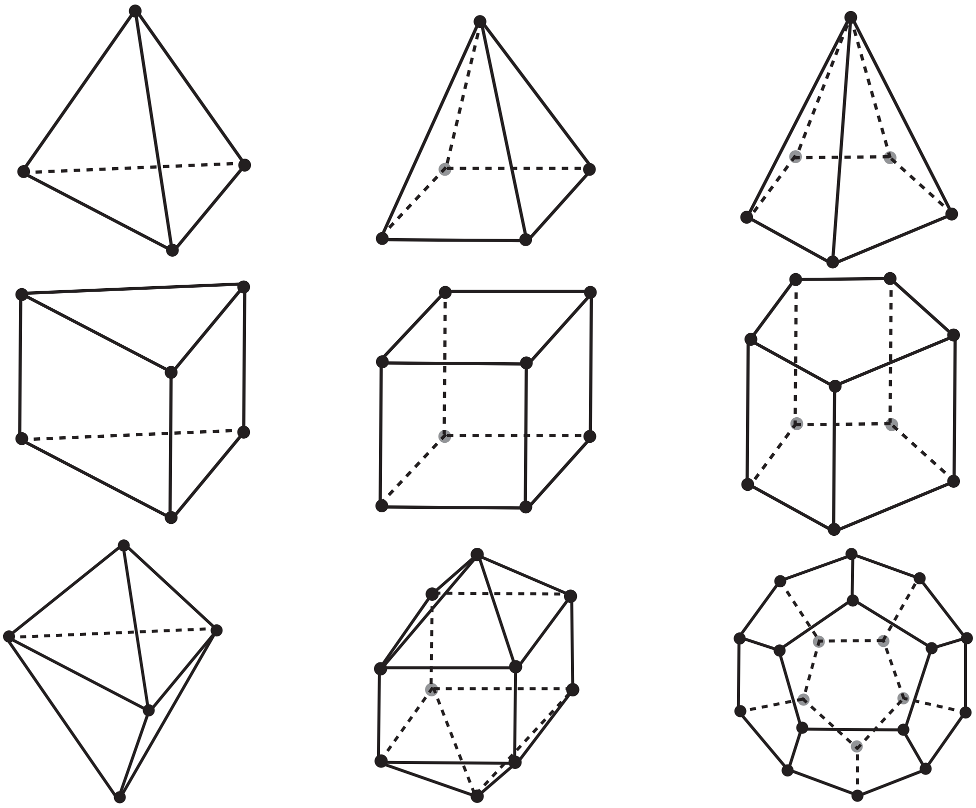
June 30, 2010 (作成開始)
August 3, 2010/March 14, 2018 (最終修正)

多面体にまつわる幾何学

―オイラーの多面体定理を中心に―

和久井道久

問題 次の立体図形が共通に持っている特徴にはどんなものがあるだろうか？その特徴を挙げてみよう。



(CP1) 有限個の多角形に囲まれていて、**面**、**辺**、**頂点**の３要素を有している。(面とは、その立体を構成している各多角形のころであり、辺、頂点とは、それぞれ各多角形の辺、頂点のことである。)

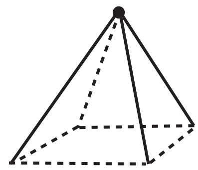
(CP2) ２つの面が共有点を持つ場合には、その共通部分は１つの辺または１つの頂点である。

(CP3) どの多角形についても、その中の各辺はある別の多角形の辺にもなっていて、そのような多角形は各辺に対してただ１つ存在する。

(CP4) １つに繋がっている。すなわち、任意の２つの頂点に対して、一方の頂点から他方の頂点へ至る、いくつかの辺からなる道が存在する。

(CP5) 凹んだ部分がない。すなわち、その立体図形の表面および内部から任意に２点をとったとき、その２点を端点とする線分はその立体図形の表面および内部にある。

(CP6) 各頂点の十分小さなまわりだけ見ると、
その頂点を頂点とする凸多角錐 (=
底面が凸多角形の形をした錐体) の形をしている。



上記の特徴に加えて、上の立体図形は次の性質も持っていることがわかる。

(EF) (頂点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) = 2

実際に、確かめてみよう。

問題 次の表を完成させなさい。

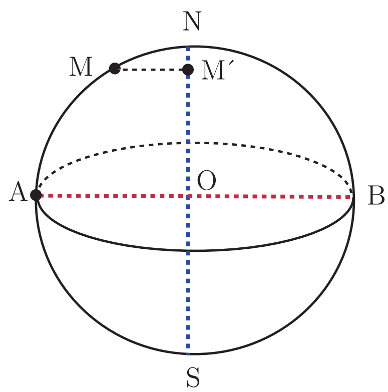
立体図形	頂点の個数	辺の個数	面の個数
3 角錐 (正 4 面体)			
4 角錐			
5 角錐			
3 角柱			
4 角柱 (正 6 面体)			
5 角柱			
双 3 角錐			
双 4 角錐柱			
正 12 面体			

一般に、(CP1),. . . , (CP4) を満たす立体図形を (連結な) **多面体**と呼び、(CP1),. . . , (CP6) を満たす立体図形を**凸多面体**と呼ぶ (注：(CP5) が成り立てば、(CP4) は自動的に成り立つ)。等式 (EF) は、上記の 9 種類について成り立つばかりでなく、任意の凸多面体に対して成り立つ。等式 (EF) を**オイラーの多面体公式**と呼ぶ。この講義では、このオイラーの多面体公式を導き、その応用を紹介する。オイラーの多面体公式の発見と証明の歴史に関しては [5; p.66–67] を、多面体の種類と名称については [6] を参照されたい。

§1. 球面の表面積とオイラーの多面体定理

ここでは、半径 r の球面の表面積が $4\pi r^2$ で与えられることを、[1] に沿って、初等的に証明する。さらに、それを用いて多面体に対するオイラーの公式を導く。この証明方法は 1794 年にルジャンドルによって与えられた。最後に、少ない予備知識で理解可能な、平面グラフを利用した別証明も与える。

S を半径 r の球面とする。S 上に 2 点 N, S を S の直径の端点となるようにとる。球面 S は線分 NS の回りに半円を 1 回転させることにより、得られる。線分 NS に直交する S の直径 AB をとる。このとき、2 点 A, N を結んで得られる 1/4-円 $\overset{\frown}{\mathrm{AN}}$ 上に、A, N 以外の点 M をとる。このとき、弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ を直径 NS のまわりに 1 回転して得られる曲面の面積 S_{M} は次の公式で与えられる。



補題 1-1 M$'$ を点 M を直径 NS へ下ろした垂線の足とする。O を球面の中心とし、$h = \mathrm{OM}'$ とおく。このとき、$S_{\mathrm{M}} = 2\pi rh$ となる。

(証明)

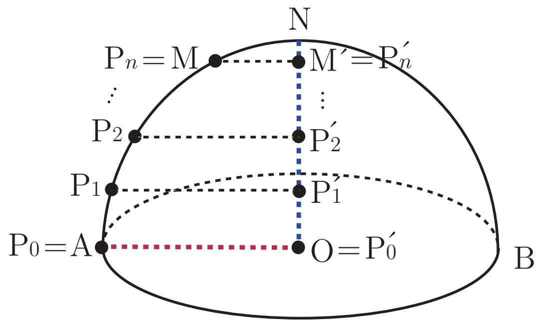
上の補題を示す。弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ を n 等分し、その分点を順に

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{A},\ \mathrm{P}_1,\ \cdots, \mathrm{P}_{n-1},\ \mathrm{P}_n = \mathrm{M}$$

とする。これらの点を直径 NS へ下ろした垂線の足を順に

$$\mathrm{P}'_0,\ \mathrm{P}'_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}'_{n-1},\ \mathrm{P}'_n$$

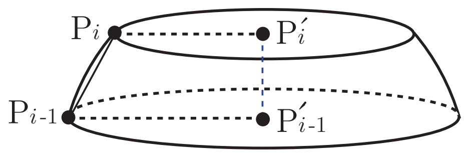
とする。$\mathrm{P}'_0 = \mathrm{O}$ (球面の中心) である。このとき、n 個の弦



$$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$$

を NS の回りに 1 回転させて得られる曲面の面積をそれぞれ $T_1, T_2, \cdots, T_n$ とおくと、$T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ は S_{M} の近似値を与えていると考えられる。実際、n を大きくすればするほど、和 $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ は S_{M} の値に近づいていくと考えられる。

T_i を計算しよう。T_i は底面が半径 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}$ の円であるような直円錐から、底面に平行で点 P'_i を通る平面で切って得られる直円錐を取り除いた、直円錐台の側面積に等しい。したがって、



$$T_i = \pi(\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}} + \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i})\,\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i} \tag{1.1}$$

が成り立つ。

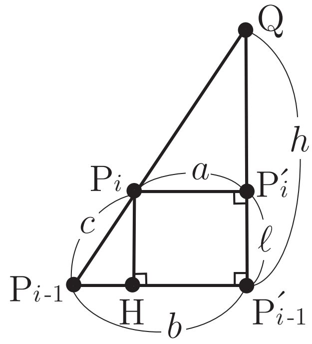
$\because$)

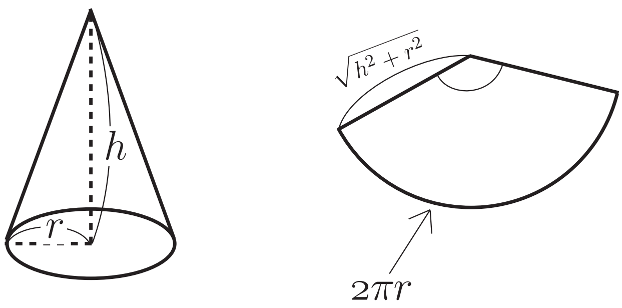
$a = \overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}},\ b = \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i},\ c = \overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i},\ \ell = \overline{\mathrm{P}'_i\mathrm{P}'_{i-1}}$ とおく。また、2 直線 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i,\ \mathrm{P}'_i\mathrm{P}'_{i-1}$ の交点を Q とおき、$h = \overline{\mathrm{QP}'_{i-1}}$ とおく。また、右図のように点 H をとる。

底面の円の半径が r で、高さが h の直円錐の側面積 S は、半径が $\sqrt{h^2 + r^2}$ で、弧の長さが $2\pi r$ の扇形の面積に等しいから、$\pi(h^2 + r^2) : S = 2\pi\sqrt{h^2 + r^2} : 2\pi r$ を満たす。これを解いて、

$$S = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$$

を得る。





この公式を用いて、

$$T_i = \pi b\sqrt{h^2+b^2} - \pi a\sqrt{(h-\ell)^2+a^2}$$

を得る。$\triangle \mathrm{QP}_i\mathrm{P}'_i \backsim \triangle \mathrm{QP}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}$ であるから、$\overline{\mathrm{Q}_i\mathrm{P}'_i} = \frac{a}{b}h$ であることがわかる。故に、$h = \ell + \frac{a}{b}h$ となる。これを解いて、$\ell = \frac{b-a}{b}h$ とわかる。故に、

$$c = \sqrt{(b-a)^2+\ell^2} = \sqrt{(b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{b^2}h^2} = \frac{b-a}{b}\sqrt{b^2+h^2}$$

を得る。また、

$$\sqrt{(h-\ell)^2+a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}h^2+a^2} = \frac{a}{b}\sqrt{h^2+b^2}$$

であるから、

$$T_i = \pi\frac{b^2-a^2}{b}\sqrt{h^2+b^2} = \pi(b+a)c$$

と表される。 □

R_i を線分 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ の中点とし、それを NS に下ろした垂線の足を R'_i とする。

$$\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}} + \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i} = 2\,\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i} \tag{1.2}$$

が成り立つ。

∵)

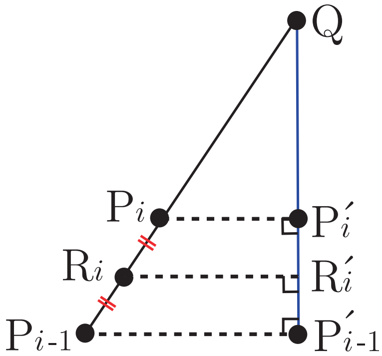
点 Q を 2 直線 $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i-1}$, $\mathrm{P}'_i\mathrm{P}'_{i-1}$ の交点とする。$\triangle \mathrm{QP}_i\mathrm{P}'_i \backsim \triangle \mathrm{QR}_i\mathrm{R}'_i \backsim \triangle \mathrm{QP}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}$ であるから、

$\overline{\mathrm{QP}_i} : \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i} = \overline{\mathrm{QR}_i} : \overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}$,

$\overline{\mathrm{QP}_{i-1}} : \overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}} = \overline{\mathrm{QR}_i} : \overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}$

が成り立つ。よって、

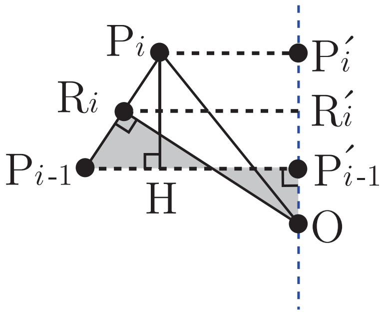
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i}\cdot\overline{\mathrm{QR}_i} = \overline{\mathrm{QP}_i}\cdot\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}, \\ \overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}}\cdot\overline{\mathrm{QR}_i} = \overline{\mathrm{QP}_{i-1}}\cdot\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i} \end{cases}$$



を得る。両辺の和をとると、

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}'_i}+\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}})\overline{\mathrm{QR}_i} &= \overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}(\overline{\mathrm{QP}_i}+\overline{\mathrm{QP}_{i-1}})\\ &= \overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}((\overline{\mathrm{QR}_i}-\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i})+(\overline{\mathrm{QR}_i}+\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{P}_{i-1}}))\\ &= 2\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}\cdot\overline{\mathrm{QR}_i}\end{aligned}$$

となる。故に、(1.2) が成り立つ。 □



また、P_i を $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}$ に下ろした垂線の足を H とおくと、$\angle\mathrm{R}_i\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}'_{i-1}=\angle\mathrm{P}'_{i-1}\mathrm{OR}_i$ であるから (右図参照)、$\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{H}\backsim\triangle\mathrm{R}_i\mathrm{OR}'_i$ となる。したがって、$\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i}:\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{H}}=\overline{\mathrm{OR}_i}:\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i}$, すなわち、

$$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{H}}\cdot\overline{\mathrm{OR}_i}=\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i}\cdot\overline{\mathrm{R}_i\mathrm{R}'_i} \tag{1.3}$$

を得る。$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{H}}=\overline{\mathrm{P}'_{i-1}\mathrm{P}'_i}$ であるから、(1.2), (1.3) を (1.1) に代入して、

$$T_i=2\pi\,\overline{\mathrm{P}'_{i-1}\mathrm{P}'_i}\cdot\overline{\mathrm{OR}_i} \tag{1.4}$$

を得る。$\triangle\mathrm{OP}_i\mathrm{R}_i$ に三平方の定理を適用して、

$$\overline{\mathrm{OR}_i}=\sqrt{r^2-\left(\frac{\overline{\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i}}{2}\right)^2} \tag{1.5}$$

となることに注意すると、$\overline{\mathrm{OR}_i}$ は i によらないことがわかる。そこで、$\ell=\overline{\mathrm{OR}_i}$ とおくと、(1.4) より

$$T_1+\cdots+T_n=2\pi\ell(\overline{\mathrm{P}'_0\mathrm{P}'_1}+\cdots+\overline{\mathrm{P}'_{n-1}\mathrm{P}'_n})=2\pi\ell\,\overline{\mathrm{P}'_0\mathrm{P}'_n}=2\pi\ell\,\overline{\mathrm{OM}'}=2\pi\ell h$$

となることがわかる。ここで、n を限りなく大きくしていくと、(1.5) により $\ell=\overline{\mathrm{OR}_i}$ は球の半径 r に限りなく近づいていくから、$T_1+\cdots+T_n$ は $2\pi rh$ の値に限りなく近づいていく。こうして、補題 1-1 の公式が導かれた。 □

点 M を弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AN}}$ に沿って点 N に近づけていくと、$h=\mathrm{OM}'$ は球の半径 r に近づいていくから、S_{M} は $2\pi r^2$ に近づいていく。一方、点 M を弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AN}}$ に沿って点 N に近づけていくと、S_{M} は球面 S の上半球の部分の表面積に近づいていく。こうして、球面 S の上半球の部分の表面積は $2\pi r^2$ であり、したがって、球面 S の表面積は $2\times2\pi r^2=4\pi r^2$ であることが証明された。すなわち、次が示された。

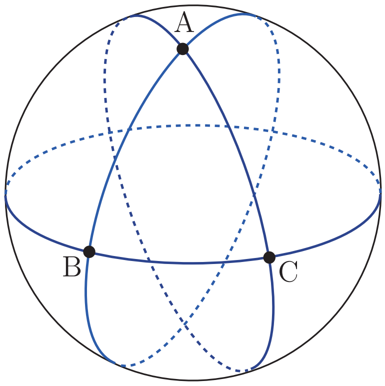
定理 1-2 半径 r の球面の表面積は $4\pi r^2$ である。

球面 S 上の 2 点 P, Q は S の直径の端点にはなっていないとする。すると、P, Q を通る S 上の大円 (= S の中心を通る平面と S との交線が作る円) がただ 1 つ存在する。実際、O を S の中心とするとき、P, Q は S の直径の端点ではないから、3 点 O, P, Q を通る平面

が定まる。その平面と球面 S との交線として得られる大円は P, Q を通る。逆に、P, Q を通る S 上の大円は、3点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ を通る平面と S との交線になる。したがって、P, Q を通る S 上の大円はただ1つである。

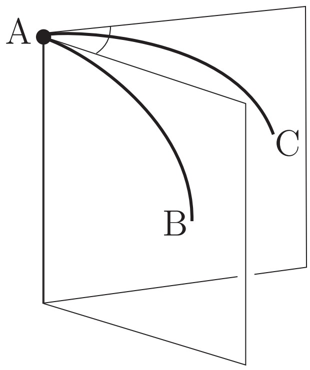
P, Q を通る S 上の大円を、2点 P, Q で2つの弧に分けたとき、長さの短い方の弧を**劣弧**といい、長い方を**優弧**という。

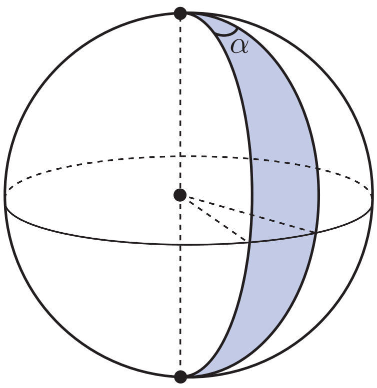
球面 S 上の3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ はどの2点も球の直径の端点にはなっていないとする。すると、球面 S 上に A, B を通る大円、B, C を通る大円、C, A を通る大円という3つの大円を引くことができる。このとき、劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{BC}}, \overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ によって囲まれる S 上の図形を**球面三角形** ABC という。さらに、3点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ をこの球面三角形の頂点といい、劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{BC}}, \overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ をこの球面三角形の辺という。



球面三角形 ABC において、頂点 A の**頂角**とは、A, B を通る大円 C_1 (を含む平面) と A, C を通る大円 C_2 (を含む平面) とのなす角のことをいう。厳密に言えば、2つの大円 (を含む平面) のなす角は2つあるが、以下では小さい方 (つまり、$0°$ と $180°$ との間にある方) を採用する。

2つの大円の半円周によって囲まれた球面上の小さい方の部分を**月形**という。





補題 1-3　半径 r の球面における月形の頂角の大きさが α (単位はラジアン) であるとき、その月形の面積は $2\alpha r^2$ で与えられる。

(証明)

$$(\text{求める月形の面積}) : (\text{球面の表面積}) = \alpha : 2\pi$$

であるから、

$$(\text{求める月形の面積}) = \frac{1}{2\pi}\alpha \times (\text{球面の表面積}) = \frac{1}{2\pi}\alpha \times 4\pi r^2 = 2\alpha r^2$$

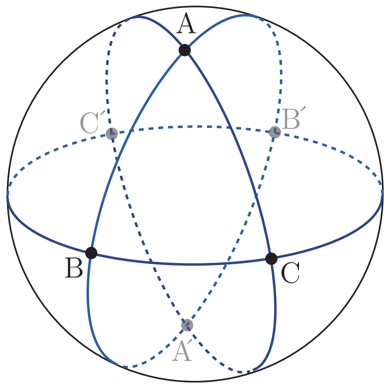
である。 □

定理 1-4 半径 r の球面において、球面三角形 ABC を考える。頂点 A, B, C の頂角をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおくと、球面三角形 ABC の面積 $S(\mathrm{ABC})$ は次の公式で与えられる。

$$S(\mathrm{ABC}) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

(**証明**)

A′, B′, C′ をそれぞれ A, B, C の対蹠点とする。



２つの球面三角形 ABC, A′BC は頂角が α の月形であるから、補題 1-3 により、

$$(\ast\ 1) \qquad S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{A'BC}) = 2\alpha r^2$$

である。同様にして、

$$(\ast\ 2) \qquad S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{AB'C}) = 2\beta r^2$$

$$(\ast\ 3) \qquad S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{ABC'}) = 2\gamma r^2$$

を得る。($\ast$ 1), ($\ast$ 2), ($\ast$ 3) の辺々の和をとって、

$$(1.6) \qquad 3S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{A'BC}) + S(\mathrm{AB'C}) + S(\mathrm{ABC'}) = 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2$$

が得られる。一方、４つの球面三角形 ABC, A′BC, AB′C, A′B′C は球面を大円 AB で切ったときの半球をなすから、

$$S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{A'BC}) + S(\mathrm{AB'C}) + S(\mathrm{A'B'C}) = 2\pi r^2$$

となる。ここで、球面三角形 A′B′C と球面三角形 ABC′ とは球面の中心に関して点対称であるから、面積は等しい、すなわち、$S(\mathrm{A'B'C}) = S(\mathrm{ABC'})$ である。こうして、

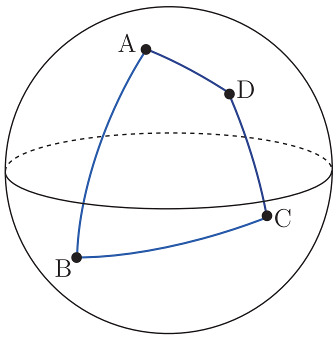
$$(1.7) \qquad S(\mathrm{ABC}) + S(\mathrm{A'BC}) + S(\mathrm{AB'C}) + S(\mathrm{ABC'}) = 2\pi r^2$$

を得る。２つの等式 (1.6), (1.7) から、

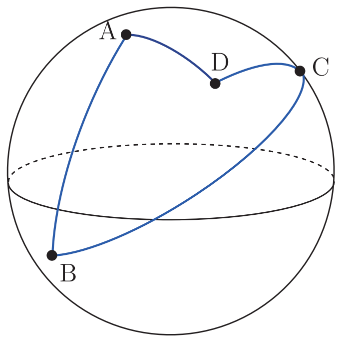
$$2S(\mathrm{ABC}) + 2\pi r^2 = 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2$$

を得る。これを整理すれば、定理の等式となる。 □

球面上の有限個の大円の劣弧で囲まれた図形を**球面多角形**と呼ぶ。その球面多角形が n 個の劣弧で囲まれているとき、**球面 n 角形**と呼ぶ。球面 n 角形 P の内部または周上にある任意の２点 P, Q は直径の端点ではなく、その２点を端点とする劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ が P の内部または周上にあるとき、P は**球面凸 n 角形**であると呼ばれる。球面三角形は常に球面凸 3 角形であるが、$n \geq 4$ に対しては球面 n 角形は必ずしも球面凸 n 角形ではない。



球面凸4角形



球面4角形(凸ではない)

頂点が $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ であるような球面凸 n 角形の面積を $S(\mathrm{A}_1 \cdots \mathrm{A}_n)$ とするとき、定理 1-4 から次が得られる。

系 1-5　半径 r の球面上の頂点が $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ であるような球面凸 n 角形の面積は、頂点 A_i $(i = 1, \cdots, n)$ の頂角を α_i とすると、次の公式で与えられる。

$$S(\mathrm{A}_1 \cdots \mathrm{A}_n) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - (n-2)\pi)r^2.$$

(**証明**)

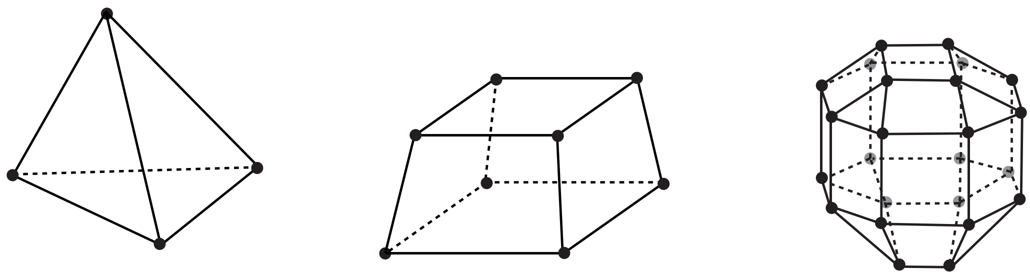
$i = 3, 4, \cdots, n$ に対して、2 頂点 A_1, A_i を劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i}$ で結ぶと、与えられている球面凸 n 角形 P は $n-2$ 個の球面三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ $(i = 2, \cdots, n-1)$ に分割される。球面三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ $(i = 2, \cdots, n-1)$ の頂点 A_1 の頂角を $\alpha_{1,i}$ とし、頂点 A_i の頂角を β_i, 頂点 A_{i+1} の頂角を γ_{i+1} とおくと、

$$\alpha_1 = \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \cdots + \alpha_{1,n-1},$$
$$\alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \gamma_3 + \beta_3,\ \cdots,\ \alpha_{n-1} = \gamma_{n-1} + \beta_{n-1},\ \alpha_n = \gamma_n$$

であることがわかる。定理 1-4 より、$S(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}) = (\alpha_{1,i} + \beta_i + \gamma_{i+1} - \pi)r^2$ であるから、

$$\begin{aligned} S(\mathrm{A}_1 \cdots \mathrm{A}_n) &= S(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3) + S(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4) + \cdots + S(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n) \\ &= (\alpha_{1,2} + \beta_2 + \gamma_3 - \pi)r^2 + (\alpha_{1,3} + \beta_3 + \gamma_4 - \pi)r^2 \\ &\qquad\qquad + \cdots + (\alpha_{1,n-1} + \beta_{n-1} + \gamma_n - \pi)r^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n - (n-2)\pi)r^2 \end{aligned}$$

を得る。 □



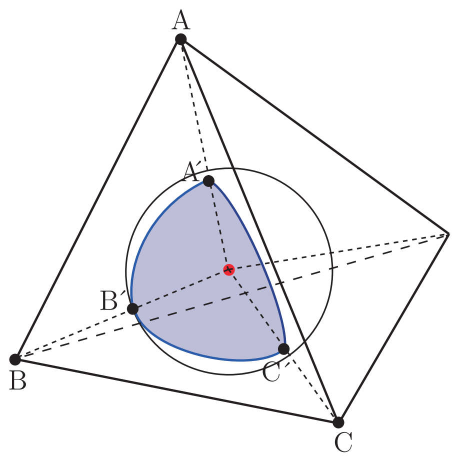
オイラーの多面体定理を証明しよう。

定理 1-6 (**オイラーの多面体定理**) T を任意の凸多面体とする。T の頂点の個数を $v(T)$, 辺の個数を $e(T)$, 面の個数を $f(T)$ とおくと、

$$v(T) - e(T) + f(T) = 2$$

が成り立つ。

(**証明**)



凸 n 面体 T の内部に 1 点 O をとり、O を中心とする球面 S を、S が T の内部に含まれるくらい、小さくとる。S の半径を r とする。T の各点 P に対して、O から P へ向かう半直線は球面 S と 1 点で交わる。その交点を P' とおく。このとき、T の各辺 AB は、球面 S 上の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$ に対応する。実際、劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$ は三角形 OAB による S の切り口であるが、それは 3 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を通る平面による S の切り口として現れる大円上にあるからである。このことから、T の各面は球面 S 上の球面多角形に対応していることがわかる。しかも、この球面多角形は、T が凸多面体であることから、球面凸角形になっていることがわかる。T の各面を S 上に写すことによって、球面 S は有限個の球面凸角形によって「きれいに」分割される。(「きれいに」というのは、この分割において 2 つの面が辺または頂点以外で交わることはないことを意味している。このことは、T は凸多面体なので、T の点と S の点が対応 $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{P}'$ によって 1 対 1 に対応することから従う。)

今、上記のようにして、S が $f = f(T)$ 個の球面凸角形 $P_1, \cdots, P_f$ に分割されたとしよう。各 P_i の頂点を $\mathrm{A}'_{i1}, \cdots, \mathrm{A}'_{in_i}$ とし、それぞれの頂角を $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in_i}$ とおくと、系 1-5 より、

$$S(P_i) = (\alpha_{i1} + \cdots + \alpha_{in_i} - (n_i - 2)\pi)r^2$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S(P_1) + \cdots + S(P_f) = {} & (\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1} - (n_1 - 2)\pi)r^2 \\ & + (\alpha_{21} + \cdots + \alpha_{2n_2} - (n_2 - 2)\pi)r^2 \\ & + \cdots + (\alpha_{f1} + \cdots + \alpha_{fn_f} - (n_f - 2)\pi)r^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

となる。ここで、球面凸角形 $P_1, \cdots, P_f$ による分割において、S 上には $v = v(T)$ 個の頂点が現れることに注意する。S の各頂点 A$'$ において、A$'$ に集まる球面凸角形たちの、頂点 A$'$ の頂角の総和は 2π であるから、

$$\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1} + \cdots + \alpha_{f1} + \cdots + \alpha_{fn_f} = 2\pi v$$

となる。また、$S(P_1) + \cdots + S(P_f) = (S \text{ の表面積}) = 4\pi r^2$ であるから、先の等式 (1.8) は

$$4 = 2v - (n_1 - 2) \cdots - (n_f - 2)$$

すなわち、

$$4 = 2v - n_1 - \cdots - n_f + 2f$$

と同値である。球面凸角形 $P_1, \cdots, P_f$ による分割において、S 上には $e = e(T)$ 個の辺が現れるが、各辺はちょうど 2 つの球面凸角形の共通部分になっているから、

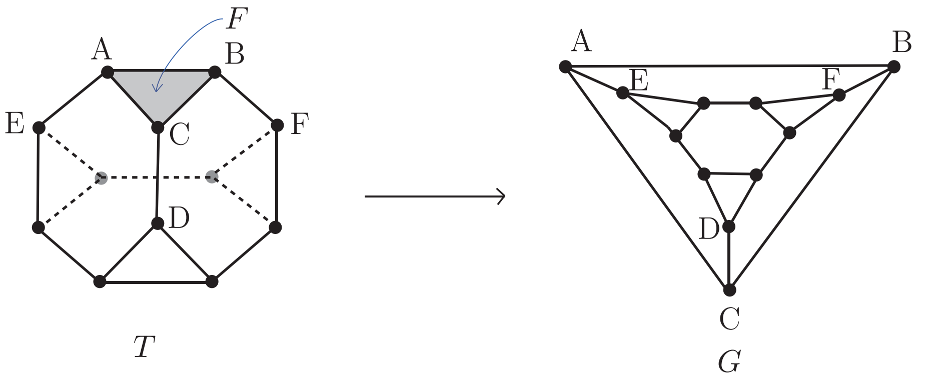
$$n_1 + \cdots + n_f = 2e$$

である。こうして、等式

$$4 = 2v - 2e + 2f$$

が得られる。両辺を 2 で割ると定理の公式になる。 □

オイラーの多面体定理の平面グラフを用いた「別証明」を与えておこう。凸多面体から次のようにして、平面グラフを作ることができる。T を凸多面体とし、その 1 つの面 F を選ぶ。F は凸 m 角形であるとし、平面に凸 m 角形を描く。この平面上の凸 m 角形の内部に、面と面の隣接関係が T におけるものと同じになるように、辺を描いていく (F に隣接する辺から順次描いていく)。



