

# 籠目結びのアレクサンダー多項式

## —行列に基づく計算と考察—

矢野 敦士 (表現論研究室)

私は、特別研究でC. アダムス著「結び目の数学」[1]を読んで、結び目の最初の多項式不変量であるアレクサンダー多項式の性質について興味をもった。通常、アレクサンダー多項式は1969年にJohn Conwayが発見したスケイン関係式と呼ばれるものを用いて計算するのが一般的だが、この論文では[3]において導入された彩色行列を用いた方法でアレクサンダー多項式を定義し、籠目結びに対して計算する。計算においては部分的に数式処理ソフトウェア[4]を用いる。

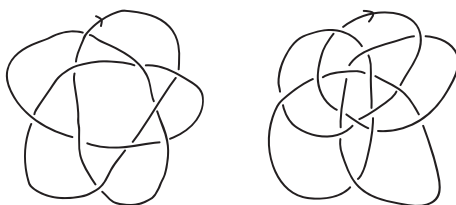


図0:二種類の籠目結び

籠目結びには10交点(図0左図)と15交点(図0右図)の結び目がある。また、15交点の籠目結びには**五角結び**という別名もある。

籠目結びは合格祈願の際に用いられる飾りで、主に絵馬をとめる飾り紐に使われている。一説によると、結び目が籠の目のように見えることからこのように名付けられた。籠の目を作ることで厄が抜けていくことから厄除けという意味合いがある。

### §1. 結び目

日常生活での結び目は一本の紐を結び合わせてできた瘤状のものを指すが、数学では紐の両端を合わせて一つに繋げたものを表す。正確には次のように定義される。

**定義 1.1 結び目**とは、円周  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  の三次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  への埋め込みを指す。

図1.2左図のようにどこも結んでいない一本の曲線の両端をそのままくっつけて交点のない円周にしたものを**自明な結び目**という。

また自明でない最も簡単な結び目は、一本の曲線を一回だけ結んで両端をくっつけたものである(図1.2右図)。これを**三葉結び目**という。



図 1.2: 自明な結び目と三葉結び目

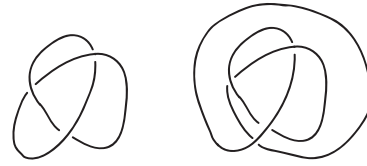


図 1.3: 同じ二つの結び目

図 1.2 のように  $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれた結び目を交点が二重点のみであり、各交点において二本の弧が横断的に交わるように平面上に射影したものを、その結び目の**射影図**という。ただし、空間内で二本の弧のどちらが上であるかが分かるように、下を通る弧には小さい切れ目を付す。

二つの結び目  $K$  と  $K'$  が**同じ結び目**である、あるいは**同値**であるとは、 $K$  を切らずに  $\mathbb{R}^3$  内で連続的に変形して  $K'$  が得られるときをいう。例えば、図 1.3 の左の三葉結び目は図 1.3 の右の結び目に同値である。

## §2. ライデマイスター移動

**定義 2.1** 結び目の射影図に対して施す、交点の関係を変えるような以下の 3 つの基本的な変形操作を**ライデマイスター移動**という。

**ライデマイスター移動 I** は、結び目の弧にひねりを入れてループを作る、または、はずす操作である (図 2.2)。

**ライデマイスター移動 II** は、片方の結び目の弧の一部分ををもう片方の結び目の弧の下に潜らせる、または、その逆の操作である (図 2.3)。

**ライデマイスター移動 III** は、結び目の弧の一部分を交点の上または下を横切るように滑らせる操作である (図 2.4)。

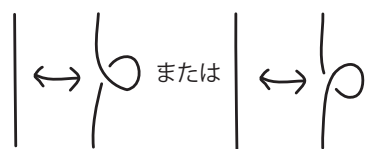


図 2.2: ライデマイスター移動 I

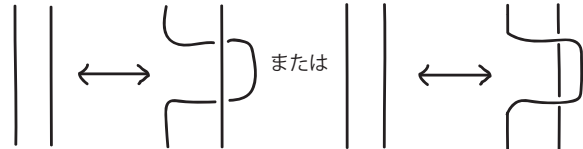


図 2.3: ライデマイスター移動 II



図 2.4: ライデマイスター移動 III

これらの移動によって、結び目の射影図は変わるが、その射影図を表す結び目は変わらない。すなわち、次の結果が成り立つ。

**定理 2.5(ライデマイスターの定理)**

二つの結び目が同じ結び目であることは、射影図にライデマイスター移動I,II,IIIと平面上の連続変形を繰り返し施すことによって移りあうことと同値である。

実際に、図 1.3 の左の三葉結び目に適当なライデマイスター移動を施すと図 1.3 の右の結び目に変形できる (図 2.6).

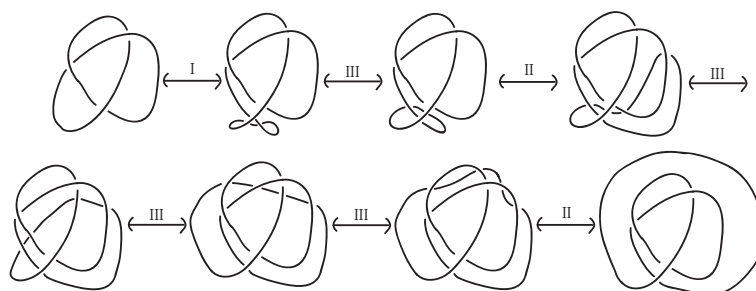


図 2.6

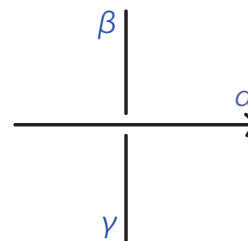
**§3. アレクサンダー多項式と行列**

この節では、結び目の交点における彩色方程式とよばれるものを定義する. 例として簡単な結び目を取りあげ、彩色方程式から行列式を作り、それを計算してアレクサンダー多項式を求める方法を検証していく.

この論文では [2] と Livingston [3] に従い、アレクサンダー多項式を彩色方程式から行列式を作ることにより定義する.

以下、 $t$  を不定元として、 $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  を考える.

この節以降では、結び目の射影図において、ある下を通る交点からある下を通る交点までの曲線を**弧**と呼ぶ.



**定義 3.1** 向きづけられた結び目の射影図を考える. 右図のように弧にラベル ( $\alpha, \beta, \gamma$  は弧の番号) が付けられたとき、その交点での彩色方程式は  $\alpha + \gamma t - \alpha t - \beta = 0$  である.

**定義 3.2**  $K$  を向きづけられた結び目とし、その射影図  $D$  を考える.  $D$  の交点に  $1, \dots, n$ 、弧の部分に  $x_1, \dots, x_n$  というラベルを付ける.  $i$  番目の交点における彩色方程式の  $x_j$  の係数を行列の  $(i, j)$  成分に書くことにすると、次の行列が得られる.

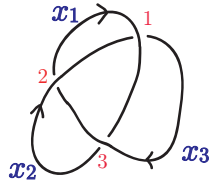
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

この行列の任意の行と任意の列を消去してから行列式をとったものを  $\Delta_K(t)$  で表す. 弧と交差の順序の選び方や、消去する行と列の選択によって異なるアレクサンダー多項式が得られるが  $\Delta_K(t)$  は後の定理 3.4 で証明されるように、 $\pm t^m (m \in \mathbb{Z})$  倍

を除いて  $K$  の射影図  $D$  の選び方によらない [2].  $\Delta_K(t)$  を  $K$  の **アレクサンダー多項式** という.

**注意:** どの結び目に対しても必ず交点数と弧のラベルの数が同じになるように変形できる [2, p.18].

**例 3.3** 三葉結び目のアレクサンダー多項式を計算する. 定義 3.2 に基づいて、弧と交点にラベルを付け、各交点の彩色方程式を書く.



$$\begin{aligned} 1: x_1 + tx_2 - tx_1 - x_3 &= (1-t)x_1 + tx_2 - x_3 = 0 \\ 2: x_2 + tx_3 - tx_2 - x_1 &= -x_1 + (1-t)x_2 + tx_3 = 0 \\ 3: x_3 + tx_1 - tx_3 - x_2 &= tx_1 - x_2 + (1-t)x_3 = 0 \end{aligned}$$

この各交点の彩色方程式の各係数から得られる行列は次である.

$$\begin{pmatrix} 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \\ t & -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

この行列の 1 行目 1 列目を消して  $2 \times 2$  行列を計算すると

$$\Delta_{3_1}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & t \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - t + 1 \doteq \underline{t-1+t^{-1}} \text{ が得られる.}$$

この定義において、 $\Delta_K(t)$  は、 $\pm t^m (m \in \mathbb{Z})$  だけ不定性があるが、統一のために今後は  $\Delta_K(t)$  の最高次の係数を正にし、最高次と最低次の次数が  $-n$  あるいは  $n (n \in \mathbb{Z})$  となる形で表すことにする. そのような形に変形するとき「 $=$ 」の代わりに「 $\doteq$ 」を使うことにする.

**定理 3.4 (Alexander)**

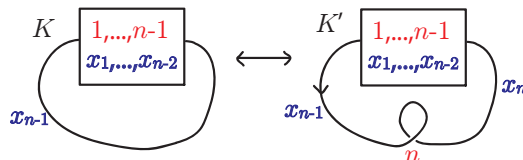
アレクサンダー多項式は結び目不変量である.

(証明)

[2] に従って証明する.

(1) ライデマイスター移動 I で不変であることを示す.

ライデマイスター移動 I を行う図の弧と交差に下図のようにラベルを付ける.



結び目  $K'$  の交点  $n$  の彩色方程式は  $x_{n-1} + tx_{n-1} + tx_{n-1} - x_n = \underline{x_{n-1} - x_n} = 0$  である.

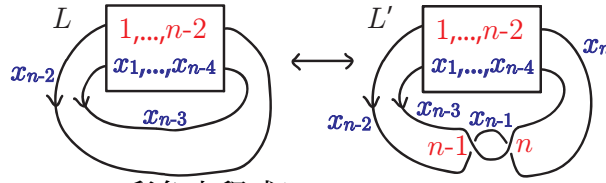
結び目  $K$  から得られる彩色方程式から作られる行列の  $n-1$  行目および  $n-1$  列目を削った行列を  $P$  とすると、 $K'$  から得られる同じ番号の行と列を削った行列式は次のようになる (ただし、 $p_{in} (1 \leq i \leq n-1)$  は  $\square$  の中の  $x_n$  が接している交点の彩色方程式の  $x_n$  の係数である).

$$\left| \begin{array}{c|c} P & \begin{array}{c} \vdots \\ p_{in} \\ \vdots \end{array} \\ \hline 0, \dots, 0 & -1 \end{array} \right| \text{これが } \Delta_{K'}(t) \text{ である.}$$

よって、 $\Delta_{K'}(t) = -\det(P) = -\Delta_K(t) \doteq \Delta_K(t)$  となり、 $\Delta_K(t)$  はライデマイスター移動 I のもとで不変である。向きが逆向きの場合も同様に示せる。

(2) ライデマイスター移動 II で不変であることを示す。

ライデマイスター移動 II を行う図の弧と交差に下図のようにラベルを付ける。



結び目  $L'$  の交点  $n-1, n$  の彩色方程式は

$$\begin{aligned} n-1: (1-t)x_{n-3} + tx_{n-2} - x_{n-1} &= 0 \\ n: (1-t)x_{n-3} - x_{n-1} + tx_n &= 0 \end{aligned}$$

である。結び目  $L$  から得られる彩色方程式から作られる行列の  $n-2$  行目および  $n-2$  列目を削った行列を  $Q$  とすると、 $L'$  から得られる同じ番号の行と列を削った行列は次のようになる (ただし、 $q_{in} (1 \leq i \leq n-2)$  は  $\square$  の中の  $x_n$  が接している交点の彩色方程式の  $x_n$  の係数である)。

$$\left| \begin{array}{c|cc} Q & 0 & \vdots \\ & \vdots & q_{in} \\ & 0 & \vdots \\ \hline 0, \dots, 1-t & -1 & 0 \\ 0, \dots, 1-t & -1 & t \end{array} \right| \text{これが } \Delta_{L'}(t) \text{ である.}$$

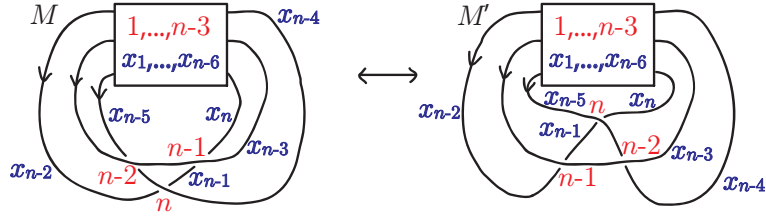
$$\begin{aligned} \Delta_{L'}(t) & \stackrel{\text{(後ろから 2 行目} \times (-1) + \text{最終行))}}{=} \left| \begin{array}{c|cc} Q & 0 & \vdots \\ & \vdots & q_{in} \\ & 0 & \vdots \\ \hline 0, \dots, 1-t & -1 & 0 \\ 0, \dots, 0 & 0 & t \end{array} \right| = t \left| \begin{array}{c|c} Q & \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \\ \hline 0, \dots, 1-t & -1 \end{array} \right| \\ & = t \det(Q) = -t \Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t). \end{aligned}$$

よって、 $\Delta_L(t)$  はライデマイスター移動 II のもとで不変である。

図の  $\square$  の外に描かれている矢印の向きの付け方はこの他に 3 通りあるが、どの向きの付け方でも同様に示せる。

(3) ライデマイスター移動 III で不変であることを示す。

ライデマイスター移動 III を行う図の弧と交差に次図のようにラベルを付ける。



結び目  $M'$  の交点  $n-2, n-1, n$  の彩色方程式は次のようになる.

結び目 $M$	結び目 $M'$
$n-2: -x_{n-5} + tx_{n-4} + (1-t)x_{n-3} = 0$	$n-2: -x_{n-5} + tx_{n-4} + (1-t)x_{n-3} = 0$
$n-1: (1-t)x_{n-3} + tx_{n-1} - x_n = 0$	$n-1: (1-t)x_{n-3} + tx_{n-2} - x_{n-1} = 0$
$n: (1-t)x_{n-4} + tx_{n-2} - x_{n-1} = 0$	$n: (1-t)x_{n-5} + tx_{n-1} - x_n = 0$

結び目  $M, M'$  の交点  $1, \dots, n-2$  までの彩色方程式が一致するので、それらで作られる行列を  $R$  とする. このとき結び目  $M, M'$  から作られる行列の  $n$  行目および  $n$  列目を削って得られる行列式はそれぞれ

$$\Delta_M(t) = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & R & & 0 \\ 0, \dots, 0 & 1-t & 0 & t \end{vmatrix}, \quad \Delta_{M'}(t) = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & R & & 0 \\ 0, \dots, 0 & 1-t & t & -1 \end{vmatrix}$$

である.  $\Delta_M(t) = t \det(R)$ ,  $\Delta_{M'}(t) = -\det(R)$  となり,  $\Delta_M(t) \doteq \Delta_{M'}(t)$  となる. よって, ライデマイスター移動 III では不変である.

図の□の外に描かれている矢印の向きの付け方はこの他に7通りあるが, どの向きの付け方でも同様に示せる.

(1)(2)(3) よりアレクサンダー多項式は結び目不変量である. □

**注意 3.5** 通常, 結び目のアレクサンダー多項式は以下のように定義される.  $K$  を 3次元球面  $S^3$  における結び目とし,  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  を無限巡回被覆とする.

$f(t) = a_r t^r + a_{r+1} t_{r+1} + \dots + a_s t^s$  ( $r, s, a_r, a_s \in \mathbb{Z}, r \leq s$ ) のように変数の正冪, 負冪の線形結合で表したものを**ローラン多項式**とよぶ.  $\mathbb{Z}$  係数ローラン多項式環

$\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  に対して, このとき, 1次元ホモロジー群  $H_1(\tilde{X})$  は  $\Lambda$  加群の構造を持つ. 結び目  $K$  からこのようにして得られる  $\Lambda$  加群  $H_1(\tilde{X})$  を  $K$  の**アレクサンダー加群**とよぶ. また, アレクサンダー加群による行列表示を**アレクサンダー行列**とよぶ. アレクサンダー行列の全ての小行列式で生成されるイデアルを**アレクサンダーイデアル**とよぶ. アレクサンダーイデアルが単項イデアルであるとき, その生成元で作られる多項式  $\Delta_K(t)$  を  $K$  の**アレクサンダー多項式**という. この定義と彩色行列式を用いた定義は一致する [3, p.115].

アレクサンダー多項式は次の性質をもつ.

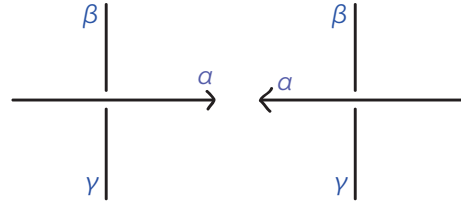
**定理 3.6**

$J, K$  を向きづけられた結び目とし、 $mK$  を  $K$  の鏡像、 $rK$  を  $K$  の向きを逆にした結び目とする。ただし、 $J\#K$  は  $J$  と  $K$  の小さな弧を取り除いて、それぞれの二つの端点をどことも交わらない新しい二本の弧で繋いだ合成結び目である。このとき次の3つが成り立つ。

(1)  $\Delta_{mK}(t) \doteq \Delta_K(t^{-1})$     (2)  $\Delta_{rK}(t) \doteq \Delta_K(t^{-1})$     (3)  $\Delta_{J\#K}(t) \doteq \Delta_J(t)\Delta_K(t)$

(証明)[2] に従って証明する。

(1) を示す。左図は向きづけられた結び目  $K$  の交点である。左図の交点の交差交換をし、縦線に関して反転すると右図になる。これが結び目  $mK$  の交点である。



左図の彩色方程式は  $\alpha + \gamma t - \alpha t - \beta = 0$ , 右図は  $\alpha + \beta t - \alpha t - \gamma = 0$  である。左図の彩色方程式の係数が行列式  $\Delta_K(t)$  となる行列のもととなり、 $t$  を  $t^{-1}$  で置き換えると行列式が  $\Delta_K(t^{-1})$  となる行列が得られる。これを行列  $P$  とおく。

同様に、右図の彩色方程式の係数が行列式  $\Delta_{mK}(t)$  となる行列のもととなり、これを行列  $Q$  とおく。このとき、 $t$  を  $t^{-1}$  に置き換えた左の彩色方程式が  $-t^{-1}$  を掛けた右の彩色方程式と等しいので、 $P = -t^{-1}Q$  が得られる。

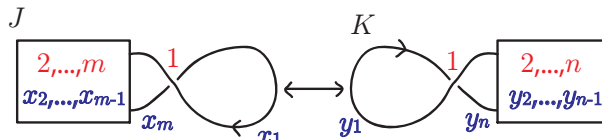
これより、

$$\Delta_K(t^{-1}) = \det(P) = \det(-t^{-1}Q) = (-t)^{-n} \det(Q) = (-t)^{-n} \Delta_{mK}(t) \doteq \Delta_{mK}(t)$$

となる (ただし、 $n$  は行列  $P, Q$  の行と列の数である)。

(2) も (1) と同様に示せる。

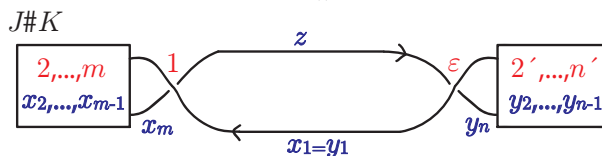
(3) を示す。  $J$  と  $K$  の図の弧と交差に次のようにラベルを付ける。



彩色方程式から得られる結び目  $J, K$  の行列をそれぞれ  $A, B$  で表し、1 行目と 1 列目を消去する。それらの行列式をとったものをそれぞれ、 $\det(A'), \det(B')$  と表すことにすると

$$\Delta_J(t) = \det(A'), \quad \Delta_K(t) = \det(B') \text{ となる。}$$

結び目  $J, K$  の二つを合体させた結び目  $J\#K$  のラベルを次のように付ける。



このとき、交点  $2, \dots, m$  での  $J\#K$  の彩色方程式は  $J$  の  $2, \dots, m$  での彩色方程式に一致し、交点  $2', \dots, n'$  での  $J\#K$  の彩色方程式は  $K$  の  $2, \dots, n$  での彩色方程式に一致する。また、交点  $\epsilon$  での彩色方程式は  $(1-t)y_0 + tz - y_n = 0$  である。

彩色方程式から得られる結び目  $J\#K$  の行列の 1 行目および 1 列目を削って得られる行列式は次のようになる.

$$\begin{array}{|ccc|} \hline & A' & 0 & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline & & & \vdots \\ 0 & & B' & 0 \\ & & & \vdots \\ \hline 0, \dots, 0 & & 0, \dots, 0-1 & t \\ \hline \end{array} \quad \text{これが } \Delta_{J\#K}(t) \text{ である.}$$

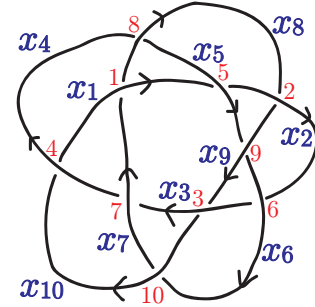
よって、 $\Delta_{J\#K}(t) = t \left| \begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right| = t \det(A') \det(B') = t \Delta_J(t) \Delta_K(t) \doteq \frac{\Delta_J(t) \Delta_K(t)}{t}$  となる.  $\square$

#### §4. 籠目結びのアレクサンダー多項式の計算

この節では、籠目結びのアレクサンダー多項式を実際に求める.  
行列式の計算には数式処理ソフトウェア Wolfram Alpha[4] を用いた.

(1) 10 交点の籠目結び  $K_{10}$  のアレクサンダー多項式

右図のように 10 交点の籠目結びの射影図の弧と交差にラベルを付け、向きをつけて計算する.



各交点での彩色方程式と対応する行列は次のようになる.

$$\begin{array}{lll} 1: (1-t)x_1 + tx_7 - x_8 = 0 & 2: (1-t)x_2 + tx_9 - x_8 = 0 & 3: (1-t)x_3 + tx_9 - x_{10} = 0 \\ 4: (1-t)x_4 + tx_1 - x_{10} = 0 & 5: (1-t)x_5 + tx_1 - x_2 = 0 & 6: (1-t)x_6 + tx_3 - x_2 = 0 \\ 7: (1-t)x_7 + tx_3 - x_4 = 0 & 8: (1-t)x_8 + tx_5 - x_4 = 0 & 9: (1-t)x_9 + tx_5 - x_6 = 0 \\ & 10: (1-t)x_{10} + tx_7 - x_6 = 0 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 \\ t & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

この行列の 1 行目および 1 列目を削って計算すると、

$$\begin{aligned} \Delta_{K_{10}}(t) &= -t^9 + 6t^8 - 15t^7 + 24t^6 - 29t^5 + 24t^4 - 15t^3 + 6t^2 - t \\ &\doteq t^4 - 6t^3 + 15t^2 - 24t + 29 - 24t^{-1} + 15t^{-2} - 6t^{-3} + t^{-4}. \end{aligned}$$

以上より、



**定理 4.1**

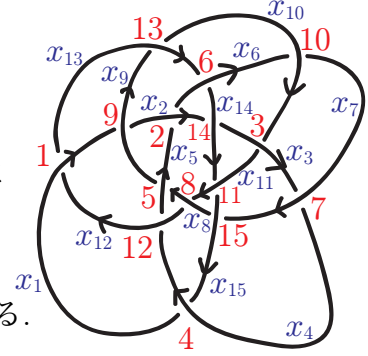
10 交点の籠目結びのアレクサンダー多項式は

$$t^4 - 6t^3 + 15t^2 - 24t + 29 - 24t^{-1} + 15t^{-2} - 6t^{-3} + t^{-4}.$$

**注意:** 10 交点の籠目結びは  $10_{123}$  結び目と同じである. John Conway が発見した方法と一致する.

(2) 15 交点の籠目結び  $K_{15}$  のアレクサンダー多項式

右図のように 15 交点の籠目結びの射影図の弧と交差にラベルを付け、向きをつけて計算する.



各交点での彩色方程式と対応する行列は次のようになる.

$$\begin{aligned} 1: (1-t)x_1 + tx_{12} - x_{13} = 0 & \quad 2: (1-t)x_2 + tx_5 - x_6 = 0 & \quad 3: (1-t)x_3 + tx_{11} - x_{10} = 0 \\ 4: (1-t)x_4 + tx_{15} - x_1 = 0 & \quad 5: (1-t)x_5 + tx_8 - x_9 = 0 & \quad 6: (1-t)x_6 + tx_{14} - x_{13} = 0 \\ 7: (1-t)x_7 + tx_3 - x_4 = 0 & \quad 8: (1-t)x_8 + tx_{11} - x_{12} = 0 & \quad 9: (1-t)x_9 + tx_2 - x_1 = 0 \\ 10: (1-t)x_{10} + tx_6 - x_7 = 0 & \quad 11: (1-t)x_{11} + tx_{14} - x_{15} = 0 \\ 12: (1-t)x_{12} + tx_5 - x_4 = 0 & \quad 13: (1-t)x_{13} + tx_9 - x_{10} = 0 \\ 14: (1-t)x_{14} + tx_2 - x_3 = 0 & \quad 15: (1-t)x_{15} + tx_8 - x_7 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

この行列の 2 行目および 2 列目を削って得られる行列式は

$$\Delta_{K_{15}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots = t^{14} - 11t^{13} + 50t^{12} - 130t^{11} + 231t^{10} - 310t^9 + 339t^8 - 310t^7 + 231t^6 - \\
&130t^5 + 50t^4 - 11t^3 + t^2 \\
&\doteq t^6 - 11t^5 + 50t^4 - 130t^3 + 231t^2 - 310t + 339 - 310t^{-1} + 231t^{-2} - 130t^{-3} + \\
&50t^{-4} - 11t^{-5} + t^{-6}.
\end{aligned}$$

以上より、

**定理 4.2**

15 交点の籠目結び (五角結び) のアレクサンダー多項式は

$$\begin{aligned}
&t^6 - 11t^5 + 50t^4 - 130t^3 + 231t^2 - 310t + 339 \\
&- 310t^{-1} + 231t^{-2} - 130t^{-3} + 50t^{-4} - 11t^{-5} + t^{-6}.
\end{aligned}$$

**参考文献**

- [1] C. アダムス著、金信泰造訳 『結び目の数学』 丸善出版, 2021 年 (“The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots” 1994, held by the American Mathematical Society).
- [2] MX4540:Knots(2020-2021), Notes by Richard Hepworth, University of Aberdeen. [https://homepages.abdn.ac.uk/r.hepworth/pages/files/Knots\\_Notes.pdf](https://homepages.abdn.ac.uk/r.hepworth/pages/files/Knots_Notes.pdf)
- [3] Charles Livingston 『Knot theory』 ,(Carus Mathematical Monographs), The Mathematical Association of America, 1993.
- [4] WolframAlpha 2022 年版 <https://ja.wolframalpha.com/>