注意 2. 上から下まで 1 が繋がるように配置された初期状態からジグザグ型 CCF を生成したい場合、(11), (12), (13) において入力した数式を例えば、「C 列 3 行」は「=IF(C12=1, 1, QUOTIENT(PRODUCT(D2, D4)+1, E3))」のように修正すればよい。