こうして、凸多面体 T から平面グラフ G ができる。ここで、**平面グラフ**とは、有限個の単純弧 (自己交差点を持たず、閉じていない曲線) からなる集合で、次の条件を満たすもののことをいう。

(i) 単純弧同士は端点以外で共有点を持たない。

(ii) 単純弧同士が共有点を持つときには、その共有点はそれぞれの端点だけである。

(iii) 単純弧の端点は必ず別の単純弧の端点になっている。

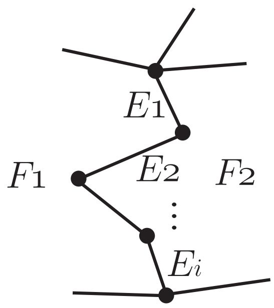
平面グラフ G を構成している個々の単純弧を G の辺と呼び、辺の端点になっている平面上の点を G の**頂点**と呼ぶ。平面グラフ G のいくつかの辺によって囲まれる領域を G の**面**という。G の「外側」の領域は無限領域であるが、これも 1 つの面と考える (凸多面体 T の面 F に対応する)。オイラーの多面体定理を証明するためには、平面グラフ G に対して、その頂点の個数、辺の個数、面の個数をそれぞれ $v(G),\ e(G),\ f(G)$ とおいたとき、

$$v(G) - e(G) + f(G) = 2 \tag{1.9}$$

となることを示せばよい。この等式を面の個数に関する数学的帰納法で証明しよう。

面の個数が最も少ない平面グラフは 2 つの面からなるグラフである。これは、1 つの多角形の周になっているような平面グラフである。G が m 角形の周になっていたとすると、$v(G) = m,\ e(G) = m,\ f(G) = 2$ であるから、(1.9) は成立する。

k を $k > 2$ なる整数とし、面の個数が $k-1$ 個の任意の平面グラフに対して、(1.9) は成り立っていると仮定する。G を面の個数が k 個の平面グラフとする。G において、2 つの面 $F_1,\ F_2$ が右図のように、有限個の辺 $E_1, \cdots, E_i$ を挟んで隣接しているとする。このとき、G から $E_1, \cdots, E_i$ をとり除いて得られる平面グラフを G' とする。G' においては、$F_1,\ F_2$ が 1 つの面になるから、$f(G') = f(G)-1$ を満たす。よって、G' に対して帰納法の仮定が使える。$v(G') = v(G)-(i-1),\ e(G') = e(G)-i$ であるから、

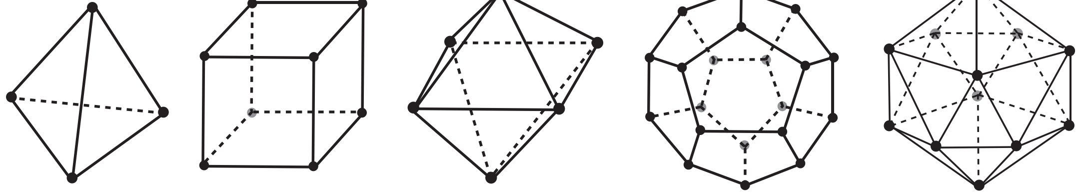


$$v(G)-e(G)+f(G) = (v(G')+i-1)-(e(G')+i)+(f(G')+1) = v(G')-e(G')+f(G') = 2$$

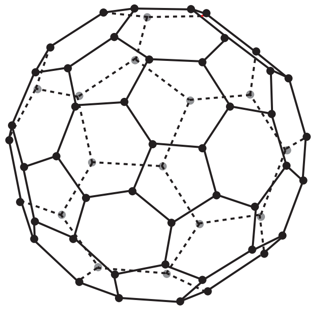
を得る。こうして、k 個の面を持つ平面グラフに対しても (1.9) が成り立つことが示された。 □

§2. オイラーの多面体定理の応用

凸多面体であって、すべての面が合同な正多角形からなり、各頂点のまわりが合同 (= 各頂点から同じ本数の辺が出ていて、隣り合う辺同士の間隔が一定) である凸多面体を**正多面体**と呼び、面が 2 種類以上の正多角形からなり、各頂点のまわりが合同 (= 各頂点から同じ本数の辺が出ていて、多角形の配置が同じ) である凸多面体を**準正多面体**と呼ぶ。

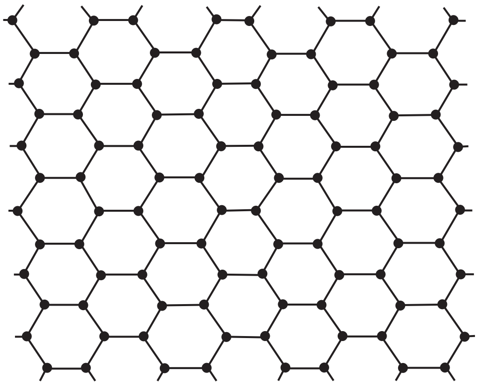


上の 5 つの正多面体を総称して**プラトンの正多面体**と呼ぶ。準正多面体の中でもっとも有名なのは、サッカーボールの形状に使われている、準正 32 多面体であろう。



準正 32 多面体は 60 個の頂点を持ち、面は正 5 角形と正 6 角形の 2 種類からなる。準正 32 多面体はまた、それが C_{60} **フラーレン**と呼ばれる物質の分子構造に現れることからも注目される。C_{60} フラーレンは、準正 32 多面体の各頂点に炭素原子を 1 個づつ配した球殻上の構造をしている。この物質は、炭素原子が結合する上で極めて安定な構造をしている一方で、化学反応性に富むことから、幅広く研究・開発がなされている。

ところで、炭素と言えば鉛筆の芯を思い浮かべる人も多いと思う。その主成分であるグラファイトは、6 角形が並んだ構造を持つ、シート状の物質である。



では、このグラファイトシートを丸めた形状の（つまり、C_{60} フラーレンのような球殻上の構造を持つ）炭素分子は存在し得るだろうか？その答えは、オイラーの多面体定理を使って、導き出すことができる。

定理 2-1　正多面体は、正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の 5 種類だけである。

(証明)

T を正 n 角形からなる正多面体とする。各頂点から q 個の辺が出ているとする。$v = v(T),\ e = e(T),\ f = f(T)$ とおくと、オイラーの多面体定理から、

(2.1) $$v - e + f = 2$$

が成り立つ。各頂点から出ている辺の個数を単純にすべて足すと、1 つの辺を 2 回ずつ数えたことになるから、

(2.2) $$vq = 2e$$

が成り立つ。また、各面の辺の個数 $(= n)$ を単純にすべて足すと、やはり、1つの辺を2回ずつ数えたことになるから、

$$fn = 2e \tag{2.3}$$

が成り立つ。(2.1), (2.2), (2.3) を連立させて解く。(2.1) に (2.2), (2.3) を代入すると、$2eq^{-1} - e + 2en^{-1} = 2$ となるから、

$$e = \frac{2qn}{2n + 2q - qn}$$

を得る。したがって、

$$v = \frac{4n}{2n + 2q - qn}, \qquad f = \frac{4q}{2n + 2q - qn}$$

を得る。ここで、v, e, f は自然数であるから、$2n + 2q - qn > 0$ である。したがって、

$$(n-2)(q-2) < 4 \tag{2.4}$$

でなければならない。$n \geq 3$ であり、$q \geq 3$ である。

$\because$)

もし、$q = 2$ であるとすると、(2.2) から $v = e$ となる。これを (2.1) に代入すると、$f = 2$ となる。凸多面体が2つの面しかないことになるが、その2つの面が辺または頂点のみで共有点を持つことは不可能である (必ず内部で交わる)。故に、$q \geq 3$ とわかる。 □

不等式 (2.4) を満たす $n, q \geq 3$ を列挙すると、$(q, n) = (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3)$ の5つのみである。このとき、面の個数 f は順に 4, 6, 12, 8, 20 である。 □

上の定理の証明から、正多面体において現れ得る多角形は、正3角形、正4角形、正5角形の3種類しかない。つまり、正6角形からなる正多面体は存在しない。このことは、6角形だけからなる、C_{60} フラーレンのような球殻上の構造を持つ炭素分子は存在し得ないことを意味している。

補題 2-2 凸多面体 T に対して、

$$2e(T) \geq 3v(T), \quad 2e(T) \geq 3f(T)$$

が成り立つ。

(証明)

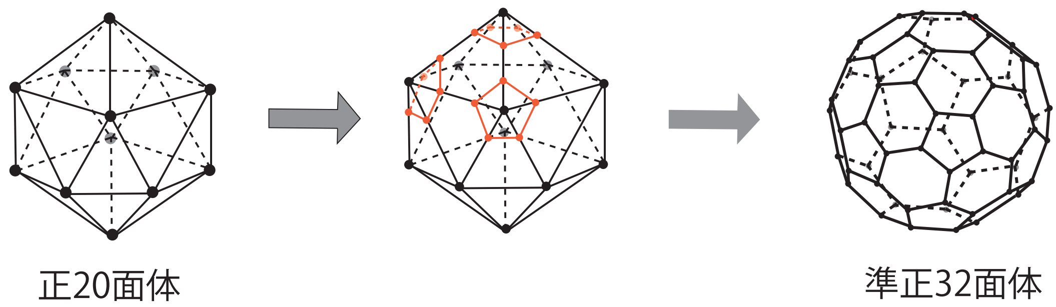
$v = v(T),\ e = e(T),\ f = f(T)$ とおく。多面体の条件 (CP2) により、各頂点から出ている辺の個数は 3 以上である。したがって、各頂点について、そこから出ている辺の個数を数えて足し上げた総和は $3v$ 以上となる。一方、各辺はちょうど2つの頂点を持つので、各頂点から出ている辺の個数を数えて足し上げると、2つの辺を2回ずつ重複して数えたことになる。したがって、不等式 $2e \geq 3v$ を得る。

次に、多角形は3個以上の辺を持つから、多面体の各面について、その辺の個数を数えて足し上げた総和は $3f$ 以上となる。一方、多面体の条件 (CP3) により、各辺はちょうど

２つの面の共通部分になるから、各面の辺の個数を数えて足し上げると、２つの辺を２回ずつ重複して数えたことになる。したがって、不等式 $2e \geq 3f$ を得る。 □

注意：次の事実が知られている：整数 $v, f \geq 4$ および $e \geq 3$ に対して、$v = v(T)$, $e = e(T)$, $f = f(T)$ となる凸多面体 T が存在するための必要十分条件は、補題の２つの不等式とオイラーの公式が成り立つことである。

観察　C_{60} フラーレンにおいて、面の数は 32 個あり、そのうち、正 5 角形は 12 個、正 6 角形は 20 個である。C_{60} フラーレンは、正 20 面体からその各頂点を小さく切り落とすことによって得られる。正 20 面体の頂点はちょうど 12 個あるが、その各頂点を切り落とすと正 5 角形が生じて、全体で 12 個の正 5 角形になり、20 個の面が 20 個の正 6 角形になるのである。



問題 [11; c.f. 問題 98] 凸多面体 T であって、次の条件を持たすものは存在するか？

(1) $v(T) = 104,\ e(T) = 155,\ f(T) = 53.$

(2) $v(T) = 104,\ e(T) = 156,\ f(T) = 54.$

(**解**)

(1) まず、オイラーの公式 $v(T) - e(T) + f(T) = 104 - 155 + 53 = 2$ は成り立っている。次に、補題の不等式を満足しているかどうかを調べよう。

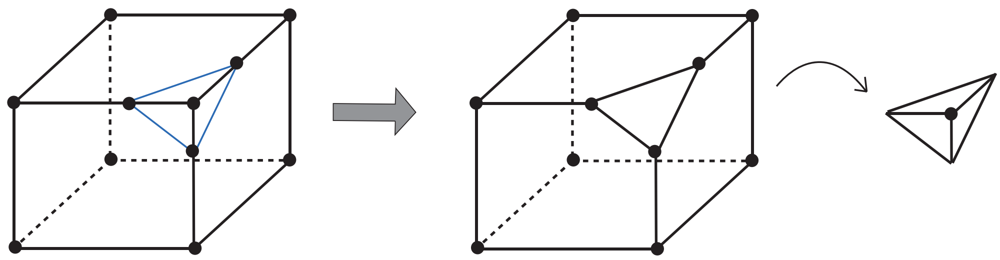
$$2e(T) = 2 \cdot 155 = 310, \quad 3v(T) = 3 \cdot 104 = 312$$

であるから、$2e(T) \geq 3v(T)$ を満たさない。よって、(1) の条件を満たす凸多面体は存在しない。

(2) まず、オイラーの公式 $v(T) - e(T) + f(T) = 104 - 156 + 54 = 2$ は成り立っている。さらに、補題の不等式は

$$2e(T) = 2 \cdot 156 = 312 \geq 3 \cdot 104 = 3v(T),$$
$$2e(T) = 2 \cdot 156 = 312 \geq 162 = 3 \cdot 54 = 3f(T)$$

も満足する。実は、(1) の条件を満たす凸多面体存在する。このような凸多面体は、正 20 面体から準 32 面体を構成した方法を真似ることによって、作ることができる。これを説明するために、頂点の**次数**という概念を導入する。凸多面体 T の頂点の次数とは、その頂点から伸びている辺の個数のことをいう。凸多面体 T が次数 3 の頂点を持つとき、そのような頂点の 1 つを「切り落として」新しい凸多面体 T' を作ることができる (下図参照)。



T $\qquad\qquad\qquad\qquad$ T'

すると、頂点の個数は 3 個増えて、1 個減るから、$v(T') = v(T) + 2$ となり、辺の個数は 3 個増えるから $e(T') = e(T) + 3$ となり、面の個数は 1 個増えるから $f(T') = f(T) + 1$ となる。しかも、T' には次数 3 の頂点を持つ。したがって、このような操作を T' に対して再び行うことができる。このような操作を n 回続けて行って得られる凸多面体を $T^{(n)}$ とおくと、

$$v(T^{(n)}) = v(T) + 2n, \qquad e(T^{(n)}) = e(T) + 3n, \quad f(T^{(n)}) = f(T) + n$$

となる。T が正 4 面体のときには、

$$v(T^{(n)}) = 4 + 2n, \qquad e(T^{(n)}) = 6 + 3n, \quad f(T^{(n)}) = 4 + n$$

であり、$n = 50$ のとき、$v(T^{(50)}) = 104,\ e(T^{(50)}) = 156,\ f(T^{(50)}) = 54$ となる。こうして、正 4 面体から出発して、次数 3 の頂点の切断を 50 回続けて行うと、(2) の条件を満たす凸多面体が得られる。 □

問題 [2; c.f. p.15] 次の条件を満たす頂点の個数が 12 の準正多面体にはどのようなものがあるか？

(i) 面として現れる正多角形の種類は 2 種類である。その 2 種類を m 角形と n 角形とする。

(ii) 各頂点から出ている辺の個数は、頂点によらずに一定である。

(iii) 各頂点のまわりにあつまる正 m 角形、正 n 角形の個数は、頂点によらずに一定であり、それらの配置も同じである。

この問題を解決するためには、凸多面体の 1 つの頂点のまわりでの角度に関する考察が必要になる。

補題 2-3 凸多面体 T において、1 つの頂点 A を考える。この頂点のまわりに集まる T の面が $F_1, \cdots, F_l$ であるとする。各多角形 F_i $(i = 1, \cdots, l)$ の点 A の角度を α_i とおくと、

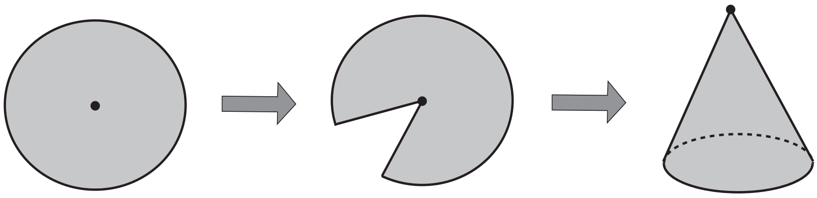
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_l < 2\pi$$

が成り立つ。

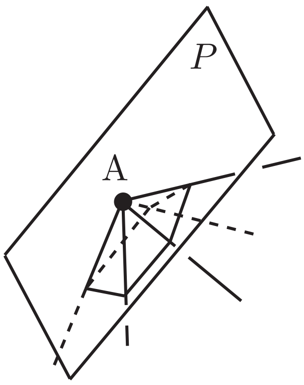
(**証明**)

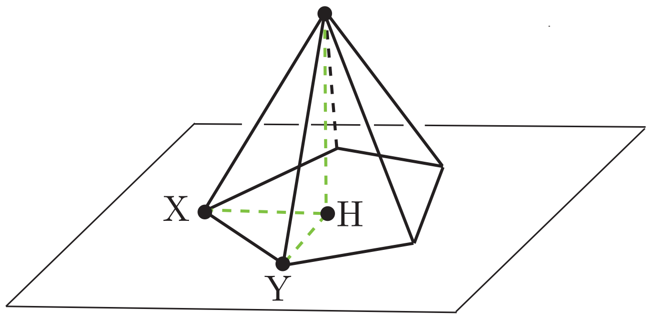
この補題の主張が成り立つことは、次のように考えれば容易に想像できる。紙を 1 枚用意して、その紙の上に一点をとり、その点を中心とする円板を切り取る。この円板の中心が

凸になるように、「しわ」を作らずに、錐を作るには、円板の一部を切り取って、扇形にしなければならない。切りとってしまった分だけ、角度は 2π より小さくなるから、凸多面体の 1 つの頂点のまわりに集まる多角形の角度の総和は 2π よりも小さくなる (はずである)。



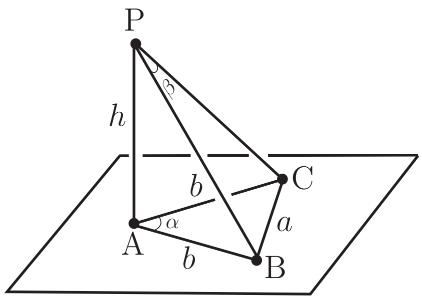
厳密に証明するには、次のようにする。頂点 A が直多角錐の頂点となるように、充分小さな平面 P で T を切る。頂点 A からその平面へ下ろした垂線の足を H とする。1 つの多角形 F_i に注目する。A から出ている F_i の辺と P との交点を X, Y とおくと、$\alpha_i = \angle\mathrm{XAY}$ である。$\alpha_i < \angle\mathrm{XHY}$ となることが示されればよい。





したがって、次のことが証明されればよい。

平面上に三角形 ABC があり、この平面に垂直で、A から伸びる半直線上に点 P があるとする。$\alpha = \angle\mathrm{BAC}$, $\beta = \angle\mathrm{BPC}$ とおくとき、$\alpha > \beta$ となる。



このことを示す。角度だけを問題にしているので、三角形 ABC は AB = AC を満たす二等辺三角形であるとしても一般性を失わない。以下、$a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$, $h = \mathrm{PA}$ とおく。三角形 ABC に余弦定理を用いて、

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha$$

が得られ、三角形 PBC に余弦定理を用いると、

$$a^2 = 2(b^2 + h^2) - 2(b^2 + h^2)\cos\beta$$

が得られる。したがって、

$$\cos\beta = \frac{h^2 + b^2\cos\alpha}{b^2 + h^2}$$

を得る。$\alpha > \beta$ を示すには、$\cos\beta > \cos\alpha$ を示せばよい。よって、

$$\frac{h^2 + b^2\cos\alpha}{b^2 + h^2} > \cos\alpha$$

を示せばよい。上式は $h^2 + b^2\cos\alpha > (b^2 + h^2)\cos\alpha$ と同値であり、これは、$h^2 > h^2\cos\alpha$ と同値である。$\cos\alpha < 1$ であるから、最後の不等式は自明に成り立つ。こうして、補題は証明された。 $\square$

(問題の解)

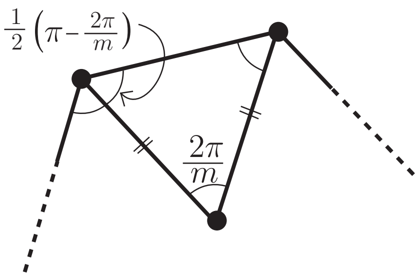
T を頂点の個数が 12 の準正多面体とし、T における正 m 角形と正 n 角形の個数をそれぞれ a, b とする。また、各頂点から伸びている辺の個数を q とする。$v = v(T)$, $e = e(T)$, $f = f(T)$ とおくと、$v = 12$, $f = a + b$ である。各頂点について、そこから出ている辺の個数を数えて足し上げた総和を２通りの方法で数えて $12q = 2e$, すなわち、$6q = e$ を得る。また、各面について、その辺の個数を数えて足し上げた総和を２通りの方法で数えて $am + bn = 2e$ を得る。さらに、オイラーの多面体定理により、$12 - e + (a + b) = 2$, すなわち、$a + b = e - 10$ を得る。こうして、連立一次方程式

$$\begin{cases} 6q = e, \\ am + bn = 2e, \\ a + b = e - 10 \end{cases} \tag{2.5}$$

を得る。

今、各頂点において、正 m 角形が s 個、正 n 角形が t 個集まっているとする。正 m 角形の内角の和は $\pi\left(1 - \dfrac{2}{m}\right)$ であるから、1 つの頂点にあつまる T の多角形の角度の和は、$s\pi\left(1 - \dfrac{2}{m}\right) + t\pi\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ となる。補題 2-3 により、これは 2π よりも小さい、すなわち、

$$s\left(1 - \frac{2}{m}\right) + t\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 2$$



正m角形の内角

が成り立つ。$m, n \geq 3$ であるから、$\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{3}$ である。したがって、

$$s\left(1 - \frac{2}{m}\right) + t\left(1 - \frac{2}{n}\right) > s\left(1 - \frac{2}{3}\right) + t\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{s + t}{3} = \frac{q}{3}$$

となる。故に、$\dfrac{q}{3} < 2$ すなわち、$q < 6$ を得る。こうして、$q = 3, 4, 5$ に絞られた。以下、$n > m$ を仮定する。

さらに、m 角形が全部で a 個、n 角形が全部で b 個あり、1 つの頂点に m 角形が s 個、n 角形が t 個集まっている準正多面体において、頂点の個数は $\dfrac{ma}{s} = \dfrac{nb}{t}$ 個である。したがって、

$$\frac{ma}{s} = \frac{nb}{t} = 12 \tag{2.6}$$

という等式も成立する。

● $q=3$ の場合：

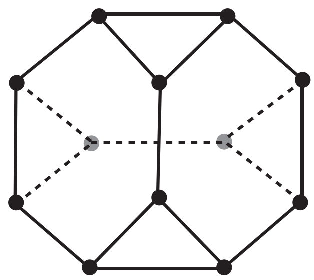
(2.5) より、$e=18,\ am+bn=36,\ a+b=8$ となる。後半の 2 式から $0<(n-m)b=36-8m$, すなわち、$2m<9$ を得る。これを満たす 3 以上の整数 m は $m=3,4$ である。

▶ $m=3$ のとき：$(n-3)b=12$ であるから、n,b の組み合わせとしては、次の 6 通りが考えられる：$(n,b)=(15,1),\ (9,2),\ (7,3),\ (6,4),\ (5,6),\ (4,12)$. このうち、$(n,b)=(15,1)$ は、頂点の個数が 12 であることに反するので、あり得ない。

$(n,b)=(9,2)$ の場合：$a=6$ であるから、(2.6) より、$18=12s,\ 18=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

$(n,b)=(7,3)$ の場合：$a=5$ であるから、(2.6) より、$15=12s,\ 21=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

$(n,b)=(6,4)$ の場合：$a=4$ であるから、(2.6) より、$12=12s,\ 24=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は $s=1,\ t=2$ である。この場合、T は、各頂点のまわりに 3 角形が 1 個、6 角形が 2 個集まっていて、各頂点から辺が 3 本でおり、4 個の 3 角形と 4 個の 6 角形からなる準正 14 面体である。これは右図のような準正 14 面体であることがわかる。



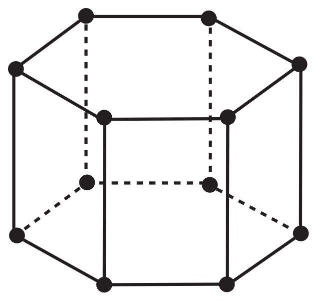
$(n,b)=(5,6)$ の場合：$a=2$ であるから、(2.6) より、$6=12s,\ 30=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

$(n,b)=(4,12)$ の場合：$a=-4$ となり、矛盾が生じる。

▶ $m=4$ のとき：$(n-4)b=4$ であるから、n,b の組み合わせとしては、次の 3 通りが考えられる：$(n,b)=(8,1),\ (6,2),\ (5,4)$.

$(n,b)=(8,1)$ の場合：$a=7$ であるから、(2.6) より、$28=12s,\ 8=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

$(n,b)=(6,2)$ の場合：$a=6$ であるから、$24=12s,\ 12=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は $s=2,\ t=1$ である。この場合、T は、各頂点のまわりに 4 角形が 2 個、6 角形が 1 個集まっていて、各頂点から辺が 3 本でおり、6 個の 4 角形と 2 個の 6 角形からなる準正 14 面体である。これは右図のような準正 14 面体であることがわかる。



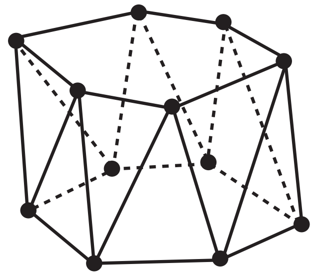
$(n,b)=(5,4)$ の場合：$a=4$ であるから、(2.6) より、$16=12s,\ 20=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

● $q=4$ の場合：

(2.5) より、$e=24,\ am+bn=48,\ a+b=14$ となる。後半の 2 式から $0<(n-m)b=48-14m$, すなわち、$7m<24$ を得る。これを満たす 3 以上の整数 m は $m=3$ である。$(n-3)b=6$ であるから、n,b の組み合わせとしては、次の 4 通りが考えられる：$(n,b)=(9,1),\ (6,2),\ (5,3),\ (4,6)$.

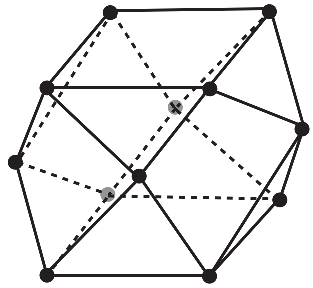
$(n,b)=(9,1)$ の場合：$a=13$ であるから、(2.6) より、$39=12s,\ 9=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

$(n,b)=(6,2)$ の場合：$a=12$ であるから、(2.6) より、$36=12s,\ 12=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は $s=3,\ t=1$ である。この場合、T は、各頂点のまわりに 3 角形が 3 個、6 角形が 1 個集まっていて、各頂点から辺が 4 本でおり、12 個の 3 角形と 2 個の 6 角形からなる準正 14 面体である。これは次図のような準正 14 面体であることがわかる。



$(n,b)=(5,3)$ の場合：$a=11$ であるから、(2.6) より、$33=12s,\ 15=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は存在しない。

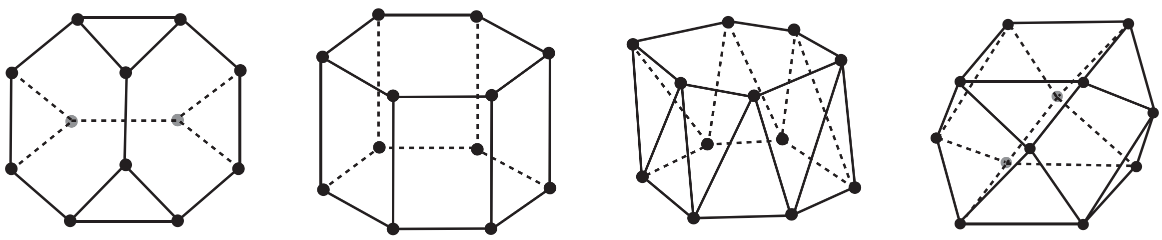
$(n,b)=(4,6)$ の場合：$a=8$ であるから、(2.6) より、$24=12s,\ 24=12t$ となる。これを満たす整数 s,t は $s=2,\ t=2$ である。この場合、T は、各頂点のまわりに 3 角形が 2 個、4 角形が 2 個集まっていて、各頂点から辺が 4 本でおり、8 個の 3 角形と 6 個の 4 角形からなる準正 14 面体である。これは右図のような準正 14 面体であることがわかる。



• $q=5$ の場合：

(2.5) より、$e=30,\ am+bn=60,\ a+b=20$ となる。後半の 2 式から $0<(n-m)b=60-20m$, すなわち、$m<3$ を得る。これを満たす 3 以上の整数 m は存在しない。

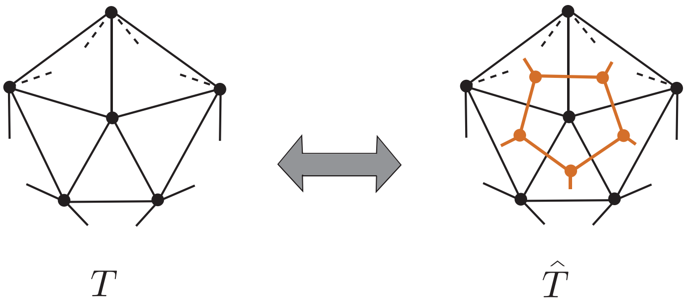
以上より、面が 2 種類の正多角形でできている準正 14 面体は次のつぎのものに限られることがわかった。



問題 5 つの正多面体の頂点、辺、面の個数を調べてみよう。そして、正 6 面体と正 8 面体の頂点の個数と面の個数を比較してみよう。さらに、正 12 面体と正 20 面体の頂点の個数と面の個数も比較してみよう。

T	$v(T)$	$e(T)$	$f(T)$
正 4 面体	4	6	4
正 6 面体	8	12	6
正 8 面体	6	12	8
正 12 面体	20	30	12
正 20 面体	12	30	20

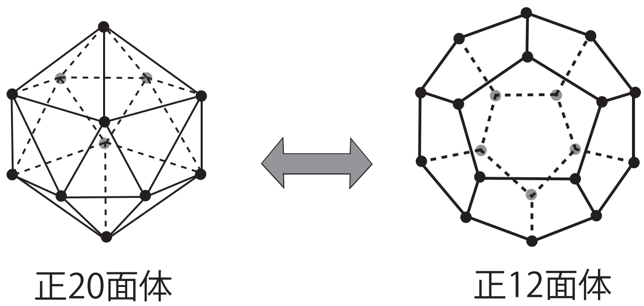
正 6 面体と正 8 面体 (resp. 正 12 面体と正 20 面体) の頂点の個数と面の個数はちょうど入れ替わっていることに気がついたと思う。これは、正 6 面体と正 8 面体、正 12 面体と正 20 面体とがそれぞれ双子の多面体になっていることによる。これについて説明しよう。凸多面体 T に対して次の操作を考える。



T の各面 F に対して、その重心 $\hat{F}$ をとる。T において隣り合う面の重心同士を線分で結ぶ。すると、重心を頂点とする凸多面体 $\hat{T}$ が出来上がる。この $\hat{T}$ を T の**双対多面体**と呼ぶ。$\hat{T}$ の頂点は T の面に対応し、$\hat{T}$ の辺は T の辺に対応している。さらに、$\hat{T}$ の面は T の頂点に対応していることがわかる。したがって、

$$v(\hat{T}) = f(T), \qquad e(\hat{T}) = e(T), \qquad f(\hat{T}) = v(T)$$

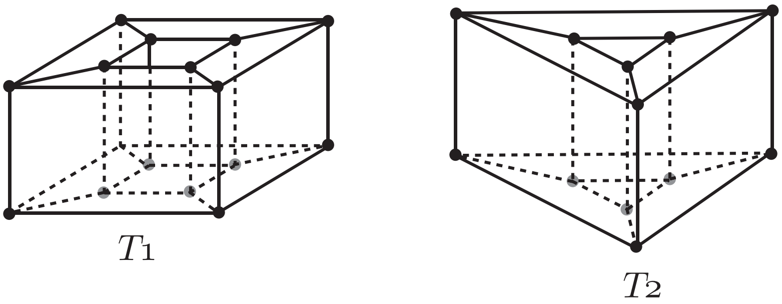
という関係式がなりたつ (**ポアンカレの双対定理**)。正 6 面体 (resp. 正 8 面体) の双対多面体は正 8 面体 (resp. 正 6 面体) であり、正 12 面体 (resp. 正 20 面体) の双対多面体は正 20 面体 (resp. 正 12 面体) である。先程の表において頂点の個数と面の個数がちょうど入れ替わった関係になっていたのは、多面体の双対性に基づいている。



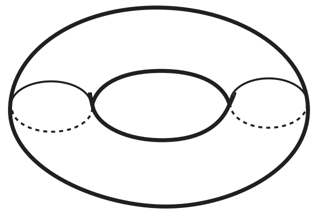
凸多面体 T に対しては、オイラーの多面体定理により、常に、(頂点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) $= 2$ であった。凸多面体でなくても、(頂点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) という量を考えることはできる。そこで、必ずしも凸とは限らない多面体 T に対して

$$\chi(T) = v(T) - e(T) + f(T)$$

とおく。$\chi(T)$ を T の**オイラー数**と呼ぶ。次のような多面体 T_1, T_2 に対して、オイラー数を求めてみよう。

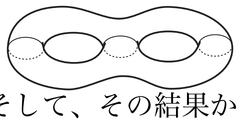


簡単な計算により、$\chi(T_1)=0,\ \chi_2(T)=0$ となることがわかる。正多面体や準正多面体は球面の近似多面体と思えるが、上の T_1 や T_2 はトーラスと呼ばれる曲面の近似多面体と思える。ここで、曲面 S の近似多面体とは、多面体であって、それをゴムあるいは粘度でできた物体と考えたとき、伸ばしたり縮めたりしながら変形していく (但し、穴をあけてないけない) と、曲面 S になるものをいう。



実は、トーラスのどのような近似多面体についてもそのオイラー数は 0 になることが証明される。球面の近似多面体とトーラスの近似多面体のオイラー数がそれぞれ 2, 0 となる。この事実は、球面とトーラスが連続的な変形によって移りあえないことを意味している。

大学では、上で述べたように、図形を伸ばしたり縮めたりしながら、図形の「大雑把な」形状を調べたりすることも多い。このような視点で図形を研究する分野は位相幾何学 (トポロジー) と呼ばれ、盛んに研究されている。トポロジーにおいては、当然、角度や長さといった「ものさし」は通用しない。その代わりとなるもの (の 1 つ) が、オイラー数なのである。

問題 ダブルトーラス  の適当な近似多面体を見つけて、そのオイラー数を計算してみよう。そして、その結果からどんなことがわかるか？

§3. **補遺：平面のタイル張り**

正多面体とは、合同なせ正多角形で構成され、各頂点のまわりが合同になっているような立体図形であった。これらを球面へ投影すれば、球面が合同な球面凸多角形で覆われた状況になる。ここでは、同種の問題を平面上で考察しよう。すると、正多角形による平面充填 (タイル張り) の問題になる [8]。

問題 (**平面充填問題**) [3] 正五角形を敷き詰めて、平面を覆うことができるか？但し、各頂点から出ている辺の個数は同じであるとする。

(**解**)

正 m 角形を敷き詰めて、平面を覆うことができたとする。正 m 角形の内角は $\pi\left(1-\dfrac{2}{m}\right)$ であるから、頂点のまわりに q 個の正 m 角形が集まっているとすると、

$$\pi\left(1-\frac{2}{m}\right)\times q = 2\pi$$

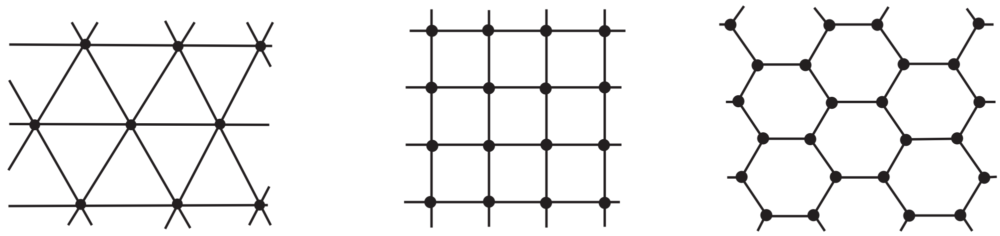
となる。$m \geq 3$ であるから、$1-\dfrac{2}{m} \geq 1-\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ である。よって、

$$2 \geq \frac{q}{3}$$

を得る。故に、$q = 3, 4, 5, 6$ である。$(m-2)q = 2m$ より、

$$m = \frac{2q}{q-2}$$

であるから、$q = 3, 4, 5, 6$ に応じて $m = 6, 4, \frac{10}{3}, 3$ となる。よって、$q = 5$ となることはない。さらに、各頂点から同数の辺が出ていて、同種の正多角形で平面を覆うことができるのは、面が三角形、四角形、六角形のときに限ることがわかった。実際、三角形、四角形、六角形のときには、それぞれ次のようにして平面を覆うことができる。



両端の 2 つは互いに双対の関係にあることに注意しよう。

正多面体が球面を合同な正多角形で覆ったものと捉えると、これらはその平面版という意味で、正多面体の一種と考えることができる。

次に、準正多面体と同様に、平面を 2 種類以上の正多角形で覆うことを考えよう [8]。ここでは話を簡単にするために、丁度 2 種類の正多角形で平面を覆うことを考える。次の条件の下で、平面の充填問題を考察しよう。

(i) 面として現れる正多角形の種類は 2 種類である。その 2 種類を m 角形と n 角形とする。

(ii) 各頂点から出ている辺の個数は、頂点によらずに一定である。

(iii) 各頂点のまわりにあつまる正 m 角形、正 n 角形の個数は、頂点によらずに一定であり、それらの配置も同じである。

各頂点のまわりに、正 m 角形が s 個、正 n 角形が t 個集まっているとすると、

$$s\left(1-\frac{2}{m}\right)+t\left(1-\frac{2}{n}\right)=2 \tag{3.1}$$

が成り立つ。各頂点から出ている辺の個数を q とおくと、$q = s+t$ である。また、$m \geq 3$ であるから、

$$2 = s\left(1-\frac{2}{m}\right)+t\left(1-\frac{2}{n}\right) \geq s\left(1-\frac{2}{3}\right)+t\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{s+t}{3} = \frac{q}{3}$$

となる。よって、$q = 3, 4, 5, 6$ である。

(3.1) より、

$$\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=\frac{q-2}{2} \tag{3.2}$$

を得る。以下、$n>m$ とする。

• $q=3$ のとき：$\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=\frac{1}{2}$ となる。これは $2sn+2tm-mn=0$ と同値であり、さらに、$(m-2s)(n-2t)=4st$ と同値である。

$(s,t)=(1,2)$ の場合、$(m-2)(n-4)=8$ である。これを満たす 3 以上の整数の組 (m,n) は、$(m,n)=(3,12),\ (4,8),\ (6,6),\ (10,5)$ であるが、$n>m$ であるから、$(m,n)=(3,12),\ (4,8)$ の可能性がある。

$(s,t)=(2,1)$ の場合、$(m-4)(n-2)=8$ である。これを満たす 3 以上の整数の組 (m,n) は、$(m,n)=(5,10),\ (6,6),\ (8,4),\ (12,3)$ であるが、$n>m$ であるから、$(m,n)=(5,10)$ の可能性がある。

• $q=4$ のとき：(3.2) は $\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=1$ となる。これは $sn+tm-mn=0$ と同値であり、さらに、$(m-s)(n-t)=st$ と同値である。

$(s,t)=(1,3)$ の場合、$(m-1)(n-3)=3$ である。これを満たす 3 以上の整数の組 (m,n) は、$(m,n)=(4,4)$ のみである。これは $n>m$ を満たさない。

$(s,t)=(2,2)$ の場合、$(m-2)(n-2)=4$ である。これを満たす 3 以上の整数の組 (m,n) は、$(m,n)=(3,6),\ (4,4),\ (6,4)$ のみである。このうち、$n>m$ を満たすものは $(m,n)=(3,6)$ のみである。

$(s,t)=(3,1)$ の場合、$(m-3)(n-1)=3$ である。これを満たす 3 以上の整数の組 (m,n) は、$(m,n)=(4,4)$ のみである。これは $n>m$ を満たさない。

• $q=5$ のとき：(3.2) は $\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=\frac{3}{2}$ となる。これは $2sn+2tm-3mn=0$ と同値である。$n=\frac{2tm}{3m-2s}>m$ なので、$2t>3m-2s$, すなわち、$2q=2(t+s)>3m$ となる。よって、$10>3m$ であり、m は整数なので、$m=3$ でなければならない。

$(s,t)=(1,4)$ の場合、$n=\frac{24}{7}$ となり、n は整数であることに反する。

$(s,t)=(2,3)$ の場合、$n=\frac{18}{5}$ となり、n は整数であることに反する。

$(s,t)=(3,2)$ の場合、$n=4$ となる。

$(s,t)=(4,1)$ の場合、$n=6$ となる。

• $q=6$ のとき：(3.2) は $\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=2$ となる。これは $sn+tm-2mn=0$ と同値である。$n=\frac{tm}{2m-s}>m$ なので、$t>2m-s$, すなわち、$q=t+s>2m$ となる。$q=6$ より、$3>m$ となる。これは m が 3 以上であることに反する。

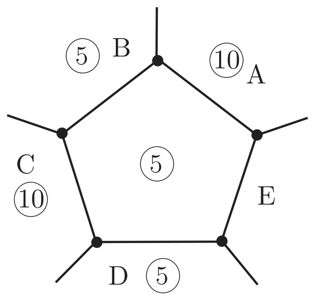
以上の考察により、(3.2) を満たす整数 s,t,m,n であって、$n>m\geq 3$ を満たすものは次のものに限られることがわかった：

$$(q,s,t,m,n)=(3,1,2,3,12),\ (3,1,2,4,8),\ (3,2,1,5,10),\ (4,2,2,3,6),\ (5,3,2,3,4),\ (5,4,1,3,6).$$

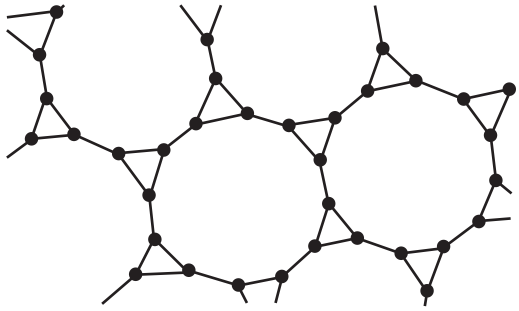
このうち、$(q,s,t,m,n)=(3,2,1,5,10)$ となるような平面充填は存在しない。

∵)

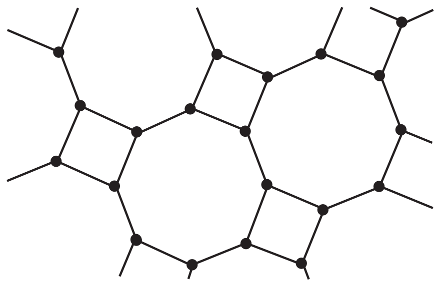
1 つの 5 角形に注目する。その 5 角形に隣接する多角形を反時計まわりに A, B, C, D, E とおく。各頂点において、5 角形が 2 個、10 角形が 1 個隣接するから、A が 10 角形ならば B は 5 角形、C は 10 角形、D は 5 角形となる。ところが、E は 10 角形としても 5 角形としても矛盾が生じる。A が 5 角形として同様の考察を行っても矛盾が生じる。故に、$(q, s, t, m, n) = (3, 2, 1, 5, 10)$ となるような平面充填は存在しない。 □



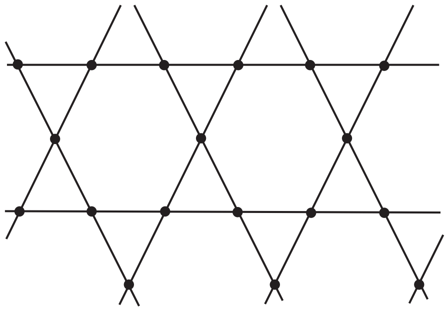
• $(q, s, t, m, n) = (3, 1, 2, 3, 12)$ となる平面充填は、各頂点から 3 本の辺が出ていて、各頂点に 1 個の 3 角形と 2 個の 12 角形が集まっている。これは、次のような模様の平面充填である。

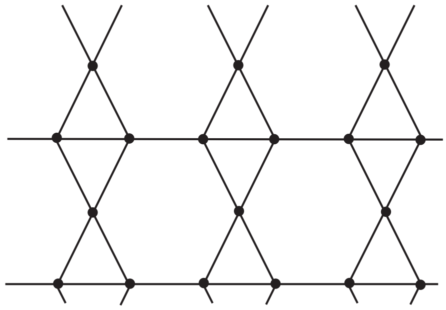


• $(q, s, t, m, n) = (3, 1, 2, 4, 8)$ となる平面充填は、各頂点から 3 本の辺が出ていて、各頂点に 1 個の 4 角形と 2 個の 8 角形が集まっている。これは、次のような模様の平面充填である。

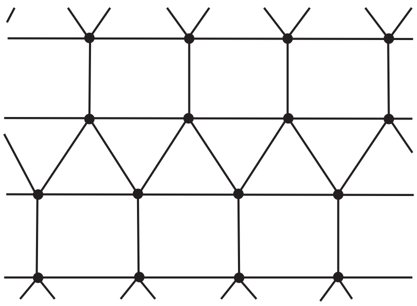


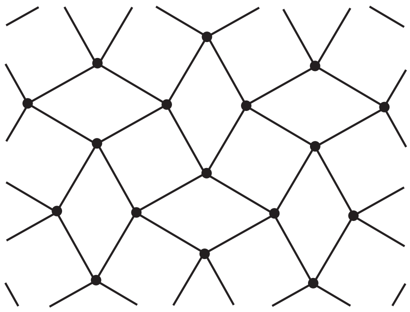
• $(q, s, t, m, n) = (4, 2, 2, 3, 6)$ となる平面充填は、各頂点から 4 本の辺が出ていて、各頂点に 2 個の 3 角形と 2 個の 6 角形が集まっている。これは、次のような模様の平面充填である (2 通りのパターンがある)。



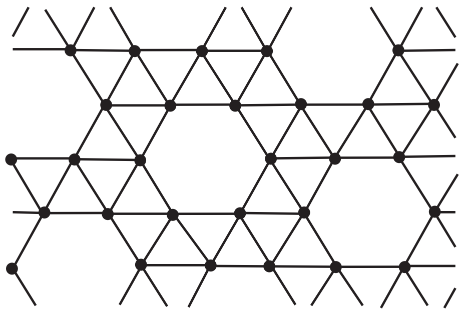


• $(q,s,t,m,n)=(5,3,2,3,4)$ となる平面充填は、各頂点から 5 本の辺が出ていて、各頂点に 3 個の 3 角形と 2 個の 4 角形が集まっている。これは、次のような模様の平面充填である (2 通りのパターンがある)。





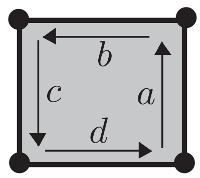
• $(q,s,t,m,n)=(5,4,1,3,6)$ となる平面充填は、各頂点から 5 本の辺が出ていて、各頂点に 3 個の 4 角形と 1 個の 6 角形が集まっている。これは、次のような模様の平面充填である。



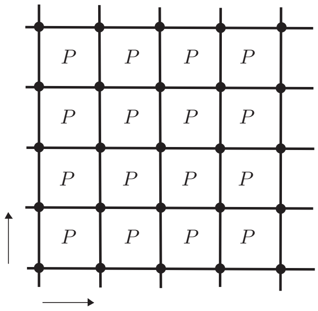
問 上の 7 種類の平面充填について、その双対が自分自身になるものをあげなさい。さらに、互いに双対の関係にある平面充填の組を求めなさい。

上で挙げたような平面の基本的なタイル張りをもとにして、様々な模様のタイル張りを作ることができる。このようなことが可能になる背景には、幾何的模様を不変にする「群」の存在がある。杉本 [4] の記述に沿って、タイル張りの作例を紹介しよう。

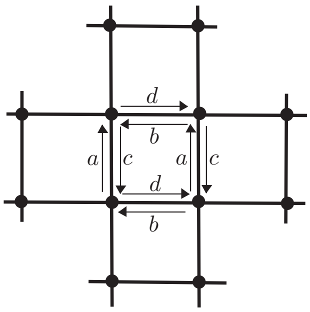
平面の基本的なタイル張りとして、正方形が格子状に並んでいるものを採用しよう。1 つの正方形の 4 つの辺に向きと a,b,c,d のラベルを付ける (右図参照)。



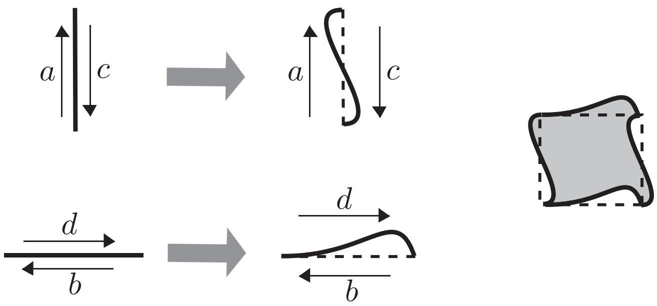
正方形による格子状のタイル張りは、上下方向の (正方形の 1 辺の長さ分だけの) 平行移動と左右方向の (正方形の 1 辺の長さ分だけの) 平行移動の 2 種類によって、1 つの正方形 (基本図形) をコピーしたものであると考えられる。



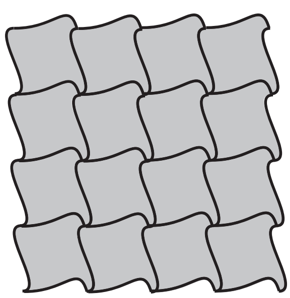
このとき、正方形同士の辺の隣接関係は下図のようになる。



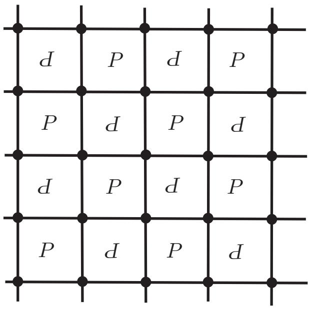
そこで、例えば、次のような辺の変形を考える (線分を曲線あるいは折れ線で置き換える)。



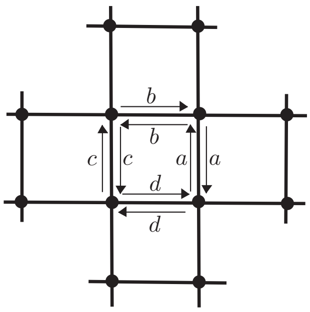
この曲線を正方形格子上に描き、もともとあった正方形の辺を消すと、新しいタイル張りが得られる。



正方形による格子状のタイル張りは、また、各辺の中点において 180° 回転を繰り返し行って、1 つの正方形 (基本図形) をコピーするしてできているとも考えられる。



このように考えると、正方形同士の辺の隣接関係は下図のようになる。あとは先程と類似の辺の変形を考えることにより、平面の新しいパターンのタイル張りを作ることができる。



みなさんも、独自の模様のタイル張りを考えてはいかがでしょう？

References

[1] 岩堀長慶・伊原信一郎『数と図形の話』(岩波科学の本 21) 岩波書店, 1979.
[2] 大沢健夫『寄り道の多い数学』(岩波科学ライブラリー 172) 岩波書店, 2010.
[3] サルキシャン他・著, 静間良次・監訳『おもしろいトポロジー』 東京図書, 1979.
[4] 杉本厚吉『タイリング描法の基本テクニック』 誠文堂新光社, 2009.
[5] 砂田利一『ダイヤモンドはなぜ美しい？–離散調和解析入門–』 シュプリンガー・ジャパン, 2006.
[6] 関口次郎『多面体の数理とグラフィックス–ザルガラー多面体と *Mathematica*–』(数理情報科学シリーズ 13), 牧野書店, 1996.
[7] 高木隆司『楽しい数理実験』 講談社, 2008.
[8] 淡中忠郎「タイルの分類」(数学セミナーリーディングス『数理のひろば』所収) 日本評論社, 1981, p.82—90.
[9] 西山豊『数学を楽しむ』(現代数学社, 2007) から「セパタクローで数学を」 p.111—121.
[10] 一松信『正多面体を解く』東海大学出版会, 2002.
[11] Peter Frankl・前原潤『やさしい幾何学問題ゼミナール』共立出版, 1992.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science
Kansai University
3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan