

# 再考 「On Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds」

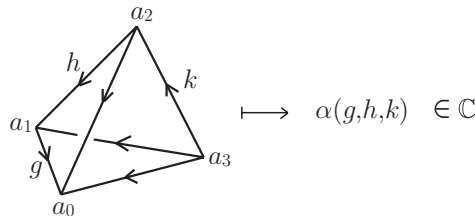
Michihisa Wakui

向きづけられた 3 次元多様体  $M$  に対する Dijkgraaf-Witten 不変量は、1990 年に Dijkgraaf と Witten によって導入された位相不変量である [10]。この不変量は有限群  $G$  とその分類空間  $BG$  の 1 次元ユニタリ群  $U(1)$  に値を持つ 3-コサイクル  $\alpha$  を与えることにより決まる位相不変量であり、それは連結な閉 3-次元多様体  $M$  に対して次の式で定義される：

$$(0.1) \quad Z(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)} \langle \gamma^*[\alpha], [M] \rangle.$$

ここで、 $[M] \in H^3(M; \mathbb{Z})$  は  $M$  の基本類である。Dijkgraaf と Witten は、閉 3 次元多様体  $M$  を単体分割すれば、基本類  $[M]$  はその単体分割を構成する ( $M$  の向きと同調するように) 向きづけられた四面体の和で与えられること、準同型  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$  は各 (向きづけられた) 辺への (辺を “つなげる” 操作と可換になるような)  $G$  の元の割り当て (これはカラーと呼ばれる) として実現されることなどに注目し、境界を持つ 3 次元多様体に対しても上記の  $Z(M)$  に相当する量を状態和の形で構成した：

$$(0.2) \quad Z(M) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi: \text{カラー-}\sigma: \text{四面体}} \prod \alpha(g, h, k)^{\pm 1}.$$



ここで、 $a$  は単体分割における頂点の個数を表わしている。この形で与えられる境界をもつ場合の Dijkgraaf-Witten 不変量は、位相的量子場の理論の最も易しいモデルを与える。

ところが、 $Z(M)$  を (0.2) の形で定義した場合、それが  $M$  の位相不変量であるかどうかは明らかではない。[34] では、Turaev と Viro により当時発表されたばかりの論文 [31] の手法を真似て、Dijkgraaf-Witten 不変量の正確な定義を与え、その位相不変性を「厳密に証明」したのであった。さらに、Dijkgraaf-Witten 不変量から位相的量子場の理論の公理 [3] を満たす関手が導かれることも示した。しかしながら、最近、[34] の内容に関して問い合わせがあり、その中にいくつか不備があることがわかった。発覚した問題の箇所 (重症な部分) は次の 2 点である。

- Lemma 3.1 の証明 (有限群  $G$  の分類空間  $BG$  の構成法と関連)
- レンズ空間  $L(p, 1)$  に対する Dijkgraaf-Witten 不変量の公式

前者については大槻知忠さんから [23]、後者については蒲谷祐一さんから [17] から指摘とさまざまなコメントをいただいた。この場を借りてお二人に深く感謝申し上げたい。

このノートでは、これまでに得られた新たな知見を加えて、3 次元多様体に対する Dijkgraaf-Witten 不変量の構成方法や計算方法などについて解説する。それと同時に、[34] における上記

の誤りを明確化し、その修正版を与える。このノートは、2011年8月24日から26日にかけて早稲田大学で開かれた研究集会「結び目の量子不変量とそのカテゴリー化」における講演のために作成された。講演依頼の内容が Dijkgraaf-Witten 不変量に関するものだったので、ちょうどよい機会と思って、以前から気にかけていた論文 [34] の修正を詳しく検討することにした。その結果、定理 1-8 や補題 4-2 など、小さな事実も発見できた。講演の機会を与えてくださった早稲田大学の伊藤昇さん、谷山公規さんに感謝申し上げます。

追記：2018年1月、東京工業大学の寺嶋郁二さんからこのノートの局所順序の結果(旧版における命題 2-7)に関する問合せがあった [44]。旧版の命題 2-7 では、すべての局所順序は頂点集合の全順序から誘導されることを主張していたが、注意 2-8 の図で与えられているものの場合、局所順序の条件は満たしているが頂点集合に全順序は入らないのではないかという指摘であった。実際にその通りであり、命題の証明に誤りがあることがわかったので、このたび修正版を作成した。大きな修正箇所は、命題 2-7 を補題 2-7 に改めて内容を書き換えたことと、命題 2-7 を前提として証明していた補題 4-1 の証明を、その結果を使わない証明に書き換えたことである。ここに記して寺嶋郁二さんに感謝申し上げます。

### §1. 有限群の 3-コサイクルとその四面体対称性

この節では、 $G$  を有限群、 $F$  を体とし、 $F^\times = F - \{0\}$  とおく。 $G$  が  $F^\times$  に自明に作用している場合の群コホモロジーの定義を述べよう。

整数  $n \geq 0$  に対して  $C^n(G, F^\times)$  を次のように定義する：

$$(1.1) \quad C^n(G, F^\times) = \begin{cases} F^\times & (n = 0), \\ \{ \alpha \mid \alpha \text{ は } \overbrace{G \times \cdots \times G}^n \text{ から } F^\times \text{ への写像} \} & (n \geq 1). \end{cases}$$

$F^\times$  は体  $F$  の乗法によりアーベル群とみなす。また、 $C^n(G, F^\times)$  ( $n \geq 1$ ) は関数の通常の積

$$(\alpha\beta)(g_1, \dots, g_n) = \alpha(g_1, \dots, g_n)\beta(g_1, \dots, g_n) \quad (\alpha, \beta \in C^n(G, F^\times))$$

によりアーベル群とみなす。

$n \geq 0$  に対して、写像  $\delta^n : C^n(G, F^\times) \rightarrow C^{n+1}(G, F^\times)$  を次のように定義する：

$$(1.2) \quad (\delta^0 a)(g) = 0, \quad (a \in F^\times, g \in G),$$

$$(1.3) \quad (\delta^n \alpha)(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) = \alpha(g_2, \dots, g_{n+1}) \prod_{i=1}^n \alpha(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})^{(-1)^i} \\ \times \alpha(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}},$$

$$(\alpha \in C^n(G, F^\times), g_1, \dots, g_n, g_{n+1} \in G, n \geq 1).$$

このとき、 $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$  ( $n \geq 0$ ) が成り立つので、 $\{(C^n(G, F^\times), \delta^n)\}_{n=0}^\infty$  はコチェイン複体である。そのコホモロジーを  $H^n(G, F^\times)$  によって表わす：

$$H^n(G, F^\times) = \text{Ker } \delta^n / \text{Im } \delta^{n-1}.$$

また、 $Z^n(G, F^\times) := \text{Ker } \delta^n$  と定義する。2つのコサイクル  $\alpha', \alpha \in Z^n(G, F^\times)$  は  $[\alpha] = [\alpha']$  を満たすとき、**cohomologus** であると呼ばれる。

任意の  $n$ -コサイクル  $\alpha \in Z^n(G, F^\times)$  と関数  $\beta \in C^{n-1}(G, F^\times)$  に対して、 $\alpha' := \alpha \cdot (\delta\beta)$  は  $\alpha$  に cohomologous な  $n$ -コサイクルである。つまり、 $[\alpha'] = [\alpha]$  が成り立つ。

$\alpha \in C^n(G, F^\times)$  が**正規化されている** (normalized) とは、すべての  $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$  に対して

$$(1.4) \quad \alpha(1, g_2, \dots, g_n) = \alpha(g_1, 1, g_3, \dots, g_n) = \dots = \alpha(g_1, \dots, g_{n-1}, 1) = 1$$

が満たされることをいう。 $\alpha$  が正規化された  $n$ -コチェインならば、 $\delta^n \alpha$  は正規化された  $(n+1)$ -コサイクルであり、 $\alpha, \beta$  が正規化された  $n$ -コサイクルならば、 $\alpha\beta$  も正規化された  $n$ -コサイクルである。Eilenberg と MacLane により、次が示されている。

**補題 1-1** ([12; Lemma 6.1]) 有限群  $G$  の任意の  $n$ -コサイクルは正規化された  $n$ -コサイクルに cohomologous である。  $\square$

以下、3-コサイクルに焦点を当てる。3-コチェイン  $\alpha \in C^3(G, F^\times)$  が 3-コサイクルであるための必要十分条件は、任意の  $g, h, k, l \in G$  に対して

$$(1.5) \quad \alpha(h, k, l)\alpha(g, hk, l)\alpha(g, h, k) = \alpha(gh, k, l)\alpha(g, h, kl)$$

が成り立つことであり、 $\alpha$  が正規化されているための必要十分条件は、任意の  $g, h \in G$  に対して

$$(1.6) \quad \alpha(1, g, h) = \alpha(g, 1, h) = \alpha(g, h, 1) = 1$$

が成り立つことである。

ここで、唐突ではあるが、正規化された 3-コサイクル  $\alpha$  に対する次の条件を考えよう：

$$(1.7) \quad \text{任意の } g, h \in G \text{ について } \alpha(g^{-1}, g, h) = \alpha(g, h, h^{-1}) = 1.$$

この条件を  $\alpha$  に対する**四面体対称性条件**と呼ぶことにする。 $\alpha$  が四面体対称性条件を満たすと、Dijkgraaf-Witten 不変量の定義が「頂点集合への全順序の与え方によらない」ことを [34; Lemma 3.1] のようにして証明することができる (詳しくは、後述の補題 4-1 の証明を参照)。

以下、正規化された 3-コサイクルが四面体対称性条件を満たすように、cohomologous の範囲内で取り直せるか？という問題について考察する。

**補題 1-2** (c.f. [41]) 体  $F$  は「任意の  $a \in F$  について多項式  $X^2 - a$  の解を含む」ものとする。 $\alpha : G \times G \times G \rightarrow F^\times$  を正規化された 3-コサイクルであって、 $g^2 = 1$  となる任意の  $g \in G$  に対して  $\alpha(g, g, g) = 1$  を満たしていると仮定する。このとき、 $\beta : G \times G \rightarrow F^\times$  を

$$\beta(g, h) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}} & (h = g^{-1}), \\ 1 & (h \neq g^{-1}) \end{cases}$$

によって定義する。但し、各  $g \in G$  に対して  $\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}$ ,  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}$  を積が 1 になるように選ぶ。すると、 $\alpha' := \alpha \cdot (\delta\beta)$  は正規化された 3-コサイクルであって、

$$\alpha'(g, g^{-1}, g) = 1 \quad (g \in G)$$

を満たす。

(証明)

• まず最初に、各  $g \in G$  に対して  $\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}$ ,  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}$  を  $\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} \cdot \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} = 1$  となるように選ぶことができることを示す。

$\alpha$  に対する 3-コサイクル条件を  $g, g^{-1}, g, g^{-1}$  に適用すると、

$$\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g, 1, g^{-1})\alpha(g, g^{-1}, g) = \alpha(1, g, g^{-1})\alpha(g, g^{-1}, 1)$$

となる。 $\alpha$  は正規化されているから、上式は

$$(1.8) \quad \alpha(g^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g, g^{-1}, g) = 1$$

に同値である。よって、各  $g \in G$  に対して  $x^2 = \alpha(g^{-1}, g, g^{-1})$  となる  $x \in F$  を 1 つ選び、それを  $x = \sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}$  と表わし、次に、 $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}$  を  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} = 1/\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}$  によって定めれば、 $(\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)})^2 = \alpha(g, g^{-1}, g)$  であって、 $\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} \cdot \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} = 1$  が成り立つ。但し、 $g = g^{-1}$  の場合は注意が必要である。この場合、 $\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}) = \alpha(g, g^{-1}, g) = \alpha(g, g, g)$  なので、

$$\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} \cdot \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} = \left(\sqrt{\alpha(g, g, g)}\right)^2 = \alpha(g, g, g)$$

となるからである。補題の  $\alpha$  は  $g^2 = 1$  を満たす  $g \in G$  について  $\alpha(g, g, g) = 1$  が成立していると仮定しているので、 $g = g^{-1}$  の場合にも  $\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} \cdot \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} = 1$  が成り立つ。

- $\alpha'$  が 3-コサイクルであることは容易にわかる。
- $\alpha'$  が正規化されていること：

$$\beta(g, 1) = 1 = \beta(1, g) \quad (g \in G)$$

であるから、任意の  $g, h, k \in G$  に対して

$$(\delta\beta)(1, h, k) = \frac{\beta(h, k)\beta(1, hk)}{\beta(h, k)\beta(1, h)} = \frac{\beta(1, hk)}{\beta(1, h)} = 1,$$

$$(\delta\beta)(g, 1, k) = \frac{\beta(1, k)\beta(g, k)}{\beta(g, k)\beta(g, 1)} = \frac{\beta(1, k)}{\beta(g, 1)} = 1,$$

$$(\delta\beta)(g, h, 1) = \frac{\beta(h, 1)\beta(g, h)}{\beta(gh, 1)\beta(g, h)} = \frac{\beta(h, 1)}{\beta(gh, 1)} = 1$$

となる。

- $\alpha'$  が  $\alpha'(g, g^{-1}, g) = 1$  ( $g \in G$ ) を満たすこと：

$$\begin{aligned} (\delta\beta)(g, g^{-1}, g) &= \frac{\beta(g^{-1}, g)\beta(g, 1)}{\beta(1, g)\beta(g, g^{-1})} = \frac{\beta(g^{-1}, g)}{\beta(g, g^{-1})} = \frac{\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}}{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)})^2} = \frac{1}{\alpha(g, g^{-1}, g)} \end{aligned}$$

よって、

$$\alpha'(g, g^{-1}, g) = \alpha(g, g^{-1}, g) \cdot (\delta\beta)(g, g^{-1}, g) = \alpha(g, g^{-1}, g) \cdot \frac{1}{\alpha(g, g^{-1}, g)} = 1$$

を得る。 □

**注意 1-3** 一般に、 $\alpha$  が正規化された 3-コサイクルであるとき、 $g^2 = 1$  なるすべての  $g \in G$  に対して  $\alpha(g, g, g) = 1$  であるとは限らない。実際、次の例で与えられる位数  $m$  の巡回群の 3-コサイクル  $\alpha$  は  $m$  が偶数のとき、 $\alpha([m/2], [m/2], [m/2]) = -1$  となっている。なお、 $g = g^{-1}$

の場合には、(1.8)により  $(\alpha(g, g^{-1}, g))^2 = 1$  となるので、 $\alpha(g, g^{-1}, g) = \pm 1$  であることはわかる。

**注意 1-4**  $\alpha$  が正規化された 3-コサイクルであるとき、 $\alpha^2$  もまた正規化された 3-コサイクルである。さらに、 $\alpha^2$  は  $g^2 = 1$  なるすべての  $g \in G$  に対して  $\alpha^2(g, g, g) = 1$  を満たす ( $\because g^2 = 1$  なるすべての  $g \in G$  に対して  $\alpha(g, g^{-1}, g) = \pm 1$ )。

**例 1-5**  $m$  を 2 以上の整数とし、位数  $m$  の巡回群  $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  を考える。 $H^3(G, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  となる。その生成元は次のように定義される 3-コサイクル  $\alpha : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  のコホモロジー類である。

$$(1.9) \quad \alpha(g_1, g_2, g_3) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m^2} \bar{g}_1(\bar{g}_2 + \bar{g}_3 - \overline{g_2 + g_3})\right)$$

ここで、 $g \in G$  に対して  $\bar{g} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  は  $g$  の代表元を表わす。

$\alpha$  が  $G$  の 3-コサイクルであることの証明は [37; p.158, 命題 A-2] を参照。

$\alpha$  が正規化されていることも  $\alpha$  の定義から直ちにわかる (注: ここでは、 $G$  の積を加法的に書いているので、 $\alpha$  が正規化されているための条件は、 $g_1 = 0$  または  $g_2 = 0$  または  $g_3 = 0$  のとき  $\alpha(g_1, g_2, g_3) = 1$  となることである。) さらに、任意の  $g \in G$  に対して

$$\alpha(g, -g, g) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m^2} \bar{g}(\overline{-g} + \bar{g} - \overline{-g + g})\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m^2} \bar{g}(\overline{-g} + \bar{g})\right)$$

であるから、 $g = [1], \dots, [m-1]$  の場合には  $\overline{-g} + \bar{g} = m$ 、したがって、 $\alpha(g, -g, g) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m} \bar{g}\right)$  となり、 $g = [0]$  の場合には  $\alpha(g, -g, g) = 1$  となる。よって、任意の  $g \in G$  に対して

$$\alpha(g, -g, g) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m} \bar{g}\right)$$

となる。特に、 $m$  が偶数のとき、 $\alpha([m/2], [m/2], [m/2]) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m} [m/2]\right) = \exp(\pi i) = -1$  となる。

$m$  が奇数のときは、 $2g = 0$  となる  $g \in G$  は  $g = 0$  のみであるから、 $\alpha$  は補題 1-2 の条件を満たす正規化された 3-コサイクルになっている。そこで、各  $g \in G$  に対して  $\sqrt{\alpha(g, -g, g)} \in \mathbb{C}^\times$  を

$$\sqrt{\alpha(g, -g, g)} = (-1)^{\bar{g}} \exp\left(\frac{\pi i}{m} \bar{g}\right)$$

と定める。すると、 $\{\sqrt{\alpha(g, -g, g)}\}_{g \in G}$  は、任意の  $g \in G$  に対して  $\sqrt{\alpha(g, -g, g)} \sqrt{\alpha(-g, g, -g)} = 1$  を満足する。

$\therefore$ )

$g = 1, \dots, m-1$  のとき、 $\overline{-g} = m - \bar{g}$  となるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha(g, -g, g)} \sqrt{\alpha(-g, g, -g)} &= (-1)^{\bar{g}} \exp\left(\frac{\pi i}{m} \bar{g}\right) \cdot (-1)^{\overline{-g}} \exp\left(\frac{\pi i}{m} \overline{-g}\right) \\ &= (-1)^{\bar{g}} \exp\left(\frac{\pi i}{m} \bar{g}\right) \cdot (-1)^{m-\bar{g}} \exp\left(\frac{\pi i}{m} (m - \bar{g})\right) \\ &= (-1)^m \exp\left(\frac{\pi i}{m} m\right) \\ &= (-1)^{m+1} \\ &= 1 \quad (\because m \text{ は奇数}) \end{aligned}$$

|となる。  $g = 0$  のときには、もちろん、  $\sqrt{\alpha(g, -g, g)}\sqrt{\alpha(-g, g, -g)} = 1$  が成立する。  $\square$

よって、  $m$  が奇数のとき、  $\beta : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を

$$\beta(g, h) = \begin{cases} (-1)^{\bar{g}} \exp\left(-\frac{\pi i}{m} \bar{g}\right) & (h = -g), \\ 1 & (h \neq -g) \end{cases}$$

と定め、  $\alpha'$  を  $\alpha' = \alpha \cdot (\delta\beta)$  と定めると、補題 1-2 により、  $\alpha'$  は  $[\alpha'] = [\alpha]$  かつ  $\alpha(g, -g, g) = 1$  ( $g \in G$ ) を満たす  $G$  の正規化された 3-コサイクルになる。  $\square$

巡回群以外の有限群に対する 3-コサイクルの計算例は [27; Appendix]( $S_n$  の場合) や [22; Lemma 5.3] にある。

**補題 1-6** ([41; 補題 2-3]) 体  $F$  は「任意の  $a \in F$  について多項式  $X^2 - a$  の解を含む」ものとする。  $\alpha : G \times G \times G \rightarrow F^\times$  正規化された 3-コサイクルとする。  $\beta : G \times G \rightarrow F^\times$  を

$$\beta(g, h) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, h)}} \quad (g, h \in G)$$

によって定義する。もし、  $\alpha(g, g^{-1}, g) = 1$  ( $g \in G$ ) ならば、  $\alpha' := \alpha \cdot (\delta\beta)$  は正規化された 3-コサイクルであって、

$$\alpha'(g, g^{-1}, h) = 1 \quad (g, h \in G)$$

を満たす。

(証明)

•  $\alpha'$  が 3-コサイクルであることは簡単にわかる。  $\alpha'$  が正規化されていることを示す。任意の  $g, h, k \in G$  に対して

$$\begin{aligned} (\delta\beta)(1, h, k) &= \frac{\beta(h, k)\beta(1, hk)}{\beta(h, k)\beta(1, h)} = \frac{\beta(1, hk)}{\beta(1, h)} = \frac{\sqrt{\alpha(1, 1, h)}}{\sqrt{\alpha(1, 1, hk)}} = 1, \\ (\delta\beta)(g, 1, k) &= \frac{\beta(1, k)\beta(g, k)}{\beta(g, k)\beta(g, 1)} = \frac{\beta(1, k)}{\beta(g, 1)} = \frac{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, 1)}}{\sqrt{\alpha(1, 1, k)}} = 1, \\ (\delta\beta)(g, h, 1) &= \frac{\beta(h, 1)\beta(g, h)}{\beta(gh, 1)\beta(g, h)} = \frac{\beta(h, 1)}{\beta(gh, 1)} = \frac{\sqrt{\alpha(gh, (gh)^{-1}, 1)}}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, 1)}} = 1 \end{aligned}$$

となる。

• 次に、  $\alpha'$  が  $\alpha'(g, g^{-1}, h) = 1$  ( $g, h \in G$ ) を満たすことを示す。

$$\begin{aligned} \alpha'(g, g^{-1}, h) &= \alpha(g, g^{-1}, h) \cdot \frac{\beta(g^{-1}, h)\beta(g, g^{-1}h)}{\beta(1, h)\beta(g, g^{-1})} \\ &= \alpha(g, g^{-1}, h) \cdot \frac{\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}}{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, h)}\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}h)}} \end{aligned}$$

である。ここで、  $g^{-1}, g, g^{-1}, h$  に関するコサイクル条件から

$$\alpha(g, g^{-1}, h)\alpha(g^{-1}, 1, h)\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}) = \alpha(1, g^{-1}, h)\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}h).$$

$$\therefore \alpha(g, g^{-1}, h)\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}) = \alpha(g^{-1}, g, g^{-1}h).$$

仮定により、 $\alpha(g, g^{-1}, g) = 1$  ( $g \in G$ ) であるから、 $\alpha(g, g^{-1}, h) = \alpha(g^{-1}, g, g^{-1}h)$  を得る。よって、 $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, h)} = \sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1}h)}$  である。よって、

$$\alpha'(g, g^{-1}, h) = \alpha(g, g^{-1}, h) \cdot \frac{1}{(\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, h)})^2} = 1$$

を得る。 □

**命題 1-7** ([41; 補題 2-5])  $\alpha : G \times G \times G \rightarrow F^\times$  を正規化された 3-コサイクルとする。  
 $\beta : G \times G \rightarrow F^\times$  を

$$\beta(g, h) = \frac{(\alpha(g, h, h^{-1}g^{-1}))^2}{\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g)} \quad (g, h \in G)$$

によって定義する。もし、 $\alpha(g, g^{-1}, h) = 1$  ( $g, h \in G$ ) ならば、 $\hat{\alpha} := \alpha^3 \cdot (\delta\beta)$  は正規化された 3-コサイクルであって、

$$\hat{\alpha}(g, g^{-1}, h) = \hat{\alpha}(g, h, h^{-1}) = 1 \quad (g, h \in G)$$

を満たす。

(証明)

•  $\hat{\alpha}$  が正規化されていること :

$\delta\beta$  が正規化されていることを示せばよい。 $\alpha$  に対する仮定により、任意の  $g \in G$  に対して  $\beta(g, 1) = \beta(1, g) = 1$  である。したがって、任意の  $g, h, k \in G$  に対して

$$\begin{aligned} (\delta\beta)(1, h, k) &= \frac{\beta(h, k)\beta(1, hk)}{\beta(h, k)\beta(1, h)} = \frac{\beta(1, hk)}{\beta(1, h)} = 1, \\ (\delta\beta)(g, 1, k) &= \frac{\beta(1, k)\beta(g, k)}{\beta(g, k)\beta(g, 1)} = \frac{\beta(1, k)}{\beta(g, 1)} = 1, \\ (\delta\beta)(g, h, 1) &= \frac{\beta(h, 1)\beta(g, h)}{\beta(gh, 1)\beta(g, h)} = \frac{\beta(h, 1)}{\beta(gh, 1)} = 1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\delta\beta$  は正規化された 3-コサイクルである。

•  $\hat{\alpha}(g, g^{-1}, h) = \hat{\alpha}(g, h, h^{-1}) = 1$  ( $g, h \in G$ ) であること :

$\beta_2, \beta_3 : G \times G \rightarrow F^\times$  を

$$\begin{aligned} \beta_2(g, h) &= \alpha(g, h, h^{-1}g^{-1}), \\ \beta_3(g, h) &= \alpha(h^{-1}, g^{-1}, g) \end{aligned}$$

によって定義する。このとき、

$$\beta = \beta_2^2 \beta_3^{-1}$$

と書ける。もし、任意の  $g, h \in G$  に対して

$$\textcircled{A} (\delta\beta_2)(g, h, h^{-1}) = \frac{1}{\alpha(g, h, h^{-1})}, \quad (\delta\beta_2)(g, g^{-1}, h) = \alpha(h^{-1}, g, g^{-1}).$$

$$\textcircled{B} (\delta\beta_3)(g, h, h^{-1}) = \alpha(g, h, h^{-1}), \quad (\delta\beta_3)(g, g^{-1}, h) = (\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}))^2$$

となることが示されたとすると、

$$(\delta\beta)(g, h, h^{-1}) = \frac{1}{(\alpha(g, h, h^{-1}))^2} \cdot \frac{1}{\alpha(g, h, h^{-1})} = \frac{1}{(\alpha(g, h, h^{-1}))^3},$$

$$(\delta\beta)(g, g^{-1}, h) = (\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}))^2 \cdot \frac{1}{(\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}))^2} = 1$$

となるから、

$$\hat{\alpha}(g, h, h^{-1}) = (\alpha(g, h, h^{-1}))^3 \cdot \frac{1}{(\alpha(g, h, h^{-1}))^3} = 1,$$

$$\hat{\alpha}(g, g^{-1}, h) = (\alpha(g, g^{-1}, h))^3 \cdot 1 = 1$$

が従う。よって、 $\textcircled{A}$ ,  $\textcircled{B}$ を示せばよい。

$\textcircled{A}$ の証明： $\beta_2(g, g^{-1}) = 1$  より、

$$(\delta\beta_2)(g, h, h^{-1}) = \frac{1}{\beta_2(gh, h^{-1})\beta_2(g, h)} = \frac{1}{\alpha(gh, h^{-1}, g^{-1})\alpha(g, h, h^{-1}g^{-1})}$$

である。ここで、 $g, h, h^{-1}, g^{-1}$  に関する 3-コサイクル条件から

$$\frac{\alpha(g, h, h^{-1})}{\alpha(gh, h^{-1}, g^{-1})\alpha(g, h, h^{-1}g^{-1})} = 1$$

が成り立つ。よって、

$$(\delta\beta_2)(g, h, h^{-1}) = \frac{1}{\alpha(g, h, h^{-1})}$$

である。

次に、 $(\delta\beta_2)(g, g^{-1}, h) = \alpha(h^{-1}, g, g^{-1})$  ( $g, h \in G$ ) を証明する。

$$(\delta\beta_2)(g, g^{-1}, h) = \beta_2(g^{-1}, h)\beta_2(g, g^{-1}h) = \alpha(g^{-1}, h, h^{-1}g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1})$$

である。ここで、3-コサイクル条件から次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i)  $g, g^{-1}h, h^{-1}, g$  に関して

$$\alpha(g^{-1}h, h^{-1}, g)\alpha(g, g^{-1}, g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}) = \alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}g).$$

$$\therefore \alpha(g^{-1}h, h^{-1}, g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}) = \alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}g).$$

(ii)  $g, g^{-1}, h, h^{-1}g$  に関して

$$\alpha(g^{-1}, h, h^{-1}g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}g)\alpha(g, g^{-1}, h) = \alpha(1, h, h^{-1}g)\alpha(g, g^{-1}, g).$$

$$\therefore \alpha(g^{-1}, h, h^{-1}g)\alpha(g, g^{-1}h, h^{-1}g) = 1.$$

(iii)  $g^{-1}h, h^{-1}, g, g^{-1}$  に関して

$$\alpha(h^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g^{-1}h, h^{-1}g, g^{-1})\alpha(g^{-1}h, h^{-1}, g) = \alpha(g^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g^{-1}h, h^{-1}, 1).$$

$$\therefore \alpha(h^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g^{-1}h, h^{-1}, g) = 1.$$

よって、

$$(\delta\beta_2)(g, g^{-1}, h) = \frac{1}{\alpha(g^{-1}h, h^{-1}, g)} = \alpha(h^{-1}, g, g^{-1})$$

を得る。

$\textcircled{B}$ の証明： $\alpha$ に関する仮定により、 $\beta_3(g, g^{-1}) = 1$  となる。よって、

$$(\delta\beta_3)(g, h, h^{-1}) = \frac{1}{\beta_3(gh, h^{-1})\beta_3(g, h)} = \frac{1}{\alpha(h, h^{-1}g^{-1}, gh)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g)}$$



である。ここで、3-コサイクル条件から次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i)  $h, h^{-1}, g^{-1}, gh$  に関して

$$\begin{aligned}\alpha(h^{-1}, g^{-1}, gh)\alpha(h, h^{-1}g^{-1}, gh)\alpha(h, h^{-1}, g^{-1}) &= \alpha(1, g^{-1}, gh)\alpha(h, h^{-1}, h). \\ \therefore \alpha(h^{-1}, g^{-1}, gh)\alpha(h, h^{-1}g^{-1}, gh) &= 1.\end{aligned}$$

(ii)  $h^{-1}, g^{-1}, g, h$  に関して

$$\begin{aligned}\alpha(g^{-1}, g, h)\alpha(h^{-1}, 1, h)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g) &= \alpha(h^{-1}g^{-1}, g, h)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, gh). \\ \therefore \alpha(h^{-1}, g^{-1}, g) &= \alpha(h^{-1}g^{-1}, g, h)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, gh).\end{aligned}$$

(iii)  $h^{-1}g^{-1}, g, h, h^{-1}$  に関して

$$\begin{aligned}\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h^{-1}g^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, h) &= \alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, 1). \\ \therefore \alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, h) &= 1.\end{aligned}$$

故に、

$$(\delta\beta_3)(g, h, h^{-1}) = \alpha(g, h, h^{-1})$$

である。

次に  $(\delta\beta_3)(g, g^{-1}, h) = (\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}))^2$  ( $g, h \in G$ ) を示す。  $\beta_3(g, g^{-1}) = 1$  より、

$$(\delta\beta_3)(g, g^{-1}, h) = \beta_3(g^{-1}, h)\beta_3(g, g^{-1}h) = \alpha(h^{-1}, g, g^{-1})\alpha(h^{-1}g, g^{-1}, g)$$

である。ここで、  $h^{-1}, g, g^{-1}, g$  に関する 3-コサイクル条件から

$$\begin{aligned}\alpha(g, g^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, 1, g)\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}) &= \alpha(h^{-1}g, g^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, g, 1). \\ \therefore \alpha(h^{-1}, g, g^{-1}) &= \alpha(h^{-1}g, g^{-1}, g)\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$(\delta\beta_3)(g, g^{-1}, h) = (\alpha(h^{-1}, g, g^{-1}))^2$$

を得る。 □

**定理 1-8** 体  $F$  は「任意の  $a \in F$  について多項式  $X^2 - a$  の解を含む」ものとする。正規化された任意の 3-コサイクル  $\alpha : G \times G \times G \rightarrow F^\times$  に対して、  $\alpha^6$  は四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクル  $\alpha'$  に cohomologus である。

(証明)

注意 1-4 より、  $\alpha^2$  は  $g^2 = 1$  であるような任意の  $g \in G$  に対して  $\alpha^2(g, g, g) = 1$  を満たす。補題 1-2 により、  $\alpha^2$  は任意の  $g \in G$  に対して

$$\alpha_1(g, g^{-1}, g) = 1$$

を満たす正規化された 3-コサイクル  $\alpha_1$  に cohomologus である。補題 1-6 により、  $\alpha_1$  は任意の  $g, h \in G$  に対して

$$\alpha_2(g, g^{-1}, h) = 1$$

を満たす正規化された 3-コサイクル  $\alpha_2$  に cohomologus である。命題 1-7 により、  $\alpha_2^3$  は任意の  $g, h \in G$  に対して

$$\alpha_3(g, g^{-1}, h) = \alpha_3(g, h, h^{-1}) = 1$$

を満たす正規化された 3-コサイクル  $\alpha_3$  に cohomologus である。  $[\alpha^2] = [\alpha_1] = [\alpha_2]$  であるから、  $[\alpha^6] = [\alpha_3^2] = [\alpha_3]$  となる。故に、  $\alpha^6$  は  $\alpha_3$  に cohomologus である。  $\square$

**注意 1-9** 分類空間  $BG$  の 3-コサイクルは cohomologus の範囲内で四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクルにいつでも取り直せる (はずである) と思い込んでいた ([34; Lemma 3.1] の証明を参照)。ところが、大槻氏から巡回群  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  に値を持つ 3-コサイクルの中には、四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクルが存在しないということを知られた [23]。このことがきっかけとなり、上記の定理の原型に辿り着いた [41; 命題 2-6]。

**注意 1-10** 畠中英里氏と野坂武史氏により、巡回群  $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  に対しては、四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクルは存在しないことが報告されている [15; Remark 5.5]。彼等のこの結果は、定理 1-8 に  $\alpha$  の “6 乗” が現れることに符合している ([14; p.284] も参照)。

**注意 1-11** 有限群  $G$  の正規化された 3-コサイクル  $\alpha : G \times G \times G \rightarrow F^\times$  が

$$\alpha(g, g^{-1}, h) = \alpha'(g, h, h^{-1}) = 1 \quad (g, h \in G)$$

を満たしていれば、次のようにして量子  $6j$ -記号の例を作ることができる。但し、ここでの量子  $6j$ -記号は [31] で与えられている公理を “向きづけ可能版” にしたものである。

- 基礎体は複素数体  $\mathbb{C}$ .
- 有限集合  $I$  は有限群  $G$ .
- 各  $i \in I$  に対して  $w_i = 1$  と定義する。
- $w = \sqrt{|G|}$  にとる。
- involution  $*$  :  $I \rightarrow I$  は逆元をとる操作と定める。
- $\text{adm} := \{ (g, h, gh) \mid g, h \in G \}$ .
- admissible な 6-組  $(i, j, k, l, m, n) \in I^6$  に対して、

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix} := \alpha(i, j, l).$$

特に、Dijkgraaf-Witten 不変量を Turaev-Viro 型の不変量とみなすことができる (c.f. [37; p.122], [27; Theorem 4.2])。

**系 1-12** 体  $F$  は「任意の  $a \in F$  について多項式  $X^2 - a$  の解を含む」ものとし、  $|G|$  は 6 と互いに素であるとする。  $H^3(G, F^\times)$  が有限生成ならば、正規化された任意の 3-コサイクル  $\alpha \in Z^3(G, F^\times)$  は四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクル  $\alpha'$  に cohomologus である。

(証明)

$F^\times$  はアーベル群なので、  $H^3(G, F^\times)$  もアーベル群である。したがって、仮定より、  $H^3(G, F^\times)$  は有限生成アーベル群である。よって、

$$H^3(G, F^\times) \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_t\mathbb{Z} \quad (m_1, \dots, m_t \geq 2)$$

のように書ける。各  $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$  の生成元に対応する  $H^3(G, F^\times)$  の元を  $x_i$  とおくと、 $x_1, \dots, x_t$  は  $H^3(G, F^\times)$  の生成元をなす。このとき、 $x_1^6, \dots, x_t^6$  も  $H^3(G, F^\times)$  の生成元になることを示す。そのためには、各  $i$  に対して、 $x_i^6$  の位数が  $m_i$  であることを示せばよい。

$x_i$  の位数は  $m_i$  であるが、 $H^3(G, F^\times)$  の任意の元の位数は  $|G|$  の約数になるから [32; 定理 7.3]、 $m_i$  は 6 と互いに素である。このことに注意すると、 $x_i^6$  の位数が  $m_i$  であることが容易にわかる。

∴)

$x_i^6$  の位数を  $d_i$  とおくと、 $6d_i = m_i k_i$  ( $k_i \in \mathbb{N}$ ) とおける。 $m_i$  は 6 と互いに素なので、 $k_i = 6k'_i$  ( $k'_i \in \mathbb{N}$ ) と書けることがわかる。よって、 $d_i = m_i k'_i$  となる。一方、 $(x_i^6)^{m_i} = (x_i^{m_i})^6 = 1$  であるから、 $m_i$  は  $d_i$  で割り切れる。特に、 $m_i \geq d_i$  となる。これより、 $k'_i = 1$  が従う。こうして、 $d_i = m_i$  が示される。□

以上から、 $x_1^6, \dots, x_t^6$  は  $H^3(G, F^\times)$  の生成元になることがわかった。今、各  $x_i$  に対して、正規化された 3-コサイクル  $\alpha_i \in Z^3(G, F^\times)$  をとり、 $x_i = [\alpha_i]$  と書く。すると、任意の正規化された 3-コサイクル  $\alpha \in Z^3(G, F^\times)$  に対して  $[\alpha] \in H^3(G, F^\times)$  は

$$[\alpha] = (x_1^6)^{k_1} \cdots (x_t^6)^{k_t} = [(\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_t^{k_t})^6] \quad (k_1, \dots, k_t \in \mathbb{Z})$$

のように表わされることがわかる。定理 1-8 により、 $(\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_t^{k_t})^6$  は四面体対称性を持つ正規化されたある 3-コサイクル  $\alpha' \in Z^3(G, F^\times)$  に cohomologus になる。このとき、 $[\alpha] = [(\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_t^{k_t})^6] = [\alpha']$  であるから、 $\alpha$  は四面体対称性を持つ正規化された 3-コサイクル  $\alpha'$  に cohomologus である。□

上の系から、 $m$  が 6 と互いに素のとき (例えば、 $m = 5, 7, 11, 13, \dots$  のとき)、例 1-5 で与えられている  $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  の正規化された 3-コサイクル  $\alpha$  は四面体対称性を持つ正規化されたある 3-コサイクル  $\alpha' \in Z^3(G, \mathbb{C}^\times)$  に cohomologus になることがわかる。

## §2. 3 次元多様体の単体分割と Pachner 移動

ここでは、単体分割の定義および 3 次元多様体の単体分割に対する Pachner 移動について説明する。Pachner 移動は Dijkgraaf-Witten 不変量の位相不変性の証明に必要である。

### §2-1. 単体複体に関する基礎用語

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  内の  $(n+1)$  個の点  $a_0, a_1, \dots, a_n$  が**一般の位置にある**とは、ベクトル  $\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}$  が一次独立であるときをいう。このとき、 $\mathbb{R}^N$  の部分集合

$$|a_0 a_1 \dots a_n| = \{ \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0 (i = 0, 1, \dots, n) \}$$

を  $n$ -**単体**といい、 $a_0, a_1, \dots, a_n$  をその**頂点**という。 $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$  が  $\#\{i_0, i_1, \dots, i_k\} = k+1$  を満たしているとき、 $k$ -単体  $|a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}|$  が定まる。この  $k$ -単体を  $|a_0 a_1 \dots a_n|$  の**辺単体**という。

(有限) **単体複体**とは、 $\mathbb{R}^N$  の単体からなる有限集合であって、次の 2 条件を満たすものをいう。

- (i)  $\sigma \in K$  ならば、 $\sigma$  のすべての辺単体も  $K$  に属する。

(ii)  $\sigma, \tau \in K$  であつて、 $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  ならば、 $\sigma \cap \tau$  は  $\sigma$  および  $\tau$  の辺単体である。  
 $K$  に属する単体の頂点を  $K$  の頂点と呼ぶ。

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^N$$

を  $K$  の**多面体**という。

単体複体  $K$  の部分集合  $L$  が再び単体複体をなすとき、 $L$  は  $K$  の**部分複体**であると呼ばれる。

**例 2-1**  $\sigma$  を  $n$ -単体とする。

(1)  $\sigma$  のすべての辺単体からなる集合  $K(\sigma)$  は単体複体である。 $|K(\sigma)| = \sigma$  である。

(2)  $K(\partial\sigma) = K(\sigma) - \{\sigma\}$  は  $K(\sigma)$  の部分複体である。 $\partial\sigma := |K(\partial\sigma)|$  とおき、 $\partial\sigma$  を  $\sigma$  の**境界**と呼ぶ。また、 $\text{Int } \sigma := \sigma - \partial\sigma$  を  $\sigma$  の**内部**と呼ぶ。

$K, L$  を単体複体とする。 $f: K \rightarrow L$  が**単体写像**であるとは、連続写像  $f: |K| \rightarrow |L|$  であつて、次の2条件を満たすものをいう：

(i)  $\sigma \in K \implies f(\sigma) \in L$ .

(ii) 任意の  $\sigma \in K$  に対して  $f|_{\sigma}: \sigma \rightarrow f(\sigma)$  は barycentric linear である。すなわち、 $\sigma = |a_0 a_1 \dots a_n|$  とおくとき、 $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  かつ  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) に対して

$$f(\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_0 f(a_0) + \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$$

が成り立つ。

全単射な単体写像は同型写像と呼ばれ、単体複体  $K, L$  の間に同型写像が存在するとき、 $K$  と  $L$  は**同型**であると呼ばれる。単体写像  $f: K \rightarrow L$  が同型写像ならば、 $f^{-1}: L \rightarrow K$  はまた同型写像である。

一般に、部分空間  $P \subset \mathbb{R}^N$  がある単体複体  $K$  によつて  $P = |K|$  と表されるとき、**多面体**と呼ばれる。

$P, Q$  を多面体とする。連続写像  $f: P \rightarrow Q$  が**PL 写像**であるとは、 $P = |K|, Q = |L|$  となる単体複体  $K, L$  であつて、次の条件を満たすときをいう。

$$\forall \sigma \in K, \exists \tau \in L \text{ s.t. } \textcircled{1} f(\sigma) \subset \tau,$$

$$\textcircled{2} f|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \tau : \text{ barycentric linear}$$

$f$  が同相写像のとき、PL 同相写像という。このとき、 $f^{-1}$  は再び PL 写像である。

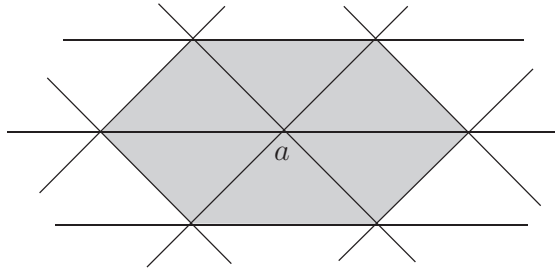
$n$ -単体と PL 同相な多面体は**PL  $n$ -球体**と呼ばれ、 $n$ -単体の境界と PL 同相な多面体は**PL  $n$ -球面**と呼ばれる。

## §2-2. 星状細分と組合せ多様体

$K$  を単体複体とし、 $\sigma \in K$  とする。このとき、

$$\text{St}(\sigma, K) := \{ \tau \in K \mid \exists \rho \in K \text{ s.t. } \rho \text{ は } \sigma \text{ と } \tau \text{ を辺単体として持つ} \}$$

を  $\sigma$  の  $K$  における**星状複体**と呼ぶ。 $\text{St}(\sigma, K)$  は単体複体をなす。



$K$  を単体複体とし、 $x \in |K|$  とする。このとき、

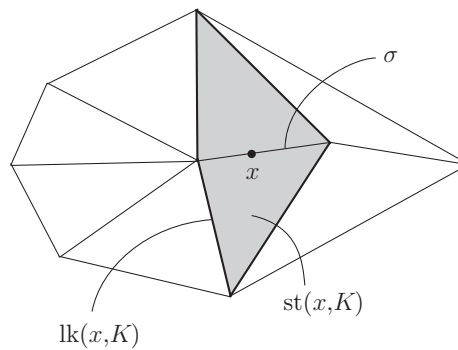
$$\exists! \sigma \in K \text{ s.t. } x \in \text{Int } \sigma$$

である。 $\sigma$  を  $x$  の台と呼ぶ。

$$\text{St}(x, K) := \text{St}(\sigma, K),$$

$$\text{Lk}(x, K) := \{ \tau \in \text{St}(x, K) \mid x \notin \tau \}$$

とおく。これらは単体複体である。 $\text{st}(x, K) = |\text{St}(x, K)|$ ,  $\text{lk}(x, K) = |\text{Lk}(x, K)|$  とおき、それぞれ  $x$  の  $|K|$  における星, 絡み体という。



**定義 2-2** 多面体  $P$  が  $n$  次元組合わせ多様体であるとは、次の条件を満たす単体複体  $K$  が存在するときをいう。

- (i)  $P = |K|$ .
- (ii) 任意の  $x \in |K|$  に対して  $\text{lk}(x, K)$  は PL  $(n-1)$ -球面または PL  $(n-1)$ -球体である。

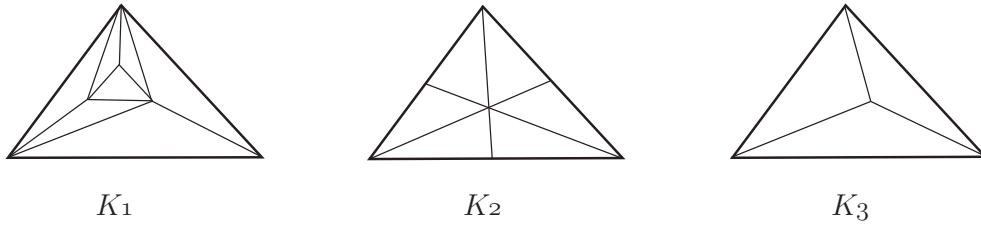
**注意** : 多面体  $P$  から多面体  $Q$  への PL 同相写像  $f: P \rightarrow Q$  と  $P = |K|$ ,  $Q = |L|$  なる単体複体  $K, L$  が与えられたとする。このとき、 $\text{lk}(x, K)$  と  $\text{lk}(f(x), L)$  は PL 同相になる。これより、組合わせ多様体の定義は単体複体の選び方によらないことがわかる。さらに、

$$\partial P := \{ x \in P \mid \text{lk}(x, K) \text{ は PL } (n-1)\text{-球体} \}$$

も単体複体  $K$  の選び方によらないことがわかる。 $\partial P$  を組合わせ多様体  $P$  の境界と呼ぶ。 $\partial P$  は  $(n-1)$  次元組合わせ多様体である。

一般に、単体複体  $L$  が単体複体  $K$  の細分であるとは、次の 2 条件を満たすときをいう。

- (i)  $|K| = |L|$ .
- (ii)  $\forall \sigma \in L, \exists \tau \in K \text{ s.t. } \sigma \subset \tau$ .



単体複体  $K$  に対してその細分の与え方はいろいろある。  
 たくさんある細分の中で、これから述べる星状細分は最も素朴な細分方法の1つである。今、単体複体  $K$  の多面体  $|K|$  の中から1点  $x$  を選ぶ。このとき、

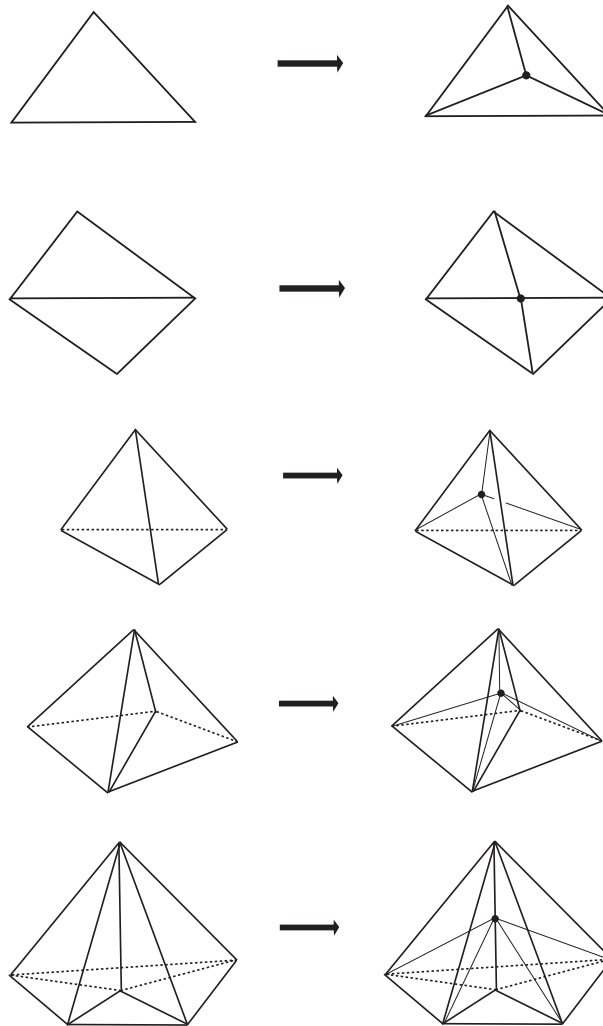
$$K' := (K - \text{St}(x, K)) \cup (x * \text{Lk}(x, K))$$

とおく。但し、

$$x * \text{Lk}(x, K) = \{x\} \cup \text{Lk}(x, K) \cup \{x * \tau \mid \tau \in \text{Lk}(x, K)\},$$

$$x * \tau = \{tx + (1-t)y \mid y \in \tau\} \quad \text{for } \tau \in \text{Lk}(x, K)$$

である。 $K'$  を  $K$  の点  $x$  からの**星状細分**と呼ぶ。



単体複体の **Alexander 移動** [1] とは、与えられた単体複体に対して星状細分を行って新しい単体複体を作ること、および、その逆の操作(但し、逆の操作はそれが可能な場合に限って行う)

のことをいう。Alexander 移動は抽象的な単体複体に対する操作と考える。すなわち、同型な単体写像で写り合う単体複体同士は区別しない。1930 年に Alexander は次の定理を証明した。

**定理 2-3 (Alexander)**  $P, Q$  を  $n$  次元組合わせ多様体とし、 $K, L$  を  $P = |K|, Q = |L|$  を満たす単体複体とする。このとき、次の 2 つは同値である。

- ①  $P$  と  $Q$  とは PL 同相である。
- ②  $L$  は  $K$  から有限回の Alexander 移動を施すことによって得られる。

1990 年頃、Turaev と Viro は彼らが構成した 3 次元多様体の位相不変性を証明するために、Alexander の定理の双対版を与えた [31]。これについて説明しよう。単体複体  $K$  の多面体  $|K|$  は  $n$  次元組合わせ多様体であるとする。このとき、

$$\partial K := \{ \sigma \in K \mid \sigma \subset |K| \}$$

とおくと、これは  $K$  の部分複体であって、 $|\partial K| = \partial|K|$  を満たすことがわかる。このような  $K$  に Alexander 移動を一回施して、単体複体  $L$  が得られたとする。 $|L|$  も  $n$  次元組合わせ多様体である。  $K$  から  $L$  への Alexander 移動により、(抽象的に)  $\partial K = \partial L$  であるとき、この Alexander 移動は **internal** であると呼ばれる。

**定理 2-4 (Turaev-Viro)**  $P, Q$  を  $n$  次元組合わせ多様体とし、 $K, L$  を  $P = |K|, Q = |L|$  を満たす単体複体とする。このとき、次の 2 つは同値である。

- ① PL 同相写像  $f: P \rightarrow Q$  であって、 $f|_{\partial P}: \partial P \rightarrow \partial Q$  が  $\partial K$  から  $\partial L$  への単体写像の同型であるものが存在する。
- ②  $L$  は  $K$  から有限回の internal な Alexander 移動を施すことによって得られる。

### §2-3. 組合せ多様体に対する Pachner 移動

Pachner [25, 26] は組合せ多様体の shellability を研究するため、Alexander 移動に変わる新しい移動を考察し、深く研究した。その定義を述べるために、単体と単体複体から新たに単体複体を作り出す、可接合と呼ばれる操作を導入する。

$\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^N$  を単体とし、 $\sigma = |a_0 a_1 \cdots a_k|$ ,  $\tau = |b_0 b_1 \cdots b_l|$  とおく。  $\sigma$  と  $\tau$  とが**可接合**であるとは、 $(k+l+2)$  個の点  $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_l$  が一般的な位置にあるときをいう。このとき、 $\sigma * \tau = |a_0 a_1 \cdots a_k b_0 b_1 \cdots b_l|$  と定める。次に、 $\sigma \subset \mathbb{R}^N$  を単体とし、 $K$  を  $\mathbb{R}^N$  の単体からなる単体複体とする。次の 2 条件が成り立つとき、 $\sigma$  と  $K$  とは**可接合**であると呼ばれる。

- (i) 任意の  $\tau$  と  $\sigma$  が可接合であって、
- (ii) 任意の  $\tau_1, \tau_2 \in K$  に対して  $(\sigma \cap \tau_1) * (\sigma \cap \tau_2) = \sigma \cap (\tau_1 \cap \tau_2)$ . 但し、 $\sigma * \emptyset = \sigma$  と約束する。

このとき、

$$\sigma * K := K(\sigma) \cup K \cup \{ \sigma * \tau \mid \tau \in K \}$$

とおく。  $\sigma * K$  は単体複体である。

$K$  を  $\mathbb{R}^N$  内の単体からなる単体複体とし、 $|K|$  は  $n$  次元組合わせ多様体であるとする。 $\sigma \in K$  を  $k$ -単体、 $\tau \subset \mathbb{R}^N$  を  $K$  に含まれない  $l$ -単体とする。但し、 $l+k=n$  とする。さらに、次の条件が成り立っているとする：

- (i)  $\sigma$  と  $\tau$  は可接合である。
- (ii)  $K(\partial\sigma) = \text{Lk}(\sigma, K) = \{ \rho \in K \mid \rho \in \text{St}(\sigma, K), \rho \cap \sigma = \emptyset \}$ .
- (iii) 任意の  $\eta \in K$  に対して  $\eta \cap \text{Int}(\sigma * \tau) = \emptyset$ .

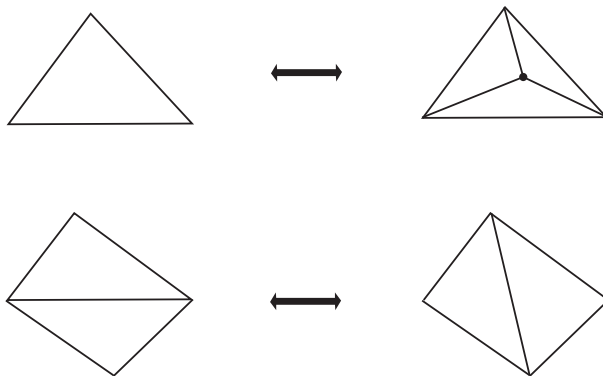
このとき、

$$K' = (K - \sigma * K(\partial\tau)) \cup (K(\partial\sigma) * \tau)$$

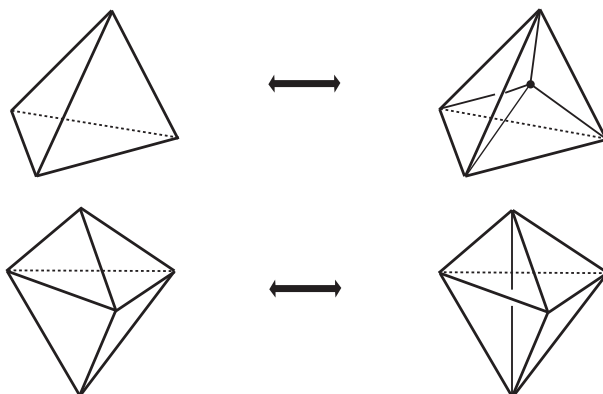
は再び単体複体であって、 $|K'|$  は  $n$  次元組合わせ多様体となる。 $l=0$  のときには  $\partial\tau = \emptyset$  であるが、この場合には  $\sigma * K(\emptyset) = K(\sigma)$  と解釈する。したがって、 $l=0$  のときには  $K'$  は  $K$  の星状細分に他ならない。 $K$  から  $K'$  を得る操作を  $(k+1, l+1)$ -Pachner 移動と呼ぶ (注：Pachner 自身は bistellar move と呼んでいる)。Pachner 移動は与えられた単体複体の中に  $K(\partial\Delta^{n+1})$  (但し、 $\Delta^{n+1}$  は  $(n+1)$ -単体) の部分複体であって、その多面体が PL  $n$ -球体になっているものがあつたら、それを  $K(\partial\Delta^{n+1})$  におけるその残りから作られる部分複体で置き換える、という操作である。

Pachner 移動は、Alexander 移動の場合と同様に、抽象的な単体複体に対する操作として扱う。

$n=2$  の場合：



$n=3$  の場合：





$n = 1, 2, 3$  の場合に、internal な Alexander 移動が有限回の Pachner 移動の列によって実現されることを見るのは易しい ( $n = 3$  の場合には [6; Theorem 4.6] も参照)。さらに、 $n = 4$  の場合にも正しいことが示されている [13, 25, 38]。

**定義 2-5**  $X$  を位相空間とする。 $X$  の**単体分割**とは、単体複体  $K$  と同相写像  $h : |K| \rightarrow X$  との組  $(K, h)$  のことをいう。

位相空間  $X$  の 2 つの単体分割  $(K_1, h_1), (K_2, h_2)$  が**共立する**とは、合成写像  $h_2 \circ h_1^{-1} : |K_1| \rightarrow |K_2|$  が PL 同相写像であるときをいう。 $X$  の単体分割全体からなる集合上で関係  $\sim$  を

$$(K_1, h_1) \sim (K_2, h_2) \iff (K_1, h_1) \text{ と } (K_2, h_2) \text{ は共立する}$$

と定めると同値関係になる。この同値関係による同値類を  $X$  の **PL 構造**と呼ぶ。

**定義 2-6**  $M$  を位相空間、 $\mathcal{T}$  をその PL 構造とする。組  $(M, \mathcal{T})$  が  $n$  **次元 PL 多様体**であるとは、

$$\exists (K, h) \in \mathcal{T} \text{ s.t. } |K| : n \text{ 次元組合わせ多様体}$$

が成り立つときをいう。

**注意 1°**  $\partial M = \{ h(x) \mid \text{lk}(x, K) : \text{PL } (n-1)\text{-球体} \}$  は代表元  $(K, h)$  の選び方によらず定まる。 $\partial M$  を  $M$  の**境界**と呼ぶ。 $\partial M$  は自然に  $(n-1)$  次元 PL 多様体の構造を持つ。

**注意 2°**  $(M, \mathcal{T}) : n$  次元 PL 多様体  $\implies M : n$  次元位相多様体

**注意 3°**  $(M, \mathcal{S}), (N, \mathcal{T})$  を 2 つの  $n$  次元 PL 多様体とする。

$(M, \mathcal{S})$  と  $(N, \mathcal{T})$  が同型

$$\iff \exists f : M \rightarrow N : \text{同相写像,}$$

$$\exists (K, h) \in \mathcal{S}, \exists (L, k) \in \mathcal{T} \text{ s.t. } k \circ f \circ h^{-1} : |K| \rightarrow |L| \text{ は PL 同相}$$

**注意 4°** : 我々の定義では単体複体は有限個の単体からなる集合なので、PL 多様体は位相空間としてはコンパクトである。

**注意 5°** :  $n = 1, 2, 3$  に対して  $n$  次元位相多様体は常に単体分割可能であり、その PL 構造は一意的である。 ( $n = 2$  のときは Rado、 $n = 3$  のときは Moise による結果である)。しかしながら、 $n \geq 4$  の場合には同様の結果は成立しない。

## §2-4. 局所順序複体

**順序複体** (ordered complex) とは、頂点集合に全順序が 1 つ指定されている単体複体のことをいう。2 つの順序複体  $K$  と  $L$  が同型であるとは、 $K$  から  $L$  への単体同型写像であって、頂点集合に与えられた順序を保つようなものが存在するときをいう。

**局所順序複体** (local ordered complex) とは、各 1-単体に向きが与えられている単体複体であって、各 2-単体を見たときに、向きが巡回的にならないときをいう。つまり、各 1-単体に対してその頂点からなる 2 点集合に全順序が与えられている単体複体が局所順序複体であるとは、

各辺の頂点からなる 2 点集合に与えられている全順序が各三角形の頂点からなる 3 点集合に全順序を引き起こす場合をいう。各 1-単体へのこのような向きの割り当てを**局所順序**と呼ぶことにする。 $\sigma$  を局所順序複体  $K$  の  $n$ -単体とすると、各辺の頂点からなる 2 点集合に与えられている全順序は、 $\sigma$  の頂点からなる  $n+1$  点集合への全順序を誘導する。したがって、 $\sigma$  には向きが誘導される。

2つの局所順序複体  $K$  と  $L$  が同型であるとは、各辺に与えられた局所順序を保つような  $K$  から  $L$  への単体同型写像が存在するときをいう。

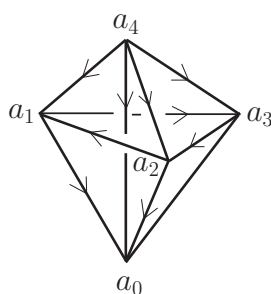
定義から次が直ちに成立することがわかる。

**補題 2-7**  $K$  を  $|K|$  が 3 次元組合わせ多様体であるような単体複体とする。このとき、

(1) 頂点集合  $K^{(0)}$  に全順序が与えられると  $K$  が局所順序複体となるように  $K$  の各辺に向きを与えることができる。

(2)  $K$  が局所順序複体となるように  $K$  の各辺に向きが与えられると、各 3-単体の頂点集合上に各辺に誘導される向きが最初に与えられた向きと一致するような、全順序が導入される。

**注意 2-8** (1) の逆は成立しない。実際、次の例がある [44]。



### §3. 3 次元多様体の Dijkgraaf-Witten 不変量の定義と定式化

ここでは、3 次元多様体の Dijkgraaf-Witten 不変量の定義を [34] に則して述べる。但し、[34] では技術的な理由で有限群  $G$  の分類空間  $BG$  の 3-コサイクルを用いていたが、その部分が解消されたので、ここでは有限群  $G$  の 3-コサイクルそのものを用いる。さらに、Turaev-Viro-Oceanu 不変量の定式化 [29] でもそうしたように、単体分割の頂点集合に全順序を入れるのではなく、局所順序が定まるように辺集合に向きを指定することによって不変量を定式化する。この変更は、特異単体分割を用いて Dijkgraaf-Witten 不変量を計算しようとするときに「3-単体への向きの問題」の混乱を避けることができるという大きな利点がある。

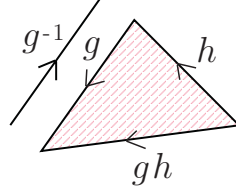
なお、Turaev-Viro 不変量や Dijkgraaf-Witten 不変量を含む、量子不変量に関する詳しい解説記事が大槻氏により準備されており、近々出版される予定である [24]。

#### §3-1. Dijkgraaf-Witten 不変量の定式化

Dijkgraaf-Witten 不変量 [10] は、有限群  $G$  とその 3-コサイクル  $\alpha$  を与えるごとに定義される。ここで、3-コサイクル  $\alpha$  の値は 1 次元ユニタリ群  $U(1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \subset \mathbb{C}^\times$  に値を取り、かつ、正規化されているものに限定する。

$G$  を有限群、 $K$  を単体複体とする。Edge( $K$ ) = {  $K$  の向きづけられた 1-単体全体 } とおく。写像  $\varphi : \text{Edge}(K) \rightarrow G$  は、次の 2 つの条件を満たすとき、 $K$  の**カラー**であると呼ばれる：

- (i)  $K$  の向きづけられた任意の 2-単体  $F$  に対して、 $\varphi(\partial F) = 1$ ,
- (ii) 任意の  $E \in \text{Edge}(K)$  に対して  $\varphi(-E) = \varphi(E)^{-1}$ . 但し、 $-E$  は  $E$  とは逆の向きを持った 1-単体を表わす。



$K$  のカラー全体からなる集合を Col( $K$ ) で表わす。

$K$  が  $\partial|K| \neq \emptyset$  を満たす組合わせ多様体のとき、各  $\xi \in \text{Col}(\partial K)$  に対して

$$(3.1) \quad \text{Col}(K, \xi) := \{ \varphi \in \text{Col}(K) \mid \varphi|_{\text{Edge}(\partial K)} = \xi \}$$

と定める。以下、 $\alpha \in Z^3(G, U(1))$  を 1 つ固定する。このとき、向きづけられたコンパクトな 3 次元多様体  $M$  とその境界の局所順序単体分割  $(\mathcal{T}, t)$  に対して複素数  $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  が以下のように定義される。 $(K, \tilde{t})$  を (局所順序複体として)  $\partial K = \mathcal{T}$  かつ  $\tilde{t}|_{\partial|K|} = t$  を満たす  $M$  の局所順序単体分割とする。多面体  $|K|$ ,  $|\mathcal{T}|$  にそれぞれ  $t, \tilde{t}$  が向きを保つ同相写像となるように向きを与えて、これらを向きづけられた組合わせ多様体とみなす。

$K$  のカラー  $\varphi \in \text{Col}(K)$  と 3-単体  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3| \in K$  に対して  $W(\sigma, \varphi) \in U(1)$  を

$$W(\sigma, \varphi) = \alpha(g, h, k)^{\epsilon_\sigma}$$

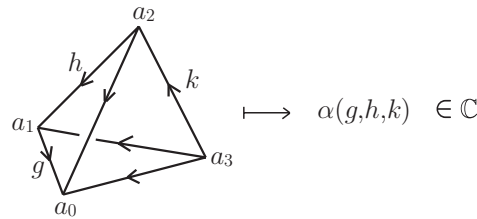
によって定める。但し、 $K$  の局所順序によって  $\sigma$  の頂点集合に全順序  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$  が誘導されているものとし、

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & (\text{局所順序から定まる } \sigma \text{ の向きが } |K| \text{ の向きと同調する場合), \\ -1 & (\text{そうでない場合}) \end{cases}$$

および、

$$g = \varphi(\langle a_0, a_1 \rangle), \quad h = \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle), \quad k = \varphi(\langle a_2, a_3 \rangle)$$

であるとする。



このとき、

$$(3.2) \quad Z_{G, \alpha}(M, \xi) = (\sqrt{|G|})^{-2a+e} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K, \xi)} \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi)$$

と定める。但し、 $a = \sharp K^{(0)}$ ,  $e = \sharp \mathcal{T}^{(0)}$  であり、 $K^{(3)}$  は  $K$  の 3-単体全体からなる集合を表わす。 $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  を  $(M, \xi)$  の **Dijkgraaf-Witten 不変量** と呼ぶ。特に、 $\partial M = \emptyset$  の時には、(3.2) に相等する式は

$$(3.3) \quad Z_{G,\alpha}(M) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K)} \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi)$$

となる。 $Z_{G,\alpha}(M)$  を閉 3 次元多様体  $M$  の **Dijkgraaf-Witten 不変量** と呼ぶ。

**定理 3-1** ([34; Theorem])  $G$  を有限群、 $\alpha \in Z^3(G, U(1))$  を正規化された 3-コサイクルとする。 $M$  を向きづけられたコンパクトな 3 次元多様体、 $(\mathcal{T}, t)$  をその境界の局所順序単体分割とする。このとき、 $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  は次の条件を満たす  $M$  の局所順序単体分割  $(K, \tilde{t})$  の選び方によらない：

- (局所順序複体として)  $\partial K = \mathcal{T}$ .
- $\tilde{t}|_{\partial K} = t$ .

特に、 $\partial M = \emptyset$  のとき、 $Z_{G,\alpha}(M)$  は  $M$  の局所単体分割の選び方に依らない。したがって、 $Z_{G,\alpha}(M)$  は  $M$  の位相不変量を与える。

上の定理の証明は次節で与える。

**注意 3-2** Dijkgraaf-Witten 不変量の出自を考えれば、閉 3 次元多様体の場合に、 $Z_{G,\alpha}(M)$  は位相不変量であることはある意味「明らか」なことである。そればかりでなく、 $Z_{G,\alpha}(M)$  は (0.1) のような表示をもつはずであるから、それはホモトピー型を区別しない不変量である。したがって、不変量として見た場合、Dijkgraaf-Witten 不変量はそれほど強力ではない。しかしながら、それが多様体の基本群に密接に関連した量であること、特に、 $\alpha = 1$  の場合の Dijkgraaf-Witten 不変量は基本群の有限群への表現の個数を数えていること (下の (3.5) や (0.1) を参照) などを思い起こせば、Dijkgraaf-Witten 不変量が幾何学的に意義深い不変量であることは間違いない。

**注意 3-3** Dijkgraaf-Witten 不変量を含む広いクラスの不変量が畠中氏と野坂氏によって発見されている [14, 15]。[14] では、3 次元多様体の位相不変量の新しい構成方法が、3 次元球面  $S^3$  上の 3 重分岐被覆による表示を用いて与えられており、その 1 例として、Dijkgraaf-Witten 不変量が得られることを示している。また、[15] では、3 次元多様体の基本類に相当する基本対称カンドルを定義し、それを用いて 4 重対称カンドルホモトピー不変量を構成し、Dijkgraaf-Witten 不変量はその特別な場合として含まれることを示している [15; Theorem 5.3]。

### §3-2. 3-コサイクルが自明な場合の Dijkgraaf-Witten 不変量

$\alpha = 1$  の場合、閉 3 次元多様体  $M$  の Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z_{G,1}(M)$  は次のように表わされる：

$$(3.4) \quad Z_{G,1}(M) = \frac{1}{|G|^a} \sharp \text{Col}(K).$$

ここで、 $K$  は  $M \cong |K|$  となるような単体複体であり、 $a$  は  $K$  の頂点の個数である。

$M$  が連結なとき、 $Z_{G,1}(M)$  は  $M$  の基本群  $\pi_1(M)$  を用いて次のように表わすこともできる [43; Proposition 2.11] :

$$(3.5) \quad Z_{G,1}(M) = \frac{1}{|G|} \#\text{Hom}(\pi_1(M), G).$$

つまり、 $\alpha$  が自明な場合の Dijkgraaf-Witten 不変量は  $M$  の基本群の  $G$  における表現の個数を数えたものに他ならない。

#### §4. Dijkgraaf-Witten 不変量の位相不変性

ここでは、Dijkgraaf-Witten 不変量が実際に (境界の局所順序単体分割とそのカラー  $\xi$  を固定したときの) 位相不変量になっていることを証明する。そのためには次の2点が満たされればよい。境界の局所順序単体分割を拡張する形で与えられる単体分割について、

(☆1) 局所順序の与え方によらない。

(☆2) 単体分割の仕方によらない。

一言で言えば、(☆1) は “Frobenius 相互律写像” の存在から、(☆2) は Pachner 移動の下での不変性 (3-コサイクル条件) から従う。

この節では、 $M$  はコンパクトな3次元多様体、 $G$  は有限群、 $\alpha$  は  $G$  の  $U(1)$  に値を持つ正規化された3-コサイクルを表わす。各  $g \in G$  に対して、 $\alpha(g, g^{-1}, g)$  の平方根  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \in U(1)$  を1つずつ選んでおく。

##### §4-1. 局所順序の与え方によらないこと

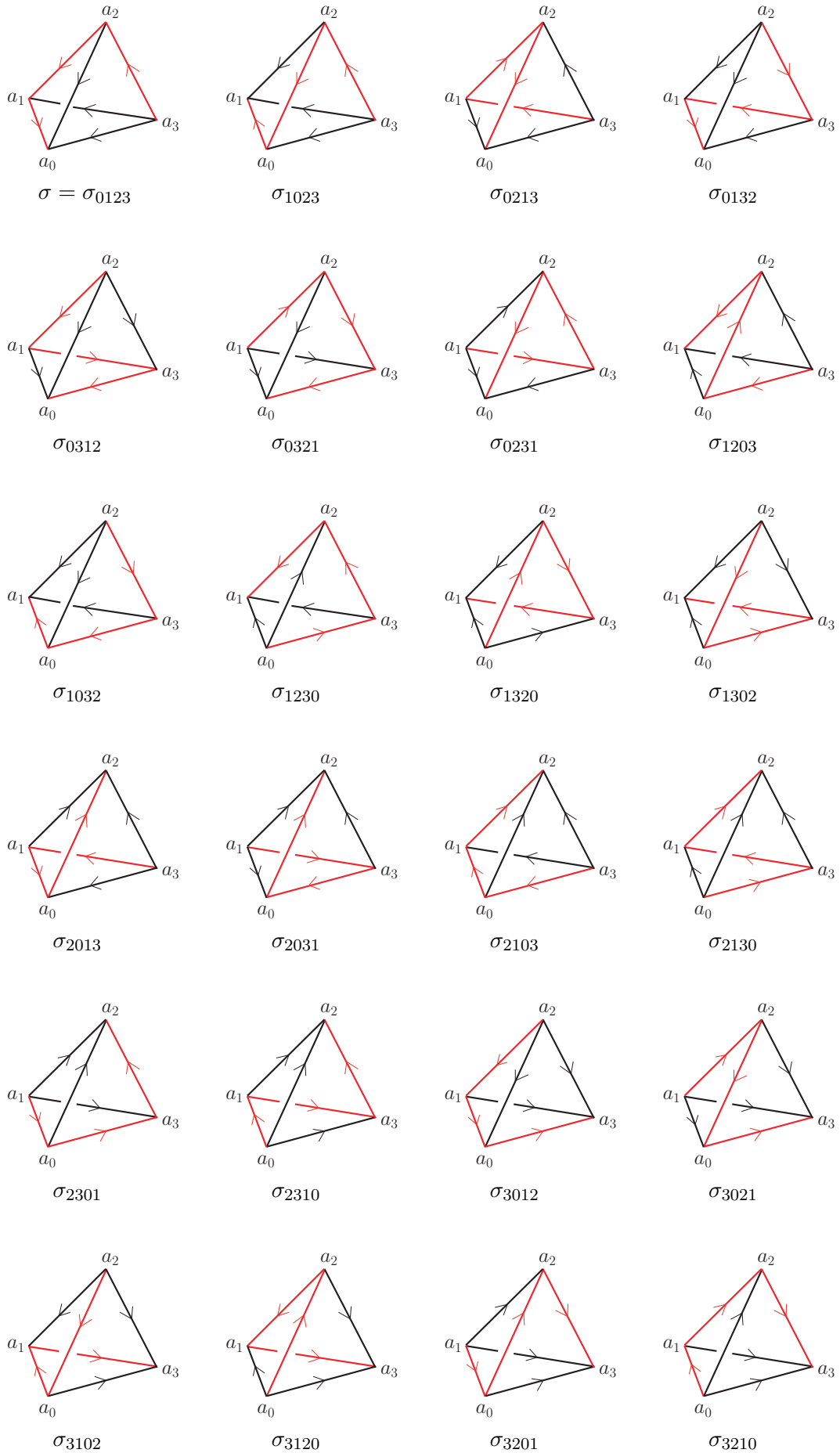
ここでは、 $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  が  $\partial M$  の局所順序単体分割を固定したとき、 $\partial M$  上でその固定した局所順序単体分割に一致するような、 $M$  の単体分割への局所順序の与え方によらないことを証明する。

**補題 4-1**  $(\mathcal{T}, t)$  を  $\partial M$  の局所順序単体分割とし、 $(K, \tilde{t})$  を (単体複体として)  $\partial K = \mathcal{T}$  かつ  $\tilde{t}|_{\partial K} = t$  を満たす  $M$  の単体分割とする。このとき、 $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  は、 $\partial K$  上で  $\mathcal{T}$  に局所順序単体複体として一致するような、 $K$  の局所順序の選び方によらない。

(証明)

$\partial K$  上で  $\mathcal{T}$  に局所順序単体複体として一致するような、 $K$  の局所順序  $\prec$  を任意に考える。

$\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  を  $K$  の3-単体とし、 $K$  の局所順序が誘導する  $\sigma$  の頂点集合の順序が  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$  であるとする。新しい局所順序を  $\prec$  を考え、その局所順序に関して  $\sigma$  の頂点集合に誘導される順序が  $a_i \prec a_j \prec a_k \prec a_l$  であるとする。この順序をもつ  $\sigma$  を  $\sigma_{ijkl}$  と記す。 $\sigma$  の頂点集合への全順序の与え方は全部で24通りある。



一般に、 $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  ( $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ) とその面である 2-単体  $\tau$  に対して、符号  $\epsilon_{\tau, \sigma}$  を

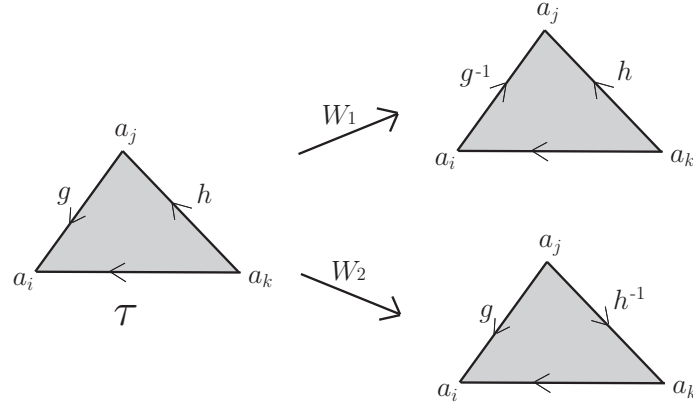
$$\epsilon_{\tau, \sigma} = \begin{cases} \epsilon_{\sigma} & (\tau = |a_0 a_1 a_2|, |a_0 a_2 a_3| \text{ のとき}), \\ -\epsilon_{\sigma} & (\tau = |a_0 a_1 a_3|, |a_1 a_2 a_3| \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する。さらに、 $\tau = |a_i a_j a_k|$  ( $a_i < a_j < a_k$ ) とし、 $\varphi \in \text{Col}(K, \xi)$  に対して  $\varphi(\langle a_i, a_j \rangle) = g$ ,  $\varphi(\langle a_j, a_k \rangle) = h$  とおくと、 $W_1(\tau, \sigma, \varphi)$ ,  $W_2(\tau, \sigma, \varphi)$  を

$$W_1(\tau, \sigma, \varphi) = \alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}},$$

$$W_2(\tau, \sigma, \varphi) = \alpha(g, h, h^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}}$$

によって定義する。 $W_1(\tau, \sigma, \varphi)$ ,  $W_2(\tau, \sigma, \varphi)$  はそれぞれ  $\tau$  の“一番目の辺”、“二番目の辺”の向きを変える操作の下での効果を表わしている。



さらに、 $W_{12}(\tau, \sigma, \varphi)$ ,  $W_{21}(\tau, \sigma, \varphi)$ ,  $W_{121}(\tau, \sigma, \varphi)$ ,  $W_{212}(\tau, \sigma, \varphi)$  を次のように定義する：

$$\begin{aligned} W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) &= \alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(g^{-1}, gh, h^{-1}g^{-1})^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(gh, h^{-1}g^{-1}, gh)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) &= \alpha(g, h, h^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(h^{-1}g^{-1}, gh, h^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(gh, h^{-1}g^{-1}, gh)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) &= \alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(g^{-1}, gh, h^{-1}g^{-1})^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(gh, h^{-1}g^{-1}, gh)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(h^{-1}, h, h^{-1}g^{-1})^{\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \right)^{\epsilon_{\tau, \sigma}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) &= \alpha(g, h, h^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(h^{-1}g^{-1}, gh, h^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(gh, h^{-1}g^{-1}, gh)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \\ &\quad \times \alpha(h^{-1}g^{-1}, g, g^{-1})^{-\epsilon_{\tau, \sigma}} \left( \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \right)^{-\epsilon_{\tau, \sigma}}. \end{aligned}$$

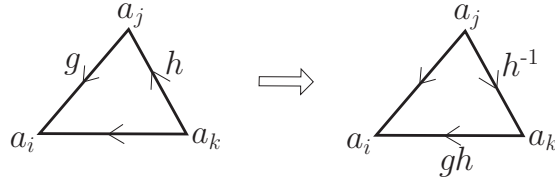
$W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) = W_{212}(\tau, \sigma, \varphi)$  であることに注意する。

∴)

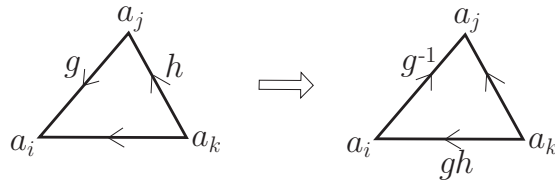
$\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha((gh)^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh)$   
 $\cdot \alpha(g, g^{-1}, g)\alpha((gh)^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g^{-1}, g, h)\alpha(g^{-1}, gh, (gh)^{-1})\alpha(h^{-1}, h, (gh)^{-1}) = 1$   
 を示せばよい。これは、後述の補題 4-2(3) の証明の中の等式 (4.39) と同じであるから、  
 証明についてはその部分を参照されたい。  $\square$

$\tau = |a_i a_j a_k|$  ( $a_i < a_j < a_k$ ) とし、 $\varphi(\langle a_i, a_j \rangle) = g$ ,  $\varphi(\langle a_j, a_k \rangle) = h$  とおく。  $a_l$  を  $a_i, a_j, a_k$  以外の  $\sigma$  の頂点とするとき、次が成り立つ。

$$(\#) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\tau, \sigma_{lij k}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_1(\tau, \sigma_{lij k}, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi), W_2(\tau, \sigma_{lij k}, \varphi) = W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{12}(\tau, \sigma_{lij k}, \varphi) = W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), W_{21}(\tau, \sigma_{lij k}, \varphi) = W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{212}(\tau, \sigma_{lij k}, \varphi) = W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{ilj k}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_1(\tau, \sigma_{ilj k}, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi), W_2(\tau, \sigma_{ilj k}, \varphi) = W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{12}(\tau, \sigma_{ilj k}, \varphi) = W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), W_{21}(\tau, \sigma_{ilj k}, \varphi) = W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{212}(\tau, \sigma_{ilj k}, \varphi) = W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{ijl k}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_1(\tau, \sigma_{ijl k}, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi), W_2(\tau, \sigma_{ijl k}, \varphi) = W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{12}(\tau, \sigma_{ijl k}, \varphi) = W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), W_{21}(\tau, \sigma_{ijl k}, \varphi) = W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{212}(\tau, \sigma_{ijl k}, \varphi) = W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{ijk l}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_1(\tau, \sigma_{ijk l}, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi), W_2(\tau, \sigma_{ijk l}, \varphi) = W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{12}(\tau, \sigma_{ijk l}, \varphi) = W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), W_{21}(\tau, \sigma_{ijk l}, \varphi) = W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ W_{212}(\tau, \sigma_{ijk l}, \varphi) = W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) \end{array} \right.$$

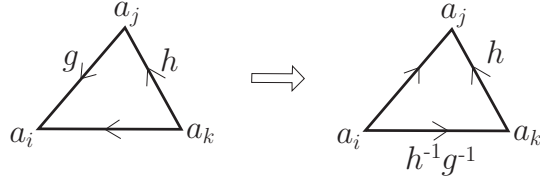


$$(\#12) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\tau, \sigma_{lik j}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{lik j}, \varphi)W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{ilk j}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{ilk j}, \varphi)W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{iklj}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{iklj}, \varphi)W_2(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{ikjl}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{ikjl}, \varphi)W_2(\tau, \sigma, \varphi) \end{array} \right.$$

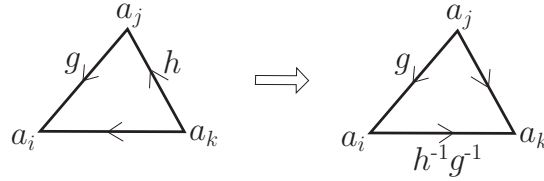


$$(\#21) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\tau, \sigma_{lji k}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi)W_2(\tau, \sigma_{lji k}, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jli k}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi)W_2(\tau, \sigma_{jli k}, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jilk}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi)W_2(\tau, \sigma_{jilk}, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jik l}} = -\epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma, \varphi)W_2(\tau, \sigma_{jik l}, \varphi) \end{array} \right.$$





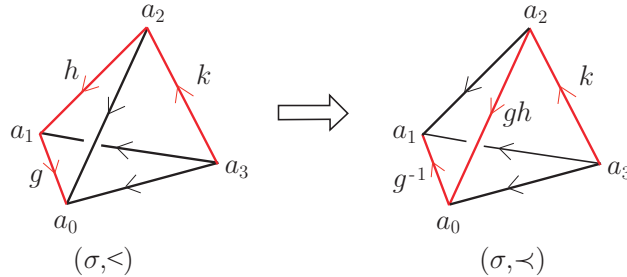
$$(\#121) \quad \begin{cases} \epsilon_{\tau, \sigma_{ljki}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{ljki}, \varphi)W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jlni}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{jlni}, \varphi)W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jklj}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{jklj}, \varphi)W_{21}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{jkil}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{121}(\tau, \sigma, \varphi) = W_1(\tau, \sigma_{jkil}, \varphi)W_{21}(\tau, \sigma, \varphi) \end{cases}$$



$$(\#212) \quad \begin{cases} \epsilon_{\tau, \sigma_{lkij}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) = W_2(\tau, \sigma_{lkij}, \varphi)W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{klji}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) = W_2(\tau, \sigma_{klji}, \varphi)W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{kilj}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) = W_2(\tau, \sigma_{kilj}, \varphi)W_{12}(\tau, \sigma, \varphi), \\ \epsilon_{\tau, \sigma_{kijl}} = \epsilon_{\tau, \sigma} \implies W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) = W_2(\tau, \sigma_{kijl}, \varphi)W_{12}(\tau, \sigma, \varphi) \end{cases}$$

以下、 $\varphi \in \text{Col}(K, \xi)$  とし、 $\varphi(\langle a_0, a_1 \rangle) = g$ ,  $\varphi(\langle a_1, a_2 \rangle) = h$ ,  $\varphi(\langle a_2, a_3 \rangle) = k$  とおく。

①  $a_1 \prec a_0 \prec a_2 \prec a_3$  であるとき：



$g^{-1}, g, h, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(g, h, k)\alpha(g^{-1}, gh, k)\alpha(g^{-1}, g, h) = \alpha(1, h, k)\alpha(g^{-1}, g, hk)$$

であるから、

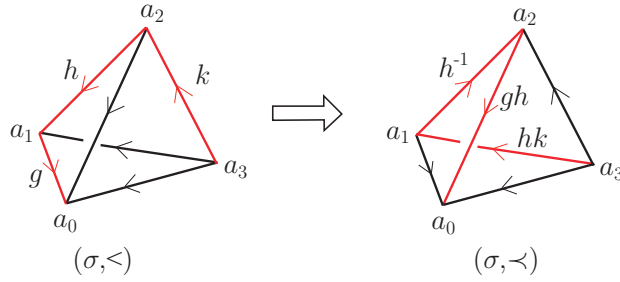
$$\alpha(g^{-1}, gh, k)^{-1} = \alpha(g, h, k) \cdot \frac{\alpha(g^{-1}, g, h)}{\alpha(g^{-1}, g, hk)}$$

が成り立つ。故に、

$$W(\sigma_{1023}, \varphi) = W(\sigma, \varphi) \frac{\alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_\sigma}}{\alpha(g^{-1}, g, hk)^{\epsilon_\sigma}} = W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。

②  $a_0 \prec a_2 \prec a_1 \prec a_3$  であるとき：



$g, h, h^{-1}, hk$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, h^{-1}, hk)\alpha(g, 1, hk)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, hk)\alpha(g, h, k)$$

であるから、

$$\alpha(gh, h^{-1}, hk)^{-1} = \alpha(g, h, k) \cdot \frac{1}{\alpha(h, h^{-1}, hk)\alpha(g, h, h^{-1})}$$

が成り立つ。故に、

$$W(\sigma, \varphi; \prec) = W(\sigma, \varphi) \frac{1}{\alpha(h, h^{-1}, hk)^{\epsilon_\sigma} \alpha(g, h, h^{-1})^{\epsilon_\sigma}}$$

である。さらに、 $h, h^{-1}, h, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

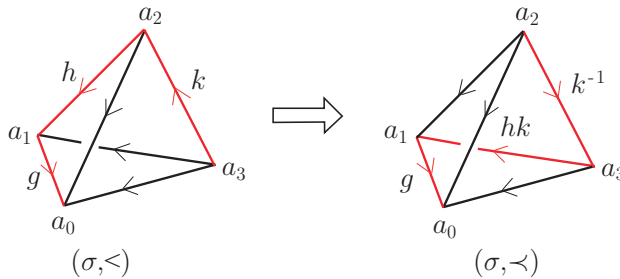
$$\alpha(h^{-1}, h, k)\alpha(h, 1, k)\alpha(h, h^{-1}, h) = \alpha(1, h, k)\alpha(h, h^{-1}, hk)$$

であるから、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{0213}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi) \frac{1}{\alpha(h, h^{-1}, h)^{\epsilon_\sigma} \alpha(h^{-1}, h, k)^{\epsilon_\sigma} \alpha(g, h, h^{-1})^{\epsilon_\sigma}} \\ &= W(\sigma, \varphi) W_1(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_2|, \sigma, \varphi) \end{aligned}$$

と書き換えられる。

③  $a_0 \prec a_1 \prec a_3 \prec a_2$  の場合：



$g, h, k, k^{-1}$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, k, k^{-1})\alpha(g, hk, k^{-1})\alpha(g, h, k) = \alpha(gh, k, k^{-1})\alpha(g, h, 1)$$

であるから、

$$\alpha(g, hk, k^{-1})^{-1} = \alpha(g, h, k) \cdot \frac{\alpha(h, k, k^{-1})}{\alpha(gh, k, k^{-1})}$$

が成り立つ。故に、

$$W(\sigma_{0132}, \varphi) = W(\sigma, \varphi) \frac{\alpha(h, k, k^{-1})^{\epsilon_\sigma}}{\alpha(gh, k, k^{-1})^{\epsilon_\sigma}} = W(\sigma, \varphi) W_2(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_2 a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。

次図は①, ②, ③の結果を図で表現したものである。

$$\begin{aligned} W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ g^{-1} \quad a_0 \end{array} \right) &= W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_1 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_1 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) \\ W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h^{-1} \quad gh \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) &= W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_1 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_2 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) \\ W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ gh \quad k^{-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) &= W \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_2 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) W_2 \left( \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ gh \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

④  $a_0 \prec a_3 \prec a_1 \prec a_2$  の場合：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad a_0 \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad a_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad \quad k^{-1} h^{-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ ghk \quad a_0 \end{array} \\ (\sigma, \prec) & & (\sigma, \prec) \end{array}$$

④の順序は③の順序の変更を行ったのちに②の順序の変更を行ったものに等しいから、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{0312}, \varphi) &= W(\sigma_{0132}, \varphi) W_1(|a_1 a_3 a_2|, \sigma_{0132}, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma_{0132}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi) W_2(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_1(|a_1 a_3 a_2|, \sigma_{0132}, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma_{0132}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(#12) および (#) より

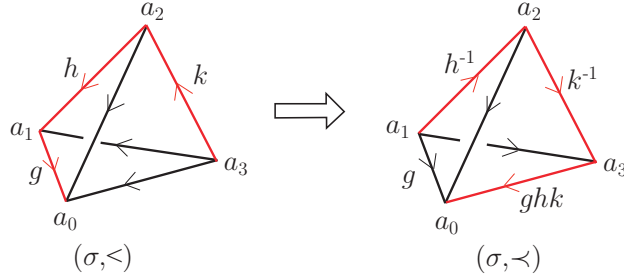
$$(4.1) \quad W_2(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_1(|a_1 a_2 a_3|, \sigma_{0132}, \varphi) = W_{12}(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.2) \quad W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma_{0132}, \varphi) = W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{0312}, \varphi) = W(\sigma, \varphi) W_{12}(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑤  $a_0 \prec a_3 \prec a_2 \prec a_1$  の場合：



⑤の順序は④の順序の変更を行ったのちに③の順序の変更を行ったものに等しいから、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{0321}, \varphi) &= W(\sigma_{0312}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0312}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0312}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(#212) と (#) より

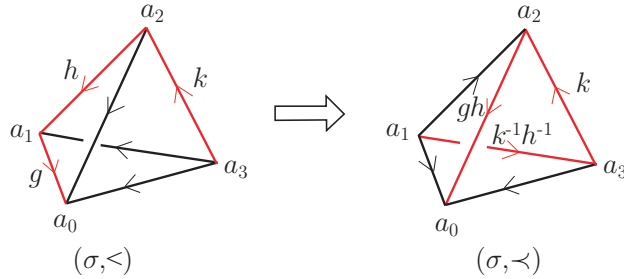
$$(4.3) \quad W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi) = W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.4) \quad W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0312}, \varphi) = W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{0321}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi).$$

⑥  $a_0 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_1$  の場合：



⑥の順序は②の順序の変更を行ったのちに③の順序の変更を行ったものに等しいから、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{0231}, \varphi) &= W(\sigma_{0213}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(#21) と (#) より

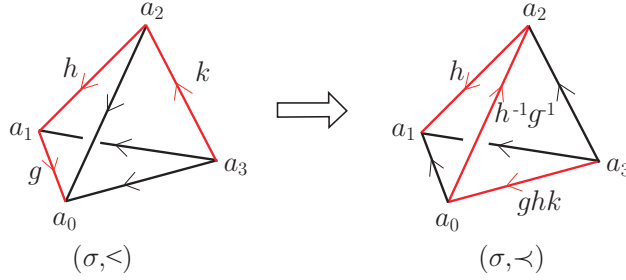
$$(4.5) \quad W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) = W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.6) \quad W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) = W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{0231}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi).$$

⑦  $a_1 \prec a_2 \prec a_0 \prec a_3$  の場合：



②と①より、

$$W(\sigma_{1203}, \varphi) = W(\sigma_{1023}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi)$$

となる。ここで、(#21) と (#) より

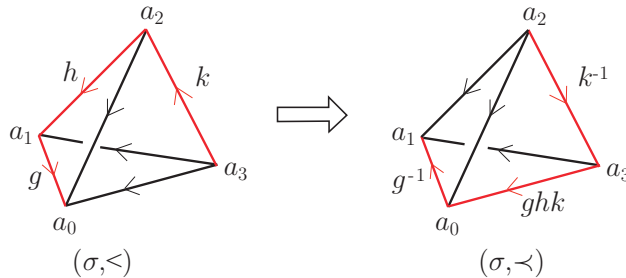
$$(4.7) \quad W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.8) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{1203}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑧  $a_1 \prec a_0 \prec a_3 \prec a_2$  の場合：



③と①より、

$$W(\sigma_{1032}, \varphi) = W(\sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)$$

となる。ここで、(#)<sup>1</sup>より

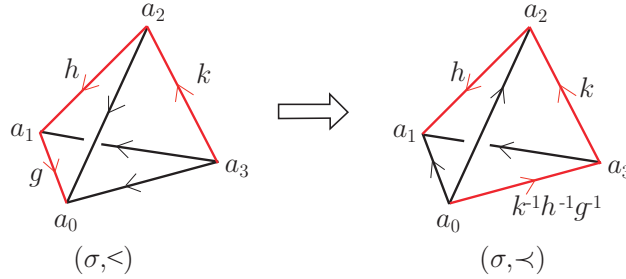
$$(4.9) \quad W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.10) \quad W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{1032}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑨  $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_0$  の場合：



⑥と①より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{1230}, \varphi) &= W(\sigma_{1023}, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(4.9)と(4.7)より

$$\begin{aligned} W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi), \\ W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) &= W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) \end{aligned}$$

であり、(#21)より

$$(4.11) \quad W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

である。同様に、

$$(4.12) \quad W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) = W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)$$

である。

∴)

(4.12)の証明： $\tau_1 = |a_0a_2a_3|$ とおく。 $\sigma_{1023}$ における $\tau_1$ の頂点の順序と $\sigma$ における $\tau_1$ の頂点の順序は等しいから、 $W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)$ と $W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$ が等しいことを示すには、指数部分が等しい、すなわち、 $\epsilon_{\tau_1, \sigma_{1023}} = \epsilon_{\tau_1, \sigma}$ となることを示せばよい。これは次のように示される。

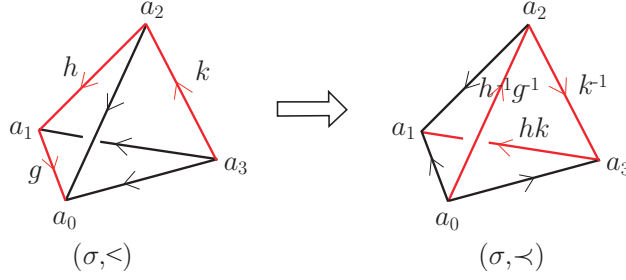
$$\epsilon_{\tau_1, \sigma_{1023}} = -\epsilon_{\sigma_{1023}} = \epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\tau_1, \sigma}.$$

よって、 $W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$ が成り立つ。□

よって、次が成立する：

$$W(\sigma_{1230}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑩  $a_1 \prec a_3 \prec a_2 \prec a_0$  の場合：



⑤と①より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{1320}, \varphi) &= W(\sigma_{1023}, \varphi)W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(4.10) と (4.7) と (4.11) より

$$\begin{aligned} W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi), \\ W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi), \\ W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \end{aligned}$$

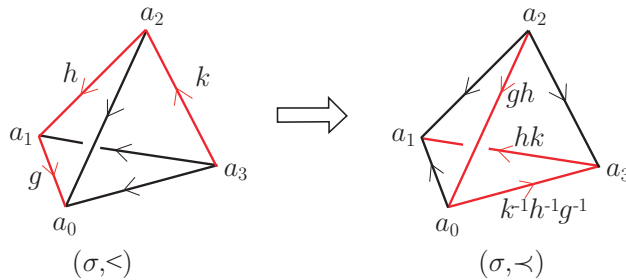
である。また、(#212) より

$$(4.13) \quad W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。よって、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{1320}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑪  $a_1 \prec a_3 \prec a_0 \prec a_2$  の場合：



④と①より、

$$\begin{aligned}
W(\sigma_{1302}, \varphi) &= W(\sigma_{1023}, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\
&\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\
&= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) \\
&\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi)
\end{aligned}$$

となる。ここで、(4.9) と (4.11) より

$$\begin{aligned}
W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi), \\
W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) &= W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)
\end{aligned}$$

である。また、(#12) より

$$(4.14) \quad W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

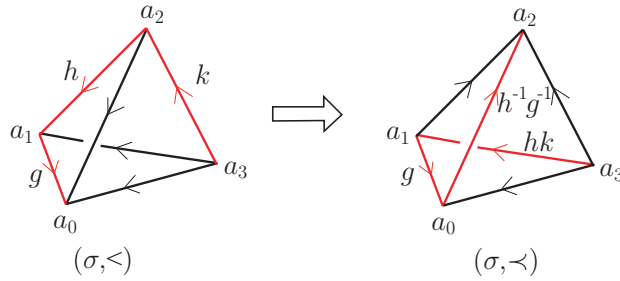
であることがわかる。また、(4.10) より、

$$W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1023}, \varphi) = W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。よって、次が成立する：

$$\begin{aligned}
W(\sigma_{1302}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) \\
&\quad \times W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi).
\end{aligned}$$

⑫  $a_2 \prec a_0 \prec a_1 \prec a_3$  の場合：



①と②より、

$$\begin{aligned}
W(\sigma_{2013}, \varphi) &= W(\sigma_{0213}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0213}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) \\
&= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) \\
&\quad \times W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0213}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi)
\end{aligned}$$

となる。ここで、(#12) と (#) より

$$(4.15) \quad W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0213}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)$$

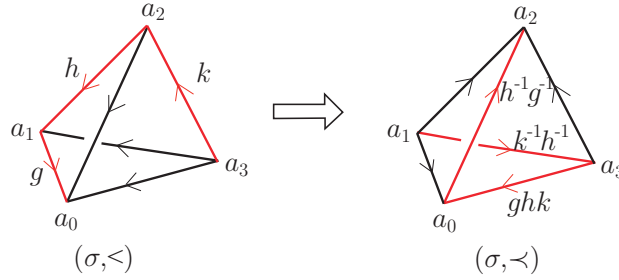
$$(4.16) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0213}, \varphi) = W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。よって、

$$W(\sigma_{2013}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$



⑬  $a_2 \prec a_0 \prec a_3 \prec a_1$  の場合 :



①と⑥より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2031}, \varphi) &= W(\sigma_{0231}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0231}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0231}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0231}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0231}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。(＃12) と (＃) より

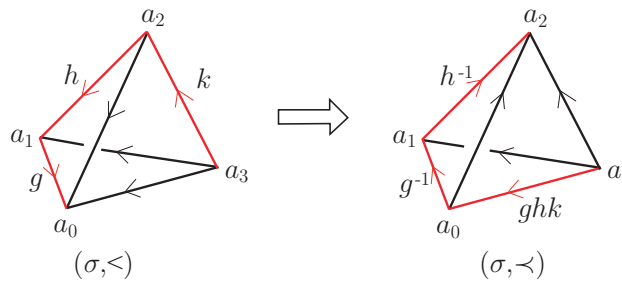
$$(4.17) \quad W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{0231}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.18) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0231}, \varphi) = W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する :

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2031}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑭  $a_2 \prec a_1 \prec a_0 \prec a_3$  の場合 :



②と⑫より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2103}, \varphi) &= W(\sigma_{2013}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2013}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{2013}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W(\sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2013}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{2013}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(＃212) と (＃) より

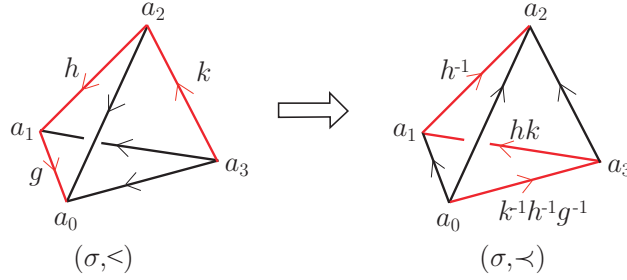
$$(4.19) \quad W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{2013}, \varphi) = W_{212}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.20) \quad W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2013}, \varphi) = W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。よって、次が成立する：

$$W(\sigma_{2103}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑤  $a_2 \prec a_1 \prec a_3 \prec a_0$  の場合：



①と⑨より、

$$W(\sigma_{2130}, \varphi) = W(\sigma_{1230}, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1230}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1230}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1230}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1230}, \varphi)$$

となる。(♯121) と (♯) より

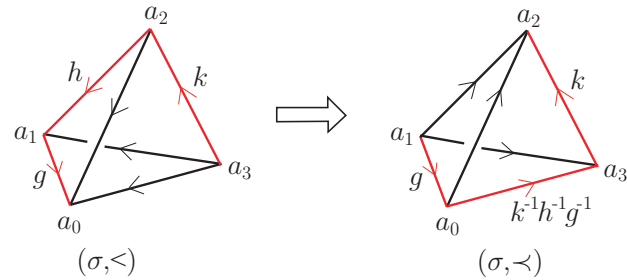
$$(4.21) \quad W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{1230}, \varphi) = W_{121}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.22) \quad W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1230}, \varphi) = W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{2130}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{121}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑥  $a_2 \prec a_3 \prec a_0 \prec a_1$  の場合：



②と⑬より、

$$W(\sigma_{2301}, \varphi) = W(\sigma_{2031}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2031}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{2031}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2031}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{2031}, \varphi)$$

となる。(＃12) と (＃21) より

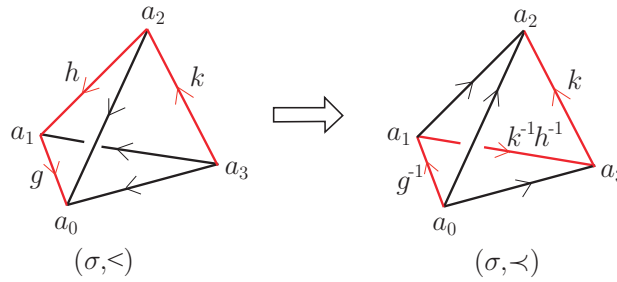
$$(4.23) \quad W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2031}, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.24) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{2031}, \varphi) = W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2301}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑦  $a_2 \prec a_3 \prec a_1 \prec a_0$  の場合：



②と⑬より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2310}, \varphi) &= W(\sigma_{2130}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2130}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{2130}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{121}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2130}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{2130}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。(＃121) と (＃21) より

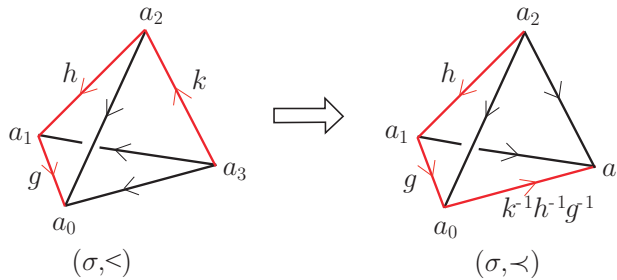
$$(4.25) \quad W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{2130}, \varphi) = W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.26) \quad W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma_{2130}, \varphi) = W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{2310}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{121}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑧  $a_3 \prec a_0 \prec a_1 \prec a_2$  の場合：



①と④より

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3012}, \varphi) &= W(\sigma_{0312}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。ここで、(#12)より

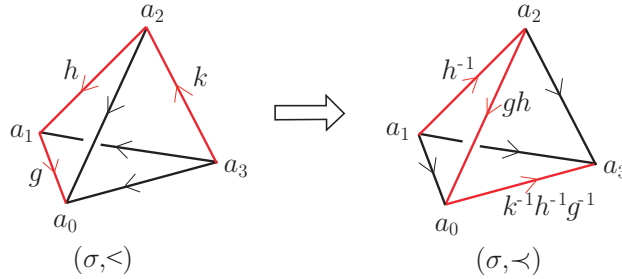
$$(4.27) \quad W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.28) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0312}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

である。よって、次が成立する：

$$W(\sigma_{3012}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑨  $a_3 \prec a_0 \prec a_2 \prec a_1$  の場合：



①と⑤より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3021}, \varphi) &= W(\sigma_{0321}, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0321}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0321}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0321}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0321}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。(#12)より

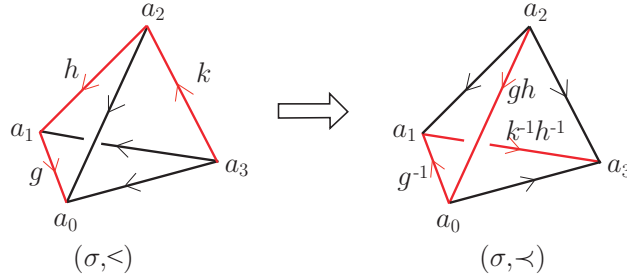
$$(4.29) \quad W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{0321}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.30) \quad W_1(|a_0a_2a_3|, \sigma_{0321}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3021}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑩  $a_3 \prec a_1 \prec a_0 \prec a_2$  の場合 :



①と⑩より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3102}, \varphi) &= W(\sigma_{1302}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1302}, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1302}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1302}, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1302}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。(＃121) と (＃12) より

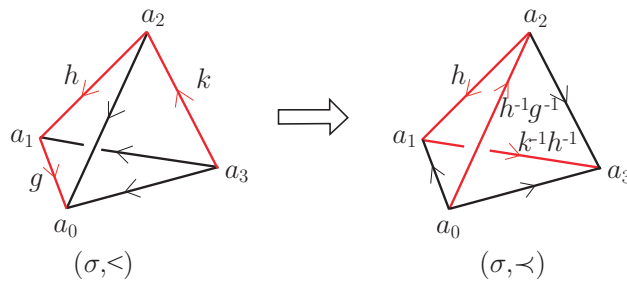
$$(4.31) \quad W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1302}, \varphi) = W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.32) \quad W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1302}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する :

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3102}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi)W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

⑪  $a_3 \prec a_1 \prec a_2 \prec a_0$  の場合 :



①と⑪より、

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3120}, \varphi) &= W(\sigma_{1320}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1320}, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1320}, \varphi) \\ &= W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1320}, \varphi)W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1320}, \varphi) \end{aligned}$$

となる。(＃121) と (＃12) より

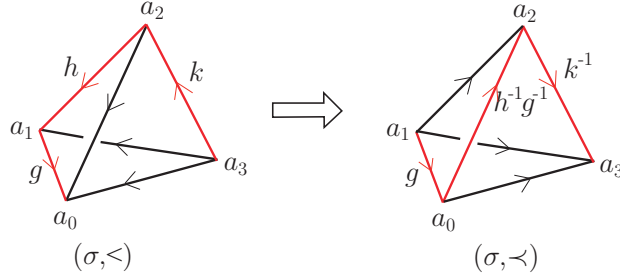
$$(4.33) \quad W_{21}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_3|, \sigma_{1320}, \varphi) = W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.34) \quad W_1(|a_1a_2a_3|, \sigma_{1320}, \varphi)W_2(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{3120}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{21}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_{121}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi).$$

⑱  $a_3 \prec a_2 \prec a_0 \prec a_1$  の場合：



②と⑱より、

$$W(\sigma_{3201}, \varphi) = W(\sigma_{3021}, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{3021}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{3021}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{3021}, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{3021}, \varphi)$$

となる。(＃12) と (＃212) より

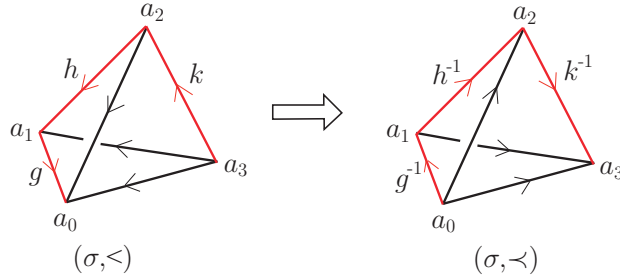
$$(4.35) \quad W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_{3021}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi) = W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.36) \quad W_{12}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_2a_3|, \sigma_{3021}, \varphi) = W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$W(\sigma_{3201}, \varphi) = W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi).$$

⑲  $a_3 \prec a_2 \prec a_1 \prec a_0$  の場合：



③と⑲より、

$$W(\sigma_{3210}, \varphi) = W(\sigma_{3201}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{3201}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{3201}, \varphi) \\ = W(\sigma, \varphi)W_{212}(|a_1a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{212}(|a_0a_2a_3|, \sigma, \varphi)W_{12}(|a_0a_1a_3|, \sigma, \varphi) \\ \times W_{12}(|a_0a_1a_2|, \sigma, \varphi)W_2(|a_0a_1a_2|, \sigma_{3201}, \varphi)W_2(|a_0a_1a_3|, \sigma_{3201}, \varphi)$$

となる。(212)より

$$(4.37) \quad W_{12}(|a_0 a_1 a_2|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_2|, \sigma_{3201}, \varphi) = W_{212}(|a_0 a_1 a_2|, \sigma, \varphi),$$

$$(4.38) \quad W_{12}(|a_0 a_1 a_3|, \sigma, \varphi) W_2(|a_0 a_1 a_3|, \sigma_{3201}, \varphi) = W_{212}(|a_0 a_1 a_3|, \sigma, \varphi)$$

であるから、次が成立する：

$$\begin{aligned} W(\sigma_{3210}, \varphi) &= W(\sigma, \varphi) W_{212}(|a_1 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) W_{212}(|a_0 a_2 a_3|, \sigma, \varphi) \\ &\quad \times W_{212}(|a_0 a_1 a_3|, \sigma, \varphi) W_{212}(|a_0 a_1 a_2|, \sigma, \varphi). \end{aligned}$$

①から⑬より  $\tau = |a_0 a_1 a_2|$  と  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  ( $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ) に関して次のことがわかる。局所順序を  $\prec$  に取り替えたとき、 $\sigma' := |a_i a_j a_k a_l|$  ( $a_i \prec a_j \prec a_k \prec a_l$ ) とおくと、

**Case 1.**  $a_0 \prec a_1 \prec a_2$  ならば、 $a_3$  が  $a_0, a_1, a_2$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は 1 である (③, ④, ⑱)。

**Case 2.**  $a_0 \prec a_2 \prec a_1$  ならば、 $a_3$  が  $a_0, a_2, a_1$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は  $W_2(\tau, \sigma, \varphi)$  である (②, ⑤, ⑥, ⑲)。

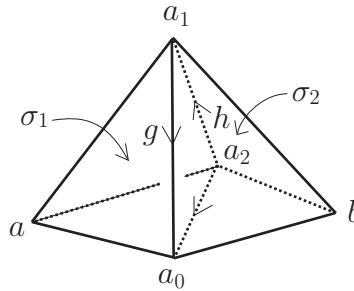
**Case 3.**  $a_1 \prec a_0 \prec a_2$  ならば、 $a_3$  が  $a_1, a_0, a_2$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は  $W_1(\tau, \sigma, \varphi)$  である (①, ⑧, ⑩, ⑳)。

**Case 4.**  $a_2 \prec a_0 \prec a_1$  ならば、 $a_3$  が  $a_2, a_0, a_1$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は  $W_{12}(\tau, \sigma, \varphi)$  である (⑫, ⑬, ⑯, ㉑)。

**Case 5.**  $a_1 \prec a_2 \prec a_0$  ならば、 $a_3$  が  $a_1, a_2, a_0$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は  $W_{21}(\tau, \sigma, \varphi)$  である (⑦, ⑨, ⑪, ㉒)。

**Case 6.**  $a_2 \prec a_1 \prec a_0$  ならば、 $a_3$  が  $a_2, a_1, a_0$  のどの間に入ったとしても  $W(\sigma', \varphi)$  における  $\tau$  の寄与は  $W_{212}(\tau, \sigma, \varphi) = W_{121}(\tau, \sigma, \varphi)$  である (⑭, ⑮, ⑰, ㉓)。

さて、 $\sigma_1, \sigma_2$  を  $\tau := \sigma_1 \cap \sigma_2$  が 2-単体であるような 3-単体とし、最初に与えられた局所順序  $\prec$  に関して  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = |a_0 a_1 a_2|$  ( $a_0 < a_1 < a_2$ ) であると仮定する。 $\varphi(\langle a_0, a_1 \rangle) = g$ ,  $\varphi(\langle a_1, a_2 \rangle) = h$  とおく。また、 $a_0, a_1, a_2$  以外の  $\sigma_1, \sigma_2$  の頂点をそれぞれ  $a, b$  とおく。



$\sigma_1, \sigma_2$  の頂点集合には局所順序  $\prec$  から誘導される全順序を与えておく (上図は  $a_0 < a_1 < a_2$  の場合)。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\tau, \sigma_1} &= \begin{cases} \epsilon_{\sigma_1} & (a_0 < a < a_1 < a_2 \text{ または } a_0 < a_1 < a_2 < a \text{ のとき}), \\ -\epsilon_{\sigma_1} & (a < a_0 < a_1 < a_2 \text{ または } a_0 < a_1 < a < a_2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ \epsilon_{\tau, \sigma_2} &= \begin{cases} \epsilon_{\sigma_2} & (a_0 < b < a_1 < a_2 \text{ または } a_0 < a_1 < a_2 < b \text{ のとき}), \\ -\epsilon_{\sigma_2} & (b < a_0 < a_1 < a_2 \text{ または } a_0 < a_1 < b < a_2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、

- $\sigma_1, \sigma_2$  の向きが同調しないとき、

$$\textcircled{A} \text{ 「}\epsilon_{\tau, \sigma_1} = \epsilon_{\sigma_1} \text{ かつ } \epsilon_{\tau, \sigma_2} = \epsilon_{\sigma_2}\text{」 または } \textcircled{B} \text{ 「}\epsilon_{\tau, \sigma_1} = -\epsilon_{\sigma_1} \text{ かつ } \epsilon_{\tau, \sigma_2} = -\epsilon_{\sigma_2}\text{」}$$

である。 $\sigma_1, \sigma_2$  の向きが同調しないことから、 $\epsilon_{\sigma_1} = -\epsilon_{\sigma_2}$  であるから、 $\textcircled{A}$ 、 $\textcircled{B}$  のいずれの場合も  $\epsilon_{\tau, \sigma_1}$  と  $\epsilon_{\tau, \sigma_2}$  は異符号である。

- $\sigma_1, \sigma_2$  の向きが同調するとき、

$$\textcircled{A}' \text{ 「}\epsilon_{\tau, \sigma_1} = \epsilon_{\sigma_1} \text{ かつ } \epsilon_{\tau, \sigma_2} = -\epsilon_{\sigma_2}\text{」 または } \textcircled{B}' \text{ 「}\epsilon_{\tau, \sigma_1} = -\epsilon_{\sigma_1} \text{ かつ } \epsilon_{\tau, \sigma_2} = \epsilon_{\sigma_2}\text{」}$$

である。 $\sigma_1, \sigma_2$  の向きが同調することから、 $\epsilon_{\sigma_1} = \epsilon_{\sigma_2}$  であるから、 $\textcircled{A}'$ 、 $\textcircled{B}'$  のいずれの場合も  $\epsilon_{\tau, \sigma_1}$  と  $\epsilon_{\tau, \sigma_2}$  は異符号である。

結局、どの場合であつても  $\epsilon_{\tau, \sigma_1}$  と  $\epsilon_{\tau, \sigma_2}$  は異符号である。このことから、

$$\begin{aligned} W_1(\tau, \sigma_1, \varphi)W_1(\tau, \sigma_2, \varphi) &= 1, \\ W_2(\tau, \sigma_1, \varphi)W_2(\tau, \sigma_2, \varphi) &= 1, \\ W_{12}(\tau, \sigma_1, \varphi)W_{12}(\tau, \sigma_2, \varphi) &= 1, \\ W_{21}(\tau, \sigma_1, \varphi)W_{21}(\tau, \sigma_2, \varphi) &= 1, \\ W_{121}(\tau, \sigma_1, \varphi)W_{121}(\tau, \sigma_2, \varphi) &= 1 \end{aligned}$$

であることがわかる。

以上より、別の局所順序  $\prec$  を与えて計算しても、任意の  $\varphi \in \text{Col}(K, \xi)$  に対して

$$\prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi; \prec) = \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi)$$

となり、 $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  は頂点集合への全順序の与え方に依らないことが証明された。  $\square$

**注意 1.** 1. このノートでは、 $Z_{G, \alpha}(M)$  が局所順序の与え方によらないことを上記のように証明するために、あらかじめ各  $g \in G$  に対して  $\alpha(g, g^{-1}, g)$  の平方根  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}$  を 1 つずつ選んでおく必要があった (この節の最初の部分参照)。しかし、 $\alpha(g, g^{-1}, g)$  の平方根を考えなくても、 $Z_{G, \alpha}(M)$  が局所順序の与え方によらないことを証明することができる [23]。

**注意 2.** 局所順序ではなく、[34] のように頂点集合  $K^{(0)}$  の全順序の選び方によらないことを証明するだけなら、上の証明における①、②、③の場合だけを考えればよい。実際、 $K^{(0)}$  に全順序  $\prec$  を 1 つ指定し、 $a_0, a_1$  を全順序  $\prec$  に関して隣り合う  $K$  の頂点である、すなわち、 $a_0 < v < a_1$  となる  $v \in K^{(0)}$  が存在しないとする。このとき、 $a_0, a_1$  の順序だけを逆にして  $K^{(0)}$  の全順序  $\prec$  を作るとき、 $\prec$  を使って  $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  を計算しても  $\prec$  を使って計算した場合と値が同じになることを証明すればよい。以下、その証明のあらすじを述べる。このアイデアは大槻氏に教えていただいた [23]。

$a_0, a_1$  を頂点に持つ 1-単体が  $K$  内に存在しなければ、 $a_0$  と  $a_1$  の間の順序の変更を行っても  $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  に変化は生じない。したがって、 $a_0, a_1$  を頂点に持つ 1-単体が  $K$  内に存在する場合だけを考えればよい。さらに、 $\partial K^{(0)} = \mathcal{T}^{(0)}$  上の全順序は固定しているので、 $|a_0 a_1| \in K$  かつ  $|a_0 a_1| \notin \partial K$  の下で、 $a_0, a_1$  の順序だけを逆にしても、もともとの全順序で計算した場合と値が同じになることを証明すればよい。 $\sigma$  を  $a_0, a_1$  を頂点に持つ  $K$  の 3-単体とする。次の 3 つ場合が考えられる。

- ①  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  ( $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ) の場合。
- ②  $\sigma = |a_{-1} a_0 a_1 a_2|$  ( $a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2$ ) の場合。



③  $\sigma = |a_{-2}a_{-1}a_0a_1|$  ( $a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1$ ) の場合。

それぞれの場合に全順序  $\prec$  を使ったときの  $W(\sigma, \varphi; \prec)$  の値の変化の様子は上の補題の証明に書かれているものと同じである。そして、 $\sigma_1, \sigma_2$  を頂点の中に  $a_0, a_1$  を含む 3-単体とし、 $\sigma_1 \cap \sigma_2$  は 2-単体であると仮定すると、次の 2 つの場合が生じ得る：

**Case 1.**  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = |a_0a_1a_2|$  ( $a_0 < a_1 < a_2$ ) の場合。

**Case 2.**  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = |a_{-1}a_0a_1|$  ( $a_{-1} < a_0 < a_1$ ) の場合。

Case 1 の場合には、 $W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_1, \varphi)W_1(|a_0a_1a_2|, \sigma_2, \varphi) = \alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_{\sigma_1}}\alpha(g^{-1}, g, h)^{\epsilon_{\sigma_2}} = 1$  となることがわかり、Case 2 の場合には、 $W_2(|a_{-1}a_0a_1|, \sigma_1, \varphi)W_2(|a_{-1}a_0a_1|, \sigma_2, \varphi) = \alpha(g, h, h^{-1})^{-\epsilon_{\sigma_1}}\alpha(g, h, h^{-1})^{-\epsilon_{\sigma_2}} = 1$  となることがわかる。これらのことから、 $\prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi; \prec) = \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi)$  が導かれて、 $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  は頂点集合への全順序の与え方に依らないことが証明される。

上の補題をより圏論的なアプローチで解釈しなおそう [6, 30]。任意の  $(g, h) \in G \times G$  に対して記号  $[g|h]$  を用意し、これを基底とする 1 次元の複素ベクトル空間  $\mathcal{H}_{g,h} = \mathbb{C}[g|h]$  を考える。任意の  $(g, h) \in G \times G$  に対して、共役線形写像

$$\Phi_{g,h} : \mathcal{H}_{g,h} \longrightarrow \mathcal{H}_{g^{-1},gh}, \quad \Psi_{g,h} : \mathcal{H}_{g,h} \longrightarrow \mathcal{H}_{gh,h^{-1}}$$

を以下のように定義する。  $z \in \mathbb{C}$  に対して

$$\Phi_{g,h}(z[g|h]) = \bar{z}\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\alpha(g^{-1}, g, h)[g^{-1}|gh],$$

$$\Psi_{g,h}(z[g|h]) = \bar{z}\frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\alpha(g, h, h^{-1})}[gh|h^{-1}]$$

ここで、 $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数を表わす。これらの写像  $\Phi_{g,h}, \Psi_{g,h}$  は、次の補題が示すように、“Frobenius 相互律写像” [16] にかなり近い性質を持っている。

**補題 4-2** 任意の  $g, h \in G$  に対して、

$$(1) \Phi_{g^{-1},gh} \circ \Phi_{g,h} = \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} \text{id}_{\mathcal{H}_{g,h}}.$$

$$(2) \Psi_{gh,h^{-1}} \circ \Psi_{g,h} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\sqrt{\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})}} \text{id}_{\mathcal{H}_{g,h}}.$$

(3) 次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Psi_{g^{-1},gh} & & \\ & & & & \longrightarrow & & \\ & & & & \mathcal{H}_{h,(gh)^{-1}} & & \\ & & & & \Phi_{h,(gh)^{-1}} & & \\ \mathcal{H}_{g,h} & \xrightarrow{\Phi_{g,h}} & \mathcal{H}_{g^{-1},gh} & \xrightarrow{\Psi_{g^{-1},gh}} & \mathcal{H}_{h,(gh)^{-1}} & \xrightarrow{\Phi_{h,(gh)^{-1}}} & \mathcal{H}_{h^{-1},g^{-1}} \\ & \searrow \Psi_{g,h} & \mathcal{H}_{gh,h^{-1}} & \xrightarrow{\Phi_{gh,h^{-1}}} & \mathcal{H}_{(gh)^{-1},g} & \xrightarrow{\Psi_{(gh)^{-1},g}} & \mathcal{H}_{h^{-1},g^{-1}} \end{array}$$

(証明)

(1) 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\Phi_{g^{-1},gh} \circ \Phi_{g,h})([g|h]) &= \Phi_{g^{-1},gh}(\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\alpha(g^{-1}, g, h)[g^{-1}|gh]) \\ &= \frac{\alpha(g, g^{-1}, gh)\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}}{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\alpha(g^{-1}, g, h)}[g|h] \\ &= \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})}[g|h] \end{aligned}$$

最後の等号では、 $g, g^{-1}, g, h$  に関する 3-コサイクル条件

$$\alpha(g^{-1}, g, h)\alpha(g, 1, h)\alpha(g, g^{-1}, g) = \alpha(1, g, h)\alpha(g, g^{-1}, gh)$$

を用いた。

(2) 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\Psi_{gh, h^{-1}} \circ \Psi_{g, h})([g|h]) &= \Psi_{gh, h^{-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\alpha(g, h, h^{-1})}[gh|h^{-1}]\right) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\alpha(g, h, h^{-1})}{\alpha(gh, h^{-1}, h)\sqrt{\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})}}[g|h] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\sqrt{\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})}}[g|h] \end{aligned}$$

となる。最後の等号では、 $g, h, h^{-1}, h$  に関する 3-コサイクル条件

$$\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(g, 1, h)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, h)\alpha(g, h, 1)$$

を用いた。

(3) 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &(\Phi_{h, (gh)^{-1}} \circ \Psi_{g^{-1}, gh} \circ \Phi_{g, h})([g|h]) \\ &= \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\alpha(g^{-1}, g, h) \cdot \sqrt{\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh)}\alpha(g^{-1}, gh, (gh)^{-1}) \\ &\quad \cdot \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\alpha(h^{-1}, h, (gh)^{-1})[h^{-1}|g^{-1}], \\ &(\Psi_{(gh)^{-1}, g} \circ \Phi_{gh, h^{-1}} \circ \Psi_{g, h})([g|h]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)}\alpha(g, h, h^{-1})} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh)}\alpha((gh)^{-1}, gh, h^{-1})} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\alpha((gh)^{-1}, g, g^{-1})}[h^{-1}|g^{-1}] \end{aligned}$$

より、

$$(4.39) \quad \begin{aligned} &\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha((gh)^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh) \\ &\quad \cdot \alpha(g, g^{-1}, g)\alpha((gh)^{-1}, g, g^{-1})\alpha(g^{-1}, g, h)\alpha(g^{-1}, gh, (gh)^{-1})\alpha(h^{-1}, h, (gh)^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

を示せばよい。

- $gh, (gh)^{-1}, gh, h^{-1}$  に関して 3-コサイクル条件を適用して

$$\alpha((gh)^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(gh, 1, h^{-1})\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh) = \alpha(1, gh, h^{-1})\alpha(gh, (gh)^{-1}, g)$$

つまり、

$$\alpha((gh)^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(gh, (gh)^{-1}, gh) = \alpha(gh, (gh)^{-1}, g)$$

を得る。

- $g^{-1}, gh, (gh)^{-1}, g$  に関して 3-コサイクル条件を適用して

$$\alpha(gh, (gh)^{-1}, g)\alpha(g^{-1}, 1, g)\alpha(g^{-1}, gh, (gh)^{-1}) = \alpha(h, (gh)^{-1}, g)\alpha(g^{-1}, gh, h^{-1})$$

つまり、

$$\alpha(gh, (gh)^{-1}, g)\alpha(g^{-1}, gh, (gh)^{-1}) = \alpha(h, (gh)^{-1}, g)\alpha(g^{-1}, gh, h^{-1})$$

を得る。

- $g^{-1}, g, h, h^{-1}$  に関して 3-コサイクル条件を適用して

$$\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(g^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(g^{-1}, g, h) = \alpha(1, h, h^{-1})\alpha(g^{-1}, g, 1)$$

つまり、

$$\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(g^{-1}, gh, h^{-1})\alpha(g^{-1}, g, h) = 1$$

を得る。

- $h^{-1}, h, (gh)^{-1}, g$  に関して 3-コサイクル条件を適用して

$$\alpha(h, (gh)^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, h, (gh)^{-1}) = \alpha(1, (gh)^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})$$

つまり、

$$\alpha(h, (gh)^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g)\alpha(h^{-1}, h, (gh)^{-1}) = \alpha(h^{-1}, h, h^{-1})$$

を得る。

- $h^{-1}, g^{-1}, g, g^{-1}$  に関して 3-コサイクル条件を適用して

$$\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})\alpha(h^{-1}, 1, g^{-1})\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g) = \alpha((gh)^{-1}, g, g^{-1})\alpha(h^{-1}, g^{-1}, 1)$$

つまり、

$$\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})\alpha(h^{-1}, g^{-1}, g) = \alpha((gh)^{-1}, g, g^{-1})$$

を得る。

この5つの等式を使うと、等式 (4.39) が成り立つことがわかる。  $\square$

**注意：**もし、 $\alpha$  が「 $g^2 = 1$  となる任意の  $g \in G$  に対して  $\alpha(g, g, g) = 1$ 」を満たしているならば、 $\{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\}_{g \in G}$  を任意の  $g \in G$  について  $\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)}\sqrt{\alpha(g^{-1}, g, g^{-1})} = 1$  が成立するように選ぶことができる。この場合、(1) と (2) の等式は

$$\Phi_{g^{-1}, gh} \circ \Phi_{g, h} = \text{id}_{\mathcal{H}_{g, h}}, \quad \Psi_{gh, h^{-1}} \circ \Psi_{g, h} = \text{id}_{\mathcal{H}_{g, h}}$$

となる。

$W(\sigma, \varphi)$  は  $\Phi_{g, h}, \Psi_{g, h}$  を用いて以下のように捉えることができる。 $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  ( $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ) とする。このように頂点に全順序が与えられた 3-単体  $\sigma$  とカラー  $\varphi$  に対して、

$$\mathcal{H}_{\sigma, \varphi} := \overline{\mathcal{H}}_{h, k} \otimes \mathcal{H}_{gh, k} \otimes \overline{\mathcal{H}}_{g, hk} \otimes \mathcal{H}_{g, h}$$

と定義し、写像  $J_{\sigma, \varphi} : \mathcal{H}_{\sigma, \varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$J_{\sigma, \varphi}(z_0[h|k] \otimes z_1[gh|k] \otimes z_2[g|hk] \otimes z_3[g|h]) = \overline{z_0} z_1 \overline{z_2} z_3 \alpha(g, h, k)$$

によって定義する。ここで、 $g = \varphi(\langle a_0, a_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle a_2, a_3 \rangle)$  としている。また、 $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間  $\mathcal{H}$  に対して  $\overline{\mathcal{H}}$  を  $\mathcal{H}$  への  $\mathbb{C}$  の作用  $\cdot$  を次の  $\star$  に変えて得られる複素ベクトル空間とする：

$$z \star x := \overline{z} \cdot x \quad (z \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{H}).$$

$\sigma$  の頂点の順序を  $a_1 < a_0 < a_2 < a_3$  に変えたものを  $\sigma_{1023}$  とおく。このとき、上のようにして

$$\mathcal{H}_{\sigma_{1023}, \varphi} = \overline{\mathcal{H}}_{gh, k} \otimes \mathcal{H}_{h, k} \otimes \overline{\mathcal{H}}_{g^{-1}, ghk} \otimes \mathcal{H}_{g^{-1}, gh}$$

および写像  $J_{\sigma_{1023},\varphi} : \mathcal{H}_{\sigma_{1023},\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  が定まる。

$$\begin{aligned}
& J_{\sigma_{1023},\varphi}(z_1[gh|k] \otimes z_0[h|k] \otimes \Phi_{g,hk}(z_2[g|hk]) \otimes \Phi_{g,h}(z_3[g|h])) \\
&= J_{\sigma_{1023},\varphi}(z_1[gh|k] \otimes z_0[h|k] \otimes \bar{z}_2 \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \alpha(g^{-1}, g, hk) [g^{-1}|ghk] \\
&\quad \otimes \bar{z}_3 \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \alpha(g^{-1}, g, h) [g^{-1}|gh]) \\
&= \bar{z}_1 z_0 z_2 \frac{1}{\sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \alpha(g^{-1}, g, hk)} \bar{z}_3 \sqrt{\alpha(g, g^{-1}, g)} \alpha(g^{-1}, g, h) \alpha(g^{-1}, gh, k) \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \frac{\alpha(g^{-1}, g, h) \alpha(g^{-1}, gh, k)}{\alpha(g^{-1}, g, hk)} \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \alpha(g, h, k)^{-1}
\end{aligned}$$

となるから、 $(\bar{\quad}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を複素共役をとる写像とし、写像  $P_{1023} : \mathcal{H}_{\sigma,\varphi} \rightarrow \mathcal{H}_{\sigma_{1023},\varphi}$  を

$$P_{1023}(z_0[h|k] \otimes z_1[gh|k] \otimes z_2[g|hk] \otimes z_3[g|h]) = z_1[gh|k] \otimes z_0[h|k] \otimes \Phi_{g,hk}(z_2[g|hk]) \otimes \Phi_{g,h}(z_3[g|h])$$

によって定義すると、

$$(\bar{\quad}) \circ J_{\sigma_{1023},\varphi} \circ P_{1023} = J_{\sigma,\varphi}$$

が成り立つ。

次に、 $\sigma$  の頂点の順序を  $a_0 < a_2 < a_1 < a_3$  に変えたものを  $\sigma_{0213}$  とおく。このとき、

$$\mathcal{H}_{\sigma_{0213},\varphi} = \bar{\mathcal{H}}_{h^{-1},hk} \otimes \mathcal{H}_{g,hk} \otimes \bar{\mathcal{H}}_{gh,k} \otimes \mathcal{H}_{gh,h^{-1}}$$

であり、写像  $J_{\sigma_{0213},\varphi} : \mathcal{H}_{\sigma_{0213},\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  が定まる。

$$\begin{aligned}
& J_{\sigma_{0213},\varphi}(\Phi_{h,k}(z_0[h|k]) \otimes z_2[g|hk] \otimes z_1[gh|k] \otimes \Psi_{g,h}(z_3[g|h])) \\
&= J_{\sigma_{0213},\varphi}\left(\bar{z}_0 \sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \alpha(h^{-1}, h, k) [h^{-1}|hk] \otimes z_2[g|hk] \otimes z_1[gh|k] \right. \\
&\quad \left. \otimes \bar{z}_3 \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \alpha(g, h, h^{-1})} [gh|h^{-1}]\right) \\
&= z_0 \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \alpha(h^{-1}, h, k)} z_2 \bar{z}_1 z_3 \frac{1}{\sqrt{\alpha(h, h^{-1}, h)} \alpha(g, h, h^{-1})} \alpha(gh, h^{-1}, hk) \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \frac{\alpha(gh, h^{-1}, hk)}{\alpha(h, h^{-1}, h) \alpha(h^{-1}, h, k) \alpha(g, h, h^{-1})} \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \alpha(g, h, k)^{-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、写像  $P_{0213} : \mathcal{H}_{\sigma,\varphi} \rightarrow \mathcal{H}_{\sigma_{0213},\varphi}$  を

$$P_{0213}(z_0[h|k] \otimes z_1[gh|k] \otimes z_2[g|hk] \otimes z_3[g|h]) = \Phi_{h,k}(z_0[h|k]) \otimes z_2[g|hk] \otimes z_1[gh|k] \otimes \Psi_{g,h}(z_3[g|h])$$

によって定義すると、

$$(\bar{\quad}) \circ J_{\sigma_{0213},\varphi} \circ P_{0213} = J_{\sigma,\varphi}$$

が成り立つ。

次に、 $\sigma$  の頂点の順序を  $a_0 < a_1 < a_3 < a_2$  に変えたものを  $\sigma_{0132}$  とおく。このとき、

$$\mathcal{H}_{\sigma_{0132},\varphi} = \bar{\mathcal{H}}_{hk,k^{-1}} \otimes \mathcal{H}_{ghk,k^{-1}} \otimes \bar{\mathcal{H}}_{g,h} \otimes \mathcal{H}_{g,hk}$$

である。写像  $J_{\sigma_{0132}, \varphi} : \mathcal{H}_{\sigma_{0132}, \varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  の定義より、

$$\begin{aligned}
& J_{\sigma_{0132}, \varphi} (\Psi_{h,k}(z_0[h|k]) \otimes \Psi_{gh,k}(z_1[gh|k]) \otimes z_3[g|h] \otimes z_2[g|hk]) \\
&= J_{\sigma_{0132}, \varphi} \left( \bar{z}_0 \frac{1}{\sqrt{\alpha(k, k^{-1}, k)} \alpha(h, k, k^{-1})} [hk|k^{-1}] \otimes \bar{z}_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(k, k^{-1}, k)} \alpha(gh, k, k^{-1})} [ghk|k^{-1}] \right. \\
&\quad \left. \otimes z_3[g|h] \otimes z_2[g|hk] \right) \\
&= z_0 \sqrt{\alpha(k, k^{-1}, k)} \alpha(h, k, k^{-1}) \bar{z}_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha(k, k^{-1}, k)} \alpha(gh, k, k^{-1})} \bar{z}_3 z_2 \alpha(g, hk, k^{-1}) \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \frac{\alpha(h, k, k^{-1}) \alpha(g, hk, k^{-1})}{\alpha(gh, k, k^{-1})} \\
&= z_0 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \alpha(g, h, k)^{-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、写像  $P_{0132} : \mathcal{H}_{\sigma, \varphi} \rightarrow \mathcal{H}_{\sigma_{0132}, \varphi}$  を

$$P_{0132}(z_0[h|k] \otimes z_1[gh|k] \otimes z_2[g|hk] \otimes z_3[g|h]) = \Psi_{h,k}(z_0[h|k]) \otimes \Psi_{gh,k}(z_1[gh|k]) \otimes z_3[g|h] \otimes z_2[g|hk]$$

によって定義すると、

$$\overline{(\quad)} \circ J_{\sigma_{0132}, \varphi} \circ P_{0132} = J_{\sigma, \varphi}$$

が成り立つ。

$K$  を向きづけられたコンパクトな 3 次元多様体  $M$  の単体分割とし、 $K$  に局所順序が与えられているとする。 $K$  の 3-単体  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  ( $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ) とカラー  $\varphi$  に対して、 $v_{\sigma, \varphi} \in \mathcal{H}_{\sigma, \varphi}$  を

$$v_{\sigma, \varphi} := [h|k] \otimes [gh|k] \otimes [g|hk] \otimes [g|h]$$

によって定義する。

$$\bigotimes_{\sigma \in K^{(3)}} v_{\sigma, \varphi} \in \bigotimes_{\sigma \in K^{(3)}} \mathcal{H}_{\sigma, \varphi}$$

である。 $\epsilon = \pm$  に対して  $J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon} : \mathcal{H}_{\sigma, \varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon} = \begin{cases} J_{\sigma, \varphi} & (\epsilon = 1), \\ \overline{(\quad)} \circ J_{\sigma, \varphi} & (\epsilon = -1) \end{cases}$$

と定義する。そして、

$$Z(K, \varphi) := \left( \bigotimes_{\sigma \in K^{(3)}} J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon_{\sigma}} \right) \left( \bigotimes_{\sigma \in K^{(3)}} v_{\sigma, \varphi} \right) = \prod_{\sigma \in K^{(3)}} J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon_{\sigma}}(v_{\sigma, \varphi})$$

と定める。 $Z(K, \varphi) = \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi)$  である。

補題 4-1 の証明を  $Z(K, \varphi)$  の場合書き直してみよう。 $K$  の局所順序  $<$  とは別の局所順序  $\prec$  を使って  $Z(K, \varphi)$  を計算しても  $<$  を使って計算した場合と値が同じになることを証明すればよい。1 つの 3-単体  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3| \in K$  に対して、局所順序によってその辺に与えられる向きの状況は補題 4-1 の証明で列挙したように全部で 24 通りが考えられる。局所順序  $<$  から  $\sigma$  の頂点集合に誘導される全順序は  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$  であるとし、局所順序  $\prec$  を使って  $\sigma$  の頂点集合に誘導される全順序が  $a_i \prec a_j \prec a_k \prec a_l$  であるとする。この全順序をもつ  $\sigma$  を  $\sigma_{ijkl}$  と記す。任意のカラー  $\varphi$  に対して

$$(4.40) \quad J_{\sigma_{ijkl}, \varphi}^{\epsilon_{\sigma_{ijkl}}} (v_{\sigma_{ijkl}, \varphi}) = J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon_{\sigma}} (v_{\sigma, \varphi})$$

となることを示せばよい。まず、次の 3 つ場合に示す。

- ①  $a_1 \prec a_0 \prec a_2 \prec a_3$  の場合。
- ②  $a_0 \prec a_2 \prec a_1 \prec a_3$  の場合。
- ③  $a_0 \prec a_1 \prec a_3 \prec a_2$  の場合。

①の場合、 $\varphi(\langle a_0, a_1 \rangle) = g$ ,  $\varphi(\langle a_1, a_2 \rangle) = h$ ,  $\varphi(\langle a_2, a_3 \rangle) = k$  とおくと

$$v_{\sigma_{1023}, \varphi} = [gh|k] \otimes [h|k] \otimes [g^{-1}|ghk] \otimes [g^{-1}|gh] \in \mathcal{H}_{\sigma_{1023}, \varphi}$$

であり、

$$\begin{aligned} J_{\sigma_{1023}, \varphi}^{\epsilon_{\sigma_{1023}}} (v_{\sigma_{1023}, \varphi}) &= J_{\sigma_{1023}, \varphi}^{-\epsilon_{\sigma_{1023}}} (v_{\sigma_{1023}, \varphi}) \\ &= (J_{\sigma_{1023}, \varphi}^{-\epsilon_{\sigma_{1023}}} \circ P_{1023})(v_{\sigma, \varphi}) \\ &= \begin{cases} ((\bar{\quad}) \circ J_{\sigma_{1023}, \varphi} \circ P_{1023})(v_{\sigma, \varphi}) & (\epsilon_{\sigma} = 1), \\ (J_{\sigma_{1023}, \varphi} \circ P_{1023})(v_{\sigma, \varphi}) & (\epsilon_{\sigma} = -1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} J_{\sigma, \varphi}(v_{\sigma, \varphi}) & (\epsilon_{\sigma} = 1), \\ ((\bar{\quad}) \circ J_{\sigma, \varphi})(v_{\sigma, \varphi}) & (\epsilon_{\sigma} = -1) \end{cases} \\ &= J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon_{\sigma}} (v_{\sigma, \varphi}) \end{aligned}$$

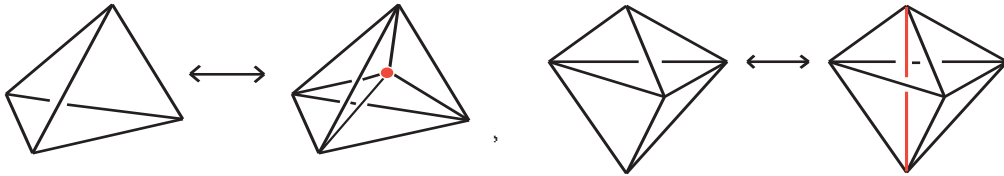
である。よって、(4.40) が成り立つ。

②や③の場合も①の場合と同様に、 $J_{\sigma_{0132}, \varphi}^{\epsilon_{\sigma_{0132}}} (v_{\sigma_{0132}, \varphi}) = J_{\sigma, \varphi}^{\epsilon_{\sigma}} (v_{\sigma, \varphi})$  となることがわかる。

上記以外の順序は、①, ②, ③を適当に合成することで得られるから、任意の 3-単体  $\sigma \in K$  と任意の局所順序  $\prec$  および任意のカラー  $\varphi$  に対して (4.40) が成り立つことがわかる。したがって、 $Z(K, \varphi)$  を新しい局所順序  $\prec$  を用いて計算しても、もともとの局所順序  $\prec$  を用いて計算した結果と一致することがわかる。

#### §4-2. 単体分割の選び方によらないこと

次に、(☆2) が成立することを示す。Pachner の結果により、単体分割に対する次の 2 種類の変形の下で  $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  が不変であることを示せばよい。



上図の左側の移動を (1,4)-Pachner 移動、右側の移動を (2,3)-Pachner 移動と呼ぶ。

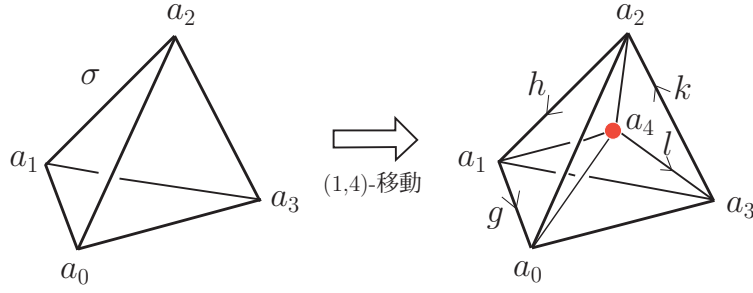
**補題 4-3**  $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  は (1,4)-Pachner 移動の下で不変である。

(証明)

$(K, \tilde{t})$  を  $M$  の単体分割とし、 $(K, \tilde{t})$  に 1 回だけ (1,4)-Pachner 移動を施して得られる  $M$  の単体分割を  $(K', \tilde{t}')$  とおく。

この Pachner 移動によって変化を受ける  $K$  の 3-単体を  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$  とおく。Pachner 移動によって生じた  $K'$  の頂点を  $a_4$  とおく。

$$\sigma_0 = |a_1 a_2 a_3 a_4|, \quad \sigma_1 = |a_0 a_2 a_3 a_4|, \quad \sigma_2 = |a_0 a_1 a_3 a_4|, \quad \sigma_3 = |a_0 a_1 a_2 a_4|$$



とおくと、 $K'$  の 3-単体全体  $(K')^{(3)}$  は次で与えられる：

$$(K')^{(3)} = (K^{(3)} - \{\sigma\}) \cup \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

補題 4-1 により Dijkstra-Witten 不変量の計算においては、任意の局所順序を使って計算することができるので、ここでは頂点集合の全順序から誘導される局所順序を用いる。今、頂点集合  $K^{(0)}$  の全順序に関して  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$  が成り立っているとし、頂点集合  $(K')^{(0)}$  の全順序は、 $K$  の頂点同士については  $K^{(0)}$  に与えられている全順序によって定め、 $K$  の頂点  $v$  と  $a_4$  については  $v < a_4$  となるように定める。このとき、

$$\epsilon_\sigma = -\epsilon_0 = \epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon_3$$

となる。ここで、 $\epsilon_i = \epsilon_{\sigma_i}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) と定めている。

$(\varphi, l) \in \text{Col}(K, \xi) \times G$  に対して  $\varphi_l \in \text{Col}(K', \xi)$  が

$$\varphi_l(E) = \begin{cases} \varphi(E) & (E \in \text{Edge}(K) \text{ のとき}), \\ l & (E = \langle a_3, a_4 \rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定まる。写像  $\Phi : \text{Col}(K, \xi) \times G \rightarrow \text{Col}(K', \xi)$ ,  $(\varphi, l) \mapsto \varphi_l$  は全単射である。よって、

$Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  が (1,4)-Pachner 移動の下で不変

$$\iff \text{任意の } \varphi \in \text{Col}(K, \xi) \text{ に対して } W(\sigma, \varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{l \in G} \prod_{i=0}^3 W(\sigma_i, \varphi_l)$$

が成り立つ。 $g = \varphi(\langle a_0, a_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle a_2, a_3 \rangle)$  とおくと、上の等式は

$$\alpha(g, h, k) = \frac{1}{|G|} \sum_{l \in G} \alpha(h, k, l)^{-1} \alpha(gh, k, l) \alpha(g, hk, l)^{-1} \alpha(g, h, kl)$$

と書き表わすことができる。この等式は  $\alpha$  に対する 3-コサイクル条件から従う。こうして、 $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  は (1,4)-Pachner 移動の下で不変であることが示された。□

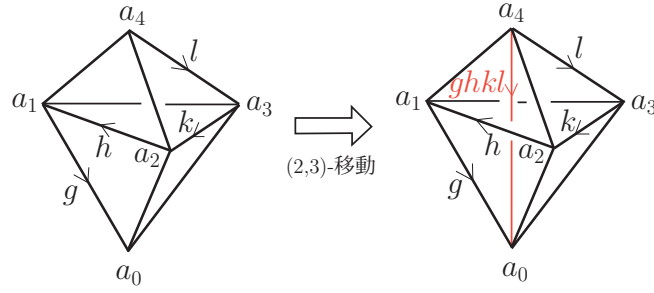
**補題 4-4**  $Z_{G,\alpha}(M, \xi)$  は (2,3)-Pachner 移動の下で不変である。

(証明)

$(K, \tilde{t})$  を  $M$  の単体分割とし、 $(K, \tilde{t})$  に 1 回だけ (2,3)-Pachner 移動を施して得られる  $M$  の単体分割を  $(K', \tilde{t}')$  とおく。

この Pachner 移動によって変化を受ける  $K$  の 3-単体を  $\sigma = |a_0 a_1 a_2 a_3|$ ,  $\sigma' = |a_1 a_2 a_3 a_4|$  とおく。

$$\sigma_1 = |a_0 a_2 a_3 a_4|, \quad \sigma_2 = |a_0 a_1 a_3 a_4|, \quad \sigma_3 = |a_0 a_1 a_2 a_4|$$



とおくと、 $K'$  の 3-単体全体  $(K')^{(3)}$  は次で与えられる：

$$(K')^{(3)} = (K^{(3)} - \{\sigma, \sigma'\}) \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

補題 4-3 の証明と同様に、局所順序として頂点集合の全順序から誘導される局所順序を用いる。頂点集合  $K^{(0)} = (K')^{(0)}$  の全順序に関して  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  が成り立っているとすると、

$$\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma'} = \epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon_3$$

となる。ここで、 $\epsilon_i = \epsilon_{\sigma_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と定めている。

$\varphi \in \text{Col}(K, \xi)$  に対して  $\varphi' \in \text{Col}(K', \xi)$  が

$$\varphi'(E) = \begin{cases} \varphi(E) & (E \in \text{Edge}(K) \text{ のとき}), \\ \varphi(\langle a_0, a_1 \rangle) \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle) \varphi(\langle a_2, a_3 \rangle) \varphi(\langle a_3, a_4 \rangle) & (E = \langle a_0, a_4 \rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定まる。写像  $\Phi : \text{Col}(K, \xi) \rightarrow \text{Col}(K', \xi)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi'$  は全単射である。よって、

$Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  が (2, 3)-Pachner 移動の下で不変

$$\iff \text{任意の } \varphi \in \text{Col}(K, \xi) \text{ に対して } W(\sigma, \varphi)W(\sigma', \varphi) = W(\sigma_1, \varphi')W(\sigma_2, \varphi')W(\sigma_3, \varphi')$$

が成り立つ。 $g = \varphi(\langle a_0, a_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle a_2, a_3 \rangle)$ ,  $l = \varphi(\langle a_3, a_4 \rangle)$  とおくと、上の等式は

$$\alpha(g, h, k)\alpha(h, k, l) = \alpha(gh, k, l)\alpha(g, hk, l)^{-1}\alpha(g, h, kl)$$

と書き表わすことができる。この等式は  $\alpha$  に対する 3-コサイクル条件そのものである。こうして、 $Z_{G, \alpha}(M, \xi)$  は (2, 3)-Pachner 移動の下で不変であることが示された。□

**注意 4-5** 論文 [34] では、Turaev-Viro の証明方法 [31] を真似て—但し、双対分割を使わずに、Alexander の定理に基づいて—単体分割の選び方によらないことを示している。その際、辺の内点から星状細分を行ったときの不変性の証明が最も大変な部分であった。その後、Pachner の結果 [26] を知り、3-単体の内点から星状細分を行った場合の不変性 (補題 4-3) と 2-単体の内点から星状細分を行った場合の不変性 (補題 4-4) さえ、示せば十分であることを知った。Pachner 移動の下での Dijkgraaf-Witten 不変量の位相不変性の証明については、Carter, Kauffman, Saito [7] による (図を使った) 説明がある。彼らは、その論文 [7] の中で、ある種の条件を満たす 4-コサイクルを用いて 4 次元多様体の状態和不変量を導入し、Pachner 移動を用いてその位相不変性を証明している。



## §5. Dijkgraaf-Witten 不変量の計算例

ここでは、いくつかの閉 3 次元多様体に対して Dijkgraaf-Witten 不変量の計算式を与える。

### §5-1. Dijkgraaf-Witten 不変量の一般的な性質

Dijkgraaf-Witten 不変量は次の性質を持つ。

**命題 5-1** ([34; Propositions 4.1&4.2(1)])  $M$  を向きづけられた閉 3 次元多様体とする。

(1) Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z_{G,\alpha}(M)$  は  $\alpha$  のコホモロジー類のみに依存する。すなわち、 $\alpha$  と  $\alpha'$  が cohomologous ならば、 $Z_{G,\alpha}(M) = Z_{G,\alpha'}(M)$  となる。

(2)  $-M$  を  $M$  に逆の向きを付与した閉 3 次元多様体とする。このとき、

$$Z_{G,\alpha}(-M) = \overline{Z_{G,\alpha}(M)}.$$

**命題 5-2** ([34; Proposition 4.2(2)])  $M_1, M_2$  を向きづけられた閉 3 次元多様体とする。このとき、連結和  $M_1 \sharp M_2$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は次の公式によって計算される：

$$\frac{1}{|G|} Z_{G,\alpha}(M_1 \sharp M_2) = Z_{G,\alpha}(M_1) Z_{G,\alpha}(M_2).$$

### §5-2. 特異単体分割を用いた Dijkgraaf-Witten 不変量の計算方法

具体的に与えられた 3 次元多様体の Dijkgraaf-Witten 不変量を計算するには、特異単体分割を用いた方が便利である。特異単体分割の概念は単体分割と CW 複体の間の中間的な概念として Turaev と Viro によって導入された [31]。

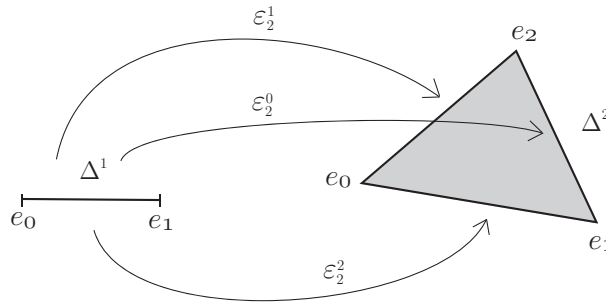
標準  $n$  単体  $\Delta^n = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 (i = 0, 1, \dots, n) \}$  に対して

$$\text{Int } \Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i > 0 (i = 0, 1, \dots, n) \right\}$$

とおく。また、 $i = 0, 1, \dots, n$  に対して  $\varepsilon_n^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  を

$$\varepsilon_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & (0 \leq j < i), \\ e_{j+1} & (j \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

によって定まる線形写像とする。但し、 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  である。



$\{0, 1, \dots, n\}$  上の全単射  $\rho$  に対して線形写像  $\rho_* : \Delta \rightarrow \Delta$  を  $\rho_*(e_i) = e_{\rho(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) によって定義する。

**定義 5-3**  $X$  を位相空間とし、 $K = \{\sigma_\lambda : \Delta^\lambda \rightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $X$  の特異単体の族とする。  $K$  が以下の条件を満たすとき、  $X$  の**特異単体分割** (singular triangulation) と呼ばれる。

- (i) 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\sigma_\lambda|_{\text{Int } \Delta^{n_\lambda}} : \text{Int } \Delta^{n_\lambda} \rightarrow \sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda})$  は同相写像である。
- (ii)  $\forall \lambda \in \Lambda, \forall i = 0, 1, \dots, n_\lambda, \exists l \in \Lambda, \exists \rho : \{0, 1, \dots, n_l\}$  上の全単射

$$\text{s.t. } n_l = n_\lambda - 1 \text{ かつ } \begin{array}{ccc} \Delta^{n_\lambda} & \xrightarrow{\sigma_\lambda} & X \\ \varepsilon_{n_\lambda}^i \uparrow & & \uparrow \sigma_l \\ \Delta^{n_\lambda-1} & \xrightarrow{\rho_*} & \Delta^{n_l} \end{array}$$

- (iii) 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\overline{\sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda})} = \sigma_\lambda(\Delta^{n_\lambda})$  である。但し、 $\overline{\sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda})}$  は  $\sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda})$  の閉包を表わす。
- (iv)  $\lambda, \nu \in \Lambda, \lambda \neq \nu \implies \sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda}) \cap \sigma_\nu(\text{Int } \Delta^{n_\nu}) = \emptyset$ .
- (v)  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda(\text{Int } \Delta^{n_\lambda})$ .

$X$  の特異単体分割  $K$  の特異 0-単体を  $K$  の頂点という。単体分割可能な任意の連結な閉多様体  $M$  は頂点がただ 1 つからなるような特異単体分割を持つ。

∴)

$(K, t)$  を  $M$  の単体分割とし、  $K$  の最大木  $T$  を 1 つ選ぶ。ここで、  $T$  が  $K$  の**最大木** であるとは、  $K$  のすべての頂点を含む  $K$  の 1 次元部分複体であって、  $|T|$  が可縮なものをいう。  $M$  は連結なので、このような  $T$  は存在する。このとき、  $K$  の単体を最大木  $T$  に沿って 1 点につぶすと、頂点が唯一の  $M$  の特異単体分割が得られる。  $\square$

$M$  を向きづけられた閉 3 次元多様体とする。  $M$  の特異単体分割  $(K, t)$  から Dijkgraaf-Witten 不変量を計算するには以下のようにすればよい。

$K$  の特異 1-単体の全体を単体複体のときと同様に  $K^{(1)}$  で表わす。  $\rho : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  を  $\rho(0) = 1, \rho(1) = 0$  なる全単射とする。

$$\text{Edge}(K) := K^{(1)} \cup \{e \circ \rho_* \mid e \in K^{(1)}\}$$

とおく。  $K$  のカラーとは写像  $\varphi : \text{Edge}(K) \rightarrow G$  であって、次の 2 条件を満たすものをいう：

- ①  $K$  に属する任意の特異 2-単体  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow M$  に対して、

$$\varphi(\sigma \circ \varepsilon_2^0) = g, \varphi(\sigma \circ \varepsilon_2^2) = h \implies \varphi(\sigma \circ \varepsilon_2^1) = gh.$$

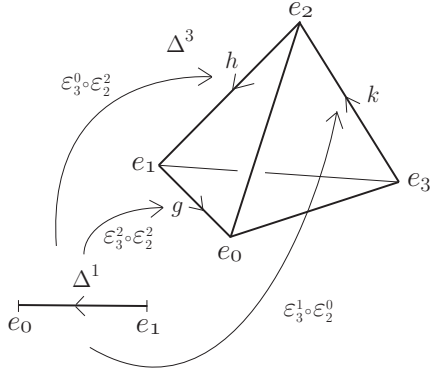
- ②  $e \in \text{Edge}(K) \implies \varphi(e \circ \rho_*) = \varphi(e)^{-1}$ .

$K$  のカラー全体を  $\text{Col}(K)$  で表わす。  $K$  に属する各特異 1-単体に向きを指定し、条件「  $K$  に属する任意の特異 2-単体において、その境界上の 3 つの特異 1-単体の向きが巡回的でない」が満たされるようにしておく。このとき、  $K$  に属する各特異 3-単体  $\sigma : \Delta^3 \rightarrow M$  に対して、次の条件を満たす全単射  $\rho : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  が一意的に存在する： $0 \leq i < j \leq 3$  を満たす任意の  $i, j$  に対して  $(\sigma \circ \rho_*)(\langle e_i, e_j \rangle)$  が  $K$  の特異 1-単体に指定されている向きと一致する。

標準 3-単体  $\Delta^3 = |e_0e_1e_2e_3|$  に  $\langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle$  により向きを入れる。このとき、 $\epsilon_\sigma \in \{\pm 1\}$  を

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & (\sigma \circ \rho_*|_{\text{Int } \Delta^3} \text{ が向きを保つとき}), \\ -1 & (\sigma \circ \rho_*|_{\text{Int } \Delta^3} \text{ が向きを保たないとき}) \end{cases}$$

によって定める。



さらに、 $W(\sigma, \varphi) \in U(1)$  を  $g := \varphi(\sigma \circ \rho_* \circ \epsilon_3^2 \circ \epsilon_2^1)$ ,  $h := \varphi(\sigma \circ \rho_* \circ \epsilon_3^0 \circ \epsilon_2^2)$ ,  $k := \varphi(\sigma \circ \rho_* \circ \epsilon_3^1 \circ \epsilon_2^0)$  とおくと、 $W(\sigma, \varphi) = \alpha(g, h, k)^{\epsilon_\sigma}$  によって定義する。このとき、 $M$  の Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z_{G,\alpha}(M)$  は次式で与えられる：

$$Z_{G,\alpha}(M) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K)} \prod_{\sigma \in K^{(3)}} W(\sigma, \varphi).$$

ここで、 $a$  は  $K$  の頂点の個数である。以下、この公式を使って、基本的ないくつかの閉 3 次元多様

体の Dijkgraaf-Witten 不変量を計算する。

### §5-3. 3 次元球面 $S^3$ の Dijkgraaf-Witten 不変量

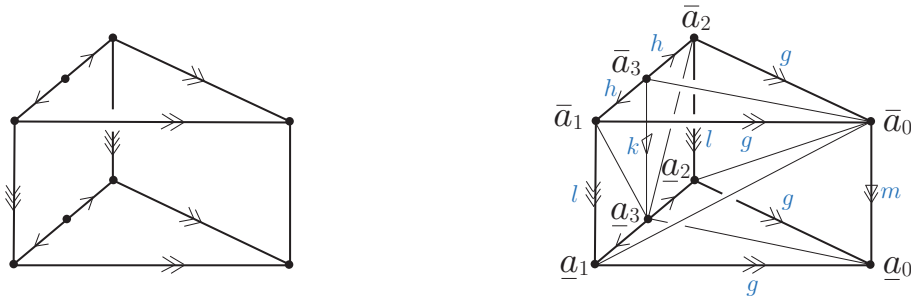
任意の有限群  $G$  と任意の正規化された 3-コサイクル  $\alpha \in Z^3(G, U(1))$  に対して

$$Z_{G,\alpha}(S^3) = \frac{1}{|G|}$$

となる。これは  $S^3$  の単体分割として  $K(\partial\Delta^4)$  を使って簡単に計算される。

### §5-4. $S^2 \times S^1$ の Dijkgraaf-Witten 不変量

$S^2 \times S^1$  は下図左のようにして  $\Delta^2 \times [0, 1]$  の等化空間とみなされる。



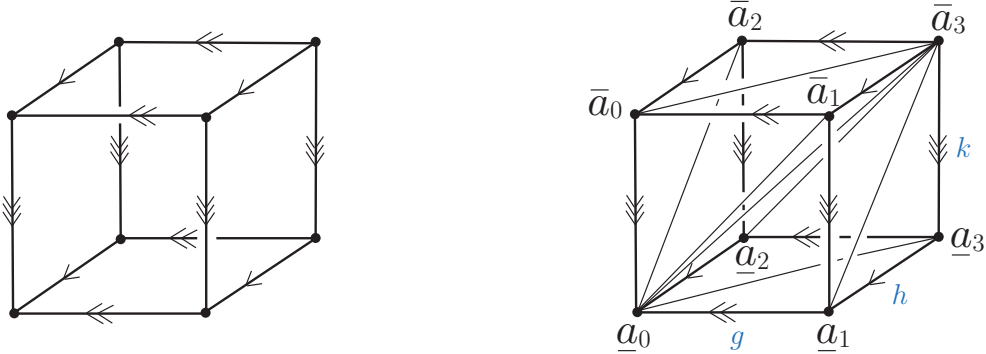
$a_0, a_1, a_2, a_3, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  を  $\Delta^2 \times [0, 1]$  の頂点とする。上図右で与えられた  $S^2 \times S^1$  の特異単体分割  $K$  について、 $K$  のカラー  $\varphi$  は  $\varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle a_3, \bar{a}_3 \rangle)$  の値によって一意に決まる。 $g = \varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle a_3, \bar{a}_3 \rangle)$  とおき、 $\langle a_0, \bar{a}_0, a_1, a_3 \rangle$  が  $S^2 \times S^1$  の向きと同調していると仮定すると、 $S^2 \times S^1$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は次のようになることがわかる：

$$Z_{G,\alpha}(S^2 \times S^1) = \frac{1}{|G|^3} \sum_{g,h,k \in G} \frac{\alpha(m, gl^{-1}, h)\alpha(gl^{-1}, l, hk^{-1})\alpha(g, hk^{-1}, k)}{\alpha(m, gl^{-1}, h)\alpha(gl^{-1}, l, hk^{-1})\alpha(g, hk^{-1}, k)} = \frac{1}{|G|^3} \sum_{g,h,k \in G} 1 = 1.$$

注： $l = \varphi(\langle a_1, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $m = \varphi(\langle a_0, \bar{a}_0 \rangle)$  としている。カラー条件から、 $lh = hk$ ,  $gl = mg$  でなければならない。

§5-5. 3次元トーラス  $S^1 \times S^1 \times S^1$  の Dijkgraaf-Witten 不変量

$S^1 \times S^1 \times S^1$  は下図左のように  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  の等化空間とみされる。

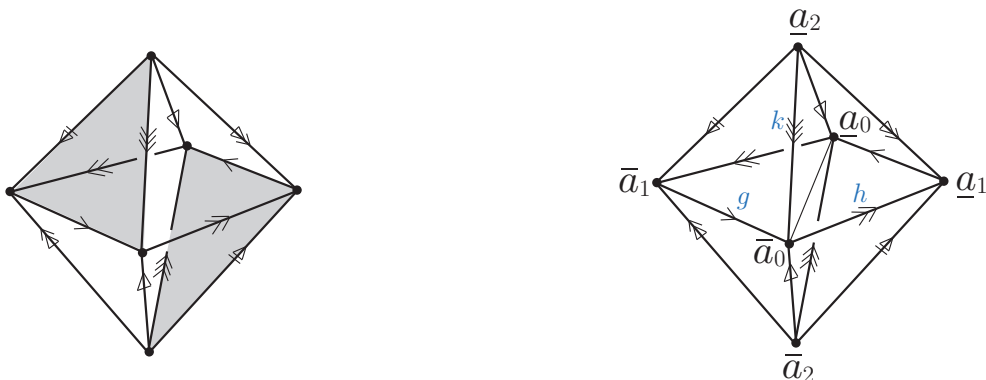


$\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  を  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  の頂点とする。上図右で与えられた  $S^2 \times S^1$  の特異単体分割  $K$  について、 $K$  のカラー  $\varphi$  は  $\varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle \underline{a}_3, \bar{a}_3 \rangle)$  の値によって一意的に決まる。そこで、 $g = \varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_3 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle \underline{a}_3, \bar{a}_3 \rangle)$  とおくと、カラー条件により、これらは互いに可換でなければならない。 $\langle \underline{a}_0, \bar{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_1 \rangle$  が  $S^1 \times S^1 \times S^1$  の向きと同調していると仮定すると、 $S^1 \times S^1 \times S^1$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は次のようになることがわかる：

$$(5.1) \quad Z_{G,\alpha}(S^1 \times S^1 \times S^1) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g,h,k \in G \\ [g,h]=[h,k]=[k,g]=1}} \frac{\alpha(g,h,k)\alpha(h,k,g)\alpha(k,g,h)}{\alpha(g,k,h)\alpha(h,g,k)\alpha(k,h,g)}.$$

§5-6. 3次元実射影空間  $RP^3$  の Dijkgraaf-Witten 不変量

$RP^3$  は 3次元球体  $D^3$  からその表面の  $S^2$  上の対蹠点を同一視することによって得られる等化空間(に同相)である。したがって、 $RP^3$  は下図左のように正8面体の対蹠的な位置にある面同士を同一視することによって得られる等化空間とみなされる。



$\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$  を正8面体の上図右のように与えられる頂点とする。上図右で与えられた  $RP^3$  の特異単体分割  $K$  について、 $K$  のカラー  $\varphi$  は  $\varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_0 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle \bar{a}_0, \underline{a}_2 \rangle)$  の値によって一意的に決まる。そこで、 $g = \varphi(\langle \bar{a}_0, \bar{a}_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_0 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle \bar{a}_0, \underline{a}_2 \rangle)$  とおくと、カラー条件から、 $(gh)^2 = 1$  が成立していなければならない。 $\langle \underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_0, \underline{a}_2 \rangle$  が  $RP^3$  の

向きと同調していると仮定すると、 $\mathbb{RP}^3$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は次のようになることがわかる：

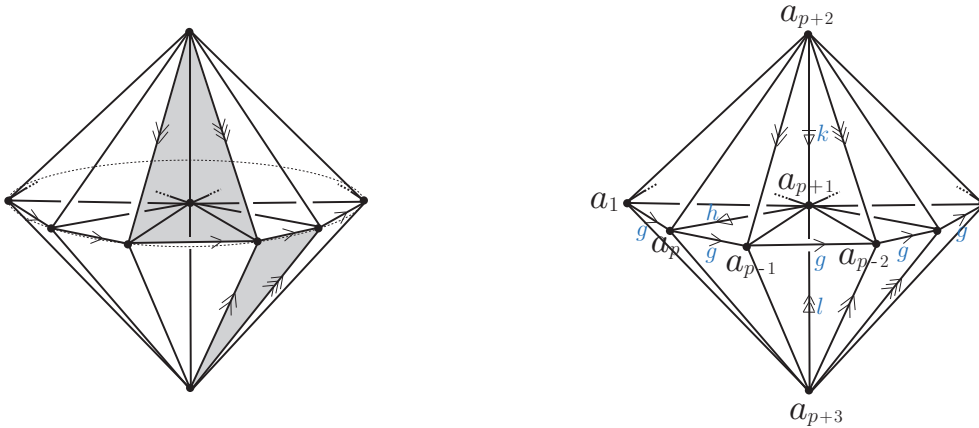
$$(5.2) \quad Z_{G,\alpha}(\mathbb{RP}^3) = \frac{1}{|G|^3} \sum_{\substack{g,h,k \in G \\ (gh)^2=1}} \frac{\alpha(g,h,k)^2}{\alpha(g,h,ghk)^2}.$$

### §5-7. レンズ空間 $L(p, 1)$ の Dijkgraaf-Witten 不変量

レンズ空間  $L(p, 1)$  は 3 次元球体  $\mathbb{D}^3$  に次のような同値関係  $\sim$  を入れた場合の等化空間 (に同相) である。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{D}^3$  に対して

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ または } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2 \text{ かつ} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} & \sin \frac{2\pi}{p} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & (x_3 \geq 0 \text{ のとき}) \text{ または} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} & \sin \frac{2\pi}{p} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & (x_3 \leq 0 \text{ のとき}) \end{array} \right. \end{cases}$$

これより、 $L(p, 1)$  は、次図左のような正  $p$  二重角錐において、各“上半球”の面を  $z$ -軸を中心に  $\frac{2\pi}{p}$  だけ回転させてから  $xy$ -平面に関して対称移動させた位置にある“下半球”の面と同一視することによって得られる等化空間に同相である。



上図右で与えられた  $L(p, 1)$  の特異単体分割  $K$  について、 $K$  のカラー  $\varphi$  は  $\varphi(\langle a_1, a_2 \rangle)$ ,  $\varphi(\langle a_p, a_{p+1} \rangle)$ ,  $\varphi(\langle a_{p+1}, a_{p+2} \rangle)$  の値によって一意に決まる。そこで、 $g = \varphi(\langle a_1, a_2 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle a_p, a_{p+1} \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle a_{p+1}, a_{p+2} \rangle)$  とおく。カラー条件から、 $g^{p-1}h = g^{-1}h$ , すなわち、 $g^p = 1$  が成立していなければならない ( $\because \varphi(\langle a_1, a_{p+1} \rangle)$  の値を考察せよ)。また、 $l = \varphi(\langle a_{p+1}, a_{p+3} \rangle)$  とおくと、 $k = h^{-1}ghl$  が成り立つ ( $\because \varphi(\langle a_{p-1}, a_{p+2} \rangle) = (gh)k$ ,  $\varphi(\langle a_{p-2}, a_{p+3} \rangle) = (g^2h)l$  であり、等化空間において  $\langle a_{p-1}, a_{p+2} \rangle = \langle a_{p-2}, a_{p+3} \rangle$  であるから、 $ghk = g^2hl$  が成り立つ)。今、 $\langle a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} \rangle$  が  $L(p, 1)$  の向きと同調していると仮定すると、 $L(p, 1)$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は次のようになることがわかる：

$$(5.3) \quad Z_{G,\alpha}(L(p, 1)) = \frac{1}{|G|^3} \sum_{\substack{g,h,l \in G \\ g^p=1}} \frac{\alpha(g,h,k)\alpha(g,gh,k) \cdots \alpha(g,g^{p-2}h,k)\alpha(g,g^{p-1}h,k)}{\alpha(g,h,l)\alpha(g,gh,l) \cdots \alpha(g,g^{p-2}h,l)\alpha(g,g^{p-1}h,l)}.$$

但し、 $k = h^{-1}ghl$  である。

**注意 5-4** [34; p.689] で与えられている公式は正しくない。このことは蒲谷祐一氏の指摘で判明した [17]。問題なのは、 $\sigma = |a_1 a_p a_{p+1} a_{p+2}|$  および  $\sigma' = |a_1 a_p a_{p+1} a_{p+3}|$  に対する  $W(\sigma, \varphi)$  および  $W(\sigma', \varphi)$  の計算である。[34; p.689] では“頂点に全順序”を入れて計算したために、 $W(\sigma, \varphi) = \alpha(g^{-1}, h, k)^{-1}$ ,  $W(\sigma', \varphi) = \alpha(g^{-1}, h, l)$  になっている。一方、辺の向きから定まる局所順序を用いて計算すると、(5.3) のように、 $W(\sigma, \varphi) = \alpha(g, g^{p-1}h, k)$ ,  $W(\sigma', \varphi) = \alpha(g, g^{p-1}h, l)^{-1}$  となる。一般に、 $\alpha(g^{-1}, h, k)^{-1} \neq \alpha(g, g^{-1}h, k) = \alpha(g, g^{p-1}h, k)$  なので (第1節参照)、[34; p.689] と上で与えた公式 (5.3) は ( $g^p = 1$  が抜けていたり、Fig.6 において  $p+1$  と  $p-1$  が入れ替わっているというタイプミスを別にしても)、一致しない。彼は、別の不変量の計算から、レンズ空間  $L(p, 1)$  の  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  の場合の Dijkgraaf-Witten 不変量が (5.3) のようになるはずであることを確信し、そのことを知らせてくれた [17]。彼は  $p$  が小さい値の場合に、[34] で与えられている公式と上で与えた公式 (5.3) の2つを計算し、両者が異なる値を持つことを具体的な数値で示してくれた。

上記のような間違いが生じた原因は、特異単体分割を用いているにもかかわらず、(同一視をする前の) 頂点集合に全順序を入れて計算したことから生じている。こういった点からも、頂点集合に全順序を入れるのではなく、各 2-単体のまわりで巡回的にならないような向きを各辺に与えることが、不変量の定式化において本質的かつ有効であると思う。

$G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  および  $\alpha$  が例 1-5 で与えられている正規化された 3-コサイクルの場合に、公式 (5.3) を具体的に計算してみよう。

$pg = 0$  となる  $g \in G$  を 1 つ固定し、 $h, l \in G$  に対して

$$I(g) := \sum_{h, l \in G} \frac{\alpha(g, h, g+l)\alpha(g, g+h, g+l) \cdots \alpha(g, (p-2)g+h, g+l)\alpha(g, (p-1)g+h, g+l)}{\alpha(g, h, l)\alpha(g, g+h, l) \cdots \alpha(g, (p-2)g+h, l)\alpha(g, (p-1)g+h, l)}$$

とおく。

$$Z_{G, \alpha}(L(p, 1)) = \frac{1}{m^3} \sum_{\substack{g \in G \\ pg=0}} I(g)$$

である。 $x, y \in G$  に対して

$$[x, y] := \bar{x} + \bar{y} - \overline{x+y}$$

とおく。

$$\begin{aligned} & [h, g+l] + [g+h, g+l] + \cdots + [(p-1)g+h, g+l] - [h, l] - [g+h, l] - \cdots - [(p-1)g+h, l] \\ &= \overline{pg+l} - \bar{p}l + \overline{h+l} - \overline{pg+h+l} \end{aligned}$$

であるから、

$$I(g) = \sum_{h, l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{m^2} \bar{g}(\overline{pg+l} - \bar{p}l + \overline{h+l} - \overline{pg+h+l})\right)$$

である。

以下では、 $m = p$  の場合を考える。この場合の Dijkgraaf-Witten 不変量の値は蒲谷氏によって正確に計算されている [17, 18]。まず、

$$I(g) = \sum_{h, l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{m^2} \bar{g}(\overline{pg+l} - \bar{p}l)\right) = m \sum_{l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \bar{g}(\overline{g+l} - \bar{l})\right)$$

となる。したがって、

$$Z_{G,\alpha}(L(p,1)) = \frac{1}{m^2} \sum_{\substack{g \in G \\ pg=0}} \sum_{l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \overline{g}(g+l-\bar{l})\right) = \frac{1}{p^2} \sum_{g,l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \overline{g}(g+l-\bar{l})\right)$$

である。ここで、任意の  $g = [\bar{g}]$ ,  $l = [\bar{l}] \in G$  ( $0 \leq \bar{g}, \bar{l} < p$ ) に対して

$$\begin{aligned} \overline{g+l-\bar{l}} &= \begin{cases} \bar{g} & (\bar{g} + \bar{l} < p \text{ のとき}), \\ (\bar{g} + \bar{l} - p) - \bar{l} = \bar{g} - p & (\bar{g} + \bar{l} \geq p \text{ のとき}) \end{cases} \\ &\equiv \bar{g} \pmod{p} \end{aligned}$$

であることに注意すると、

$$Z_{G,\alpha}(L(p,1)) = \frac{1}{p^2} \sum_{g,l \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \overline{g}^2\right) = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} g^2\right)$$

と書き換えられることがわかる。

蒲谷氏 [17,18] はまた、 $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  で、 $\alpha$  が例 1-5 で与えられている場合にレンズ空間  $L(p,q)$  の Dijkgraaf-Witten 不変量の値を求めている。

**注意 5-5** [34; p.690] で与えられている、 $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  で  $m = p - 1$  の場合の  $Z(L(p,1))$  の公式は、間違った公式 [34; p.689] に基づいて作られているため、完全に正しくない。 $g^p = 1$  という条件を見落として計算していることがその要因だと思う。

**注意 5-6** 上記の計算例のほか、 $G$  が巡回群の場合の Dijkgraaf-Witten 不変量については、[21] により、枠付き絡み目の絡み目行列とガウス和を用いた公式が古くから知られている。最近では、野坂氏により、Brieskorn 多様体  $\Sigma(m,l,n)$  に対する Dijkgraaf-Witten 不変量の公式 (但し、不変量の値が有限体で、 $G$  が Alexander カンドル  $X$  に由来するもの) が与えられている [22; Corollary 3.3] ([15; Example 5.12] も参照)。

## §6. Dijkgraaf-Witten TQFT の構成

Dijkgraaf-Witten 不変量はその構成方法から、Turaev-Viro 不変量 [31] と同様に、 $(2+1)$ -次元位相的量子場の理論の枠組みの中で捉えたほうがよい。ここでは、その見方を説明する。

### §6-1. $(2+1)$ -次元位相的量子場の理論の公理系

Atiyah [3] による  $(2+1)$ -次元位相的量子場の理論の公理を述べよう。

$M$  を向きづけられたコンパクトな 3次元多様体とし、 $\Sigma_1, \Sigma_2$  を向きづけられた閉曲面 ( $\Sigma_i = \phi$ ,  $i = 1, 2$  となることも許す) とする。3つ組  $W = (M; \Sigma_1, \Sigma_2)$  が **3次元コボルディズム** であるとは、

- (i)  $\partial M = (-\Sigma_1) \cup \Sigma_2$  (向きを込めて)
- (ii)  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi$

となるときをいう。ここで、 $-\Sigma_1$  は  $\Sigma_1$  の向きを変えて得られる向きづけられた閉曲面を表わしている (空集合  $\phi$  を閉曲面と考えるときには、唯一の向きをもった向きづけられた閉曲面と考える)。

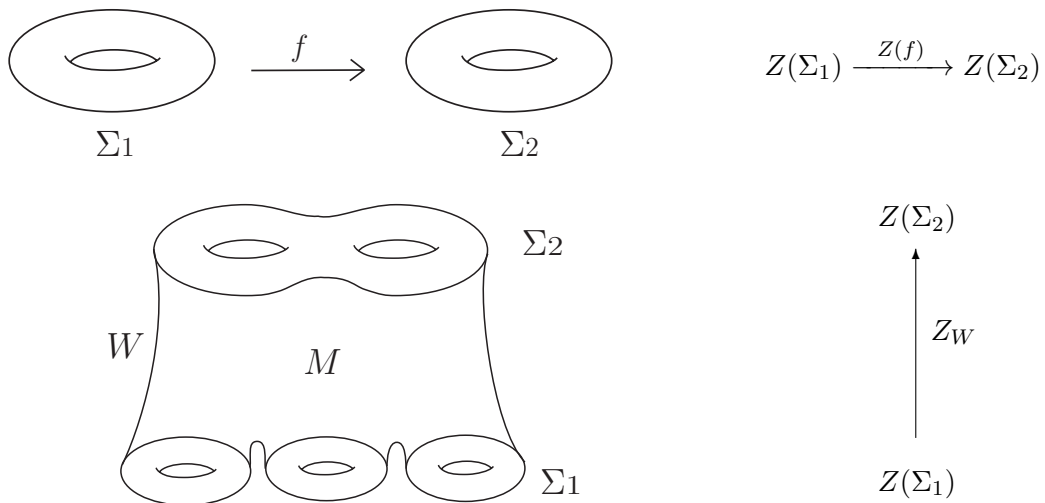
**(2 + 1) 次元位相的量子場の理論の公理** ([3], [30; Chapter 3])

$Z$  を次の 3 つの対応規則の総称とする。

- ①  $Z$  は向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  に対して、 $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間  $Z(\Sigma)$  を対応させる。
- ②  $Z$  は向きづけられた閉曲面の間の向きを保つ同相写像  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  に対して、線形同型写像  $Z(f) : Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$  を対応させる。
- ③ 3次元コボルディズム  $W = (M; \Sigma_1, \Sigma_2)$  に対して、線形写像  $Z_W : Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$  を対応させる。

$Z$  が (2 + 1) 次元位相的量子場の理論 (TQFT) であるとは、以下の公理が満たされるときをいう。

- (A0)  $Z$  は向きづけられた閉曲面を対象とし、それらの間の向きを保つ同相写像を射とする圏から、 $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間を対象とし、それらの間の線形写像と射とする圏への共変関手である。すなわち、
  - (a) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  上の恒等写像  $\text{id}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  に対して、 $Z(\text{id}_\Sigma) = \text{id}_{Z(\Sigma)}$  となる。
  - (b)  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  と  $g : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$  を向きづけられた閉曲面の間の向きを保つ 2 つの同相写像とすると、 $Z(g \circ f) = Z(g) \circ Z(f)$  となる。





- (A1) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  上の恒等コボルディズム  $\text{id}_\Sigma = (\Sigma \times [0, 1]; \Sigma \times \{0\}, \Sigma \times \{1\})$  に対して、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} Z(\Sigma \times \{0\}) & \xrightarrow{Z_{\text{id}_\Sigma}} & Z(\Sigma \times \{1\}) \\ Z(i_0) \uparrow & & \uparrow Z(i_1) \\ Z(\Sigma) & \xrightarrow{\text{id}_{Z(\Sigma)}} & Z(\Sigma) \end{array}$$

但し、 $i_t : \Sigma \rightarrow \Sigma \times \{t\}$ ,  $x \mapsto (x, t)$ ,  $t = 0, 1$  である。

- (A2)  $W_1 = (M; \Sigma_1, \Sigma_2)$  と  $W_2 = (N; \Sigma'_2, \Sigma_3)$  を向きづけられた閉曲面の間の2つのコボルディズムとし、 $f : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma'_2$  を向きを保つ同相写像とする。このとき、 $W_1$  と  $W_2$  を  $f$  で貼り合わせて得られるコボルディズム  $W := (M \cup_f N; \Sigma_1, \Sigma_3)$  について、

$$Z_W = Z_{W_2} \circ Z(f) \circ Z_{W_1}$$

が成り立つ。

- (A3) 空集合  $\phi$  を閉曲面とみなす。このとき、線形同型写像

$$\iota : Z(\phi) \rightarrow \mathbb{C}$$

が存在する。

- (A4) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  を共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の和集合で表わすとき、“自然な”線形同型写像

$$\Phi_{\Sigma_1, \Sigma_2} : Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) \rightarrow Z(\Sigma)$$

が存在する。すなわち、

- (a) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  が共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の和集合で表されていて、向きづけられた閉曲面  $\Sigma'$  が共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma'_1$  と  $\Sigma'_2$  の和集合で表されているとする。 $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  を向きを保つ同相写像で、 $f(\Sigma_i) = \Sigma'_i$  ( $i = 1, 2$ ) を満たしているとする。 $f_i := f|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma'_i$  ( $i = 1, 2$ ) とおくと、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) & \xrightarrow{Z(f_1) \otimes Z(f_2)} & Z(\Sigma'_1) \otimes Z(\Sigma'_2) \\ \Phi_{\Sigma_1, \Sigma_2} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\Sigma'_1, \Sigma'_2} \\ Z(\Sigma) & \xrightarrow{Z(f)} & Z(\Sigma') \end{array}$$

- (b) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  が共通部分のない3つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  の和集合で表されてるとき、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccccc} (Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)) \otimes Z(\Sigma_3) & \xrightarrow{\Phi \otimes \text{id}} & Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \otimes Z(\Sigma_3) & \xrightarrow{\Phi} & Z((\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cup \Sigma_3) \\ a \downarrow & & & & \parallel \\ Z(\Sigma_1) \otimes (Z(\Sigma_2) \otimes Z(\Sigma_3)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi} & Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2 \cup \Sigma_3) & \xrightarrow{\Phi} & Z(\Sigma_1 \cup (\Sigma_2 \cup \Sigma_3)) \end{array}$$

但し、 $a$  は通常のベクトル空間の間の同型写像である。

(c) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  に対し、次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes Z(\Sigma) & \xrightarrow{\iota^{-1} \otimes \text{id}} & Z(\phi) \otimes Z(\Sigma) & & Z(\Sigma) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \iota^{-1}} & Z(\Sigma) \otimes Z(\phi) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \Phi & & \downarrow r & & \downarrow \Phi \\ Z(\Sigma) & \xlongequal{\quad} & Z(\phi \cup \Sigma) & & Z(\Sigma) & \xlongequal{\quad} & Z(\Sigma \cup \phi) \end{array}$$

但し、 $\iota, r$  は通常のベクトル空間の間の同型写像である。

(d) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  を共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の和集合であらわすとき、次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) & \xrightarrow{\Phi} & Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \\ \downarrow c & & \parallel \\ Z(\Sigma_2) \otimes Z(\Sigma_1) & \xrightarrow[\Phi]{} & Z(\Sigma_2 \cup \Sigma_1) \end{array}$$

但し、 $c$  は通常のベクトル空間の間の同型写像である。

(A5) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  に対して、その向きを変えて得られる閉曲面を  $-\Sigma$  と書く。このとき、“自然な”線形同型写像

$$\theta_\Sigma : Z(-\Sigma) \longrightarrow Z(\Sigma)^*$$

が存在する。すなわち、

(a) 向きづけられた閉曲面の間の向きを保つ同相写像  $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$  に対して、 $f$  を逆の向きを持った閉曲面の間の同相写像とみなしたものを  $-f : -\Sigma \longrightarrow -\Sigma'$  と書く。このとき、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(-\Sigma) & \xrightarrow{Z(-f)} & Z(-\Sigma') \\ \theta_\Sigma \downarrow & & \downarrow \theta_{\Sigma'} \\ Z(\Sigma)^* & \xleftarrow[tZ(f)]{} & Z(\Sigma')^* \end{array}$$

(b) 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  が共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の和集合で表されていて、向きづけられた閉曲面  $\Sigma'$  が共通部分のない2つの向きづけられた閉曲面  $\Sigma'_1$  と  $\Sigma'_2$  の和集合で表されているとする。このとき、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(-(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)) & \xrightarrow{\theta_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}} & Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \\ \Phi_{-\Sigma_1, -\Sigma_2} \downarrow & & \uparrow {}^t\Phi_{\Sigma_1, \Sigma_2} \\ Z(-\Sigma_1) \otimes Z(-\Sigma_2) & \xrightarrow{\theta_{\Sigma_1} \otimes \theta_{\Sigma_2}} & Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2)^* \cong (Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2))^* \end{array}$$

(c)  $\theta_\phi : Z(-\phi) \longrightarrow Z(\phi)^*$  について次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(-\phi) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C} \\ \theta_\phi \downarrow & & \downarrow \\ Z(\phi)^* & \xleftarrow[t_{\iota^{-1}}]{} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

但し、上の図式における右側縦の写像は、 $1 \in \mathbb{C}$  に対して  $\alpha : 1 \longmapsto 1$  となる線形形式  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  を対応させる線形同型写像である。

(A6)  $W = (M, \Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $W' = (M', \Sigma'_1, \Sigma'_2)$  を2つの3次元コボルディズムとする。 $W, W'$  が同型である、すなわち、向きを保つ同相写像  $h : M \rightarrow M'$  であって、 $h(\Sigma_i) = \Sigma'_i$  ( $i = 1, 2$ ) となるものが存在するならば、 $h_1 := -h|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma'_1$ ,  $h_2 := h|_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma'_2$  とおくと、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} Z(\Sigma_1) & \xrightarrow{Z(h_1)} & Z(\Sigma'_1) \\ Z_W \downarrow & & \downarrow Z_{W'} \\ Z(\Sigma_2) & \xrightarrow{Z(h_2)} & Z(\Sigma'_2) \end{array}$$

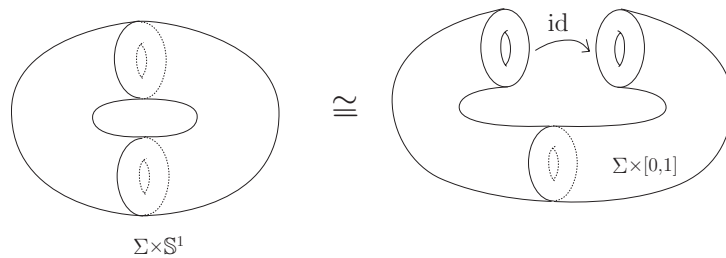
**注意 1°** : 正確さを少し欠いた表現になるが、公理 (A1) から公理 (A5) は次のように述べることができる：「 $Z$  は向きづけられた閉曲面を対象とし、それらの間の3次元コボルディズムを射とするモノイダル圏から、 $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間を対象とし、それらの間の線形写像と射とするモノイダル圏へのモノイダル共変関手である。」

**注意 2°** :  $M$  を向きづけられた閉3次元多様体とする。このとき、複素数  $Z(M) \in \mathbb{C}$  を次のように定義することができる。まず、コボルディズム  $W = (M; \phi, \phi)$  を考える。すると、線形写像の合成

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\iota^{-1}} Z(\phi) \xrightarrow{Z_W} Z(\phi) \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}$$

を考えることができる。この線形写像による1の像を  $Z(M)$  と書く。TQFT の公理 (A6) により、 $Z(M)$  は  $M$  の位相不変量である。

**注意 3°** : 向きづけられた閉曲面  $\Sigma$  に対して、 $\dim Z(\Sigma) = Z(\Sigma \times \mathbb{S}^1)$  が成り立つ。この等式は  $\Sigma \times \mathbb{S}^1$  をコボルディズム  $W_1 = (\Sigma \times [0, 1]; \phi, \Sigma_0 \cup \Sigma_1)$  と  $W_2 = ((-\Sigma) \times [0, 1]; -(\Sigma_0 \cup \Sigma_1), \phi)$  との合成とみなして、貼り合わせ公理 (A2) を適用すると得られる。但し、 $t = 0, 1$  に対して  $\Sigma_t = \Sigma \times \{t\}$  としている。



## §6-2. Dijkgraaf-Witten TQFT の構成

Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z_{G,\alpha}$  が  $(2+1)$  次元位相的量子場の理論の公理を満たすことを説明しよう。但し、位相的量子場の理論を

- 向きづけられた2次元組合わせ多様体 (=このノートでは、これを組合わせ閉曲面と呼ぶ)、
- それらの間の向きを保つ PL 同相写像、
- 境界が2次元組合わせ多様体であるような3次元コボルディズム

という状況 (単体的位相的量子場の理論) で考える。

論文 [34] では Turaev と Viro の論文 [31] を真似て  $Z_{G,\alpha}$  を構成したが、ここでは、圏論的により洗練された Yetter [43] の構成法—余極限構成—を用いる。

**局所順序複体つき閉曲面**とは、向き付けられた閉曲面  $\Sigma$  と局所順序複体  $K$  との組  $(\Sigma, K)$  であって、 $|K| = \Sigma$  が満たされるものをいう。したがって、 $\Sigma$  は多面体として実現されていなければならない。

①  $(\Sigma, K)$  を局所順序複体つき閉曲面とする。このとき、 $K$  のカラーによって  $\mathbb{C}$  上自由に張られるベクトル空間を  $V(\Sigma; K)$  という記号で表わす。もし、 $\Sigma = \phi$  ならば、 $V(\Sigma; K) := \mathbb{C}$  と約束する。

② 局所順序複体つき閉曲面の間の同型写像  $f : (\Sigma_1, K_1) \rightarrow (\Sigma_2, K_2)$  に対して、 $\mathbb{C}$ -線形同型写像  $\Phi(f) : V(\Sigma_1; K_1) \rightarrow V(\Sigma_2; K_2)$  を

$$\Phi(f)(\xi_1) = \xi_1 \circ f^{-1}, \quad \xi_1 \in \text{Col}(K_1)$$

によって定義する。但し、 $\xi_1 \circ f^{-1}$  は各  $E \in \text{Edge}(K_2)$  に対して  $(\xi_1 \circ f^{-1})(E) = \xi_1(f^{-1}(E))$  によって定義される  $K_2$  のカラーを表わす。

③ 局所順序単体コボルディズムの概念を導入する。 $M$  をコンパクトで、向きづけられた 3 次元多様体で、その境界  $\partial M$  が多面体になっているものとする。 $(\Sigma_i, K_i)$  ( $i = 1, 2$ ) を局所順序複体つき閉曲面とする。3 つ組  $W = (M; K_1, K_2)$  が**局所順序単体コボルディズム**であるとは、

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi, \quad (-\Sigma_1) \cup \Sigma_2 = \partial M$$

が満たされるときをいう。局所順序単体コボルディズム  $W = (M; K_1, K_2)$  に対して、 $\mathbb{C}$ -線形写像  $\Phi_W : V(\Sigma_1, K_1) \rightarrow V(\Sigma_2, K_2)$  を任意の  $\lambda \in \text{Col}(K_1)$  に対して

$$\Phi_W(\lambda) = \sum_{\mu \in \text{Col}(K_2)} Z_{G, \alpha}(M; \lambda \sqcup \mu) \mu$$

となるように定義する。次の補題は Dijkgraaf-Witten 不変量の定義から直ちに従う。

**補題 6-1**  $W = (M; K_1, K_2)$  を局所順序単体コボルディズムとする。 $M$  をその内部に含まれる閉曲面  $\Sigma \subset \text{Int}M$  で切り開く (但し、 $\Sigma$  はある局所順序複体  $K$  の実現とする) と、 $M_1 \cup M_2 = M$ ,  $M_1 \cap M_2 = \Sigma$  となるような 2 つの局所順序単体コボルディズム  $W_1 = (M_1; K_1, K)$  と  $W_2 = (M_2; K, K_2)$  が得られる。このとき、 $\Phi_W = \Phi_{W_2} \circ \Phi_{W_1}$  が成り立つ。

2 つの局所順序単体コボルディズム  $W_1 = (M; K_1, K_2)$  と  $W_2 = (N; L_1, L_2)$  が同型であるとは、向きを保つ PL 同相写像  $h : M \rightarrow N$  であって次の条件を満たすものが存在するときをいう：

- (i) 各  $i = 1, 2$  に対して  $h(|K_i|) = |L_i|$ .
- (ii) 制限写像  $h|_{|K_i|}$  が  $K_i$  から  $L_i$  への局所順序複体としての同型。

次の補題も Dijkgraaf-Witten 不変量の定義から直ちに従う。

**補題 6-2** (1) 局所順序単体コボルディズム  $W = (M; K_1, K_2)$  に対して局所順序単体コボルディズム  ${}^hW := (-M; K_2, K_1)$  を考える。このとき、任意の  $\lambda \in \text{Col}(K_1)$  と任意の  $\mu \in \text{Col}(K_2)$  に対して次の等式が成り立つ：

$$Z(-M; \mu \sqcup \lambda) = \overline{Z(M; \lambda \sqcup \mu)}.$$

(2) 局所順序単体コボルディズム  $W = (M; T_1, T_2)$  が、共通部分を持たない2つの局所順序単体コボルディズム  $W_1 = (M_1; K_1, K_2)$  と  $W_2 = (M_2; L_1, L_2)$  の和集合として書けているとする。すなわち、 $M_1 \cap M_2 = \phi$ ,  $M = M_1 \cup M_2$ ,  $T_i = K_i \cup L_i$  ( $i = 1, 2$ ) であるとする。 $T_i$  のカラーは  $K_i$  のカラー  $\lambda_i$  と  $L_i$  のカラー  $\mu_i$  との組  $(\lambda_i, \mu_i)$  を与えることによって定まる。この組  $(\lambda_i, \mu_i)$  によって定まる  $T_i$  のカラーを  $\lambda_i \otimes \mu_i$  と書く。このとき、次の等式が成り立つ：

$$Z(M; \lambda_1 \otimes \lambda_2 \sqcup \mu_1 \otimes \mu_2) = Z(M_1; \lambda_1 \sqcup \mu_1)Z(M_2; \lambda_2 \sqcup \mu_2).$$

(3)  $(\Sigma, K)$  を局所順序複体つき閉曲面とする。このとき、任意の  $\lambda, \mu \in \text{Col}(K)$  に対して、

$$Z(\Sigma \times [0, 1]; \lambda_0 \sqcup \mu_1) = Z(-\Sigma \times [0, 1]; \mu_0 \sqcup \lambda_1) = \overline{Z(\Sigma \times [0, 1]; \mu_0 \sqcup \lambda_1)}$$

が成り立つ。但し、局所順序複体  $K$  と  $t \in [0, 1]$  に対して、 $K$  のカラー  $\lambda$  に対応する局所順序複体  $K \times \{t\}$  のカラーを  $\lambda_t$  で書き表わしている。

$(\Sigma, K)$  を局所順序複体つき閉曲面とする。 $K'$  を  $K$  から有限回の星状細分によって得られる局所順序複体とする。ここで、有限回の中には0回も含める。また、 $K'$  への局所順序は  $K$  に与えられている局所順序と無関係のものでよい。このとき、 $K'$  と  $K$  の間の局所順序コボルディズム  $\text{id}_{\Sigma, K', K} := (\Sigma \times [0, 1]; K' \times 0, K \times 1)$  を標準的に構成することができる。したがって、次の図式を可換にする線形写像  $\zeta_{\Sigma, K', K} : V(\Sigma; K') \rightarrow V(\Sigma; K)$  が存在する。

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma \times \{0\}; K' \times \{0\}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{id}_{\Sigma, K', K}}} & V(\Sigma \times \{1\}; K \times \{1\}) \\ \uparrow \Phi(i_0) & & \uparrow \Phi(i_1) \\ V(\Sigma; K') & \xrightarrow{\zeta_{\Sigma, K', K}} & V(\Sigma; K) \end{array}$$

但し、 $i_0 : (\Sigma, K') \rightarrow (\Sigma \times \{0\}, K' \times \{0\})$ ,  $i_1 : (\Sigma, K) \rightarrow (\Sigma \times \{1\}, K \times \{1\})$  は  $i_0(x) = (x, 0)$ ,  $i_1(x) = (x, 1)$ ,  $x \in \Sigma$  によって定義される局所順序複体の同型写像である。

同様に、 $K$  と  $K'$  の間の局所順序単体コボルディズム  $\text{id}_{\Sigma, K, K'} := (\Sigma \times [0, 1]; K \times 0, K' \times 1)$  を標準的に構成することができ、線形写像  $\zeta_{\Sigma, K, K'} : V(\Sigma; K) \rightarrow V(\Sigma; K')$  が定義される。

一般に、 $K, L$  を  $\Sigma = |K| = |L|$  であるような局所順序複体とする。このとき、 $\Sigma \times [0, 1]$  の局所順序単体分割  $\mathcal{K}$  であって、 $\Sigma \times \{0\}$  上では  $K \times \{0\}$  に一致し、 $\Sigma \times \{1\}$  上では  $L \times \{1\}$  に一致するものが存在する。

∴)

$K$  と  $L$  の共通細分  $S$  をとり、 $S$  に局所順序を1つ与えておく。 $\Sigma \times [0, \frac{1}{2}]$  の局所順序単体分割  $\mathcal{K}_1$  であって、 $\Sigma \times \{0\}$  上では  $K \times \{0\}$  に一致し、 $\Sigma \times \{\frac{1}{2}\}$  上では  $S \times \{\frac{1}{2}\}$  に一致するものが存在する。同様に、 $\Sigma \times [\frac{1}{2}, 1]$  の局所順序単体分割  $\mathcal{K}_2$  であって、 $\Sigma \times \{\frac{1}{2}\}$  上では  $S \times \{\frac{1}{2}\}$  に一致し、 $\Sigma \times \{1\}$  上では  $L \times \{1\}$  に一致するものが存在する。このとき、 $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$  とおけば、これは  $\Sigma \times [0, 1]$  の局所順序単体分割  $\mathcal{K}$  になる。□

これより、 $\mathbb{C}$ -線形写像  $\zeta_{\Sigma, K, L} : V(\Sigma; K) \rightarrow V(\Sigma; L)$  が

$$\zeta_{\Sigma, K, L}(\lambda) = \sum_{\mu \in \text{Col}(L)} Z_{G, \alpha}(\Sigma \times [0, 1]; \lambda_0 \sqcup \mu_1) \mu \quad (\lambda \in \text{Col}(K))$$

によって定義される。但し、 $\lambda_0$  は  $\lambda$  から定まる  $K \times \{0\}$  のカラーであり、 $\mu_1$  は  $\mu$  から定まる  $L \times \{1\}$  のカラーであり、 $\lambda_0 \sqcup \mu_1$  は  $\lambda_0$  と  $\mu_1$  から定まる  $\partial K = (K \times \{0\}) \cup (L \times \{1\})$  のカラーである。

$|K| = |S| = |L| = \Sigma$  であるような任意の局所順序複体  $K, S, L$  に対して  $\zeta_{\Sigma, K, L} = \zeta_{\Sigma, S, L} \circ \zeta_{\Sigma, K, S}$  が成り立つ。

今後、混乱が生じない場合には、 $\zeta_{\Sigma, K, L}$  を  $\zeta_{K, L}$  のように略記する。

$\Sigma$  を組合わせ閉曲面とする。このとき、次のような**前順序圏**  $\mathcal{P}(\Sigma)$  を考えることができる：

対象： $\Sigma = |K|$  となる局所順序複体  $K$  ( $K$  を単に  $\Sigma$  の**単体分割**と呼ぶことにする)

射： $\Sigma$  の2つの単体分割  $K, L$  に対して、 $\text{Hom}(K, L) = \begin{cases} 1_{K, L} & \text{if } K \leq L, \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$

合成：自明に定義する

但し、 $K \leq L$  とは、 $K$  が  $L$  から有限回の星状細分を施すことにより得られることを意味する (辺集合に与えられている向きの compatibility は問わない)。

$\Sigma$  を閉曲面とし、各  $K \in \mathcal{P}(\Sigma)$  に対して、

$$\iota_K : V(\Sigma; K) \longrightarrow \bigoplus_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)} V(\Sigma; K)$$

を直和に附随する自然な単射とする。今、ベクトル空間  $\bigoplus_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)} V(\Sigma; K)$  の部分集合

$$\{ \iota_{K'}(x) - (\iota_K \circ \zeta_{K', K})(x) \mid x \in V(\Sigma; K'), K', K \in \mathcal{P}(\Sigma), K' \leq K \}$$

によって張られる部分空間を  $V(\Sigma)$  とおく。さらに、

$$Z(\Sigma) := \bigoplus_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)} V(\Sigma; K) / V(\Sigma)$$

とおき、 $u(\Sigma; K) : V(\Sigma; K) \longrightarrow Z(\Sigma)$  を次の図式を可換にする線形写像とする。

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma; K) & \xrightarrow{\iota_K} & \bigoplus_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)} V(\Sigma; K) \\ & \searrow u(\Sigma; K) & \downarrow \text{自然な射影} \\ & & Z(\Sigma) \end{array}$$

こうして定義される  $Z(\Sigma)$  が Dijkgraaf-Witten 位相的量子場の理論  $Z_{G, \alpha}$  における  $\Sigma$  に対するベクトル空間になる。

**注意 6-3** ベクトル空間  $Z(\Sigma)$  と線形写像の族  $\{u(\Sigma; K) : V(\Sigma; K) \longrightarrow Z(\Sigma)\}_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)}$  は、

$$K, K' \in \mathcal{P}(\Sigma), K' \leq K \implies u(\Sigma; K) \circ \zeta_{K', K} = u(\Sigma; K')$$

を満たし、次の普遍性を持つ： $\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $W$  と線形写像の集合  $\{w(\Sigma; K) : V(\Sigma; K) \longrightarrow W\}_{K \in \mathcal{P}(\Sigma)}$  が

$$K, K' \in \mathcal{P}(\Sigma), K' \leq K \implies w(\Sigma; K) \circ \zeta_{K', K} = w(\Sigma; K')$$

を満たすならば、次の図式を可換にする線形写像  $f : Z(\Sigma) \rightarrow W$  が一意的に存在する。

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma; K) & \xrightarrow{u(\Sigma; K)} & Z(\Sigma) \\ & \searrow w(\Sigma; K) & \downarrow f \\ & & W \end{array}$$

$\zeta_{K,K}^2 = \zeta_{K,K}$  であることから次を得る。

**命題 6-4** (c.f. [43; Lemma 2.9])  $\Sigma$  を向きづけられた組合わせ閉曲面とし、 $K \in \mathcal{P}(\Sigma)$  とする。このとき、

(1) 線形写像  $u(\Sigma; K) : V(\Sigma; K) \rightarrow Z(\Sigma)$  は全射である。特に、同型

$$Z(\Sigma) \cong V(\Sigma; K) / \text{Ker } u(\Sigma; K)$$

が得られるので、 $Z(\Sigma)$  は有限次元である。

(2)  $\text{Ker } u(\Sigma; K) = \text{Ker } \zeta_{K,K}$  が成り立つ。

(3)  $u(\Sigma; K)|_{\text{Im } \zeta_{K,K}} : \text{Im } \zeta_{K,K} \rightarrow Z(\Sigma)$  は線形同型写像である。したがって、 $Z(\Sigma)$  は  $V(\Sigma; K)$  の部分空間として実現される。

**(証明)**

(1) と (2) の証明は [40; 命題 3] を参照。(3) のみ示す。 $\zeta_{K,K}^2 = \zeta_{K,K}$  より、

$$(6.1) \quad V(\Sigma; K) = \text{Ker } \zeta_{K,K} \oplus \text{Im } \zeta_{K,K}$$

が成り立つ (右辺の直和は内部直和の意)。この事実と (1) より、 $u(\Sigma; K)|_{\text{Im } \zeta_{K,K}} : \text{Im } \zeta_{K,K} \rightarrow Z(\Sigma)$  は全射である。また、(6.1) と (2) により、 $u(\Sigma; K)|_{\text{Im } \zeta_{K,K}} : \text{Im } \zeta_{K,K} \rightarrow Z(\Sigma)$  は単射であることもわかる。故に、 $u(\Sigma; K)|_{\text{Im } \zeta_{K,K}}$  は線形同型写像である。□

**命題 6-5**  $\Sigma_1, \Sigma_2$  を組合わせ閉曲面とし、 $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  を向きを保つ PL 同相写像とする。このとき、次の条件 (\*) を満たす  $\mathbb{C}$  上の線形同型写像  $Z(f) : Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$  が一意的に存在する：

(\*) 任意の  $K_1 \in \mathcal{P}(\Sigma_1)$  と任意の  $K_2 \in \mathcal{P}(\Sigma_2)$  に対して、 $f$  が  $K'_1$  から  $K'_2$  への局所順序複体としての同型となるような  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) の細分  $K'_i$  を任意にとるとき、次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} V(\Sigma_1; K_1) & \xrightarrow{\zeta_{K_1, K'_1}} & V(\Sigma_1; K'_1) & \xrightarrow{\Phi(f)} & V(\Sigma_2; K'_2) & \xrightarrow{\zeta_{K'_2, K_2}} & V(\Sigma_2; K_2) \\ \downarrow u(\Sigma_1; K_1) & & & & & & \downarrow u(\Sigma_2; K_2) \\ Z(\Sigma_1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{Z(f)} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Z(\Sigma_2) \end{array}$$

が可換になる。

組合わせ閉曲面の間の向きを保つ PL 同相写像  $f$  に対して、上の命題のように定義される線形同型写像  $Z(f)$  を対応させる規則  $Z$  は次を満たすことがわかる。

(i)  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  と  $g : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$  が組合わせ閉曲面の間の向きを保つ PL 同相写像ならば、

$$Z(g \circ f) = Z(g) \circ Z(f).$$

(ii) 組合わせ閉曲面  $\Sigma$  に対して、

$$Z(\text{id}_\Sigma) = \text{id}_{Z(\Sigma)}.$$

(iii) 組合わせ閉曲面の間の向きを保つ PL 同相写像  $f, g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  がイソトープならば、 $Z(f) = Z(g)$ .

したがって、組合わせ閉曲面  $\Sigma$  の写像類群  $\Gamma_\Sigma$  の表現  $R : \Gamma_\Sigma \rightarrow \text{GL}(Z(\Sigma))$  が  $[f] \mapsto Z(f)$  によって与えられる。

**命題 6-6**  $\Sigma$  を組合わせ閉曲面とする。このとき、次の条件を満たす線形同型写像  $\theta_\Sigma : Z(-\Sigma) \rightarrow Z(\Sigma)^*$  が存在する：任意の  $K \in \mathcal{P}(\Sigma)$  に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} V(-\Sigma; K) & \xrightarrow{\Theta_{\Sigma, K}} & V(\Sigma; K)^* \\ u(-\Sigma; K) \downarrow & & \downarrow t_s(\Sigma; K) \\ Z(-\Sigma) & \xrightarrow{\theta_\Sigma} & Z(\Sigma)^* \end{array}$$

は可換である。ここで、 $\Theta_{\Sigma, K} : V(-\Sigma; K) \rightarrow V(\Sigma; K)^*$  は任意の  $\xi, \xi' \in \text{Col}(K)$  に対して

$$\langle \Theta_{\Sigma, K}(\xi), \xi' \rangle = \delta_{\xi, \xi'}$$

となるような  $\mathbb{C}$ -上の線形 (同型) 写像であり、 $s(\Sigma; K) : Z(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma; K)$  は任意の  $L \in \mathcal{P}(\Sigma)$  に対して

$$\zeta_{L, K} = s(\Sigma; K) \circ u(\Sigma; L)$$

となるような単射な線形写像である。このような線形写像  $s(\Sigma; K)$  の存在は  $Z(\Sigma)$  の普遍性からわかる [40; 命題 3]。

上の命題の証明は [39; 命題 7] および [40] の命題 4 の下の注意 2° を参照。

**注意**  $\Theta_{\Sigma, K}$  は [34; Proposition 4.5] の証明の中における  $\varphi : V(\Sigma^*) \rightarrow V(\Sigma)^*$  に相当する ( $\Sigma^*$  は  $-\Sigma$  と同じ意味)。 $\varphi$  の定義では一方の係数を複素共役になっているが、それは正しくない。正しくは、上で与えた  $\Theta_{\Sigma, K}$  のように、複素共役を取らずに定義しなければならない。

各 3 次元コボルディズム  $W$  に対し、線形写像  $Z_W$  は次の補題のようにして与えられる。

**補題 6-7**  $W = (M; \Sigma_1, \Sigma_2)$  を組合わせ閉曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2$  の間の 3 次元コボルディズムとする。このとき、次の条件 (#) を満たす線形写像  $Z_W : Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$  が一意的に存在する：

(#) 任意の  $K_1 \in \mathcal{P}(\Sigma_1)$  と  $K_2 \in \mathcal{P}(\Sigma_2)$  に対して、次の図式が可換になる：



$$\begin{array}{ccc}
V(\Sigma_1; K_1) & \xrightarrow{\Phi_W} & V(\Sigma_2; K_2) \\
u(\Sigma_1; K_1) \downarrow & & \downarrow u(\Sigma_2; K_2) \\
Z(\Sigma_1) & \xrightarrow{Z_W} & Z(\Sigma_2)
\end{array}$$

上の補題の証明は易しい。補題 6-1 と補題 6-7 から直ちに次を得る。

**系 6-8**  $W = (M; \Sigma_1, \Sigma_2)$  を組合わせ閉曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2$  の間の 3次元コボルディズムとする。  $M$  をその内部に含まれる組合わせ閉曲面  $\Sigma \subset \text{Int } M$  で切り開くと、  $M_1 \cup M_2 = M$ ,  $M_1 \cap M_2 = \Sigma$  となるような 2つの 3次元コボルディズム  $W_1 = (M_1; \Sigma_1, \Sigma)$  と  $W_2 = (M_2; \Sigma, \Sigma_2)$  が得られる。このとき、  $Z_W = Z_{W_2} \circ Z_{W_1}$  が成り立つ。

以上で得られた対応規則

- ① 向きづけられた閉曲面  $\Sigma \mapsto Z(\Sigma)$
- ② 向きづけられた閉曲面の間の向きを保つ同相写像  $f \mapsto Z(f)$
- ③ 3次元コボルディズム  $W \mapsto Z_W$

を考えると、これは  $(2+1)$  次元位相的量子場の理論の公理を満たしていることがわかる。

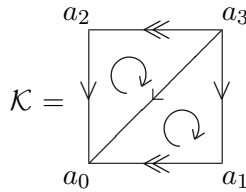
### §6-3. Dijkgraaf-Witten TQFT $Z$ における $Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ の次元と基底

「 $(2+1)$  次元位相的量子場の理論」の公理の下の注意 3° と第 5-5 節より、

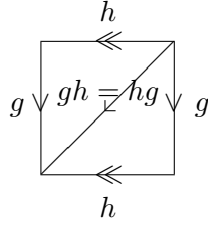
$$\begin{aligned}
\dim Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) &= Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g, h, k \in G \\ [g, h] = [h, k] = [k, g] = 1}} \frac{\alpha(g, h, k)\alpha(h, k, g)\alpha(k, g, h)}{\alpha(g, k, h)\alpha(h, g, k)\alpha(k, h, g)}
\end{aligned}$$

である。ここでは、この式および  $Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  の基底に対し、  $G$  の表現論を用いた記述を与える。

トーラス  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  の特異単体分割  $\mathcal{K}$  として、下図で描かれているものを考える。

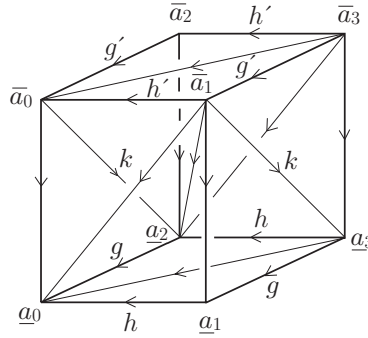


以下では、特異 2-単体  $\langle a_0, a_1, a_3 \rangle$  の向きが  $\mathbb{T}^2$  の向きと同調しているとして議論を進める。  
 $\mathcal{K}$  のカラー全体  $\text{Col}(\mathcal{K})$  は集合  $\{ (g, h) \in G \times G \mid [g, h] = 1 \}$  と 1 対 1 に対応する。ここで、  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  である。  $[g, h] = 1$  を満たす  $(g, h) \in G \times G$  に対して、次図で与えられる  $\mathcal{K}$  のカラーを  $e(g, h)$  で表わすことにする。



積複体  $\mathcal{K} \times [0, 1]$  において  $\mathcal{K} \times \{0\}$  上にカラー  $e(g, h)$  を指定し、 $\mathcal{K} \times \{0\}$  上にカラー  $e(g', h')$  を指定したときの Dijkgraaf-Witten 不変量を  $Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \frac{g', h'}{g, h})$  で表わすと、次が成り立つ：

$$\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h)) = \sum_{\substack{g', h' \in G \\ [g', h'] = 1}} Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \frac{g', h'}{g, h}) e(g', h').$$



積複体  $\mathcal{K} \times [0, 1]$  の各辺に上図に描かれているように向きとカラーを指定して、 $Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \frac{g', h'}{g, h})$  を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned} & Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \frac{g', h'}{g, h}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{k \in G \\ gk = kg' \\ hgk = gkh'}} \overline{\begin{array}{c} \triangle_{a_0, a_1, a_2} \\ \triangle_{a_1, a_2, a_3} \\ \triangle_{a_2, a_3, a_0} \\ \triangle_{a_3, a_0, a_1} \\ \triangle_{a_0, a_1, a_3} \\ \triangle_{a_1, a_3, a_2} \end{array}} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{k \in G \\ gk = kg' \\ hk = kh'}} \frac{\alpha(g, h, k) \alpha(h, k, k^{-1}gk) \alpha(k, k^{-1}gk, k^{-1}hk)}{\alpha(h, g, k) \alpha(g, k, k^{-1}hk) \alpha(k, k^{-1}hk, k^{-1}gk)}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h)) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \frac{\alpha(g, h, k) \alpha(h, k, k^{-1}gk) \alpha(k, k^{-1}gk, k^{-1}hk)}{\alpha(h, g, k) \alpha(g, k, k^{-1}hk) \alpha(k, k^{-1}hk, k^{-1}gk)} e(k^{-1}gk, k^{-1}hk)$$

である。そこで、 $g, h, k \in G$  に対して

$$(6.2) \quad \theta_g(h, k) := \frac{\alpha(h, h^{-1}gh, k)}{\alpha(g, h, k) \alpha(h, k, (hk)^{-1}g(hk))}$$

と定めると、

$$(6.3) \quad \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h)) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \frac{\theta_g(k, k^{-1}hk)}{\theta_g(h, k)} e(k^{-1}gk, k^{-1}hk)$$

と書ける。

$$\chi(g, h) := \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h))$$

とおくと、 $Z(\mathbb{T}^2) \cong \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  は  $\mathbb{C}$  上  $\{ \chi(g, h) \mid (g, h) \in G \times G, [g, h] = 1 \}$  によって張られることがわかる。

**補題 6-9** 任意の  $g, h, k, a \in G$  に対して

$$(6.4) \quad \theta_a(g, h)\theta_a(gh, k) = \theta_{g^{-1}ag}(h, k)\theta_a(g, hk)$$

が成り立つ。

**注意** :  $a \in G$  に対して  $Z(a) = \{ x \in G \mid ax = xa \}$  とおく。 $Z(a)$  は  $G$  の部分群をなす。

$g, h, k \in Z(a)$  ならば、補題の等式は

$$\theta_a(g, h)\theta_a(gh, k) = \theta_a(h, k)\theta_a(g, hk)$$

となる。これは  $\theta_a|_{Z(a) \times Z(a)}$  が群  $Z(a)$  の 2-コサイクルであることを意味している。写像  $\varphi_a : Z^3(G, F^\times) \rightarrow Z^2(Z(a), F^\times)$ ,  $\alpha \mapsto \theta_a|_{Z(a) \times Z(a)}$  はアーベル群の準同型であり、これは群のコホモロジーの間の準同型  $\varphi_{a*} : H^3(G, F^\times) \rightarrow H^2(Z(a), F^\times)$  を誘導する。

$Z(\mathbb{T}^2) \cong \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  の基底であって、良い性質をもつものを見つけよう。そのために、群の射影表現を用いる。

**定義 6-10**  $G$  を群、 $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間とする。写像  $\mathcal{X} : G \rightarrow \text{GL}(V)$  が条件

$$\exists \theta : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times : \text{関数 s.t. } \mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h) = \theta(g, h)\mathcal{X}(gh) \text{ for } \forall g, h \in G$$

を満たすとき、 $G$  の射影表現と呼ばれる。 $\theta$  は射影表現  $\mathcal{X}$  の因子団と呼ばれる。

**注意** : 因子団  $\theta$  は群  $G$  の 2-コサイクルである。

$G$  を群とし、 $\mathcal{X} : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $\mathcal{X}' : G \rightarrow \text{GL}(V')$  を 2 つの射影表現とする。 $\mathcal{X}$  と  $\mathcal{X}'$  が同値であるとは、

$$\exists \varphi : V \rightarrow V' : \text{線形同型写像 s.t. } \mathcal{X}(g) = \varphi \circ \mathcal{X}'(g) \circ \varphi^{-1} \text{ for } \forall g \in G$$

が成り立つときをいう。 $\mathcal{X}$  と  $\mathcal{X}'$  が同値ならば、それらの因子団は等しい。

$G$  を群とし、 $\mathcal{X} : G \rightarrow \text{GL}(V)$  を  $G$  の射影表現とする。 $\mathcal{X}$  が既約であるとは、「任意の  $g \in G$  に対して  $(\mathcal{X}(g))(W) \subset W$ 」を満たす  $V$  の部分空間は  $\{0\}$  と  $V$  のみであるときをいう。

**定義 6-11**  $G$  を群、 $\mathcal{X} : G \rightarrow \text{GL}(V)$  を  $G$  の射影表現とする。このとき、

$$\chi(g) = \text{Tr}(\mathcal{X}(g)) \quad (g \in G)$$

によって定義される関数  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  を射影表現  $\mathcal{X}$  の射影指標という。 $\mathcal{X}$  が既約なとき、射影指標  $\chi$  を既約な射影指標と呼ぶ。

**補題 6-12**  $\chi$  を有限群  $G$  の  $\theta$  を因子団とする射影表現の射影指標とする。このとき、次の等式が成り立つ。

(1) 任意の  $k, g \in G$  に対して

$$(6.5) \quad \chi(k^{-1}gk) = \frac{\theta(k, k^{-1}gk)}{\theta(g, k)} \chi(g).$$

(2) 任意の  $h \in G$  に対して

$$(6.6) \quad \chi(h^{-1}) = \theta(h, h^{-1}) \overline{\chi(h)}.$$

この補題の (1) の証明は易しい。(2) の証明は [19; Corollary 3.5] の証明を参照。

通常の指標の場合と同様に次の定理を証明することができる。

**定理 6-13 (射影指標の第一直交関係式)**  $G$  を有限群とし、 $\theta \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$  とする。 $\chi_1, \dots, \chi_t$  を  $\theta$  を因子団に持つ  $G$  の既約な射影指標の全体とする。このとき、任意の  $g \in G$  に対して、次の等式が成り立つ。

$$(6.7) \quad \sum_{h \in G} \theta(g^{-1}h^{-1}, h)^{-1} \chi_i(h) \chi_j(g^{-1}h^{-1}) = \delta_{ij} \frac{\chi_i(g^{-1})}{\chi_i(1)} |G|.$$

特に、 $g = 1$  とすれば、

$$(6.8) \quad \sum_{h \in G} \chi_i(h) \overline{\chi_j(h)} = \delta_{ij} |G|$$

となる。

**定義 6-14**  $G$  を有限群とし、 $\theta \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$  とする。 $g \in G$  が  $\theta$ -regular であるとは、任意の  $h \in Z(g)$  に対して  $\theta(g, h) = \theta(h, g)$  が成り立つときをいう。

**注意:**  $G$  の単位元  $1$  は任意の 2-コサイクル  $\theta$  に対して、 $\theta$ -regular である。実際、2-コサイクル条件から、任意の  $h \in Z(1) = G$  に対して、 $\theta(h, 1) = \theta(1, 1) = \theta(1, h)$  が成り立つ。

次が成り立つ。証明は [19; Chap.3, Lemma 6.1] を参照。

**補題 6-15**  $G$  を有限群、 $\theta \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$  とする。

(1)  $g \in G : \theta$ -regular  $\implies g^{-1} : \theta$ -regular.

(2)  $g \in G : \theta$ -regular  $\implies x^{-1}gx : \theta$ -regular for  $\forall x \in G$ .

**定義 6-16**  $G$  を有限群、 $\theta \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$  とする。 $G$  の共役類  $C$  が  $\theta$ -regular 共役類 であるとは、 $C$  の中に  $\theta$ -regular な元が存在するときをいう。

**注意 1°** : 補題 6-15(2) により、 $\theta$ -regular 共役類の定義は共役類の代表元の選び方によらない。

**注意 2°** : 定義 6-14 の下の注意により、 $G$  の単位元  $1$  が属する共役類  $C_0 := \{1\}$  が常に  $\theta$ -regular である。

有限群論の古典的な表現論のアナロジーとして次が成り立つ (証明については例えば、[19; Chapter 3, Section 6] を参照)。

**定理 6-17**  $G$  を有限群、 $\theta \in Z^2(G, \mathbb{C}^\times)$  とする。このとき、2-コサイクル  $\theta$  を因子団にもつ  $G$  の既約な射影指標の個数は有限個であり、その個数は  $G$  の  $\theta$ -regular 共役類の個数に等しい。

各  $g \in G$  に対して

$$(6.9) \quad t(g) := \#\{ Z(g) \text{ の } \theta_g|_{Z(g) \times Z(g)\text{-regular 共役類の全体} \} - 1$$

と定め、 $\chi_0^g, \chi_1^g, \dots, \chi_{t(g)}^g$  を  $\theta_g|_{Z(g) \times Z(g)}$  (以下、 $\theta_g$  と略記する) の既約な射影指標全体とする。必要ならば番号を付け替えることより、これらは次の条件を満たしていると仮定してよい：任意の  $g, l \in G$  と任意の  $a = 0, 1, \dots, t(g)$  と任意の  $h \in Z(g)$  に対して

$$(6.10) \quad \chi_a^{l^{-1}gl}(l^{-1}hl) = \frac{\theta_g(l, l^{-1}hl)}{\theta_g(h, l)} \chi_a^g(h).$$

このことは次の補題からわかる。

**補題 6-18**  $\rho^g : G \rightarrow \text{GL}(V)$  を  $\theta_g|_{Z(g) \times Z(g)}$  を因子団にもつ既約な射影表現とする。各  $l \in G$  に対して  $\rho^{l^{-1}gl} : Z(l^{-1}gl) \rightarrow \text{GL}(V)$  を

$$\rho^{l^{-1}gl}(x) := \frac{\theta_g(l, x)}{\theta_g(lxl^{-1}, l)} \rho^g(lxl^{-1}) \quad (x \in Z(l^{-1}gl))$$

によって定義する。このとき、 $\rho^{l^{-1}gl}$  は  $\theta_{l^{-1}gl}|_{Z(l^{-1}gl) \times Z(l^{-1}gl)}$  を因子団にもつ既約な射影表現である。さらに、対応  $\rho^g \mapsto \rho^{l^{-1}gl}$  は  $\theta_g|_{Z(g) \times Z(g)}$  を因子団にもつ既約な射影表現の全体と  $\theta_{l^{-1}gl}|_{Z(l^{-1}gl) \times Z(l^{-1}gl)}$  を因子団にもつ既約な射影表現の全体との間の 1 対 1 対応を与える。

$C_0, C_1, \dots, C_r$  を  $G$  の共役類全体とする。上の補題より、各  $i = 0, 1, \dots, r$  に対して

$$(6.11) \quad t(i) := t(g) \quad \text{for } g \in C_i$$

が  $C_i$  の代表元  $g$  の選び方に依らずに定まる。各  $i = 0, 1, \dots, r$  と  $a = 0, 1, \dots, t(i)$  に対して  $V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K})$  のベクトル  $v_a^i$  を

$$(6.12) \quad v_a^i := \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \chi_a^g(h) e(g, h)$$

により定める。各既約指標たちが条件 (6.10) を満たしていることから、

$$(6.13) \quad v_a^i \in \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$$

がわかる。

∴)

$g_i \in C_i$  を代表元とする。このとき、

$$\begin{aligned}
v_a^i &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{1}{|Z(g_i)|} \sum_{\substack{k \in G \\ h \in Z(k^{-1}g_i k)}} \chi_a^{k^{-1}g_i k}(h) e(k^{-1}g_i k, h) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{1}{|Z(g_i)|} \sum_{\substack{k \in G \\ h \in Z(g_i)}} \chi_a^{k^{-1}g_i k}(k^{-1}hk) e(k^{-1}g_i k, k^{-1}hk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{1}{|Z(g_i)|} \sum_{\substack{k \in G \\ h \in Z(g_i)}} \frac{\theta_{g_i}(k, k^{-1}hk)}{\theta_{g_i}(h, k)} \chi_a^{g_i}(h) e(k^{-1}g_i k, k^{-1}hk) \\
&= \frac{\sqrt{|G|}}{|Z(g_i)|} \chi_a^{g_i}(h) \chi(g_i, h)
\end{aligned}$$

である。故に、(6.13) が成り立つ。  $\square$

既約射影指標の直交関係式を用いると、 $[g, h] = 1$  なる  $(g, h) \in G \times G$  に対して、 $g \in C_i$  のとき、

$$(6.14) \quad \chi(g, h) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{a=0}^{t(i)} \overline{\chi_a^g(h)} v_a^i$$

と書き表わされることがわかる。したがって、 $\text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  は  $\{v_a^i\}_{i,a}$  により  $\mathbb{C}$  上張られている。さらに、

$$(6.15) \quad \dim Z(\mathbb{T}^2) = Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g, h, k \in G \\ [g, h] = [h, k] = [k, g] = 1}} \frac{\theta_g(k, h)}{\theta_g(h, k)} = \sum_{i=0}^r (t(i) + 1)$$

であることがわかる [10; Section 6.6]。 $\#\{v_a^i\}_{i,a} = \sum_{i=0}^r (t(i) + 1)$  なので、次を得る。

**命題 6-19**  $\{v_a^i\}_{i,a}$  は  $\text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  の  $\mathbb{C}$  上の基底である。

#### §6-4. Dijkgraaf-Witten TQFT $Z$ に付随する $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の写像類群

この節では、Dijkgraaf-Witten TQFT  $Z$  から定まる  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  の写像類群  $\Gamma_{\mathbb{T}^2}$  の表現を計算する。この表現を前節で求めた  $Z(\mathbb{T}^2)$  の基底  $\{v_a^i\}_{i,a}$  に関して行列で表わす。

トーラス  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  の写像類群  $\Gamma_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}$  は行列式が 1 の  $2 \times 2$  整数行列のなす群

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{ X \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z}) \mid \det X = 1 \}$$

と同型である。この群は、

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

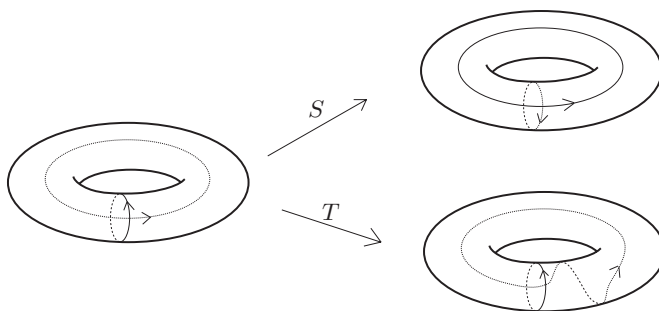
によって生成され、関係式

$$S^4 = I, \quad (ST)^3 = S^2$$

を持つことはすぐにわかるが、逆に、 $S$  と  $T$  によって生成され、このような関係式をもつ群は  $SL_2(\mathbb{Z})$  に同型であることが知られている。行列  $S$  と  $T$  は  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 (\subset \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$  上の以下のような向きを保つ同相写像と対応している。

$$S(z, w) = (\bar{w}, z), \quad T(z, w) = (zw, z), \quad (z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

ここで  $\mathbb{S}^1$  を絶対値が 1 の複素数からなる集合とみなしている。



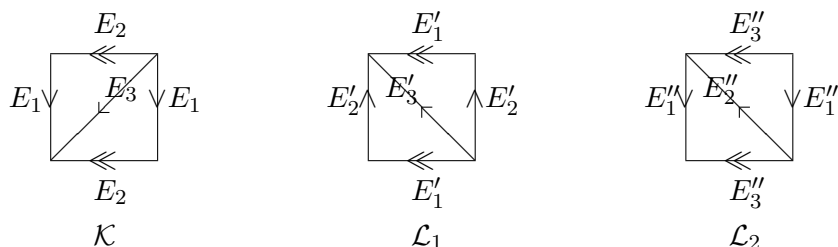
$S$  と  $T^{-1}$  を  $\mathbb{T}^2$  の普遍被覆

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, \quad (x, y) \longmapsto (\exp(2\pi iy), \exp(2\pi ix))$$

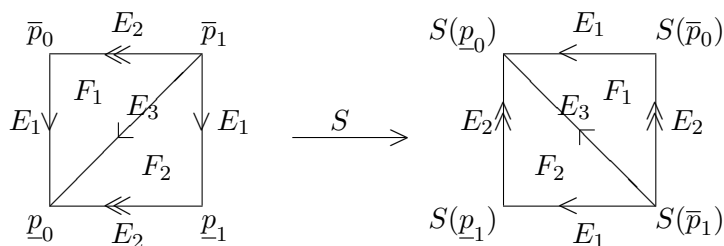
上の同相写像に持ち上げたものを同じ記号で書くことにすると、

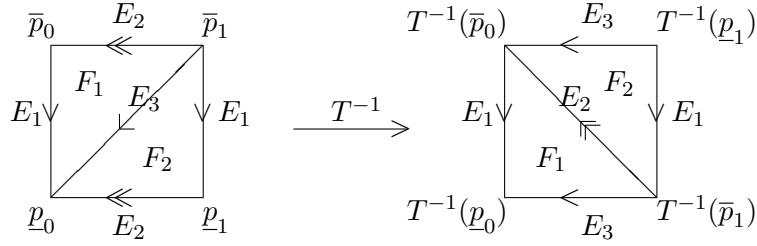
$$S(x, y) = (y, -x), \quad T^{-1}(x, y) = (x, -x + y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす。



このことから、 $\mathbb{T}^2$  の局所順序つき特異単体分割  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  を上図のように定めると、 $S$  および  $T^{-1}$  は、それぞれ  $\mathcal{K}$  から  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  への局所順序を保つ単体写像であることがわかる (注:  $\mathcal{K}$  を  $\mathbb{T}^2$  の特異単体分割に採用したので、分割との相性を考慮して、 $T$  のかわりに  $T^{-1}$  を考えた)。





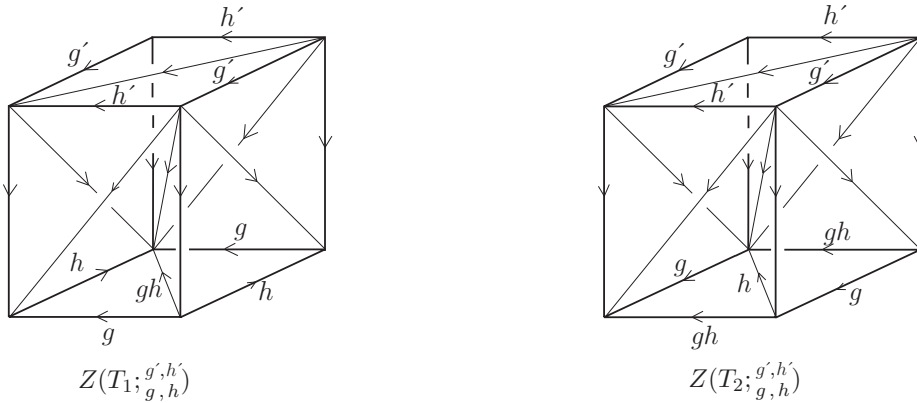
したがって、同型写像  $S : (\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_1)$  および  $T^{-1} : (\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_2)$  が引き起こす  $\mathbb{C}$ -線形同型写像  $\Phi(S) : V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_1)$  および  $\Phi(T^{-1}) : V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_2)$  は次のような写像である。

$$\begin{aligned} \Phi(S) \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & h & \\ g \downarrow & \swarrow gh & \searrow g \\ & h & \end{array} \\ \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & g & \\ h \uparrow & \swarrow gh & \searrow h \\ & g & \end{array} \\ \end{array} , \\ \Phi(T^{-1}) \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & h & \\ g \downarrow & \swarrow gh & \searrow g \\ & h & \end{array} \\ \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & gh & \\ g \downarrow & \swarrow h & \searrow g \\ & h & \end{array} \\ \end{array} . \end{aligned}$$

$S_{\sharp}, T_{\sharp}^{-1} : V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  を

$$S_{\sharp} = \zeta_{\mathcal{L}_1, \mathcal{K}} \circ \Phi(S), \quad T_{\sharp}^{-1} = \zeta_{\mathcal{L}_2, \mathcal{K}} \circ \Phi(T^{-1})$$

によって定義する。



$(T_1; g', h')$ ,  $(T_2; g', h')$  をそれぞれ上図の左右ような  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  の局所順序複体としての単体分割とし、その境界上のカラーが図に示されているように指定されたものとする。 $Z(T_1; g', h')$ ,  $Z(T_2; g', h')$  をそのときの Dijkgraaf-Witten 不変量とすると、次の式が成り立つ。

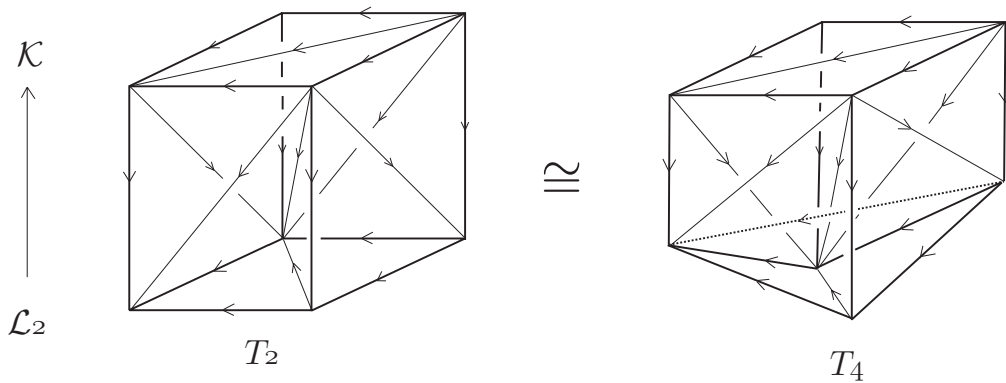


$$S_{\#} \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \downarrow g \quad \downarrow g \\ \xrightarrow{h} \end{array} \right) = \sum_{\substack{g', h' \in G \\ [g', h'] = 1}} Z(T_1; g', h') \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \downarrow g' \quad \downarrow g' \\ \xrightarrow{h'} \end{array}$$

$$T_{\#}^{-1} \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \downarrow g \quad \downarrow g \\ \xrightarrow{h} \end{array} \right) = \sum_{\substack{g', h' \in G \\ [g', h'] = 1}} Z(T_2; g', h') \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \downarrow g' \quad \downarrow g' \\ \xrightarrow{h'} \end{array}$$

命題 6-5 により、この  $S_{\#}$ ,  $T_{\#}^{-1}$  が  $Z(S)$ ,  $Z(T^{-1}) : Z(\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(\mathbb{T}^2)$  を誘導する。

$T_2$  を  $(\mathbb{T}^2; \mathcal{L}_2)$  から  $(\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  への局所順序単体複体の間のコボルディズムと考えると、このコボルディズムは、次の図で表わされた局所順序単体複体の間のコボルディズム  $(T_4; \mathcal{L}_2, \mathcal{K})$  と同型になることがわかる。



したがって、

$$Z(T_2; g', h') = Z(T_4; g', h')$$

が成立する。ところが、コボルディズム  $(T_4; \mathcal{L}_2, \mathcal{K})$  は恒等コボルディズム  $\text{id}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  の“底面”に四面体を 1 つ貼り合わせたものであるから、

$$Z(T_4; g', h') = \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \downarrow g \quad \downarrow g \\ \xrightarrow{h} \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \downarrow g' \quad \downarrow g' \\ \xrightarrow{h'} \end{array} \right) = \alpha(g, h, g) Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; g', h')$$

が成り立つ。したがって、

$$T_{\#}^{-1}(e(g, h)) = \alpha(g, h, g) \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, gh))$$

が成り立つ。これより、 $\tilde{T}_{\#}^{-1} : V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  を

$$\tilde{T}_{\#}^{-1} \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & h & \\ \swarrow & & \searrow \\ g & & g \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & h & \end{array} \\ \end{array} \right) = \alpha(g, h, g) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & gh & \\ \swarrow & & \searrow \\ g & & g \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & gh & \end{array} \end{array}$$

と定めると、

$$T_{\#}^{-1} = \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \circ \tilde{T}_{\#}^{-1}$$

が成り立つ。よって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\tilde{T}_{\#}^{-1}} & V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ u(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow u(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ Z(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{Z(T)^{-1}} & Z(\mathbb{T}^2) \end{array}$$

これより、任意の  $i = 0, 1, \dots, r$  と任意の  $a = 0, 1, \dots, t(i)$  に対して

$$\begin{aligned} T_{\#}^{-1}(v_a^i) &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \chi_a^g(h) T_{\#}^{-1}(e(g, h)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \alpha(g, h, g) \chi_a^g(h) \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, gh)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \alpha(g, h, g) \chi_a^g(h) \overline{\chi_b^g(gh)} v_b^i \end{aligned}$$

ここで、 $[g, h] = 1$  のとき、

$$\alpha(g, h, g) = \frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)\theta_g(g^{-1}, g)}$$

が成り立つ。

∴)

$[g, h] = 1$  のとき、  

$$\frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)} = \frac{\alpha(g^{-1}h^{-1}, g, hg)}{\alpha(g, g^{-1}h^{-1}, hg)\alpha(g^{-1}h^{-1}, hg, g)} \cdot \frac{\alpha(g, g^{-1}h^{-1}, h)\alpha(g^{-1}h^{-1}, h, g)}{\alpha(g^{-1}h^{-1}, g, h)}$$
である。

•  $g^{-1}h^{-1}, g, h, g$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(g, h, g)\alpha(g^{-1}h^{-1}, gh, g)\alpha(g^{-1}h^{-1}, g, h) = \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g^{-1}h^{-1}, g, hg)$$

が成り立ち、

•  $g, g^{-1}h^{-1}, h, g$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(g^{-1}h^{-1}, h, g)\alpha(g, g^{-1}, g)\alpha(g, g^{-1}h^{-1}, h) = \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, g^{-1}h^{-1}, hg)$$

が成り立つ。故に、

$$\frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)} = \frac{\alpha(g, h, g)}{\alpha(g, g^{-1}, g)}$$

となる。

$$\theta_g(g^{-1}, g) = \frac{\alpha(g^{-1}, g, g)}{\alpha(g, g^{-1}, g)\alpha(g^{-1}, g, g)} = \frac{1}{\alpha(g, g^{-1}, g)}$$

であるから、

$$\frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)} = \alpha(g, h, g)\theta_g(g^{-1}, g)$$

を得る。 □

よって、

$$\begin{aligned} T_{\#}^{-1}(v_a^i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)\theta_g(g^{-1}, g)} \chi_a^g(h) \overline{\chi_b^g(g h)} v_b^i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \frac{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg)}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)\theta_g(g^{-1}, g)} \chi_a^g(h) \overline{\chi_b^g(g h)} v_b^i \end{aligned}$$

と表わされる。 $\alpha$  は正規化されているので、 $\theta_g|_{Z(g) \times Z(g)}$  も正規化されており、したがって、任意の  $x \in Z(g)$  に対して  $\theta_g(x, x^{-1}) = \theta_g(x^{-1}, x)$  となる。特に、 $h \in Z(g)$  に対して、 $\theta_g(g^{-1}h^{-1}, hg) = \theta_g(hg, g^{-1}h^{-1})$  が成り立つ。この事実と (6.6) および既約射影指標に対する第一直交関係式を用いて、

$$\begin{aligned} T_{\#}^{-1}(v_a^i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \frac{1}{\theta_g(g^{-1}h^{-1}, h)\theta_g(g^{-1}, g)} \chi_a^g(h) \chi_b^g(g^{-1}h^{-1}) v_b^i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C_i} \sum_{b=0}^{t(i)} \frac{1}{\theta_g(g^{-1}, g)} \delta_{a,b} \frac{\chi_a^g(g^{-1})}{\chi_a^g(1)} |Z(g)| v_b^i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C_i} |Z(g)| \frac{1}{\theta_g(g^{-1}, g)} \frac{\chi_a^g(g^{-1})}{\chi_a^g(1)} v_a^i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in C_i} |Z(g)| \frac{\overline{\chi_a^g(g)}}{\chi_a^g(1)} v_a^i \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $g_i \in C_i$  を代表元とすると、任意の  $l \in G$  に対して

$$\chi_a^{l^{-1}g_i l}(l^{-1}g_i l) = \frac{\theta_{g_i}(l, l^{-1}g_i l)}{\theta_{g_i}(g_i, l)} \chi_a^{g_i}(g_i) = \chi_a^{g_i}(g_i)$$

となるから、

$$(6.16) \quad T_{\#}^{-1}(v_a^i) = \frac{1}{|G|} \sum_{l \in G} \frac{\overline{\chi_a^{l^{-1}g_i l}(l^{-1}g_i l)}}{\chi_a^{g_i}(1)} v_a^i = \frac{\overline{\chi_a^{g_i}(g_i)}}{\chi_a^{g_i}(1)} v_a^i$$

を得る。ここで、

$$(6.17) \quad \chi_a^{g_i}(1) \in \mathbb{N}, \quad \frac{\chi_a^{g_i}(g_i)}{\chi_a^{g_i}(1)} \in U(1)$$

である。

( $\therefore$ )

$g = g_i$  とおく。射影指標が  $\chi := \chi_a^g$  に一致するような既約な射影表現  $\mathcal{X} : Z(g) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  を1つとる。 $\theta := \theta_g|_{Z(g) \times Z(g)}$  とおく。 $\theta$  は正規化されているから、

$$\mathcal{X}(1)\mathcal{X}(1) = \theta(1, 1)\mathcal{X}(1 \cdot 1) = \mathcal{X}(1)$$

が成り立つ。 $\mathcal{X}(1) \in \mathrm{GL}(V)$  だから、 $\mathcal{X}(1) = \mathrm{id}_V$  である。特に、

$$\chi(1) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(1)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V) = \dim V \in \mathbb{N}$$

とわかる。

次に、 $\mathcal{X}(g) : V \rightarrow V$  について考える。任意の  $h \in Z(g)$  に対して  $gh = hg$  であるから、 $\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h) = \mathcal{X}(h)\mathcal{X}(g)$  が成り立つ。つまり、このことは、 $\mathcal{X}(g)$  が左  $\mathbb{C}^\theta[Z(g)]$ -加群準同型であることを意味する ( $\mathbb{C}^\theta[Z(g)]$  は、積を  $\theta$  によって“ひねって”得られる捩れ群環を表わしている)。 $\mathcal{X}$  は既約、すなわち、左  $\mathbb{C}^\theta[Z(g)]$ -加群  $V$  は既約であるから、Schur の補題により、ある  $\omega \in \mathbb{C}^\times$  により、 $\mathcal{X}(g) = \omega \mathrm{id}_V : V \rightarrow V$  と表わされる。よって、

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(g)) = \omega \dim V = \omega \chi(1)$$

となる。故に、 $\frac{\chi_a^{g_i}(g_i)}{\chi_a^{g_i}(1)} \in U(1)$  を示すには、 $\omega \in U(1)$  を示せばよい。

$g$  の位数を  $n$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(g)^n &= \theta(g, g)\theta(g, g^2) \cdots \theta(g, g^{n-1})\mathcal{X}(g^n) \\ &= \theta(g, g)\theta(g, g^2) \cdots \theta(g, g^{n-1})\mathcal{X}(1) \\ &= \theta(g, g)\theta(g, g^2) \cdots \theta(g, g^{n-1})\mathrm{id}_V \end{aligned}$$

となる。 $\mathcal{X}(g)^n = \omega^n \mathrm{id}_V$  であるから、

$$\omega^n = \theta(g, g)\theta(g, g^2) \cdots \theta(g, g^{n-1}) \in U(1)$$

を得る。よって、 $\omega \in U(1)$  である。 □

(6.16) と (6.17) より、

$$(6.18) \quad T_{\sharp}(v_a^i) = \frac{\chi_a^{g_i}(g_i)}{\chi_a^{g_i}(1)} v_a^i$$

を得る。

次に、 $S_{\sharp}(v_a^i)$  を計算しよう。次の等式が成り立つ：

$$(6.19) \quad Z(T_2; \frac{g', h'}{h^{-1}, gh}) = \frac{1}{\alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)} Z(T_1; \frac{g', h'}{g, h}).$$

これを示す。そのために、 $(T_2; \frac{g', h'}{h^{-1}, gh})$  を“斜めの線”で切って2つの部分に分け、その下側の部分について考える。この部分の Dijkgraaf-Witten 不変量は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
(\sqrt{|G|})^{2/3} Z \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \\
&= \frac{\alpha(h^{-1}, gh, c)}{\alpha(gh, h^{-1}, k)\alpha(h^{-1}, k, h')} \dots\dots\dots (\star)
\end{aligned}$$

ここで、カラー条件から  $k = hc$  であり、

- $h^{-1}, h, g, c$  に関する 3-コサイクル条件と  $gh = hg$  より、

$$\alpha(h, g, c)\alpha(h^{-1}, gh, c)\alpha(h^{-1}, h, g) = \alpha(1, g, c)\alpha(h^{-1}, h, gc).$$

- $g, h, h^{-1}, hc$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, h^{-1}, hc)\alpha(g, 1, hc)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, hc)\alpha(g, h, c).$$

- $h^{-1}, h, c, h'$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, c, h')\alpha(h^{-1}, hc, h')\alpha(h^{-1}, h, c) = \alpha(1, c, h')\alpha(h^{-1}, h, ch').$$

- $h, h^{-1}, h, c$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h^{-1}, h, c)\alpha(h, 1, c)\alpha(h, h^{-1}, h) = \alpha(1, h, c)\alpha(h, h^{-1}, hc).$$

さらに、 $h' = k^{-1}gk = (ch)^{-1}g(ch) = c^{-1}gc$  であるから、 $\alpha(h^{-1}, h, ch') = \alpha(h^{-1}, h, gc)$  である。これらの等式より、

$$\begin{aligned}
(\star) &= \frac{1}{\alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)} \cdot \frac{\alpha(g, h, c)\alpha(h, c, h')}{\alpha(h, g, c)} \\
&= \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \\
&= (\sqrt{|G|})^{2/3} \frac{1}{\alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)} \cdot Z \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned}
Z(T_1; g', h') &= \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)Z(T_2; g', h', gh) \\
&= \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)Z(T_4; g', h', gh) \\
&= \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, gh, h^{-1})\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(h^{-1}, g))
\end{aligned}$$

を得る。これより、 $\tilde{S}_{\sharp} : V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  を

$$\tilde{S}_{\sharp}(g) \left( \begin{array}{c} \xleftarrow{h} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{g} \\ \downarrow \\ \xleftarrow{h} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} \right) = \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, gh, h^{-1}) \begin{array}{c} \xleftarrow{g} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{h^{-1}} \\ \downarrow \\ \xleftarrow{g} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{h^{-1}} \end{array}$$

と定めると、

$$S_{\sharp} = \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \circ \tilde{S}_{\sharp}$$

が成り立つ。よって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\tilde{S}_{\sharp}} & V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ u(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow u(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ Z(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{Z(S)} & Z(\mathbb{T}^2) \end{array}$$

故に、任意の  $i = 0, 1, \dots, r$  と任意の  $a = 0, 1, \dots, t(i)$  に対して

$$\begin{aligned} S_{\sharp}(v_a^i) &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \chi_a^g(h) S_{\sharp}(e(g, h)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, gh, h^{-1}) \\ &\quad \times \chi_a^g(h) \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(h^{-1}, g)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^r \sum_{\substack{g \in C_i, h^{-1} \in C_j \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(j)} \alpha(h^{-1}, h, g)\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, gh, h^{-1}) \\ &\quad \times \chi_a^g(h) \overline{\chi_b^{h^{-1}}(g)} v_b^j \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^r \sum_{b=0}^{t(j)} \sum_{\substack{g \in C_i, h \in C_j \\ h \in Z(g)}} \alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h, gh^{-1}, h) \\ &\quad \times \chi_a^g(h^{-1}) \overline{\chi_b^h(g)} v_b^j \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^r \sum_{b=0}^{t(j)} \sum_{\substack{g \in C_i, h \in C_j \\ h \in Z(g)}} \alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h, gh^{-1}, h) \\ &\quad \times \theta_g(h, h^{-1}) \overline{\chi_a^g(h) \chi_b^h(g)} v_b^j \end{aligned}$$

となる。ここで、 $[g, h] = 1$  なる  $(g, h) \in G \times G$  に対して

- $h, g, h^{-1}, h$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h, gh^{-1}, h)\alpha(h, g, h^{-1}) = \alpha(hg, h^{-1}, h)\alpha(h, g, 1) = \alpha(gh, h^{-1}, h)$$

が成り立ち、

- $g, h, h^{-1}, h$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(g, 1, h)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, h)\alpha(g, h, 1),$$

すなわち、

$$\alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, h)$$

が成り立つ。よって、 $[g, h] = 1$  なる  $(g, h) \in G \times G$  に対して

$$\begin{aligned} & \alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h, gh^{-1}, h)\theta_g(h, h^{-1}) \\ &= \alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h, gh^{-1}, h)\frac{\alpha(h, g, h^{-1})}{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)} \\ &= \frac{\alpha(g, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1})\alpha(h, gh^{-1}, h)\alpha(h, g, h^{-1})}{\alpha(g, h, h^{-1})} \\ &= \alpha(h, h^{-1}, h)\alpha(h^{-1}, h, h^{-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$(6.20) \quad S_{\sharp}(v_a^i) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^r \sum_{b=0}^{t(j)} \sum_{\substack{g \in C_i, h \in C_j \\ h \in Z(g)}} \overline{\chi_a^g(h)\chi_b^h(g)} v_b^j$$

を得る。

同一視  $Z(\mathbb{T}^2) \cong \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \subset V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  の下で、(6.18), (6.20) より、次の命題を得る。

**命題 6-20** ([36; Lemma 4.1]) 命題 6-19 で与えられている  $Z(\mathbb{T}^2) \cong \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  の基底  $\{v_a^i\}_{\substack{i=0,1,\dots,r \\ a=0,1,\dots,t(i)}}$  に関して、次が成り立つ。

$$(1) \quad (Z(S))(v_a^i) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^r \sum_{b=0}^{t(j)} \sum_{\substack{g \in C_i, h \in C_j \\ h \in Z(g)}} \overline{\chi_a^g(h)\chi_b^h(g)} v_b^j.$$

$$(2) \quad (Z(T))(v_a^i) = \frac{\chi_a^{g_i}(g_i)}{\chi_a^{g_i}(1)} v_a^i.$$

## §7. Dijkgraaf-Witten TQFT に付随するフュージョン代数

論文 [36] では、[9] を背景にして、Dijkgraaf-Witten TQFT に付随するフュージョン代数を計算し、それを有限群の射影表現の言葉で記述した。その論文の中に詳しい計算を書かなかったことや、描かれている単体分割の図が正しくないなどの問題点を解消するため、ここでその計算方法を詳しく述べよう。トーラス  $\mathbb{T}^2$  の分割の仕方やその写像類群の表現の計算に用いる  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  や  $(3 \text{ つ穴あき球面}) \times \mathbb{S}^1$  の分割の仕方はすべて [29] で与えられているものを採用する。

### §7-1. $(2+1)$ 次元 TQFT に内在するフュージョン代数

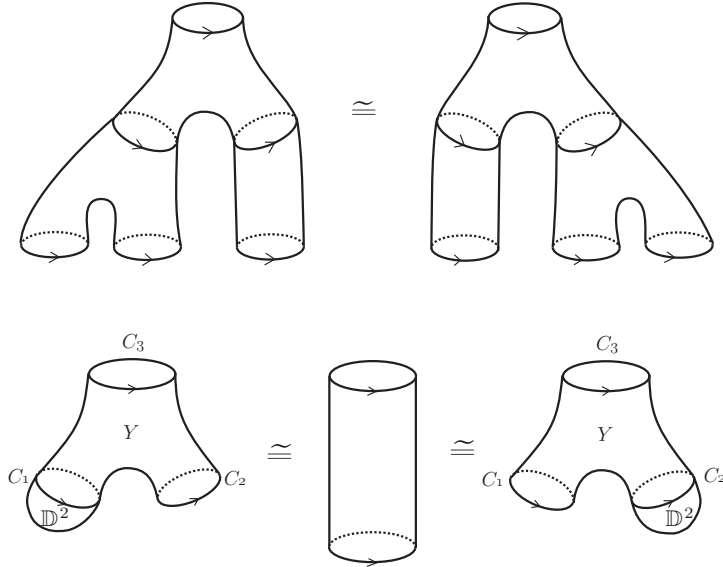
$Z$  を  $(2+1)$  次元 TQFT とすると、 $Z(\mathbb{T}^2)$  には代数の構造が入る。その積の定義を述べよう。3つ穴あき球面  $Y$  を考える。  $Y$  の3つの境界を  $C_1, C_2, C_3$  とおくとこれらは  $\mathbb{S}^1$  に同相である。したがって、 $Y \times \mathbb{S}^1$  は3つのトーラスを境界にもつ3次元多様体になる。これを次のようなコボルディズムとみなす：

$$W_{\text{fusion}} := (Y \times \mathbb{S}^1; (C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1), C_3 \times \mathbb{S}^1)$$

このとき、次の図式を可換にする線形写像  $\mu_Z : Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  が得られる。

$$\begin{array}{ccc} Z((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{Z_{W_{\text{fusion}}}} & Z(C_3 \times \mathbb{S}^1) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ Z(C_1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(C_2 \times \mathbb{S}^1) & & \\ \uparrow \cong & \xrightarrow{\mu_Z} & Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \end{array}$$

この  $\mu_Z$  は  $Z(\mathbb{T}^2)$  に (結合的な) 代数の構造を定義することがわかる (下図参照)。その積に関する単位元は、コボルディズム  $W_0 = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1; \phi, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  から誘導される線形写像  $Z_{W_0} : \mathbb{C} \rightarrow Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  による  $1 \in \mathbb{C}$  の像である。



こうして定義された代数  $(Z(\mathbb{T}^2), \mu_Z)$  を  $Z$  に附随する **フュージョン代数** と呼ぶ。前節で説明したように、写像類群  $\Gamma_{\mathbb{T}^2} \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  は、

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって生成され、行列  $S$  と  $T$  はそれぞれ  $\mathbb{T}^2$  上の以下のような向きを保つ同相写像と対応していた。

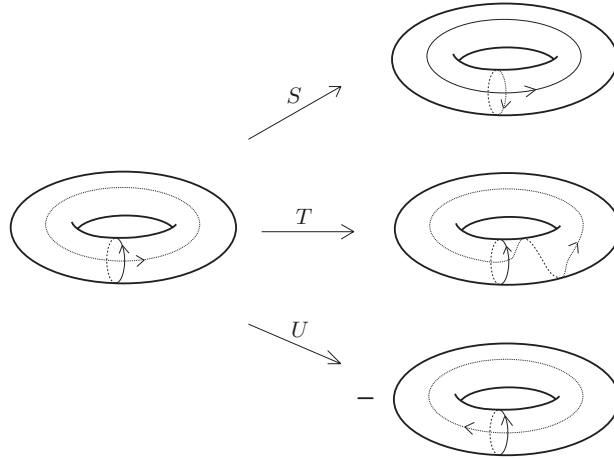
$$S(z, w) = (\bar{w}, z), \quad T(z, w) = (zw, z), \quad (z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

ここでは、さらに、もう 1 つ向きを保つ同相写像  $U : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow -\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$$U(z, w) = (z, \bar{w}), \quad (z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

を考える。





**定義 7-1** ([20])  $Z(S^1 \times S^1)$  の基底  $\{v_i\}_{i=0}^m$  が **Verlinde 基底** であるとは、以下の条件が満足されるときにいう。

- (i)  $v_0$  は単位元である。
  - (ii) (a)  $Z(S)$  は  $\{v_i\}_{i=0}^m$  に関してユニタリかつ対称行列として表わされる。  
 (b)  $Z(S)^2 v_0 = v_0$  かつ任意の  $i$  に対して  $Z(S)^2 v_i \in \{v_j\}_{j=0}^m$ .  
 (c)  $S_{ji} \in \mathbb{C}$  を  $Z(S)v_i = \sum_{j=0}^m S_{ji} v_j$  によって定義する。このとき、
    1. 任意の  $i$  に対して  $S_{i0} \neq 0$ .
    2.  $N_{ij}^k := \sum_{l=0}^m \frac{S_{il} S_{jl} \overline{S_{lk}}}{S_{0l}}$  ( $i, j, k = 0, 1, \dots, m$ ) は  $\{v_i\}_{i=0}^m$  に関するフュージョン代数の構造定数に一致する。
  - (iii)  $Z(T)$  は  $\{v_i\}_{i=0}^m$  に関してユニタリかつ対角行列として表される。
  - (iv) 同一視  $Z(-S^1 \times S^1) \cong Z(S^1 \times S^1)^*$  の下で、 $Z(U)v_i = v_i^*$  となる。
- 条件 (i), (ii.a), (ii.b),  $Z(U)v_0 = v_0^*$  を満たす  $Z(S^1 \times S^1)$  の基底を **前 Verlinde 基底** という。

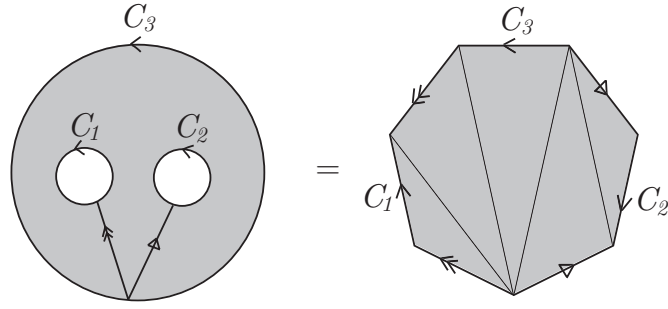
**注意 1°.**  $\{v_i\}_{i=0}^m$  が前 Verlinde 基底ならば、すべての  $i$  について  $S_{i0} \in \mathbb{R}$  である。

**注意 2°.** Verlinde 基底は要素の並べ方の順番を除いて一意的である。なぜならば、 $w_i = S_{0i} \sum_{j=0}^m \overline{S_{ji}} v_j$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) は互いに直交するフュージョン代数の原始冪等元であって、 $1 = w_0 + w_1 + \dots + w_m$  を満たしているからである [33, 42]。

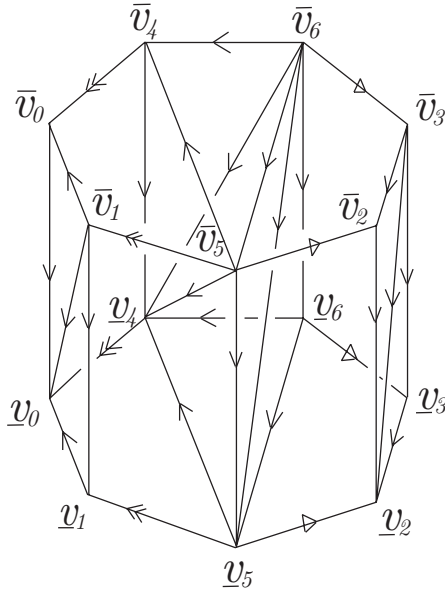
**注意 3°.**  $Z(S)^2 v_i = v_{\bar{i}}$  によって定義される写像  $\bar{\cdot} : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$  は対合であって、 $\bar{\bar{0}} = 0$  を満たす。

### §7-2. Dijkgraaf-Witten TQFT に付随するフュージョン代数

3つ穴あき球面  $Y$  は次図右のような正7角形の等化空間に同相である。次図右はまた、 $Y$  の特異単体分割を与えている。



$Y \times S^1$  は次図に描かれた (特異) 単体複体  $\tilde{\mathcal{K}}$  によって  $\mathbb{R}^3$  内に実現される :



局所順序単体コボルディズム

$$W_{\text{fusion}} := ((Y \times S^1, \tilde{\mathcal{K}}); (C_1 \times S^1, \mathcal{K}_1) \cup (C_2 \times S^1, \mathcal{K}_2), (C_3 \times S^1, \mathcal{K}_3))$$

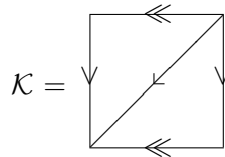
を考える。但し、 $\mathcal{K}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は  $\tilde{\mathcal{K}}$  の部分複体

$$\mathcal{K}_1 = K(|\underline{v}_0 \ \bar{v}_0 \ \bar{v}_1|) \cup K(|\underline{v}_0 \ \underline{v}_1 \ \bar{v}_1|)$$

$$\mathcal{K}_2 = K(|\underline{v}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3|) \cup K(|\underline{v}_2 \ \underline{v}_3 \ \bar{v}_3|)$$

$$\mathcal{K}_3 = K(|\underline{v}_4 \ \bar{v}_4 \ \bar{v}_6|) \cup K(|\underline{v}_4 \ \underline{v}_6 \ \bar{v}_6|)$$

を表わす。ここで、 $\mathcal{K}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は下図のような局所順序複体  $\mathcal{K}$  のコピーである。



このとき、 $\Phi_{W_{\text{fusion}}} : V((C_1 \times S^1) \cup (C_2 \times S^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \rightarrow V(C_3 \times S^1; \mathcal{K}_3)$  は次の図式を可換にする線形写像

$$\Phi_{\text{fusion}} : V(S^1 \times S^1; \mathcal{K}) \otimes V(S^1 \times S^1; \mathcal{K}) \rightarrow V(S^1 \times S^1; \mathcal{K})$$

を誘導する（下の図式の  $j_i : C_i \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は自明な方法で定義される向きを保つ同相写像である）。

$$\begin{array}{ccc}
 V((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\Phi_{W_{\text{fusion}}}} & V(C_3 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_3) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \Phi(j_3) \\
 V(C_1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_1) \otimes V(C_2 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_2) & & \\
 \Phi(j_1) \otimes \Phi(j_2) \downarrow & & \\
 V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})
 \end{array}$$

補題 6-7 により、 $\Phi_{\text{fusion}}$  は、次の図式を可換にする線形写像

$$Z_{\text{fusion}} : Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$$

を誘導する。

$$\begin{array}{ccc}
 V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\
 u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\
 Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{Z_{\text{fusion}}} & Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)
 \end{array}$$

∴)

補題 6-7 により、 $\Phi_{W_{\text{fusion}}}$  は、次の図式を可換にする線形写像

$$Z_{W_{\text{fusion}}} : Z((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) \rightarrow Z(C_3 \times \mathbb{S}^1)$$

を誘導する。

$$\begin{array}{ccc}
 V((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\Phi_{W_{\text{fusion}}}} & V(C_3 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_3) \\
 u((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \downarrow & & \downarrow u(C_3 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_3) \\
 Z((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{Z_{W_{\text{fusion}}}} & Z(C_3 \times \mathbb{S}^1)
 \end{array}$$

写像の自然性により、次の可換図式を得る。但し、

$$\begin{aligned}
 V((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) &= V((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \\
 V(C_3 \times \mathbb{S}^1) &= V(C_3 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_3)
 \end{aligned}$$

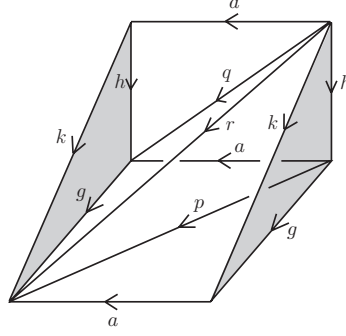
と略記し、 $u((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1); \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)$ ,  $u(C_3 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}_3)$  などをすべて  $u$  と略記した。

$$\begin{array}{ccccc}
 V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\Phi_{\text{fusion}}} & & & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \\
 \downarrow u \otimes u & \nearrow \Phi(j_1) \otimes \Phi(j_2) & & & \downarrow u \\
 & & V(C_1 \times \mathbb{S}^1) \otimes V(C_2 \times \mathbb{S}^1) \cong V((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\Phi_{W_{\text{fusion}}}} & V(C_3 \times \mathbb{S}^1) \\
 & & \downarrow u \otimes u & & \downarrow u \\
 & & Z(C_1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(C_2 \times \mathbb{S}^1) \cong Z((C_1 \times \mathbb{S}^1) \cup (C_2 \times \mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{Z_{W_{\text{fusion}}}} & Z(C_3 \times \mathbb{S}^1) \\
 \downarrow Z(j_1) \otimes Z(j_2) & & & & \downarrow Z(j_3) \\
 Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{Z_{\text{fusion}}} & & & Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)
 \end{array}$$

したがって、上の図式の最下行の写像の合成  $Z_{\text{fusion}} : Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \rightarrow Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  が求める線形写像である。□



ソリッド・トーラスは三角柱の上面と底面を張り合わせることで特異単体分割される。この三角柱の側面にある3辺を矢印に沿って同一視することによって得られる等化空間を  $P$  とおく。 $P$  は次の図で表わされる特異単体複体  $\mathcal{K}_*$  によって単体分割される。その境界に図のようにカラーを指定したとき ( $k = gh$ ,  $p = ag = ga$ ,  $q = ah = ha$ ,  $r = ak = ka$ ) に定まる Dijkgraaf-Witten 不変量を  $Z(a, g, h)$  とおく。



このとき、

$$Z(\tilde{\mathcal{K}}, \begin{smallmatrix} k, c \\ g, a; h, b \end{smallmatrix}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g', h' \in G \\ g'a = ag' \\ h'b = bh'}} Z(c, g', h') Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \begin{smallmatrix} g', c \\ g, a \end{smallmatrix}) Z(\mathcal{K} \times [0, 1]; \begin{smallmatrix} h', c \\ h, b \end{smallmatrix})$$

が成り立つ。

したがって、 $m_{\text{fusion}} : V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})$  を

$$m_{\text{fusion}} \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a & \\ g \downarrow & \leftarrow p & \downarrow g \\ & a & \end{array} \\ , \\ \begin{array}{ccc} & b & \\ h \downarrow & \leftarrow q & \downarrow h \\ & b & \end{array} \end{array} \right) = \delta_{a,b} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{k \in G \\ ak = ka}} Z(a, g, h) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a & \\ k \downarrow & \leftarrow r & \downarrow k \\ & a & \end{array} \end{array}$$

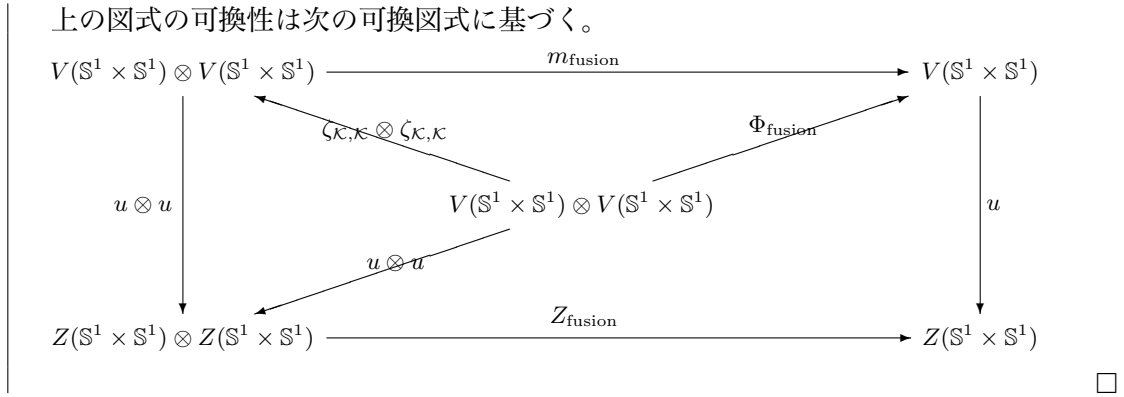
によって定義される双線形写像とすると、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\ \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \otimes \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \downarrow & \nearrow m_{\text{fusion}} & \\ V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & & \end{array}$$

したがって、また、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{m_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\ u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\ Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{Z_{\text{fusion}}} & Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \end{array}$$

∴)



**注意 1°:**  $Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  を  $\text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  と同一視するとき、 $(Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1), Z_{\text{fusion}})$  は  $(V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}), m_{\text{fusion}})$  の部分代数になっている。

(証明)

$\Phi_{\text{fusion}} = \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \circ \Phi_{\text{fusion}}$  であるから、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\Phi_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\
\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \otimes \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \downarrow & \searrow \Phi_{\text{fusion}} & \downarrow \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \\
V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{m_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})
\end{array}$$

したがって、

$$m_{\text{fusion}}(\text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \otimes \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}) \subset \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$$

となる。

線形同型写像  $Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) / \text{Ker } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \rightarrow \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}$  を  $\ell$  とおく。 $\ell$  は各  $u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})(x)$  (但し、 $x \in V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})$ ) を  $\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(x)$  に写す写像である。

次の図式が可換になることを示す ( $i$  は包含写像)。

$$\begin{array}{ccc}
V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \otimes V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) & \xrightarrow{m_{\text{fusion}}} & V(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K}) \\
i \otimes i \uparrow & & \uparrow i \\
\text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \otimes \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} & & \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \\
\ell \otimes \ell \uparrow & & \uparrow \ell \\
Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \otimes Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{Z_{\text{fusion}}} & Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)
\end{array}$$

今、 $x, y \in Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  を任意にとる。

$$m_{\text{fusion}}((i \otimes i) \circ (\ell \otimes \ell)(x \otimes y)) = m_{\text{fusion}}(\ell(x) \otimes \ell(y)) \in \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

一方、全射  $u(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathcal{K})$  を  $u$  とおくと、任意の  $x \in Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  について、 $u(\ell(x)) = x$  が成り立つ ( $\because u \circ \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} = u$ )。よって、

$$\begin{aligned}
(i \circ \ell \circ Z_{\text{fusion}})(x \otimes y) &= (\ell \circ Z_{\text{fusion}})(u(\ell(x)) \otimes u(\ell(y))) \\
&= (\ell \circ u \circ m_{\text{fusion}})(\ell(x) \otimes \ell(y)) \in \text{Im } \zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\dim(\text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}}) = \dim Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  および  $u|_{\text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}}} \circ \ell = \text{id}$  により、 $u|_{\text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}}} : \text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}} \rightarrow Z(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  は線形同型写像である。したがって、①と②の左辺同士が等しいことを示すには、 $u|_{\text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}}}$  による像が等しいことを示せばよいが、①と②の右辺同士の  $u|_{\text{Im}\zeta_{\mathcal{K},\mathcal{K}}}$  による像はともに  $(u \circ m_{\text{fusion}})(\ell(x) \otimes \ell(y))$  となって等しい。故に、①と②の左辺同士も等しい。□

$$\begin{aligned} \text{注意 } 2^\circ : Z(a, g, h) &= \sqrt{|G|} \times \begin{array}{c} \overline{\bar{v}_1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{v}_0 \quad \bar{v}_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \underline{v}_0 \quad \underline{v}_1 \end{array} \\ &= \sqrt{|G|} \frac{\alpha(g, a, h)}{\alpha(a, g, h)\alpha(g, h, a)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ g \quad g \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \end{array}, \begin{array}{c} b \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad h \\ \swarrow \quad \searrow \\ b \end{array} \end{array} \text{ を } m_{\text{fusion}} \text{ で写したものの } \begin{array}{c} c \\ \swarrow \quad \searrow \\ k \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ c \end{array} \text{ の係数は}$$

$$\delta_{a,b}\delta_{a,c} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{\alpha(g, a, h)}{\alpha(a, g, h)\alpha(g, h, a)}$$

となる。但し、 $p = ga = ag$ ,  $q = hb = bh$ ,  $r = kc = ck$  である。 $[a, g] = [a, h] = 1$  のとき、

$$\frac{\alpha(g, a, h)}{\alpha(a, g, h)\alpha(g, h, a)} = \theta_a(g, h)$$

と書けるから、

$$(7.1) \quad m_{\text{fusion}}(e(g, a) \otimes e(h, b)) = \delta_{a,b}\delta_{a,c} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \theta_a(g, h) \sum_{k \in Z(a)} e(k, a)$$

となることがわかる。

(7.1) を用いて  $m_{\text{fusion}}(v_a^i \otimes v_b^j)$  を計算すると、次の補題が得られる。

**補題 7-2** 基底  $\{v_a^i\}_{i,a}$  に関するフュージョン代数  $Z(\mathbb{T}^2)$  の構造定数  $N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)}$  は次式で与えられる：

$$(7.2) \quad N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{p \in G \\ g \in C_i, l \in C_j, m \in C_k \\ m=lg \\ [p,g]=[p,l]=[p,m]=1}} \overline{\theta_p(l, g)} \overline{\chi_a^g(p)} \overline{\chi_b^l(p)} \chi_c^m(p).$$

**注意：**この構造定数は Dijkgraaf, Vafa, E.Verlinde. H.Verlinde が導入したオービフォルド模型のフュージョン代数 [9] に一致している。このことから、 $N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)}$  は次の性質を持つことがわかる (c.f. [35])：

(i)  $N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)}$  は非負整数である。

(ii)  $N_{(i,a),(j,b),(k,c)} := N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)}$  は  $(i, a), (j, b), (k, c)$  に関して対称である。

(iii)  $N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)} = N_{(i,a),(j,b)}^{(k,c)}$ .

(iv)  $N_{(0,0),(j,b)}^{(k,c)} = \delta_{(j,b),(k,c)}$ .

ここで、 $\hat{i}$  は、写像  $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  が引き起こす共役類の間の対応関係  $C_i \mapsto \{g^{-1} \mid g \in C_i\} = C_{\hat{i}}$  により定義されている。また、 $C_0 = \{1\}$  であり、 $\chi_0^g$  は  $Z(g)$  の自明な射影指標を表わす。

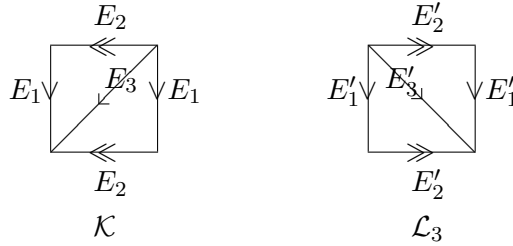
$Z(U) : Z(\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(-\mathbb{T}^2) \cong Z(\mathbb{T}^2)^*$  が Verlinde 基底の定義における条件 (iv) を満足することを観察しよう。  $U$  を  $\mathbb{T}^2$  の普遍被覆

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (\exp(2\pi iy), \exp(2\pi ix))$$

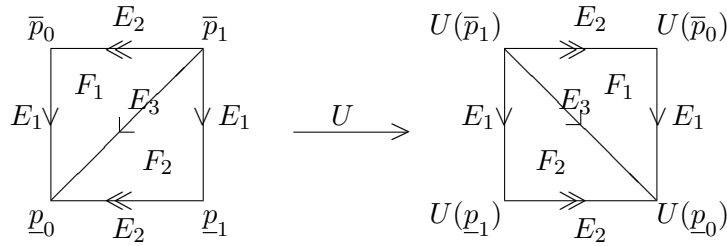
上の同相写像に持ち上げたものを同じ記号で書くことにすると、

$$U(x, y) = (-x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ。



このことから、 $\mathbb{T}^2$  の局所順序つき特異単体分割  $\mathcal{L}_3$  を上図のように定めると、 $U$  は  $\mathcal{K}$  から  $\mathcal{L}_3$  への局所順序を保つ単体写像であることがわかる。



同型写像  $U : (\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_3)$  が引き起こす  $\mathbb{C}$ -線形同型写像  $\Phi(U) : V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K}) \rightarrow V(-\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_3)$  は次のような写像である。

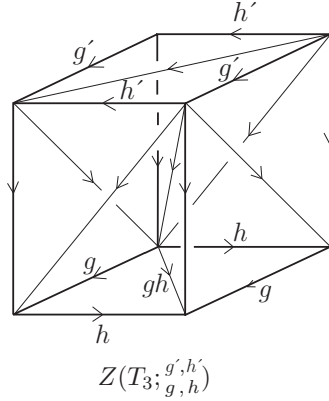
$$\Phi(U) \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{h} & \\ E_1 \downarrow & \swarrow^{gh} & \downarrow E_1 \\ & \xleftarrow{h} & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{h} & \\ & \swarrow^{gh} & \downarrow E_1 \\ & \xleftarrow{h} & \end{array} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & \\ g \downarrow & \swarrow^{gh} & \downarrow g \\ & \xrightarrow{h} & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{h} & \\ & \swarrow^{gh} & \downarrow g \\ & \xrightarrow{h} & \end{array} \end{array}$$



$U_{\sharp} : V(S^1 \times S^1; \bar{K}) \rightarrow V(-S^1 \times S^1; \bar{K})$  を

$$U_{\sharp} = \zeta_{-S^1 \times S^1, \bar{L}_3, \bar{K}} \circ \Phi(U)$$

によって定義する。



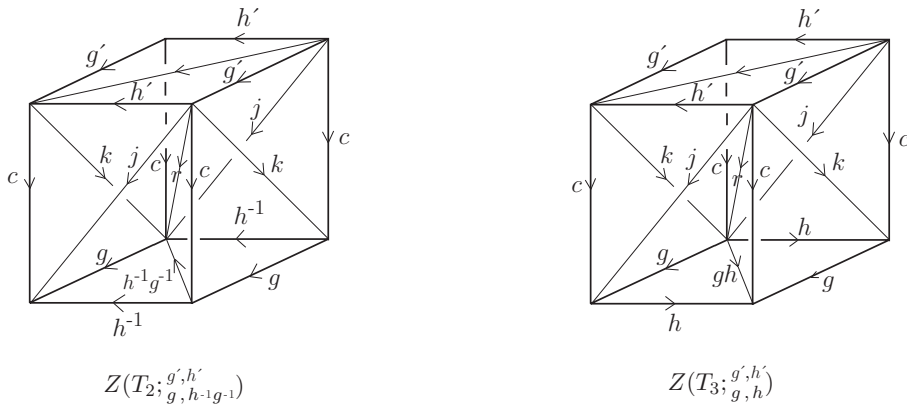
$(T_3; g, h')$  を上図のような  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  の局所順序複体としての単体分割とし、その境界上のカラーが図に示されているように指定されたものとする。 $Z(T_3; g, h')$  をそのときの Dijkgraaf-Witten 不変量とすると、次の式が成り立つ。

$$U_{\sharp} \left( \begin{array}{c} \text{square with edges } h, h', g, g' \\ \text{diagonal } gh, g'h' \end{array} \right) = \sum_{\substack{g', h' \in G \\ [g', h'] = 1}} Z(T_3; g, h') \begin{array}{c} \text{square with edges } h', h, g, g' \\ \text{diagonal } gh, g'h' \end{array}$$

命題 6-5 により、この  $U_{\sharp}$  は  $Z(U) : Z(\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(-\mathbb{T}^2)$  を誘導する。 $U_{\sharp}$  を計算する。次の等式が成り立つ。

$$(7.3) \quad Z(T_3; g, h') = \frac{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, g)}{\alpha(h, g, h^{-1})} \overline{Z(T_2; g, (gh)^{-1})}$$

これを示す。



$$\begin{aligned}
|G|Z(T_2; g', h')_{g, (gh)^{-1}} &= \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Triangle with vertices } g, h^{-1}g^{-1}, c \text{ and edges } g, h^{-1}, c, r, j \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Triangle with vertices } h^{-1}g^{-1}, g, h^{-1}, k \text{ and edges } h^{-1}g^{-1}, g, h^{-1}, k, r, c \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Triangle with vertices } h^{-1}g^{-1}, k, h' \text{ and edges } h^{-1}g^{-1}, k, h', r, c, j \end{array} \\ \times & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Triangle with vertices } g', h' \text{ and edges } g', h', c, r, j, k \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Triangle with vertices } h', g' \text{ and edges } h', g', r, c, j, k \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Triangle with vertices } k, h^{-1} \text{ and edges } k, h^{-1}, r, c, j, g' \end{array} \end{array} \\ &= \frac{\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, c)}{\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, k)\alpha(g, k, h')} \frac{\alpha(k, g', h')\alpha(h^{-1}, k, g')}{\alpha(k, h', g')} \dots (\star 1)
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
\overline{|G|Z(T_3; g', h')_{g, h}} &= \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Triangle with vertices } g, h, r \text{ and edges } g, h, r, j, c \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Triangle with vertices } h, g, h' \text{ and edges } h, g, h', r, c, k \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Triangle with vertices } g, h', h' \text{ and edges } g, h', h', r, c, j \end{array} \\ \times & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Triangle with vertices } g', h' \text{ and edges } g', h', c, r, j, k \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Triangle with vertices } h', g' \text{ and edges } h', g', r, c, j, k \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Triangle with vertices } r, g' \text{ and edges } r, g', k, j, h, c \end{array} \end{array} \\ &= \frac{\alpha(h, g, r)}{\alpha(g, h, r)\alpha(g, k, h')} \frac{\alpha(k, g', h')}{\alpha(k, h', g')\alpha(h, r, g')} \dots (\star 2)
\end{aligned}$$

を得る。(7.3)を示すには、

$$\frac{\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, c)\alpha(h^{-1}, k, g')}{\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, k)} = \frac{\alpha(h, g, r)}{\alpha(g, h, r)\alpha(h, r, g')}$$

を示せばよい。カラー条件により、 $c = gk$ ,  $r = h^{-1}k$  であるから、上の式は

$$\begin{aligned}
(7.4) \quad & \frac{\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, gk)\alpha(h^{-1}, k, g')}{\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, k)} \frac{\alpha(g, h, h^{-1}k)\alpha(h, h^{-1}k, g')}{\alpha(h, g, h^{-1}k)} \\ &= \frac{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, g)}{\alpha(h, g, h^{-1})}
\end{aligned}$$

と書き換えることができる。これを示す。

- $h, h^{-1}, k, g'$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h^{-1}, k, g')\alpha(h, h^{-1}k, g')\alpha(h, h^{-1}, k) = \alpha(1, k, g')\alpha(h, h^{-1}, kg').$$

- $g, h^{-1}g^{-1}, g, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h^{-1}g^{-1}, g, k)\alpha(g, h^{-1}, k)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, g) = \alpha(h^{-1}, g, k)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, gk).$$

- $h, g, h^{-1}, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(g, h^{-1}, k)\alpha(h, gh^{-1}, k)\alpha(h, g, h^{-1}) = \alpha(hg, h^{-1}, k)\alpha(h, g, h^{-1}k).$$

- $g, h, h^{-1}, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h, h^{-1}, k)\alpha(g, 1, k)\alpha(g, h, h^{-1}) = \alpha(gh, h^{-1}, k)\alpha(g, h, h^{-1}k).$$

- $h, h^{-1}, g, k$  に関する 3-コサイクル条件より、

$$\alpha(h^{-1}, g, k)\alpha(h, h^{-1}g, k)\alpha(h, h^{-1}, g) = \alpha(1, g, k)\alpha(h, h^{-1}, gk).$$

これらの等式とカラー条件に由来する等式  $gh = hg, kg' = gk$  を使うと、(7.4) が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} Z(T_3; g', h') &= \frac{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, g)}{\alpha(h, g, h^{-1})} \overline{Z(T_2; g', h')} \\ &= \frac{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)\alpha(g, h^{-1}g^{-1}, g)}{\alpha(h, g, h^{-1})} \overline{Z(T_4; g', h')} \\ &= \frac{\alpha(g, h, h^{-1})\alpha(h, h^{-1}, g)}{\alpha(h, g, h^{-1})} \overline{\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h^{-1}))} \\ &= \theta_g(h, h^{-1})^{-1} \overline{\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h^{-1}))} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\overline{\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h^{-1}))}$  は  $\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}(e(g, h^{-1}))$  を基底  $\{e(g', h') \mid (g', h') \in G \times G, [g', h'] = 1\}$  の係数を複素共役に取り替えたものを表わす。

これより、 $\tilde{U}_\sharp: V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \rightarrow V(-\mathbb{T}^2; \mathcal{K})$  を

$$\tilde{U}_\sharp \left( g \begin{array}{c} \xleftarrow{h} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \xleftarrow{h} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ \xleftarrow{h} \end{array} g \right) = \theta_g(h, h^{-1})^{-1} g \begin{array}{c} \xleftarrow{h^{-1}} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \xleftarrow{h^{-1}} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ \xleftarrow{h^{-1}} \end{array} g$$

と定めると、

$$U_\sharp = \overline{\zeta_{\mathcal{K}, \mathcal{K}}} \circ \tilde{U}_\sharp = \zeta_{-\mathcal{K}, -\mathcal{K}} \circ \tilde{U}_\sharp$$

が成り立つ。よって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) & \xrightarrow{\tilde{U}_\sharp} & V(-\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ u(\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \downarrow & & \downarrow u(-\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \\ Z(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{Z(U)} & Z(-\mathbb{T}^2) \end{array}$$

故に、任意の  $i = 0, 1, \dots, r$  と任意の  $a = 0, 1, \dots, t(i)$  に対して

$$\begin{aligned} U_\sharp(v_a^i) &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \chi_a^g(h) U_\sharp(e(g, h)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \theta_g(h, h^{-1})^{-1} \chi_a^g(h) \zeta_{-\mathcal{K}, -\mathcal{K}}(e(g, h^{-1})) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \theta_g(h, h^{-1})^{-1} \chi_a^g(h) \chi_b^g(h^{-1}) \overline{v_b^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{b=0}^{t(i)} \chi_a^g(h) \overline{\chi_b^g(h)} \overline{v_b^i} \\
&= \frac{|Z(g)|}{|G|} \sum_{g \in C_i} \sum_{b=0}^{t(i)} \delta_{a,b} \overline{v_b^i} \quad (\because \text{射影指標の第一直交関係式}) \\
&= \frac{|Z(g)|}{|G|} \sum_{g \in C_i} \overline{v_a^i} \\
&= \overline{v_a^i}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\overline{v_a^i} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \overline{\chi_a^g(h)} e(g, h)$$

とおいている。

命題 6-6 で定義されている線形写像  $\Theta_{\mathbb{T}^2, \mathcal{K}} : V(-\mathbb{T}^2; \mathcal{K}) \rightarrow V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K})^*$  を考える。このとき、任意の  $(i, a), (j, b)$  に対して

$$\langle (\Theta_{\mathbb{T}^2, \mathcal{K}} \circ \tilde{U}_\#)(v_i^a), v_j^b \rangle = \delta_{(i,a), (j,b)}$$

が成り立つ。

∴)

$V(\mathbb{T}^2, \mathcal{K})$  の基底  $\{e(g, h)^* \mid (g, h) \in G \times G, [g, h] = 1\}$  に双対的な基底を  $\{e(g, h) \mid (g, h) \in G \times G, [g, h] = 1\}$  とおくと、

$$\begin{aligned}
(\Theta_{\mathbb{T}^2, \mathcal{K}} \circ \tilde{U}_\#)(v_i^a) &= \Theta_{\mathbb{T}^2, \mathcal{K}}(\overline{v_a^i}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \overline{\chi_a^g(h)} e(g, h)^*
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\langle (\Theta_{\mathbb{T}^2, \mathcal{K}} \circ \tilde{U}_\#)(v_i^a), v_j^b \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{\substack{k \in C_j \\ l \in Z(k)}} \overline{\chi_a^g(h)} \chi_b^k(l) \langle e(g, h)^*, e(k, l) \rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \sum_{\substack{k \in C_j \\ l \in Z(k)}} \delta_{g,k} \delta_{h,l} \overline{\chi_a^g(h)} \chi_b^k(l) \\
&= \frac{1}{|G|} \delta_{i,j} \sum_{\substack{g \in C_i \\ h \in Z(g)}} \overline{\chi_a^g(h)} \chi_b^g(h) \\
&= \delta_{i,j} \frac{1}{|G|} \delta_{a,b} \sum_{g \in C_i} |Z(g)| \\
&= \delta_{i,j} \delta_{a,b}
\end{aligned}$$

である。

□

このことは、 $Z(U) : Z(\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(-\mathbb{T}^2)$  と命題 6-6 で定義されている線形同型写像  $\theta_{\mathbb{T}^2} : Z(-\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(\mathbb{T}^2)^*$  との合成  $\theta_{\mathbb{T}^2} \circ Z(U) : Z(\mathbb{T}^2) \rightarrow Z(\mathbb{T}^2)^*$  が

$$(7.5) \quad (\theta_{\mathbb{T}^2} \circ Z(U))(v_i^a) = (v_i^a)^*$$

を満たすことを意味する (詳細は [40] を参照)。

以上で幾何学的な考察は済んだので、残りは代数的な計算を厳密に実行することにより、次の定理が得られる。(Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde [9] で述べられていることを定式化して使う。特に、その中で与えられている公式 (4.47) を使う。詳しい議論は [35] を参照。)

**定理 7-3** 第 6-3 節で与えられている  $Z(\mathbb{T}^2)$  の基底  $\{v_a^i\}_{i,a}$  は Verlinde 基底である。

**注意 7-4** Dijkgraaf, Pasquier, Roche [8] は、有限群  $G$  とその正規化された 3-コサイクル  $\alpha$  を用いて、準三角準ホップ代数 [11] の構造を持った代数  $\mathcal{A}(G, \alpha)$  を構成した。この代数の性質は [2, 4, 5, 35] 等で詳しく調べられている。Dijkgraaf-Witten TQFT との関連では、フュージョン代数  $Z(\mathbb{T}^2)$  は準三角準ホップ代数  $\mathcal{A}(G, \alpha)$  の指標によって生成される代数に同型となることが示されている [36]。

Altschuler と Coste [2] はこの準三角準ホップ代数  $\mathcal{A}(G, \alpha)$  を初期データとしたときの Reshetikhin-Turaev 型の不変量 (枠付き絡み目に沿う Dehn 手術による 3 次元多様体の表示を利用して定義される量子不変量) を構成している。彼らの不変量は Dijkgraaf-Witten 不変量と一致することが [28; Corollary 5.5] において報告されている。

## References

- [1] J.W. Alexander, *The combinatorial theory of complexes*, Ann. of Math. **31** (1930), 292–320.
- [2] D. Altschuler and A. Coste, *Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds, and topological field theory*, Commun. Math. Phys. **150** (1992), 83–107.
- [3] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. I.H.E.S. **68** (1989), 175–186.
- [4] P. Bantay, *Orbifold and Hopf algebras*, Phys. Lett. B **245** (1990), 477–479.
- [5] P. Bantay, *Orbifold, Hopf algebras, and moonshine*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 187–194.
- [6] J.W. Barrett and B.W. Westbury, *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. A.M.S. **348** (1996), 3997–4022.
- [7] J.S. Carter, L.H. Kauffman and M. Saito, *Structures and diagrammatics of four dimensional topological lattice field theories*, Adv. Math. **146** (1999), 39–100.
- [8] R. Dijkgraaf, V. Pasquier and P. Roche, *Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **18 B** (1990), 60–72.
- [9] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde and H. Verlinde, *The operator algebra of orbifold models*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 485–526.
- [10] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Commun. Math. Phys. **129** (1990), 393–429.
- [11] V.G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419–1457.
- [12] S. Eilenberg and S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups. I*, Annals of Math. **48** (1947), 51–78.
- [13] M.E. Gross and S. Varsted, *Elementary moves and ergodicity in D-dimensional simplicial quantum gravity*, Nucl. Phys. B **378** (1992), 367–380.
- [14] E. Hatakenaka, *Invariants of 3-manifolds derived from covering presentations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010), 263–295.
- [15] E. Hatakenaka and T. Nosaka, *Some topological aspects of 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, preprint, 2010.

- [16] M. Izumi, *Subalgebras of finite  $C^*$ -algebras with finite Watatani indices, II: Cuntz-Krieger algebras*, Duke Math. J. **91** (1998) 409–461.
- [17] 蒲谷祐一, private communications by e-mail, 2010 年 4 月 15 日, 22 日.
- [18] Y. Kabaya, *Cyclic branched coverings of knots and quandle homology*, arXiv:1012.3729v1 [math.GT] 16 Dec. 2010.
- [19] G. Karpilovsky, *Projective representations of finite groups*, (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 94), Marcel Dekker, 1985.
- [20] Y. Kawahigashi, N. Sato and M. Wakui,  *$(2+1)$ -dimensional topological quantum field theory from subfactors and Dehn surgery formula for 3-manifold invariants*, Adv. Math. **195** (2005), 165–204.
- [21] H. Murakami, T. Ohtsuki, M. Okada, *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links*, Osaka J. Math. **29** (1992), 545–572.
- [22] T. Nosaka, *Quandle cocycle invariants of knots using Mochizuki’s 3-cocycles and Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds*, arXiv:1103.3839v3 [math.GT] 2 May 2011.
- [23] 大槻知忠, private communications by e-mail, 2009 年 4 月 15 日–17 日.
- [24] 大槻知忠, 量子不変量, in 『幾何学百科』第 2 卷 (近刊), 朝倉書店.
- [25] U. Pachner, *Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten*, (German) Arch. Math. (Basel) **30** (1978), 89–98.
- [26] U. Pachner, *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, Europ. J. Comb. **12** (1991), 129–145.
- [27] J. Petit, *The invariant of Turaev-Viro form group category*, arXiv:0608614v2 [math.QA] 29 Aug. 2006.
- [28] N. Sato and M. Wakui,  *$(2+1)$ -dimensional topological quantum field theory with Verlinde basis and Turaev-Viro-Oceanu invariants of 3-manifolds*, Geometry and Topology Monographs 4 (2002), Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 281–294.
- [29] N. Sato and M. Wakui, *Computations of Turaev-Viro-Oceanu invariants of 3-manifolds from subfactors*, J. Knot Theory and its Ramif. **12** (2003), 543–574.
- [30] V.G. Turaev *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, 2nd revised edition, (Studies in Mathematics 18), Walter de Gruyter, 1994, 2010.
- [31] V.G. Turaev and O.Ya. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** (1992), 865–902.
- [32] 津島行男・永尾汎 『有限群の表現』(数学選書 8), 裳華房, 1987.
- [33] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nucl. Phys. B **300** (1988), 360–376.
- [34] M. Wakui, *On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds*, Osaka J. Math. **29** (1992), 675–696.
- [35] M. Wakui, *Fusion algebras for orbifold models*, unpublished manuscript, 1993.
- [36] M. Wakui, *Fusion algebras for orbifold models (a survey)*, “Topology, geometry and field theory”, edited by K. Fukaya, M. Furuta, T. Kohno and D. Kotschick, World Scientific, 225–235, 1994.
- [37] 和久井道久, *The 3-manifold invariants of Dijkgraaf-Witten*, 修士論文, 九州大学大学院理学研究科, 1992.
- [38] 和久井道久 『単体の複体の星状細分に関する理論』(すうがく文庫 28), 私家本, 1995.
- [39] 和久井道久, Turaev-Viro-Oceanu TQFT における内積について, a note, 2001/2/21.
- [40] 和久井道久,  $E_6$ -部分因子環から導かれる Turaev-Viro-Oceanu TQFT に附随する Verlinde 基底について (決定版), a note, 2002/4/30; 2003/7/15 revised.
- [41] 和久井道久, 2-cocycle と 3-cocycle の「標準形」について, a note, 2010/1/11.
- [42] E. Witten, *Quantum field theory and Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.
- [43] D.N. Yetter, *Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed  $G$ -sets*, J. Knot Theory and its Ramif. **1** (1992), 1–20.
- [44] 寺嶋郁二, private communications by e-mail, 2018 年 1 月 7 日, 9 日, 27 日, 2 月 1 日.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science  
 Kansai University  
 3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan