代　数　の　理　論　(web版)

和久井道久・作成

平成 25 年 8 月 7 日
平成 26 年 4 月 28 日修正版
平成 27 年 9 月 12 日再修正版
令和 4(2022) 年 9 月 15 日再修正版

は　じ　め　に

　これは、体上の代数の理論に関する入門書である。ホップ代数の分類理論に関するまとめを作っておきたいという気持ちから書き始めた。しかし、タイトルの示す通り、その目的を達成することができなかった。というのは、思いのほか、代数の理論の復習にページを割いてしまったからである。

　このノートでは、核となる定理とその証明のみを本文で述べるように努めた。また、例をできるだけ多く載せ、理論が空虚で退屈なものにならないように配慮した。本文で述べた定理の派生的な結果、本文では述べきれなかった関連する重要な概念、少し凝った例などはすべて演習問題に回した。したがって、演習問題の中には相当難しい問題も含まれている。実際、他の教科書では定理や命題とされているものも多い。

　内容を簡単に紹介しよう。全部で４つの章と２つの Appendix からなる。

　第１章では、代数の基礎的な概念が述べられる。もっとも基本的な概念は第１節にまとめられているので、必要に応じて適宜参照するとよい。本格的な内容は第２節からスタートする。第２節以降では、Noether 加群、Artin 加群、根基、Hochschild コホモロジー、フロベニウス代数、加群の直既約、単射性、射影性、平坦性、森田同値などの概念が紹介される。その中でも、加群のなす線形アーベル圏の同値に関する森田同値は、代数学を大きな視点で捉えることを可能にさせてくれる重要な概念であり、これを理解することがこの章の最大の課題といってもよい。

　第２章では、半単純代数の一般論とその応用が述べられる。代数が半単純であるとは、任意の加群が既約な部分加群の直和に分解されるときをいう。最初の３つの節で、左 Artin 的代数が半単純かどうかはその根基が 0 かどうかで判定できること、半単純代数上の既約加群の同型類の個数は有限個であること、半単純代数は有限個の左 Artin 的単純代数の直和に分解できること (Wedderburn 分解) などが示される。そして、最も究極的な「Wedderbrun による半単純代数の構造定理 (系 2-21)」が証明される。最後の節では、(有限次元) 中心的単純代数に話題を限定し、Skolem-Noether の定理 (定理 2-27、系 2-28) や Brauer の定理 (定理 2-29) の応用として、Galois の基本定理を証明する。この章の随所に現れる「再中心化性」はこの章の内容を理解する上でのキーワードである。

　第３章では、直既約加群に関するさまざまな理論が展開される。この章での議論は、代数の定義や直既約性の定義そのものに根ざしている。定理や命題の主張は簡単である反面、使える道具は最も基本的なものに限定されるので、それらの証明は「初等的」ゆえ難解なものが多い。この章では、加群の直既約分解とその一意性に関する「Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理 (定理 3-6)」と単射的外皮の存在を基本原理として理論が展開される。前者の応用として、Deuring-Noether の定理 (定理 3-8)、既約加群の同型類全体と主直既約加群の同型類全体との間の１対１対応の存在定理 (定理 3-11) が証明される。この章の最後の２つの節は準フロベニウス代数に関するものである。準フロベニウス代数の様々な概念による特徴づけ、準フロベニウス代数上の加群の忠実性に関する判定条件が述べられる。有限次元半単純代数は準

フロベニウス代数であり、準フロベニウス代数は有限次元代数の中で“かなり大きな類”をなしている。

第4章では、有限次元分離的代数の一般論が述べられる。代数が与えられたとき、その基礎体を拡大して得られる代数が常に半単純であるとき、その代数は分離的であると呼ばれる。代数の分離性は拡大体の分離性の拡張概念としてとらえることができる。ここでの大きな目標は2つある。その1つは、根基で割って得られる商代数が分離的ならば、割る前の代数は半単純な部分と冪零な部分の直和に「標準的」に分解できることを示すことである (Wedderburn-Malcev の定理)。もう1つは、任意の有限次元分離的代数は、基礎体をある有限次分離拡大で拡大すると、有限個の行列代数の直和に同型になることを証明することである (分解体の存在定理)。最後の節では、通常の代数の教科書ではあまり扱われない、強分離的という概念が紹介される。その節の目標は、強分離的代数の正則加群に対する既約分解則 (定理 4-31) を与えることである。標数 0 の体上の有限次元半単純ホップ代数は強分離的なので、この節での議論はその表現論を展開するときに役に立つ。

2つの Appendix のうち、最初のものは代数的閉包の存在と一意性に関するものである。2番目のものは代数的整数と Dedekind 環に関するものである。そこでの話題の中心は、Dedekind 環上のねじれがない有限生成加群の構造定理 (系 B-32) の証明である。

このノートは、予備知識として、学部3年次までの線形代数、群、環、体の理論と圏の理論の初歩を仮定する。特に、ベクトル空間のテンソル積については習熟していることが望ましい。ここで、ベクトル空間のテンソル積を考える上で最も基本的な事実を確認しておこう。

$V,\ U$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の2つのベクトル空間とする。このとき、テンソル積と呼ばれるベクトル空間 $V\otimes_{\boldsymbol{k}}U$ が (同型を除いて一意的に) 定まる。このノートでは、これをしばしば $V\otimes U$ と略記する。テンソル積 $V\otimes U$ は次の4つの性質を持つ。

(i) $V\otimes U$ の元は $v\otimes u\ (v\in V,\ u\in U)$ という形の元によって $\boldsymbol{k}$ 上張られる。

(ii) 任意の $v,v_1,v_2\in V,\ u,u_1,u_2\in U,\ \lambda\in\boldsymbol{k}$ に対して、

  (a) $(v_1+v_2)\otimes u=v_1\otimes u+v_2\otimes u,\ (\lambda v)\otimes u=\lambda(v\otimes u)$

  (b) $v\otimes(u_1+u_2)=v\otimes u_1+v\otimes u_2,\ v\otimes(\lambda u)=\lambda(v\otimes u)$

(iii) V の一次独立系 $v_1,\cdots,v_k$ と $u_1,\cdots,u_k\in U$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{k}v_i\otimes u_i=0 \text{ ならば } u_i=0 \quad (i=1,\cdots,k)$$

(iv) U の一次独立系 $u_1,\cdots,u_k$ と $v_1,\cdots,v_k\in V$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{k}v_i\otimes u_i=0 \text{ ならば } v_i=0 \quad (i=1,\cdots,k)$$

(iii) と (iv) から、$\{v_i\}_{i=1}^n,\ \{u_j\}_{j=1}^m$ がそれぞれ $V,\ U$ の基底ならば、$\{v_i\otimes u_j\}_{\substack{i=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,m}}$ が $V\otimes U$ の基底になることがわかる。テンソル積 $V\otimes U$ がどのように構成されるかということはそれほど大切ではない。大切なのは、それがある種の普遍性を持つということである。テンソル積の普遍性とは、次の性質をいう。「W を $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間とし、$\varphi: V\times U\longrightarrow W$ を $\boldsymbol{k}$-双一次写像とする。このとき、$\boldsymbol{k}$-線形写像 $\bar{\varphi}: V\otimes U\longrightarrow W$ であって、$\bar{\varphi}(v\otimes u)=\varphi(v,u),\ v\in V,\ u\in U$ となるものが唯一存在する。」

断りなく使われる記号について説明しておく。体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V に対して、その次元を $\dim_{\boldsymbol{k}} V$ または $\dim V$ によって表わす。特に、V が $\boldsymbol{k}$ の拡大体 K の場合には、$\dim_{\boldsymbol{k}} K$ を $[K:\boldsymbol{k}]$ によって表わす。体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V 上の線形変換 $f: V \longrightarrow V$ に対して、そのトレース、行列式をそれぞれ $\mathrm{Tr} f$, $\det f$ によって表わす。線形写像 $f: V \longrightarrow W$ に対して、転置写像 ${}^t\!f: W^* \longrightarrow V^*$ を ${}^t\!f(\alpha) = \alpha \circ f \quad (\alpha \in W)$ によって定義する。零元 0 のみからなるベクトル空間 $\{0\}$ を 0 と略記する。線形写像 $f: V \longrightarrow W$ が、V のすべての元 v を W の零元 0 に写すとき、0-写像 (0-map) と呼ぶ。このような写像を $0: V \longrightarrow W$ または単に 0 と書き表わすことが多い。多項式 $f(X)$ の次数は $\deg f(X)$ によって表わす。定義の中の「$\Longleftrightarrow$」は「矢印の左にある概念を矢印の右にある事柄で定義する」ことを意味する。補題、命題、定理およびそれらの証明の中の「$\Longleftrightarrow$」は「矢印の左にある命題が成り立つための必要十分条件は矢印の右にある命題が成り立つことである」ということを意味する。補題、命題、定理およびそれらの証明の中の「$\Longrightarrow$」は「ならば」を意味する。「$\forall$」は「任意の」を意味し、「$\exists$」は「存在すること」を意味し、「$\exists 1$」は「唯一存在すること」を意味する。なお、このノートで、環といえば、それはすべて「単位元を持つ環」を意味する。したがって、環準同型は単位元を保たなければならない。

最後になったが、柳川浩二氏に感謝を申し上げたい。彼には、非可換代数に関する教科書『Lectures on modules and rings』(Lam・著) を始めとする有益な文献や事実を教えて頂いた。

書き上げるのに２年を要してしまったが、こうしてまとめあげることができて嬉しい。書ききれなかった事柄も少なくないが、ひとまずこの辺で……。

著者しるす
2002 年 10 月

目　次

第 4 章　分離的代数

第 1 章　基礎概念

§1. 代数とその上の加群

ここでは、以後の章や節で必要となる、代数の基礎概念—代数、イデアル、代数準同型、剰余代数、加群、加群の直積、直和、テンソル積、加群の有限生成性、加群の完全系列など—をまとめておく。準同型定理、フロベニウス相互律について述べる。

代数の定義

体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 $A(\neq 0)$ と線形写像 $m : A \otimes A \longrightarrow A$ および $\eta : \boldsymbol{k} \longrightarrow A$ が与えられているとする。次の等式が満たされるとき、3 つ組 (A, m, η) を $\boldsymbol{k}$ 上の**代数** (*algebra*) と呼ぶ：

(i) $m \circ (m \otimes \mathrm{id}_A) = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes m)$

(ii) $m \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta)$

代数 A の**次元** (*dimension*) とは、A の $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての次元をいう。代数 A が**有限次元** (*finite dimensional*) であるとは、A を $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としてみた場合に有限次元になるときをいう。

注意：(ii) 式においては、ベクトル空間の標準的な同型を用いて $\boldsymbol{k} \otimes A = A = A \otimes \boldsymbol{k}$ と同一視している。

以後、単に、A を $\boldsymbol{k}$ 上の代数と呼ぶ場合が多いが、その場合には、上の等式を満たす線形写像 $m : A \otimes A \longrightarrow A$ と $\eta : \boldsymbol{k} \longrightarrow A$ が 1 組指定されているものとする。さらに、この場合、$a, b \in A$ に対して $m(a \otimes b)$ を $a \cdot b$ または ab と書き表わし、$\eta(1)$ (1 は $\boldsymbol{k}$ の単位元) を 1_A または 1 と書き表わす。この記法を用いれば、条件 (i) および (ii) は次のように書くことができる。

(i)′ $(ab)c = a(bc)$ for $^\forall a,\ b,\ c \in A$

(ii)′ $1a = a = a1$ for $^\forall a \in A$

体 $\boldsymbol{k}$ 上の $X_1, \cdots, X_n$ を変数とする多項式の全体 $\boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n]$ や成分が $\boldsymbol{k}$ の元からなる n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ はいずれも通常の和、積、スカラー倍に関して $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。これらの代数をそれぞれ**多項式代数** (*polynomial algebra*)、**(全) 行列代数** (*matrix algebra*) と呼ぶ。また、0 でない $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V に対して、V 上の線形変換全体 $\mathrm{End}(V)$ は写像の合成を積として $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる (注意：我々の代数の定義では、単位元の存在を仮定しているため、$V \neq 0$ という条件が必要である。$V = 0$ の場合には、$\mathrm{End}(V) = \{0\}$ となるからである)。代数 A が**可換** (*commutative*) であるとは、任意の $a, b \in A$ に対して、$ab = ba$ が成り立つときをいう。多項式代数 $\boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n]$ は代数として可換であるが、$n > 1$ のときの $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ や $\dim V > 1$ のときの $\mathrm{End}(V)$ は可換でない。その他の代数の例を 3 つ述べよう。

例

(1) ベクトル空間のテンソル代数 $\mathcal{T}(V)$

V を体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間とする。このとき、

$$\mathcal{T}^{(0)}(V) := \boldsymbol{k},\ \mathcal{T}^{(1)}(V) := V,\ \mathcal{T}^{(n)}(V) := \underbrace{V \otimes V \cdots \otimes V}_{n\text{ 個}} \quad (n \geq 1)$$

とし、

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}^{(n)}(V)$$

と定める。$\mathcal{T}(V)$ は写像

$$m^{(n,m)} : \mathcal{T}^{(n)}(V) \times \mathcal{T}^{(m)}(V) \longrightarrow \mathcal{T}^{(n+m)}(V) \qquad (n, m \geq 0)$$

から誘導される積に関して、$\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。但し、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}^{(0)}(V) \times \mathcal{T}^{(0)}(V) \xrightarrow{m^{(0,0)}} \mathcal{T}^{(0)}(V), \\
&\qquad\qquad (c, c') \longmapsto cc' \\
&\mathcal{T}^{(0)}(V) \times \mathcal{T}^{(n)}(V) \xrightarrow{m^{(0,n)}} \mathcal{T}^{(n)}(V) \quad (n \geq 1), \\
&\qquad\qquad (c, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \longmapsto cx_1 \otimes \cdots \otimes x_n \qquad (x_i \in V) \\
&\mathcal{T}^{(n)}(V) \times \mathcal{T}^{(0)}(V) \xrightarrow{m^{(0,n)}} \mathcal{T}^{(n)}(V) \quad (n \geq 1), \\
&\qquad\qquad (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, c) \longmapsto cx_1 \otimes \cdots \otimes x_n \qquad (x_i \in V) \\
&\mathcal{T}^{(n)}(V) \times \mathcal{T}^{(m)}(V) \xrightarrow{m^{(n,m)}} \mathcal{T}^{(n+m)}(V) \quad (n, m \geq 1), \\
&\qquad (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \qquad (x_i, y_j \in V)
\end{aligned}$$

である。上で定義された積をもつ代数 $\mathcal{T}(V)$ を V の**テンソル代数** (*tensor algebra*) と呼ぶ。

V が $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を基底に持つベクトル空間のとき、$\mathcal{T}(V)$ は $\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_{i_1} \cdots X_{i_k} \mid i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\}\}$ を基底にもつベクトル空間になる (注意：ここで、$X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ は $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$ の積を表わしているが、$\mathcal{T}(V)$ における積の定義から $X_{i_1} \cdots X_{i_k} = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}$ である)。したがって、V が $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を基底に持つベクトル空間のとき、$\mathcal{T}(V)$ は $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を変数とする「非可換な多項式環」とみなすことができる。

(2) 有限群の群代数 $\boldsymbol{k}[G]$

G を有限群とし、$\boldsymbol{k}$ を体とする。G から $\boldsymbol{k}$ への写像全体 $\mathrm{Map}(G, \boldsymbol{k})$ は、

和 $(x + y)(g) = x(g) + y(g), \quad g \in G$

スカラー倍 $(\alpha x)(g) = \alpha x(g), \quad g \in G$

によって $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間になる。このベクトル空間を $\boldsymbol{k}[G]$ という記号で書き表わす。各 $g \in G$ に対して写像 $e_g : G \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = g \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定めると、任意の写像 $x : G \longrightarrow \boldsymbol{k}$ は

$$x = \sum_{g \in G} x(g) e_g$$

と書くことができるので、$\{e_g\}_{g\in G}$ は $\boldsymbol{k}[G]$ の基底になる。さらに、基底の要素に対して積を

$$e_g \cdot e_h = e_{gh} \qquad (g, h \in G)$$

と定め、$\boldsymbol{k}[G]$ の一般の元に対してはこれを線形に拡張することにより積を定めると、$\boldsymbol{k}$ 上の代数が得られる。この代数を G の $\boldsymbol{k}$ 上の**群代数** (*group algebra*) という。

$g \longmapsto e_g$ によって定まる写像 $G \longrightarrow \boldsymbol{k}[G]$ は単射であって、単位元および積を保つ。今後、この写像によって $G \subset \boldsymbol{k}[G]$ とみなし、x_g を単に g と書き表わすことにする。すなわち、$\boldsymbol{k}[G]$ は、形式的に

$$\sum_{g\in G} a_g\, g \qquad (a_g \in \boldsymbol{k},\ g \in G)$$

のように書かれる式の集合である。但し、

$$\sum_{g\in G} a_g\, g = \sum_{g\in G} b_g\, g \iff a_b = b_g \quad \text{for } {}^{\forall} g \in G$$

を満たすとする。$\boldsymbol{k}[G]$ は

$$\text{和} \quad \sum_{g\in G} a_g\, g + \sum_{g\in G} b_g\, g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g \quad \text{スカラー倍} \quad \alpha(\sum_{g\in G} a_g\, g) = \sum_{g\in G} (\alpha a_g) g$$

を持つベクトル空間であり、

$$\text{積} \quad (\sum_{g\in G} a_g\, g)(\sum_{h\in G} b_h\, h) = \sum_{g,h\in G} (a_g b_h) gh = \sum_{k\in G} (\sum_{k=gh} a_g b_h) k$$

を持つ $\boldsymbol{k}$ 上の代数である。群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ は次元が G の位数 $|G|$ の有限次元代数であり、G がアーベル群ならば可換、そうでなければ非可換である。

(3) Hamilton の四元数体 $\mathbb{H}$

実数体 $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\mathbf{1} + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$$

上には

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \\
&\mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k}, \\
&\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}
\end{aligned}$$

となるような積が定まる。この積に関して $\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上の 4 次元の非可換な代数になる。

(3) の代数 $\mathbb{H}$ は 0 でない任意の元が逆元を持っている。一般に、0 でない任意の元が逆元を持つような代数を**可除代数** (*division algebra*) と呼ぶ。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 D が**可除** (*divisible*) であるとは、

$$0 \neq {}^{\forall} a \in D,\ {}^{\exists} b \in D \ \text{ s.t. } \ ab = ba = 1$$

となるときをいう。したがって、$\mathbb{R}$ 上の代数 $\mathbb{H}$ は可除である。また、体 $\boldsymbol{k}$ の拡大体 K を $\boldsymbol{k}$ 上の代数と自然にみると、これは可除代数である。

注意：0 でない任意の元が逆元を持つような単位元を持つ環のことを**斜体** (*skew field*) という。したがって、可除代数から、それがどういう体の上のベクトル空間であるか、という情報を

捨てたものが斜体である。可除代数のことを斜体と呼んだりもするが、厳密には、可除代数と斜体は区別されるべきである。

部分代数とイデアル

A を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。$B \subset A$ が**部分代数** (*subalgebra*) であるとは、

(i) B は A の部分線形空間である。
(ii) 任意の $a, b \in B$ に対して $ab \in B$ となる。
(iii) $1_A \in B$ である。

が成り立つときをいう。

$$Z(A) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ for } {}^{\forall}b \in A\}$$

を A の**中心** (*center*) という。$Z(A)$ は A の可換な部分代数である。より一般に、A の部分代数 B に対して、

$$Z_A(B) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ for } {}^{\forall}b \in B\}$$

とおくと、これも A の部分代数になる。$Z_A(B)$ を A における B の**可換子代数** (*commutator*) または**中心化代数** (*centralizer*) という。$Z_A(A) = Z(A)$ である。

A を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。$I \subset A$ が A の**左イデアル** (*left ideal*) であるとは、

(i) I は A の部分線形空間である。
(ii) 任意の $a \in A$ と任意の $x \in I$ に対して $ax \in I$ となる。

が成り立つときをいう。$I \subset A$ が A の**右イデアル** (*right ideal*) であるとは、

(i) I は A の部分線形空間である。
(ii) 任意の $a \in A$ と任意の $x \in I$ に対して $xa \in I$ となる。

が成り立つときをいう。$I \subset A$ が左イデアルであって、かつ、右イデアルであるとき、I は A の**両側イデアル** (*two-sided ideal*) である、または、単に、**イデアル**であるという。A が可換ならば、A の部分集合が左イデアルであること、右イデアルであること、両側イデアルであることはすべて同値である。$\{0\}$ および A は A の両側イデアル (したがって、左イデアルかつ右イデアル) である。また、$\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の左 (resp. 右、両側) イデアルの族ならば、

$$\text{共通部分}\quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \{a \in A \mid a \in I_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)\},$$
$$\text{和}\quad \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \{a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_k} \mid a_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i},\ \lambda_i \in \Lambda\ (i = 1, \cdots, k),\ k \in \mathbb{N}\}$$

は A の左 (resp. 右、両側) イデアルである。また、I, J が A の左 (resp. 右、両側) イデアルならば、積

$$IJ = \{\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha b_\alpha \mid a_\alpha \in I,\ b_\alpha \in J\ (\alpha = 1, \cdots, r),\ r \in \mathbb{N}\}$$

も A の左 (resp. 右、両側) イデアルになる。A の左 (resp. 右、両側) イデアル I_1, I_2, I_3 に対して、$(I_1I_2)I_3 = I_1(I_2I_3)$ が成立する。これより、n 個の左 (resp. 右、両側) イデアル $I_1, I_2, \cdots, I_n$ の積 $I_1I_2\cdots I_n$ が矛盾なく定義される。特に、$I_1 = I_2 = \cdots = I_n = I$ のとき、

積 $I_1 I_2 \cdots I_n$ を I^n と書く。ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $I^n = \{0\}$ となる左 (resp. 右、両側) イデアル I は**冪零** (*nilpotent*) であると呼ばれる。

代数 A の左イデアル I が部分集合 $S \subset A$ によって**生成される** (*generated*) とは、

$$^\forall x \in I,\ \ ^\exists k \in \mathbb{N},\ \ ^\exists s_1, \cdots, s_k \in S,\ ^\exists a_1, \cdots, a_k \in A \ \text{ s.t. } \ x = a_1 s_1 + \cdots + a_k s_k$$

となるときをいう。S によって生成される左イデアルは S を含む左イデアルの中で最小の左イデアルとして特徴づけられる。右イデアル、両側イデアルに対しても、同様にして「部分集合によって生成される」という概念が定義される。左 (resp. 右、両側) イデアルの和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ によって生成される左 (resp. 右、両側) イデアルに他ならない。また、イデアルの積 IJ は $\{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$ によって生成される左 (resp. 右、両側) イデアルに他ならない。左 (resp. 右、両側) イデアルが 1 つの元 (からなる集合) で生成されるとき、**単項** (*principal*) であると呼ばれる。x をその左 (resp. 右、両側) イデアル I の生成元とすれば、$I = Ax$ (resp. $I = xA,\ I = AxA$) と書き表わされる。但し、

$$\begin{aligned} Ax &= \{ax \mid a \in A\}, \\ xA &= \{xa \mid a \in A\}, \\ AxA &= \{axb \mid a, b \in A\} \end{aligned}$$

である。A が可換の場合には、$Ax,\ xA,\ AxA$ を (x) とも書く (注：$Ax,\ xA,\ AxA$ はすべて同一の集合を表わすことに注意)。より一般に、可換代数 (あるいは、可換環) A に対して、$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$ によって生成される A のイデアルを $(x_1, \cdots, x_n)$ によって表わす。

代数の直和

体 $\boldsymbol{k}$ 上の 2 つの代数 $A,\ B$ に対して、ベクトル空間としての直和 $A \oplus B$ は次の積により代数となる：

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2, b_1 b_2) \qquad\qquad (a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B)$$

$(1_A, 1_B)$ が上の積に関する単位元となる。この代数を A と B の**直和** (*direct sum*) といい、同じ記号 $A \oplus B$ で表わす。ここで注意しなければいけないのは、$A' := \{(a, 0) \mid a \in A\}$ および $B' := \{(0, b) \mid b \in B\}$ は $A \oplus B$ の両側イデアルになっている、したがって、積に関して閉じているけれども $A \oplus B$ の部分代数ではないということである。それにもかかわらず、それらは、$A \oplus B$ の積に関して代数になる。A' および B' の単位元はそれぞれ $(1_A, 0),\ (0, 1_B)$ である。同様にして、n 個の代数 $A_1, \cdots, A_n$ が与えられたときに、それらの (代数としての) 直和 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ を定義することができる。

今度は体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A が 1 つ与えられたとする。その 0 でない両側イデアル $I_1, \cdots, I_n$ が $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間として $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ を満たしているとすると、各 I_i は A の積に関して代数になる。但し、その単位元は A の単位元 1_A を与えられた直和分解に応じて $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ $(e_1 \in I_1, \cdots, e_n \in I_n)$ と書くとき、e_i によって与えられる (演習 1-2)。したがって、I_i は A の積に関して代数にはなるが、A の部分代数ではない。

代数準同型と商代数

$A=(A,m_A,\eta_A),\ B=(B,m_B,\eta_B)$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の２つの代数とする。線形写像 $f:A\longrightarrow B$ が**代数準同型** (*algebra homomorphism*) であるとは、

(i) $f\circ m_A=m_B\circ(f\otimes f)$

(ii) $f\circ\eta_A=\eta_B$

が成り立つときをいう。これらの条件は

(i)$'$ $f(ab)=f(a)f(b)$ for ${}^\forall a,\ b\in A$

(ii)$'$ $f(1_A)=1_B$

とも書くことができる。代数準同型 $f:A\longrightarrow B$ が全単射であるとき、f は**代数の同型** (*algebra isomorphism*) であると呼ばれる。$f:A\longrightarrow B$ が代数の同型ならば、逆写像 $f^{-1}:B\longrightarrow A$ は代数準同型である。A から B への代数の同型が存在するとき、２つの代数 $A,\ B$ は**同型** (*isomorphic*) であるといい、$A\cong B$ と書く。

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、J を $J\neq A$ であるような A の両側イデアルであるとする。このとき、商ベクトル空間 A/J には、自然な射影 $\pi:A\longrightarrow A/J$ が代数準同型となるような、代数の構造が一意的に定まる。この代数は A の J による**商代数** (*quotient algebra*) または**剰余代数** (*residue class algebra*) と呼ばれる。

代数の生成元と関係式による記述

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。A の部分集合 S が生成系であるとは、任意の元 $a\in A$ が S に属する有限個の元の積のスカラー倍とそれらの有限個に和として書けるときをいう：

$$a=c_1s_{11}\cdots s_{1n_1}+c_2s_{21}\cdots s_{2n_2}+\cdots\cdots+c_ks_{k1}\cdots s_{kn_k}$$
但し、$k\in\mathbb{N},\ c_i\in\boldsymbol{k}\ (i=1,\cdots,k),\ s_{ij}\in S\ (i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,n_k)$.

S の元を生成元と呼ぶ。今、S を $\boldsymbol{k}$ 上の基底にもつようなベクトル空間 V を抽象的に考える。$\mathcal{T}(V)$ を V のテンソル代数とし、$R\subset\mathcal{T}(V)$ を部分集合 (空でもよい) とする。A が**生成元 (の集合)** S **と関係子 (の集合)** R **によって記述される**とは、R によって生成される $\mathcal{T}(V)$ の両側イデアル $\mathcal{I}$ で割って得られる代数 $\mathcal{T}(V)/\mathcal{I}$ に A が同型となることをいう。R の元を関係子と呼ぶ。R の元 r に対して $r=0$ とおいた式のことを関係式と呼ぶ。任意の代数は生成元と関係式 (関係子) によって記述することができる (拙著『Lectures on quasitriangular quasi-Hopf algebras』p.49〜50 参照)。

代数の表現と加群

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V に対して、線形写像 $f:A\otimes V\longrightarrow V$ が与えられていて、

(i) $f(1\otimes v)=v$ for ${}^\forall v\in V$

(ii) $f(a\otimes f(b\otimes v))=f(ab\otimes v)$ for ${}^\forall v\in V,\ {}^\forall a,b\in A$

が満たされているとき、組 (V,f) を**左 A-加群** (*left A-module*) と呼ぶ。f を V への A の左作用と呼ぶ。$f(a\otimes v)$ は通常 $a\cdot v$ と書き表わされる。この記号を使うと、条件 (i)(ii) は次のように書き換えることができる。

(i)′ $1 \cdot v = v \quad$ for ${}^\forall v \in V$

(ii)′ $a \cdot (b \cdot v) = ab \cdot v \quad$ for ${}^\forall v \in V,\ {}^\forall a, b \in A$

左 A-加群 (V, f) が**有限生成** (*finitely generated*) であるとは、

$$ {}^\exists v_1, \cdots, v_r \in V \ \text{ s.t. } \ {}^\forall v \in V,\ v = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r \ \text{ for some } a_1, \cdots, a_r \in A $$

となるときをいう。$\{v_1, \cdots, v_r\}$ を V の (左 A-加群としての) 生成系という。左 A-加群 (V, f) の次元とは V の $\boldsymbol{k}$ 上の次元のことを意味する。(V, f) が有限次元ならば、すなわち、V の $\boldsymbol{k}$ 上の次元が有限ならば (V, f) は有限生成である。一般に、この逆は成立しないが、A が有限次元ならば有限生成左 A-加群は有限次元である。

上の f の代わりに線形写像 $g : V \otimes A \longrightarrow V$ を考えることにより、**右 A-加群** (*right A-module*) という概念が定義される。すなわち、(V, g) が右 A-加群であるとは、

(i) $g(v \otimes 1) = v \quad$ for ${}^\forall v \in V$

(ii) $g(g(v \otimes a) \otimes b) = g(v \otimes ab) \quad$ for ${}^\forall v \in V,\ {}^\forall a, b \in A$

が成り立つときをいう。g を V への A の右作用と呼ぶ。$g(v \otimes a)$ は通常 $v \cdot a$ と書き表わされる。

$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V に対して、２つの線形写像 $f : A \otimes V \longrightarrow V$ と $g : V \otimes B \longrightarrow V$ が与えられていて、

(i) (V, f) は左 A-加群

(ii) (V, g) は右 B-加群

(iii) $f(a \otimes g(v \otimes b)) = g(f(a \otimes v) \otimes b) \ $ for ${}^\forall a \in A,\ {}^\forall b \in B,\ {}^\forall v \in V$

が満たされるとき、組 (V, f, g) を**両側 (A, B)-加群** (*(A, B)-bimodule*) という。$A = B$ のときには、これを両側 A-加群と呼んだりもする。

代数 A に対して、A^{op} を A の積を「逆」にして得られる代数とする。すなわち、A^{op} は、ベクトル空間としては $A^{\mathrm{op}} = A$ であって、その積が

$$ a * b := b \cdot a \qquad (a, b \in A) $$

により与えられる代数である。上式の右辺 $b \cdot a$ は A における積を表わしている。このノートでは、この代数 A^{op} を A **とは逆の積を持つ代数** (opposite algebra) として引用する。ベクトル空間 V の右 A-加群構造全体と左 A^{op}-加群構造全体との間には自然な 1 対 1 対応が存在する。実際、

$$ \begin{aligned} &\{ g : V \otimes A \longrightarrow V \mid V \text{ は } g \text{ に関して右 } A\text{-加群} \} \\ &\qquad \longrightarrow \{ f : A^{\mathrm{op}} \otimes V \longrightarrow V \mid V \text{ は } f \text{ に関して左 } A^{\mathrm{op}}\text{-加群} \} \end{aligned} $$

を

$$ g \longmapsto f, \quad \text{但し、} f(a \otimes v) = g(v \otimes a), \quad a \in A,\ v \in V $$

という写像とすると、全単射となる (実は、加法的な圏同値を与える関手になっている)。今後、左 A^{op}-加群と右 A-加群を同一視する場合には、この対応によって行う。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の2つの代数 $A,\ B$ に対して、ベクトル空間としてのテンソル積 $A \otimes B$ を考え、その上に積を

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb') \qquad\qquad (a, a' \in A,\ b, b' \in B)$$

によって定める。この積に関して $A \otimes B$ は代数になる。これを A と B のテンソル積という。特に、$B = A^{\mathrm{op}}$ のときにはこれを $A^{\mathrm{e}} := A \otimes A^{\mathrm{op}}$ と書き、A の**包括代数** (*enveloping algebra*) と呼ぶ。$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とするとき、ベクトル空間 V の両側 (A, B)-加群構造全体と左 $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-加群構造全体との間には1対1対応が存在する。実際、

$$\begin{aligned}&\{(A \otimes V \xrightarrow{f} V,\ V \otimes B \xrightarrow{g} V) \mid V \text{ は } (f, g) \text{ に関して 両側 } (A, B)\text{-加群}\,\} \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \{h : A \otimes B^{\mathrm{op}} \otimes V \longrightarrow V \mid V \text{ は } h \text{ に関して左 } A \otimes B^{\mathrm{op}}\text{-加群}\,\}\end{aligned}$$

を

$$(f, g) \longmapsto h, \quad \text{但し、} h((a \otimes b) \otimes v) = f(a \otimes g(v \otimes b)),\ \ a \in A,\ b \in B,\ v \in V$$

という写像とすると、全単射となる (実は、加法的な圏同値を与える関手になっている)。今後、両側 (A, B)-加群と左 $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-加群を同一視するときには、この対応によって行う。

代数 A が与えられたとき、すぐに思いつくことのできる左 A-加群が2つある。1つは $V = \{0\}$ の場合で、これは**零加群**と呼ばれる。単に 0 と書かれることが多い。もう1つは V として A そのものをとり、左作用 f として A における積を採用したものである。この左 A-加群は**左正則加群** (*left regular module*) と呼ばれる非常に大切な加群である。これをこのノートでは ${}_AA$ という記号を使って書き表わす。同様に、A の右作用として A の積を採用して得られる右 A-加群を**右正則加群**といい、A_A という記号で表わす。A の左作用および右作用としてどちらも A の積を採用して得られる両側 (A, A)-加群を**両側正則加群**といい、${}_AA_A$ という記号で表わす。前後の文脈から誤解を生じないと考えられる場合には、左正則加群、右正則加群、両側正則加群は単に A と書き表わす場合がある。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の 0 でないベクトル空間 V に対して、「V が左 A-加群となるような左作用を V に与えること」と「代数準同型 $A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ を与えること」とは1対1に対応する。代数準同型 $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ のことを A の**表現** (*representation*) と呼び、V をその**表現空間** (*representation space*) と呼ぶ。$V = \boldsymbol{k}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{k} \right\}$ のときには代数として $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ であるから、代数準同型 $A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ を与えることは代数準同型 $A \longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ を与えることに他ならない。代数準同型 $A \longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ のことを A の**行列表現** (*matrix representation*) と呼ぶ。$\boldsymbol{k}$ 上有限次元なベクトル空間 V については、その基底 $\{v_i\}_{i=1}^n$ を1つ指定すると、代数としての同型 $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ が得られるから、 A の表現 $A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ を与えることと行列表現 $A \longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ を与えることとは1対1に対応する (但し、この対応は基底に依存するので標準的でない)。

左 A-加群という言葉は、しばしば、表現という言葉と混同して使われる。左 A-加群 (resp. 表現) に対するいろいろな概念は、表現と加群の間の対応を経由して、表現 (resp. 左 A-加群) に対しても用いられる。

左 A-加群 $V,\ W$ の間の $\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : V \longrightarrow W$ が

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v) \quad \text{for } {}^\forall a \in A,\ {}^\forall v \in V$$

を満たすとき、f は**左 A-加群準同型** (*homomorphism of left A-modules*) であると呼ばれる。左 A-加群 V から左 A-加群 W への左 A-加群準同型全体からなる集合を記号 $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ により表わす。$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, W) = \{ f : V \longrightarrow W \mid f \text{ は } \boldsymbol{k}\text{-線形写像} \}$$

の部分線形空間である。すなわち、$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は

$$\text{和}\ \ (f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad \text{スカラー倍}\ \ (c \cdot f)(v) = c \cdot f(v)$$

$(f, g \in \mathrm{Hom}_A(V, W),\ v \in V,\ c \in \boldsymbol{k})$ に関して、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間になる。$V = W$ のときには、$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は $\mathrm{End}_A(V)$ とも書かれる：$\mathrm{End}_A(V) := \mathrm{Hom}_A(V, V)$ (注意：以後、$\mathrm{End}_A(V)$ の括弧をしばしば省略して、$\mathrm{End}_A V$ と書くことが多い。また、今まで、V 上の線形変換の全体を $\mathrm{End}(V)$ で表わしてきたが、左 A-加群準同型の全体 $\mathrm{End}_A V$ との混同を避けたり、V の基礎体が $\boldsymbol{k}$ であることを強調したいときには、$\mathrm{End}(V)$ を $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ と書くことがある)。全単射な左 A-加群準同型は**左 A-加群の間の同型** (*isomorphism of left A-modules*) と呼ばれる。$f : V \longrightarrow W$ が左 A-加群の間の同型ならば、逆写像 $f^{-1} : W \longrightarrow V$ は左 A-加群準同型である。左 A-加群 $V,\ W$ の間に左 A-加群の同型 $f : V \longrightarrow W$ が存在するとき、V と W は**同型** (*isomorphic*) であるといい、これを記号 $V \cong W$ で表わす。同様に、右 A-加群の間の $\boldsymbol{k}$-線形写像に対して、右 A-加群準同型、右 A-加群の間の同型という概念が定義される。

加群の同型という概念を表現の場合に翻訳することにより「表現の同型」という概念が得られる。しかし、慣例に従い、表現に対しては「同型」という言葉を使わずに、「同値」という言葉を用いる。改めて表現の同値の定義を述べると次のようになる：2 つの表現 $\rho_1 : A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ と $\rho_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}(W)$ が**同値** (*equivalent*) であるとは、

$${}^\exists f : V \longrightarrow W \text{ 線形同型写像 } \ \text{s.t.}\ \ \rho_2(a) \circ f = f \circ \rho_1(a) \quad \text{for } {}^\forall a \in A$$

となるときをいう。この条件は行列表現 $\rho_1 : A \longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}),\ \rho_2 : A \longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ の場合には、

$${}^\exists P \ \text{：正則行列}\ \ \text{s.t.}\ \ P^{-1} \rho_2(a) P = \rho_1(a) \ \ \text{for } {}^\forall a \in A$$

と書き換えることができる。

V を左 A 加群とする。V の部分線形空間 W が**部分加群** (*submodule*) であるとは、

$$a \in A,\ w \in W \implies a \cdot w \in W$$

が満たされるときをいう。次の言い換えが成り立つ：

$${}_A A \text{ の部分加群} \iff A \text{ の左イデアル}$$

$$A_A \text{ の部分加群} \iff A \text{ の右イデアル}$$

$${}_A A_A \text{ の部分加群} \iff A \text{ の両側イデアル}$$

左 A-加群 V とその部分加群 W に対して、商ベクトル空間 V/W は自然に左 A-加群になる。実際、自然な射影 $\pi : V \longrightarrow V/W$ が左 A-加群準同型となるような、左 A-加群の構

造が V/W にはただ一通りに入る。この左 A-加群 V/W を V の W による**商加群** (*quotient module*) と呼ぶ。ベクトル空間の場合と同様に、次の定理が成り立つ。

準同型定理

左 A-加群準同型 $f : V \longrightarrow W$ に対して、

$$\mathrm{Ker} f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \quad \mathrm{Im} f := \{f(v) \mid v \in V\}$$

はそれぞれ $V,\ W$ の部分加群であり、f は左 A-加群としての同型

$$V/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$$

を誘導する。

左 A-加群 F が**自由加群** (*free module*) であるとは、次の条件を満たす部分集合 $\{x_i\}_{i \in I} \subset F$ が存在することをいう：

(i) 任意の $x \in F$ に対して $i_1, \cdots, i_k \in I$ と $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \in A$ が存在して、$x = a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_k} x_{i_k}$ と書くことができる。

(ii) 任意の (相異なる) 有限個 $i_1, \cdots, i_n \in I$ に対して、$a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_n} x_{i_n} = 0$ ならば $a_{i_1} = \cdots = a_{i_n} = 0$ となる。

$\{x_i\}_{i \in I}$ を F の**基底** (*basis*) という。一般に、A 上の自由加群 F の基の要素の個数 (濃度) は一定ではないが、A が可換または可除ならば、その個数は基底の選び方によらず一定である (堀田良之・著『代数入門–群と加群–』裳華房 p.60〜63 参照)。そこで、可換代数または可除代数上の自由加群 F に対して、基底の要素の個数 (濃度) を F の**階数** (*rank*) と呼ぶ。特に、自由加群の基底が有限個の要素からなるとき、その自由加群は**有限階数** (*finite rank*) であると呼ばれる。左 A-加群の場合と同様にして、自由右 A-加群が定義される。任意の左 A-加群 (resp. 右 A-加群) V は自由加群の商加群として得られる。

注意 1°：$A = \boldsymbol{k}$ のとき、左 A-加群とは $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間のことに他ならない。体上のベクトル空間は基底をもつからいつも自由になるが、その階数とはベクトル空間としての次元のことに他ならない。

注意 2°：可除代数上で定義された任意の加群は自由である (例えば、松村英之・著『代数学』p.140 定理 23.2 参照)。

加群の完全系列

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。左 A-加群準同型の系列

$$\cdots\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots\cdots$$

が**完全** (*exact*) であるとは、$\mathrm{Ker} f_{i+1} = \mathrm{Im} f_i$ がすべての i に対して成り立つときをいう。

左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ と左 A-加群 V に対して、２つの $\boldsymbol{k}$-線形写像

$$f_* : \mathrm{Hom}_A(V, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, N), \quad \varphi \longmapsto f \circ \varphi$$

$$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V), \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

を考えることができる。これらに関して次が成り立つ (演習 1-13 参照)。

(1) 左 A-加群準同型の系列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ が完全

$\Longleftrightarrow$ 任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V,M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(V,N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(V,L)$ が完全

(2) 左 A-加群準同型の系列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ が完全

$\Longleftrightarrow$ 任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N,V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M,V)$ が完全

<u>加群の直積と直和</u>

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。左 A-加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ に対して、ベクトル空間としての直積

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i \ (i\in I)\}$$

は A の左作用

$$a\cdot(x_i)_{i\in I} = (a\cdot x_i)_{i\in I} \qquad\qquad (a\in A,\ (x_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} M_i)$$

に関して左 A-加群になる。これを $\{M_i\}_{i\in I}$ の**直積** (*direct product*) と呼ぶ。各 $i_0\in I$ に対して、全射な左 A-加群準同型

$$p_{i_0} : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_{i_0},\quad p_{i_0}((x_i)_{i\in I}) = x_{i_0}$$

を考えることができる。これを直積 $\prod_{i\in I} M_i$ に附随する M_{i_0}-成分に関する**標準的な全射** (*canonical surjection*) と呼ぶ。任意の左 A-加群 V に対して写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(V, \prod_{i\in I} M_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(V, M_i) \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longmapsto & (p_i\circ f)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射になる。もし、左 A-加群 M と左 A-加群準同型の族 $\{q_i : M\longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ が、性質「任意の左 A-加群 V に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(V, M) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, M_i) \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longmapsto & (q_i\circ f)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射になる」を満たすならば、

$$^{\exists 1}\ \varphi : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i : \text{左 } A\text{-加群の同型} \ \ \text{s.t.}\ \ ^{\forall} i\in I,\ q_i = p_i\circ\varphi$$

となる。したがって、上の「　」の性質を持つ組 $(M, \{q_i\}_{i\in I})$ のことを $\{M_i\}_{i\in I}$ の直積と呼んでも差し支えない。

次に直和を定義しよう。左 A-加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ に対して、その直積加群 $\prod_{i\in I} M_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid \text{有限個の } i \in I \text{ を除いて } x_i = 0\}$$

は部分加群になる。これを $\{M_i\}_{i\in I}$ の**直和** (*direct sum*) と呼ぶ。各 $i_0 \in I$ に対して、単射な左 A-加群準同型

$$j_{i_0} : M_{i_0} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i, \quad j_{i_0}(x_{i_0}) = (x_i)_{i\in I}, \quad \text{但し、} x_i = \begin{cases} x_{i_0} & \text{if } i = i_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を考えることができる。これを直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ に附随する M_{i_0}-成分に関する**標準的な単射** (*canonical injection*) と呼ぶ。任意の左 A-加群 V に対して写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, V) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, V) \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longmapsto & (f \circ j_i)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射になる。もし、左 A-加群 M と左 A-加群準同型の族 $\{k_i : M \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ が、性質「任意の左 A-加群 V に対して、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, V) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, V) \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longmapsto & (f \circ k_i)_{i\in I} \end{array}$$

は全単射になる」を満たすならば、

$$^{\exists 1}\ \varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M : \text{左 } A\text{-加群の同型} \ \ \text{s.t.} \ \ ^{\forall} i \in I,\ \varphi \circ j_i = k_i$$

となる。したがって、上の「　」の性質を持つ組 $(M, \{k_i\}_{i\in I})$ のことを $\{M_i\}_{i\in I}$ の直和と呼んでも差し支えない。

I が有限集合のときは、$\{M_i\}_{i\in I}$ の直和と直積は左 A-加群として同型である。

上で述べた直和の定義はいわゆる外部直和である。直和には、もう 1 種類、内部直和と呼ばれるものがある。内部直和の定義も紹介しておこう。M を左 A-加群とする。$\{M_i\}_{i\in I}$ を M の部分加群の族とする。このとき、

$$\sum_{i\in I} M_i := \{x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \mid x_{i_1} \in M_{i_1}, \cdots, x_{i_k} \in M_{i_k} \ \ (i_1, \cdots, i_k \in I,\ k \in \mathbb{N})\}$$

は M の部分加群になる。もし、

① $M = \sum_{i\in I} M_i$

② 任意の有限部分集合 $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset I$ (但し、$i_1, \cdots, i_k$ は相異なる) に対して、

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = 0,\ x_{i_j} \in M_{i_j}\ (j = 1, \cdots, k) \implies x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = 0$$

が満足されるならば、M は $\{M_i\}_{i\in I}$ の**直和** (*direct sum*) であるといい、

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

と書き表わす。M をある部分群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ によって上のように書き表わすことを、M を直和分解するという。各 M_i を M の**直和因子** ($directsumand$) と呼ぶ。M の部分加群 N が (ある直和分解に関して) M の直和因子になるための必要十分条件は $M = N \oplus N'$ となる M の部分加群 N' が存在することである。M が部分加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ の直和であるとき、$j_i : M_i \longrightarrow M$ を包含写像として、組 $(M, \{j_i\}_{i\in I})$ は $\{M_i\}_{i\in I}$ の最初に述べた意味での直和に (同型に) なる。

加群のテンソル積

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、V を右 A-加群、U を左 A-加群とする。$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 T と次の条件を満たす写像 $\varphi : V \times U \longrightarrow T$ が与えられているとする：

(a) $\varphi(v_1 + v_2, u) = \varphi(v_1, u) + \varphi(v_2, u), \quad \varphi(cv, u) = c\varphi(v, u)$
(b) $\varphi(v, u_1 + u_2) = \varphi(v, u_1) + \varphi(v, u_2), \quad \varphi(v, cu) = c\varphi(v, u)$
(c) $\varphi(v \cdot a, u) = \varphi(v, a \cdot u)$

for all $v, v_1, v_2 \in V,\ u, u_1, u_2 \in U,\ a \in A,\ c \in \boldsymbol{k}$ 。このようなベクトル空間 T と写像 φ との組 (T, φ) 全体の集まりを $\mathcal{T}(V, U)$ とおく。このとき、次の普遍性をもつ $(T, \varphi) \in \mathcal{T}(V, U)$ が存在する：

$$^{\forall}(T', \varphi') \in \mathcal{T}(V, U),\ ^{\exists 1}f : T \longrightarrow T' : \boldsymbol{k}\text{-線形写像} \ \text{ s.t. } \ \varphi' = f \circ \varphi$$

その普遍性によって $(S, \psi) \in \mathcal{T}(V, U)$ も (T, φ) と同様の性質を持つならば、線形同型写像 $f : T \longrightarrow S$ であって、$\psi = f \circ \varphi$ を満たすものが唯一存在することがわかる。このことは、(T, φ) が同型を除いて一意的であることを意味する。そこで、上で述べた普遍性を持つ組 (T, φ) を V と U の**テンソル積**と呼び、これを記号 $V \otimes_A U$ で表わす。$v \in V,\ u \in U$ に対して、$\varphi(v, u) \in V \otimes_A U$ を $v \otimes_A u$ という記号で書く：$v \otimes_A u := \varphi(v, u) \in V \otimes_A U$。

$V \otimes_A U$ の任意の元は有限個の元 $v_1, \cdots, v_k \in V,\ u_1, \cdots, u_k \in U$ を用いて

$$v_1 \otimes_A u_1 + \cdots + v_k \otimes_A u_k$$

のように表わすことができる。

$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。V が両側 (B,A)-加群、U が左 A-加群ならば、ベクトル空間 $V \otimes_A U$ には左 B-加群の構造が自然に入る。特に、$B = A$ で $V = {}_AA_A$ の場合には、${}_AA_A = A$ と略記して

$$A \otimes_A U \cong U \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。同様に、V が右 A-加群、U が両側 (A,B)-加群ならば、ベクトル空間 $V \otimes_A U$ には右 B-加群の構造が自然に入る。特に、$B = A$ で $U = {}_AA_A$ の場合には、${}_AA_A = A$ と略記して

$$V \otimes_A A \cong V \quad \text{as right } A\text{-modules}$$

が成り立つ。加群に対してテンソル積 $\otimes_A$ をとる操作は次の意味で結合的である (この観点に立てば、上の事実は、正則加群はその積に関する単位元の役割を果たしている、と述べる

ことができる。演習 1-13 参照)：

V： 右 A-加群, U： 両側 (A,B)-加群, W： 左 B-加群

$$\Longrightarrow \quad (V \otimes_A U) \otimes_B W \cong V \otimes_A (U \otimes_B W) \quad \text{as vector spaces}$$

Hom_A をとる操作とテンソル積 $\otimes_A$ をとる操作は次のように関係している (演習 1-13)。

V： 左 A-加群, U： 両側 (A,B)-加群, W： 左 B-加群

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_A(U \otimes_B W, V) \cong \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U,V)) \quad \text{as vector spaces}$$

但し、右辺の $\mathrm{Hom}_A(U,V)$ は

$$(b \cdot f)(u) = f(u \cdot b) \qquad (b \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U,V),\ u \in U)$$

により与えられる作用により、左 B-加群とみている (演習 1-11)。この同型と同型 $\mathrm{Hom}_A(A,V) \cong V$ の存在 (演習 1-11) から、次の命題を得る。

フロベニウス相互律 (Frobenius reciprocity)

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$\varphi : B \longrightarrow A$：代数準同型

V：左 A-加群、W：左 B-加群　とする。V は φ を経由して左 B-加群とみなせる：

$$b \cdot v := \varphi(b) \cdot v \qquad (b \in B,\ v \in V)$$

また、A は左正則作用と φ を経由した B の作用を伴って、両側 (A,B)-加群とみなせる：

$$a \cdot x \cdot b = ax\varphi(b) \qquad (a, x \in A,\ b \in B)$$

このとき、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間として

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B W, V) \cong \mathrm{Hom}_B(W, V)$$

となる。

(proof)

$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての同型

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B W, V) \cong \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(A,V))$$

が存在する (演習 1-13)。ここで、左 A-加群として $\mathrm{Hom}_A(A,V) \cong V$ となる (演習 1-11) であるが、$\mathrm{Hom}_A(A,V),\ V$ に B は φ を通して作用しているから、この同型 $\mathrm{Hom}_A(A,V) \cong V$ は左 B-加群としての同型でもある。

$\because$)

$F : \mathrm{Hom}_A(A,V) \longrightarrow V$ を左 A-加群としての同型写像とする。これが左 B-加群準同型でもあることを示す。任意に $b \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_A(A,V)$ をとると

$$F(b \cdot f) = F(\varphi(b) \cdot f) = \varphi(b) \cdot F(f) = b \cdot F(f)$$

となる。よって、F は左 B-加群準同型である。 □

よって、

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B W, V) \cong \mathrm{Hom}_B(W, V) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

が得られた。 (Q.E.D.)

注意：B が A の部分代数であって φ が包含写像の場合に、フロベニウスの相互律を考えてみよう。V を左 A-加群とすると、A の作用を B 上に制限することにより、V を左 B-加群とみなすことができる。これを V の制限加群と呼ぶ。他方、左 B-加群 W が与えられると、$A\otimes_B W$ という左 A-加群を考えることができる。これを W の誘導加群と呼ぶ。フロベニウスの相互律は、制限加群をとる操作と誘導加群をとる操作との相互関係を与えている。大雑把にいって、$\dim \mathrm{Hom}_B(W,V)$ は制限加群 V の中に W が何個含まれているかを表わし、$\dim \mathrm{Hom}_A(A\otimes_B W,V)$ は誘導加群 $A\otimes_B W$ の中に V が何個含まれているかを表わしている (Schur の補題 p.88 を参照)。フロベニウスの相互律は、(既約な) 左 A-加群 V が与えられたときに、その制限加群 V の中に (既約な) 左 B-加群 W が何個含まれているかを知りたければ、W の誘導加群 $A\otimes_B W$ が (既約な) 左 A-加群 V を何個含むかを調べれば良く、逆に、(既約な) 左 B-加群 W が与えられたときに、誘導加群 $A\otimes_B W$ の中に (既約な) 左 A-加群 V が何個含まれているかを知りたければ、V の制限加群が (既約な) 左 B-加群 W を何個含むかを調べればよいことを教えている。

演習 1-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$I\subset A$ とする。次を示せ。

(1) I：A の左イデアル $\iff$ $I\neq\emptyset$ であって、

$$\begin{cases} x,y\in I \implies x+y\in I \\ a\in A,\ x\in I \implies ax\in I \end{cases}$$

(2) I：A の右イデアル $\iff$ $I\neq\emptyset$ であって、

$$\begin{cases} x,y\in I \implies x+y\in I \\ a\in A,\ x\in I \implies xa\in I \end{cases}$$

(3) I：A の両側イデアル $\iff$ $I\neq\emptyset$ であって、

$$\begin{cases} x,y\in I \implies x+y\in I \\ a,b\in A,\ x\in I \implies axb\in I \end{cases}$$

解；

(1)(2)(3) のいずれにおいても「$\Longrightarrow$」は自明である。「$\Longleftarrow$」を示す。

(1) I ($\neq\emptyset$) が

$$\begin{cases} x,y\in I \implies x+y\in I \\ a\in A,\ x\in I \implies ax\in I \end{cases}$$

を満たしているとする。このとき、$\alpha\in\boldsymbol{k},\ x\in I$ に対して $\alpha\cdot x\in I$ となることを示せばよい。

$m: A\otimes A\longrightarrow A$ を A の積とし、1_A を A の単位元とすると、

$$\alpha\cdot x=\alpha\cdot m(1_A\otimes x)\underset{\substack{\uparrow\\ m\text{ は }\boldsymbol{k}\text{-線形}}}{=} m((\alpha\cdot 1_A)\otimes x)=(\alpha\cdot 1_A)x\underset{\substack{\uparrow\\ \text{仮定}}}{\in} I$$

となる。

故に、I は A の左イデアルである。

(2) $I\ (\neq \emptyset)$ が

$$\begin{cases} x, y \in I \implies x + y \in I \\ a \in A,\ x \in I \implies xa \in I \end{cases}$$

を満たしているとする。このとき、$\alpha \in \boldsymbol{k},\ x \in I$ に対して

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot m(x \otimes 1_A) = m(x \otimes (\alpha \cdot 1_A)) = x(\alpha \cdot 1_A) \in I$$

となる。

故に、I は A の右イデアルである。

(3) $I\ (\neq \emptyset)$ が

$$\begin{cases} x, y \in I \implies x + y \in I \\ a, b \in A,\ x \in I \implies axb \in I \end{cases}$$

を満たしているとする。このとき、(1) の「$\Longleftarrow$」から I が A の左イデアルであることがわかり、(2) の「$\Longleftarrow$」から I が A の右イデアルであることがことがわかる。故に、I は A の両側イデアルである。 (Q.E.D.)

演習 1-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n \quad (I_i$：0 でない両側イデアル, $i = 1, \cdots, n)$ であるとする。

A の単位元 1 を上の直和分解に応じて $1 = e_1 + \cdots + e_n \quad (e_i \in I_i,\ i = 1, \cdots, n)$ と書くとき、次が成り立つことを示せ。

(1) $e_i \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n),\ e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (i, j = 1, \cdots, n)$ となる。

(2) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、e_i は I_i の単位元である。

(3) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、$e_i \in Z(A)$ となる。

解；

(1) 任意の $a \in A$ は

$$a = a \cdot 1 = ae_1 + \cdots + ae_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

と表わすことができる。各 I_j は左イデアルであるから、

$$ae_j \in I_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

である。特に、$a = e_i$ に取り、$(*)$ の両辺の I_j-成分を比較して、

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が得られる。$e_i \neq 0$ を示すには、

$$Ae_i = I_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

となることを示せばよい。$Ae_i \subset I_i$ であることは、I_i が A の左イデアルであることから直ちに得られる。$I_i \subset Ae_i$ であることは、$(*)$ において a が $a \in I_i$ のときを考えると

$$ae_j = \delta_{ij} a \ \ (j = 1, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となることから得られる。よって、$Ae_i = I_i \neq 0$ から $e_i \neq 0$ である。

(2) 任意の $a \in A$ は

$$a = 1 \cdot a = e_1 a + \cdots + e_n a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

とも表わすことができて、各 I_j は右イデアルでもあるから、

$$ae_j \in I_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となる。特に、$a \in I_i$ ならば、

$$e_j a = \delta_{ij} a \quad (j = 1, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。①②より、

$$a \in I_i \implies e_i a = a = ae_i$$

となることがわかるから、e_i は I_i の単位元である。

(3) 任意の $a \in A$ に対して $(*)$ と $(**)$ が成り立ち、$ae_j,\ e_j a \in I_j \quad (j = 1, \cdots, n)$ であるから、

$$ae_j = e_j a \in I_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が得られる。故に、$e_j \in Z(A)$ を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-3

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$X \subset A \oplus B$：部分集合　とする。次を示せ。

(1) X：$A \oplus B$ の左イデアル

$\iff$ $X = I \oplus J$ (I：A の左イデアル、J：B の左イデアル) と書くことができる

(2) X：$A \oplus B$ の右イデアル

$\iff$ $X = I \oplus J$ (I：A の右イデアル、J：B の右イデアル) と書くことができる

解；

(1) 十分性が成り立つことは明らかであろう。必要性を示す。

X を $A \oplus B$ の左イデアルとする。

$p : A \oplus B \longrightarrow A,\ q : A \oplus B \longrightarrow B$ をそれぞれ $p(a, b) = a,\ q(a, b) = b,\ (a, b) \in A \oplus B$ によって定義する。

$p,\ q$ は全射な代数準同型であるから、$p,\ q$ は左イデアルを左イデアルに写す。よって、$p(X)$ は A の左イデアルであり、$q(X)$ は B の左イデアルである。

$$X = p(X) \oplus q(X)$$

となることを示す。

$(a, b) \in X$ ならば、$a = p(a, b) \in p(X),\ b = q(a, b) \in q(X)$ であるから、

$$X \subset p(X) \oplus q(X) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を得る。

逆に、$(a, b) \in p(X) \oplus q(X)$ を任意にとる。$(a, b) \in X$ となることを示す。そのためには、$(a, 0),\ (0, b) \in X$ となることを示せばよい。

まず、$(a,0)\in X$ となることを示す。$a\in p(X)$ ゆえ $a=p(a',b')$, $(a',b')\in X$ と書くことができる。このとき、$a=a'$ であり、X は $A\oplus B$ の左イデアルから、$(a',0)=(1,0)\cdot(a',b')\in X$ となる。故に、$(a,0)\in X$ が示された。

同様にして $(0,b)\in X$ となることも示すことができる。よって、

$$p(X)\oplus q(X)\subset X \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。

①②から、$X=p(X)\oplus q(X)$ が示された。

(2) 右イデアルについても同様に示すことができる。 (Q.E.D.)

演習 1-4

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、

$$\mathrm{M}_n(A):=\{A\text{ の元を成分とする }n\text{ 次正方行列全体}\}$$

とおく。$\mathrm{M}_n(A)$ は行列の通常の和と積に関して $\boldsymbol{k}$ 上の代数となる。この代数を A 上の n 次全行列代数という。代数としての同型

(1) $\mathrm{M}_n(A)\cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})\otimes A$

(2) $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})\otimes \mathrm{M}_r(A)\cong \mathrm{M}_{nr}(A)$

(3) $Z(\mathrm{M}_n(A))\cong Z(A)$

が存在することを示せ。

解；

(1) $E_{ij}\in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ を (i,j)-成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような行列とする。$f:\mathrm{M}_n(A)\longrightarrow \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})\otimes A$ を

$$f(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix})=\sum_{i,j=1}^{n}E_{ij}\otimes a_{ij} \qquad (a_{ij}\in A)$$

によって定義する。f は代数準同型である。逆に、$g:\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})\otimes A\longrightarrow \mathrm{M}_n(A)$ を

$$g(\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\otimes a)=\begin{pmatrix} c_{11}a & \cdots & c_{1n}a\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}a & \cdots & c_{nn}a\end{pmatrix} \qquad (c_{ij}\in \boldsymbol{k},\ a\in A)$$

となるような線形写像として定義する。g は代数準同型である。$f\circ g=\mathrm{id}$ かつ $g\circ f=\mathrm{id}$ が成り立つので、f および g は代数としての同型写像である。

(2) (1) を用いて、

$$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})\otimes \mathrm{M}_r(A)\cong \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_r(A))\cong \mathrm{M}_{nr}(A)$$

を得る。

$$\uparrow$$

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_r(A))=\left\{\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{n1} & \cdots & X_{nn}\end{pmatrix}\ \middle|\ X_{ij}\in \mathrm{M}_r(A)\ (i,j=1,\cdots,n)\right\}$$

(3) $Z(\mathrm{M}_n(A))=\{aI_n\mid a\in Z(A)\}$ (I_n は n 次単位行列) となることを示せばよい。

$X \in Z(\mathrm{M}_n(A))$ を任意にとる。$X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij},\ \ x_{ij} \in A$ と書く。このとき、行列の積の定義により

$$XE_{kl} = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}E_{il}, \qquad E_{kl}X = \sum_{j=1}^{n} x_{lj}E_{kj}$$

である。$XE_{kl} = E_{kl}X$ でなければいけないことより、

$$\begin{cases} i \neq k \implies x_{ik} = 0 \\ x_{kk} = x_{ll} \end{cases}$$

を得る。故に、

$$X \in Z(\mathrm{M}_n(A)) \implies X = xI_n \text{ for some } x \in A$$

であることがわかった。ここで、任意の $a \in A$ に対して $X(aI_n) = (aI_n)X$ でなければならないことより、$x \in Z(A)$ である。故に、$Z(\mathrm{M}_n(A)) \subset \{aI_n \mid a \in Z(A)\}$ がわかった。逆向きの包含関係は明らかに成り立つから、(3) は証明された。 (Q.E.D.)

演習 1-5

D を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。次を示せ。

(1) D：可除代数 $\iff$ D は零因子を持たない。

(2) $\boldsymbol{k}$：代数閉体、D：$\boldsymbol{k}$ 上可除代数 $\implies D \cong \boldsymbol{k}$ as algebras

代数 D が**零因子を持たない**とは、$a, b \in D$ が $ab = 0$ を満たすならば $a = 0$ または $b = 0$ となるときをいう。

解；

(1) 必要性は明らかである。十分性を示す。まず、D に零因子がないから、$D - \{0\}$ は半群をなすことがわかる。さらに、

$$0 \neq {}^{\forall}a \in D,\ {}^{\exists}b \in D \ \text{ s.t. } \ ab = 1$$

である。

∵)

線形写像 $f_a : D \longrightarrow D$ を $f_a(x) = ax,\ x \in D$ によって定義する。
D には零因子がないので、この写像は単射である。
D は仮定により有限次元であるから、f_a は全射でもある。
したがって、

$${}^{\exists}b \in D \ \text{ s.t. } \ ab = 1$$

となる。 □

単位元を持つ半群 $D - \{0\}$ のすべての元が右逆元を持つことがわかったから、$D - \{0\}$ は群になる (拙著『代数系入門』p.22 定理 1 参照)。故に、D は可除代数である。

(2) $\lambda \in \boldsymbol{k}$ と $\lambda \cdot 1_D \in D$ を同一視して、$\boldsymbol{k} \subset D$ とみなす。

$^\forall a \in D$ をとり、D の $1, a, a^2, \cdots$ で張られる部分空間

$$L := \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i \mid \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{k},\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

を考える。L は D の部分代数であり、D が有限次元なので L も有限次元である。さらに、D は可除なので、L は零因子を持たない。したがって、(1) により、L は再び可除代数である。

L はその定義から可換である。したがって、L は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元の (可換) 体になる。

$\boldsymbol{k}$ は代数閉体なので、$L = \boldsymbol{k}$ でなければならない。したがって、$a \in \boldsymbol{k}$ を得る。

$a \in D$ は任意であるから、$D = \boldsymbol{k}$ が示された。 (Q.E.D.)

演習 1-6

D：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

$$D：可除 \iff D \text{ の左イデアルは } \{0\} \text{ と } D \text{ のみ}$$

となることを示せ。

解；

「$\Longrightarrow$」の証明：

$0 \neq I \subset D$ を左イデアルとする。$0 \neq x \in I$ をとる。D は可除であるから $yx = 1$ となる $y \in D$ が存在する。このとき、$1 = yx \in I$ となる。これは $D = I$ を意味する。

「$\Longleftarrow$」の証明：

D の任意から元 $x\ (\neq 0)$ をとる。左イデアル Dx は 0 でないから、仮定により $Dx = D$ となる。故に、

$$^\exists y \in D \ \text{ s.t. } \ yx = 1$$

となる。$y \neq 0$ であるから、Dy も 0 でない左イデアルである。よって、仮定により、

$$^\exists z \in D \ \text{ s.t. } \ zy = 1$$

となる。これより、

$$z = z(yx) = (zy)x = x$$

を得る。こうして、$xy = yx = 1$ が得られた。故に、x は D の可逆元である。 (Q.E.D.)

演習 1-7

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

A_1：A の部分代数、B_1：B の部分代数 とする。

このとき、次を示せ。

(1) 単射な代数準同型 $A \longrightarrow A \otimes B,\ a \longmapsto a \otimes 1_B$ によって A およびその部分代数 A_1 を $A \otimes B$ の部分代数とみなす。このとき、

$$Z_{A\otimes B}(A_1) = Z_A(A_1) \otimes B$$

となる。特に、$Z_{A\otimes B}(A) = Z(A) \otimes B$ が成り立つ。

(2) $Z_{A\otimes B}(A_1 \otimes B_1) = Z_A(A_1) \otimes Z_B(B_1)$ が成り立つ。

(3) $Z(A \otimes B) = Z(A) \otimes Z(B)$ が成り立つ。

解；

(1) $\{b_i\}_{i\in I}$ を B の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。任意の $x\in A\otimes B$ は

$$x=\sum_{i\in I}a_i\otimes b_i \quad (a_i\in A,\ \text{有限個の } i\in I \text{ を除いて } a_i=0)$$

と一意的に書き表わされる。

$$\begin{aligned}
x\in Z_{A\otimes B}(A_1) &\iff {}^\forall a\in A_1,\ (a\otimes 1_B)x=x(a\otimes 1_B)\\
&\iff {}^\forall a\in A_1,\ \sum_{i\in I}(aa_i)\otimes b_i=\sum_{i\in I}(a_ia)\otimes b_i\\
&\iff {}^\forall a\in A_1,\ {}^\forall i\in I,\ aa_i=a_ia\\
&\iff {}^\forall i\in I,\ a_i\in Z_A(A_1)
\end{aligned}$$

よって、$Z_{A\otimes B}(A_1)\subset Z_A(A_1)\otimes B$ であることが示された。$Z_A(A_1)\otimes B\subset Z_{A\otimes B}(A_1)$ であることは直ちにわかるから、

$$Z_{A\otimes B}(A_1)=Z_A(A_1)\otimes B$$

を得る。後半は今の等式で $A_1=A$ の特別な場合である。

(2)

$$\begin{aligned}
Z_{A\otimes B}(A_1\otimes B_1) &\overset{(*)}{=} Z_{A\otimes B}(A_1)\cap Z_{A\otimes B}(B_1) && \\
&= (Z_A(A_1)\otimes B)\cap Z_{A\otimes B}(B_1) && (1)\\
&= Z_{Z_A(A_1)\otimes B}(B_1) && (\#)\\
&= Z_A(A_1)\otimes Z_B(B_1) && (1)
\end{aligned}$$

である。ここで、$(*)$ と $(\#)$ は次のようにして示される。

$(*)$ の証明：$x\in A\otimes B$ とする。

$$\begin{aligned}
x\in Z_{A\otimes B}(A_1\otimes B_1) &\iff {}^\forall a\in A_1,\ {}^\forall b\in B_1 \text{ について } (a\otimes b)\cdot x=x\cdot(a\otimes b)\\
&\iff {}^\forall a\in A_1,\ {}^\forall b\in B_1 \text{ について } \begin{cases}(a\otimes 1_B)\cdot x=x\cdot(a\otimes 1_B)\\(1_A\otimes b)\cdot x=x\cdot(1_A\otimes b)\end{cases}\\
&\iff x\in Z_{A\otimes B}(A_1) \ \text{かつ}\ x\in Z_{A\otimes B}(B_1)
\end{aligned}$$

真ん中の同値性の部分では $1_A\in A_1,\ 1_B\in B_1$ であることを使っている。

$(\#)$ の証明：$x\in A\otimes B$ とする。

$$\begin{aligned}
x\in Z_{Z_A(A_1)\otimes B}(B_1) &\iff x\in Z_A(A_1)\otimes B\\
&\qquad \text{かつ } {}^\forall b\in B \text{ に対して } (1_A\otimes b)\cdot x=x\cdot(1_A\otimes b)\\
&\iff x\in Z_A(A_1)\otimes B \ \text{かつ}\ x\in Z_{A\otimes B}(B_1)
\end{aligned}$$

(3) (2) において $A_1=A,\ B_1=B$ とおいて得られる。 (Q.E.D.)

演習 1-8

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$f:V_1\longrightarrow V_2$：左 A-加群準同型

$g:U_1\longrightarrow U_2$：左 B-加群準同型　とする。このとき、

$$(f \otimes g)(v_1 \otimes u_1) = f(v_1) \otimes g(u_1) \qquad (v_1 \in V_1,\ u_1 \in U)$$

となる $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像 $f \otimes g : V_1 \otimes U_1 \longrightarrow V_2 \otimes U_2$ が一意的に定まる。$f \otimes g$ は左 $A \otimes B$-加群準同型であることを示せ。

解；

$a \in A,\, b \in B,\, v \in V_1,\, u \in U_1$ に対して

$$\begin{aligned}(f \otimes g)((a \otimes b) \cdot (v \otimes u)) =& (f \otimes g)((a \cdot v) \otimes (b \cdot u)) \\ =& f(a \cdot v) \otimes g(b \cdot u) \\ =& (a \cdot f(v)) \otimes (b \cdot g(u)) \\ =& (a \otimes b) \cdot (f(v) \otimes g(u)) \\ =& (a \otimes b) \cdot ((f \otimes g)(v \otimes u))\end{aligned}$$

を得る。よって、$a \in A,\, b \in B$ と $V_1 \otimes U_1$ の任意の元 $x = \sum_i v_i \otimes u_i$ に対して

$$(f \otimes g)((a \otimes b) \cdot x) = (a \otimes b) \cdot ((f \otimes g)(x))$$

が成り立つ。これより、さらに、$A \otimes B$ の任意の元 $c = \sum_j a_j \otimes b_j$ に対して、

$$(f \otimes g)(c \cdot x) = c \cdot (f \otimes g)(x)$$

が成り立つ。故に、$f \otimes g$ は左 $A \otimes B$-加群準同型である。 (Q.E.D.)

演習 1-9

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：右 A-加群
U：左 A-加群　とする。
W を $\{(v \cdot a) \otimes u - v \otimes (a \cdot u) \mid v \in V,\ u \in U,\ a \in A\}$ によって張られる $V \otimes_{\boldsymbol{k}} U$ の部分線形空間とする。このとき、
(1) ベクトル空間として $V \otimes_A U \cong (V \otimes_{\boldsymbol{k}} U)/W$ となることを示せ。
(2) A が $V,\ U$ へ**自明に作用**するとき、すなわち、$V,\ U$ への A の右作用、左作用がそれぞれ

$$v \cdot a = v \qquad (a \in A,\ v \in V)$$

$$a \cdot u = u \qquad (a \in A,\ u \in U)$$

を満たすとき、

$$V \otimes_A U \cong V \otimes_{\boldsymbol{k}} U \qquad \text{as vector spaces}$$

となることを示せ。

解；

(1) $\varphi : V \times U \longrightarrow V \otimes_A U$ を $\varphi(v, u) = v \otimes_A u,\ v \in V,\ u \in U$ によって定義する。これは $\boldsymbol{k}$-双線形写像であるから、

$$^{\exists}\bar{\varphi} : V \otimes_{\boldsymbol{k}} U \longrightarrow V \otimes_A U：\boldsymbol{k}\text{-線形写像} \ \text{ s.t. } \ \bar{\varphi}(v \otimes u) = v \otimes_A u \ \text{ for } {}^{\forall}v \in V,\ {}^{\forall}u \in U$$

となる。$\bar{\varphi}(W) = 0$ であるから、$\bar{\varphi}$ は $\boldsymbol{k}$-線形写像

$$\bar{\bar{\varphi}} : (V \otimes_{\boldsymbol{k}} U)/W \longrightarrow V \otimes_A U$$

を誘導する。一方、$\psi : V \times U \longrightarrow V \otimes_{\boldsymbol{k}} U/W$ を $\psi(v, u) = [v \otimes u],\ v \in V,\ u \in U$ によって定義する。ここで、$[v \otimes u]$ は自然な射影 $V \otimes_{\boldsymbol{k}} U \longrightarrow V \otimes_{\boldsymbol{k}} U/W$ による $v \otimes u$ の像を表わす。ψ は $\boldsymbol{k}$-双線形写像であって、任意の $v \in V,\ u \in U,\ a \in A$ に対して

$$\psi(v \cdot a, u) = \psi(v, a \cdot u)$$

を満たすので、$\boldsymbol{k}$-線形写像 $\bar{\psi} : V \times_A U \longrightarrow V \otimes_{\boldsymbol{k}} U/W$ が誘導される。

$$\bar{\bar{\varphi}} \circ \bar{\psi} = \mathrm{id}, \quad \bar{\psi} \circ \bar{\bar{\varphi}} = \mathrm{id}$$

が成り立つことがわかるので、$\bar{\bar{\varphi}}$ は線形同型である。故に、

$$V \otimes_A U \cong (V \otimes_{\boldsymbol{k}} U)/W \qquad \text{as vector spaces}$$

を得る。

(2) A が $V,\ U$ へ自明に作用するとき、$W = 0$ となる。したがって、(1) から

$$V \otimes_A U \cong V \otimes_{\boldsymbol{k}} U \qquad \text{as vector spaces}$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-10

$A,\ B,\ C$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

(1) (i) V が左 A-加群、U が両側 (A,B)-加群ならば、$\mathrm{Hom}_A(U, V)$ は

$$(b \cdot f)(u) = f(u \cdot b) \qquad (b \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U, V),\ u \in U)$$

により与えられる作用に関して、左 B-加群となることを示せ。

(ii) V が両側 (A,C)-加群、U が左 A-加群ならば、$\mathrm{Hom}_A(U, V)$ は

$$(f \cdot c)(u) = f(u) \cdot c \qquad (c \in C,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U, V),\ u \in U)$$

により与えられる作用に関して、右 C-加群となることを示せ。

(iii) V が両側 (A,C)-加群、U が両側 (A,B)-加群ならば、(i)(ii) で与えられる B の左作用と C の右作用に関して、$\mathrm{Hom}_A(U, V)$ は両側 (B,C)-加群になることを示せ。

(2) (i) V が右 B-加群、U が両側 (A,B)-加群ならば、$\mathrm{Hom}_B(U, V)$ は

$$(f \cdot a)(u) = f(a \cdot u) \qquad (a \in A,\ f \in \mathrm{Hom}_B(U, V),\ u \in U)$$

により与えられる作用に関して、右 A-加群となることを示せ。

(ii) V が両側 (C,B)-加群、U が右 B-加群ならば、$\mathrm{Hom}_B(U, V)$ は

$$(c \cdot f)(u) = c \cdot f(u) \qquad (c \in C,\ f \in \mathrm{Hom}_B(U, V),\ u \in U)$$

により与えられる作用に関して、左 C-加群となることを示せ。

(iii) V が両側 (C,B)-加群、U が両側 (A,B)-加群ならば、(i)(ii) で与えられる C の左作用と A の右作用に関して、$\mathrm{Hom}_B(U, V)$ は両側 (C,A)-加群になることを示せ。

解；

(1) (i) $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$f_1 + f_2 \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ となること、および、$b \in B$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$b \cdot f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ となることはすぐに確かめられる。$b_1, b_2 \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$(b_1 b_2) \cdot f = b_1 \cdot (b_2 \cdot f)$ となることは、任意の $u \in U$ について

$$(b_1 \cdot (b_2 \cdot f))(u) = (b_2 \cdot f)(u \cdot b_1) = f((u \cdot b_1) \cdot b_2) = f(u \cdot (b_1 b_2)) = ((b_1 b_2) \cdot f)(u)$$

が成り立つことからわかる。$1_B \cdot f = f$ であるから、$\mathrm{Hom}_A(U,V)$ は左 B-加群である。
(ii) $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$f_1 + f_2 \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ となること、および、$c_1, c_2 \in C,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$f \cdot (c_1 c_2) = (f \cdot c_1) \cdot c_2$ となることはすぐにわかる。$c \in C$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対して、$f \cdot c \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ となることは、任意の $u \in U$ と任意の $a \in A$ について

$$(f \cdot c)(a \cdot u) = f(a \cdot u) \cdot c = (a \cdot f(u)) \cdot c = a \cdot (f(u) \cdot c) = (a \cdot (f \cdot c))(u)$$

が成り立つことからわかる。$f \cdot 1_C = f$ であるから、$\mathrm{Hom}_A(U,V)$ は右 C-加群である。
(iii) 任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(U,V),\ b \in B,\ c \in C,\ u \in U$ に対して、

$$((b \cdot f) \cdot c)(u) = (b \cdot f)(u) \cdot c = f(u \cdot b) \cdot c = (f \cdot c)(u \cdot b) = (b \cdot (f \cdot c))(u)$$

となるので、$\mathrm{Hom}_A(U,V)$ は両側 (B,C)-加群になる。
　同様にして、(2) も証明することができる。 (Q.E.D.)

演習 1-11

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
(1) V が左 A-加群ならば、

$$\mathrm{Hom}_A({}_A A, V) \cong V \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となることを示せ。但し、$\mathrm{Hom}_A({}_A A, V)$ への A の左作用は、A を両側正則加群 ${}_A A_A$ とみなして演習 1-10(1)(i) のように与える。
(2) 次が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{End}_A({}_A A) \cong A^{\mathrm{op}} \quad \text{as algebras}$$

解；

　(1) $F : \mathrm{Hom}_A(A,V) \longrightarrow V$ を $F(f) = f(1),\ f \in \mathrm{Hom}_A(A,V)$ によって定義する。F が左 A-加群の同型になることを示す。
　・F が左 A-加群準同型になること：F は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像であることはすぐにわかる。A の左作用を保つことを示す。$a \in A,\ f \in \mathrm{Hom}_A(A,V)$ を任意にとる。このとき、

$$F(a \cdot f) = (a \cdot f)(1) = f(1 \cdot a) = f(a) = f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) = a \cdot F(f)$$

となるから、左 A-加群準同型である。
　・F が単射になること：$F(f) = 0$ とすると、$f(1) = 0$ となる。このとき、任意の $a \in A$ に対して

$$f(a) = a \cdot f(1) = a \cdot 0 = 0$$

となる。故に、$f=0$ となり、F の単射性が示された。

・F が全射であること：任意の $v \in V$ に対して、$f : A \longrightarrow V$ を $f(a) = a \cdot v \quad (a \in A)$ によって定義される写像とする。f は左 A-加群準同型である。このとき、

$$F(f) = f(1) = 1 \cdot v = v$$

となるから、F は全射である。

以上から、F は左 A-加群としての同型 $\mathrm{Hom}_A({}_AA, V) \cong V$ を与える。

(2) (1) において、$V = {}_AA$ にとることにより、左 A-加群としての同型

$$F : \mathrm{End}_A({}_AA) \longrightarrow A, \quad F(f) = f(1), \ f \in \mathrm{End}_A({}_AA)$$

が得られる。この写像が代数の反同型 (下の注意参照) になっていることを示せばよい。

$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A(1) = 1$ であり、$f, g \in \mathrm{End}_A({}_AA)$ に対して、

$$F(g \circ f) = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(f(1)1) = f(1)g(1) = F(f)F(g)$$

となる。よって、F は代数の同型 $\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{op}}$ を与える。 (Q.E.D.)

注意：$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。線形写像 $f : A \longrightarrow B$ が

(i) $f(ab) = f(b)f(a) \quad \text{for } {}^\forall a, b \in A$

(ii) $f(1_A) = 1_B$

を満たすとき、f は**反代数準同型** (*anti-algebra homomorphism*) であると呼ばれる。反代数準同型 $f : A \longrightarrow B$ が線形同型写像であるとき、f は**代数の反同型** (*anti-algebra isomorphism*) であると呼ばれる。線形写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して

$$\begin{aligned} f : A \longrightarrow B：\text{反代数準同型} &\iff f \text{ は } A \text{ から } B^{\mathrm{op}} \text{ への代数準同型} \\ &\iff f \text{ は } A^{\mathrm{op}} \text{ から } B \text{ への代数準同型} \end{aligned}$$

が成り立つ。

演習 1-12

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

(1) V が右 A-加群、I が A の左イデアルならば、ベクトル空間としての自然な同型

$$V \otimes_A ({}_AA/I) \cong V/VI$$

が存在することを示せ。但し、$VI = \{v \cdot a \mid a \in I,\ v \in V\}$ である。

(2) V が左 A-加群、I が A の右イデアルならば、ベクトル空間としての自然な同型

$$(A_A/I) \otimes_A V \cong V/IV$$

が存在することを示せ。但し、$IV = \{a \cdot v \mid a \in I,\ v \in V\}$ である。

解；

(1) 記号が煩雑になることを避けるため、${}_AA$ を A と略記する。

自然な射影 $A \longrightarrow A/I$ に関する $a \in A$ の像を $\overline{a}$ によって表わす。

線形写像 $\varphi : V \longrightarrow V \otimes_A (A/I)$ を $\varphi(v) = v \otimes_A \overline{1},\ v \in V$ によって定義する。任意の $v \in V$ と任意の $a \in I$ について

$$\varphi(v \cdot a) = (v \cdot a) \otimes_A \overline{1} = v \otimes_A \overline{a} = 0$$

となるので、φ は線形写像

$$\bar{\varphi} : V/VI \longrightarrow V \otimes_A (A/I)$$

を誘導する。

次に、自然な射影 $V \longrightarrow V/VI$ による $v \in V$ の像を $\bar{v}$ によって表わす。

写像 $\psi : V \times A/I \longrightarrow V/VI$ を $\psi(v, \overline{a}) = \overline{v \cdot a},\ v \in V,\ a \in A$ によって定義する。

ψ は矛盾なく定義されていて、任意の $v \in V$ と任意の $a, b \in A$ に対して $\psi(v \cdot b, \overline{a}) = \psi(v, b \cdot \overline{a})$ を満たす。

$\because$)

任意の $v \in V$ と $\overline{a} = \overline{b}$ を満たす $a, b \in A$ に対して

$$\overline{v \cdot a} = \overline{v \cdot a} \underset{\substack{\uparrow \\ b - a \in I}}{+} \overline{v \cdot (b - a)} = \overline{v \cdot b}$$

となる。

故に、ψ は矛盾なく定義されている。

また、任意の $v \in V$ と任意の $a, b \in A$ に対して

$$\psi(v \cdot b, \overline{a}) = \overline{(v \cdot b) \cdot a} = \overline{v \cdot (ba)} = \psi(v, b \cdot \overline{a})$$

が成り立つ。 $\square$

このことから、ψ は線形写像 $\bar{\psi} : V \otimes_A (A/I) \longrightarrow V/VI$ を誘導する。

$\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = \mathrm{id}$ かつ $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}$ が成り立つことがわかるから、$\bar{\varphi},\ \bar{\psi}$ は互いに他の逆写像である。

$\phi_V := \bar{\varphi} : V/VI \longrightarrow V \otimes_A (A/I)$ とおく。ϕ_V が自然性を持つことを証明する。すなわち、右 A-加群準同型 $f : V \longrightarrow U$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc}
V/VI & \xrightarrow{\phi_V} & V \otimes_A (A/I) \\
{\scriptstyle \bar{f}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f \otimes_A \mathrm{id}} \\
U/UI & \xrightarrow{\phi_U} & U \otimes_A (A/I)
\end{array}$$

が可換になることを示す。但し、$\bar{f} : V/VI \longrightarrow U/UI$ は f によって誘導される $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像である (注：f は A の右作用を保つから、$f(VI) \subset UI$ を満たす。したがって、V/VI から U/UI への線形写像が誘導される)。

任意に $v \in V$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}
((f \otimes_A \mathrm{id}) \circ \phi_V)(\overline{v}) &= (f \otimes_A \mathrm{id})(v \otimes_A \overline{1}) \\
&= f(v) \otimes_A \overline{1} \\
&= \phi_U(\overline{f(v)}) \\
&= (\phi_U \circ \bar{f})(\overline{v})
\end{aligned}$$

を得る。故に、上の図式は可換である。

(2) についても同様にして証明することができる。 (Q.E.D.)

注意：よく知られているように、自然な線形同型

$$\begin{cases} V \otimes_A ({}_A A) \cong V & (V \text{ が右 } A\text{-加群のとき}) \\ (A_A) \otimes_A V \cong V & (V \text{ が左 } A\text{-加群のとき}) \end{cases}$$

が V が右 A-加群のときには

$$V \longrightarrow V \otimes_A ({}_A A), \quad v \longmapsto v \otimes_A 1, \quad v \in V$$

によって与えられ、V が右 A-加群のときには

$$V \longrightarrow (A_A) \otimes_A V, \quad v \longmapsto 1 \otimes_A v, \quad v \in V$$

によって与えられる。この同型は、上の演習問題 (の解) において、$I = 0$ の場合に相当する。

演習 1-13

A, B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
(1) V が右 A-加群、U が両側 (A,B)-加群、W が左 B-加群ならば、ベクトル空間としての自然な同型

$$(V \otimes_A U) \otimes_B W \cong V \otimes_A (U \otimes_B W)$$

が存在することを示せ。
(2) V が左 A-加群、U が両側 (A,B)-加群、W が左 B-加群ならば、ベクトル空間としての自然な同型

$$\mathrm{Hom}_A(U \otimes_B W, V) \cong \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V))$$

が存在することを示せ。但し、右辺の $\mathrm{Hom}_A(U, V)$ は

$$(b \cdot f)(u) = f(u \cdot b) \qquad (b \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_A(U, V),\ u \in U)$$

により与えられる作用により、左 B-加群とみている (演習 1-11 参照)。

解；

(1) まず、$w \in W$ を任意にとり、固定する。写像 $f_w : V \times U \longrightarrow V \otimes_A (U \otimes_B W)$ を

$$f_w(v, u) = v \otimes_A (u \otimes_B w) \qquad (v \in V,\ u \in U)$$

によって定義する。f_w は双一次写像であって、

$$f_w(v \cdot a, u) = f_w(v, a \cdot u) \quad \text{for } {}^\forall v \in V,\ {}^\forall u \in U,\ {}^\forall a \in A$$

を満たす。テンソル積の普遍性から

$$^{\exists 1}\ \bar{f}_w : V \otimes_A U \longrightarrow V \otimes_A (U \otimes_B W) \ \text{：線形写像}$$
$$\text{s.t.} \ \ \bar{f}_w(v \otimes_A u) = f_w(v, u) \quad \text{for } {}^\forall v \in V,\ {}^\forall u \in U$$

となる。任意の $w_1, w_2 \in W$ および $\alpha \in \boldsymbol{k}$ に対して

$$\begin{cases} \bar{f}_{w_1} + \bar{f}_{w_2} = \bar{f}_{w_1 + w_2} \\ \bar{f}_{\alpha w_1} = \alpha \bar{f}_{w_1} \end{cases}$$

が成り立つ。

$\because$)

実際、任意の $v \in V,\ , u \in U$ に対して

$$\begin{aligned}(\bar{f}_{w_1}+\bar{f}_{w_2})(v \otimes_A u) &= \bar{f}_{w_1}(v \otimes_A u)+\bar{f}_{w_2}(v \otimes_A u)\\ &= v \otimes_A (u \otimes_B w_1) + v \otimes_A (u \otimes_B w_2)\\ &= v \otimes_A (u \otimes_B w_1 + u \otimes_B w_2)\\ &= v \otimes_A (u \otimes_B (w_1+w_2))\\ &= \bar{f}_{w_1+w_2}(v \otimes_A u)\end{aligned}$$

となるから、テンソル積に普遍性 (特に一意性の部分) より、

$$\bar{f}_{w_1}+\bar{f}_{w_2}=\bar{f}_{w_1+w_2}$$

を得る。同様にして、$\bar{f}_{\alpha w_1}=\alpha\bar{f}_{w_1}$ も示される。 □

次に、$f:(V \otimes_A U)\times W \longrightarrow V \otimes_A (U \otimes_B W)$ を

$$f(x,w)=\bar{f}_w(x) \qquad (x \in V \otimes_A U,\ w \in W)$$

によって定義する。f は双一次写像であって、

$$f(x\cdot b,w)=f(x,b\cdot w) \quad \text{for } {}^\forall x \in V \otimes_A U,\ {}^\forall w \in W,\ {}^\forall b \in B$$

を満たす。したがって、テンソル積の普遍性から

$${}^{\exists 1}\ \bar{f}:(V \otimes_A U)\otimes_B W \longrightarrow V \otimes_A (U \otimes_B W) \text{ ：線形写像}$$
$$\text{s.t. } \bar{f}(x \otimes_B w)=f(x,w) \quad \text{for } {}^\forall x \in V \otimes_A U,\ {}^\forall w \in W$$

となる。$\bar{f}$ は任意の $v \in V, u \in U, w \in W$ に対して、

$$\bar{f}((v \otimes_A u)\otimes_B w)=v \otimes_A (u \otimes_B w)$$

となる線形写像である。今までの議論と同様にして任意の $v \in V, u \in U, w \in W$ に対して、

$$\bar{g}(v \otimes_A (u \otimes_B w))=(v \otimes_A u)\otimes_B w$$

となる線形写像 $g: V \otimes_A (U \otimes_B W) \longrightarrow (V \otimes_A U)\otimes_B W$ が得られる。$V \otimes_A (U \otimes_B W)$ は $v \otimes_A (u \otimes_B w)$ の形をした元によって張られ、$(V \otimes_A U)\otimes_B W$ は $(v \otimes_A u)\otimes_B w$ の形をした元によって張られるから、

$$(\bar{f}\circ\bar{g})(v \otimes_A (u \otimes_B w))=v \otimes_A (u \otimes_B w) \quad \text{for } v \in V, u \in U, w \in W$$

から $\bar{f}\circ\bar{g}=\mathrm{id}$ が得られ、

$$(\bar{g}\circ\bar{f})((v \otimes_A u)\otimes_B w)=(v \otimes_A u)\otimes_B w \quad \text{for } v \in V, u \in U, w \in W$$

から $\bar{g}\circ\bar{f}=\mathrm{id}$ が得られる。よって、$\bar{f}$ により、

$$(V \otimes_A U)\otimes_B W \cong V \otimes_A (U \otimes_B W)$$

が成り立つ。

(2) 写像 $F : \mathrm{Hom}_A(U \otimes_B W, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V))$ を

$$F(\varphi) : W \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V)), \quad w \longmapsto \varphi_w$$

$$\varphi_w(u) := \varphi(u \otimes_B w) \quad \text{for } {}^\forall u \in U$$

によって定義する。$\varphi_w \in \mathrm{Hom}_A(U, V)$ である。実際、任意の $u \in U,\ a \in A$ に対して

$$\varphi_w(a \cdot u) = \varphi((a \cdot u) \otimes_B w) = \varphi(a \cdot (u \otimes_B w)) = a \cdot \varphi(u \otimes_B w) = a \cdot \varphi_w(u)$$

となることからわかる。任意の $b \in B,\ w \in W$ に対して

$$\varphi_{b \cdot w} = b \cdot \varphi_w$$

が成り立つ。なぜならば、

$$\varphi_{b \cdot w}(u) = \varphi(u \otimes_B (b \cdot w)) = \varphi((u \cdot b) \otimes_B w) = \varphi_w(u \cdot b) = (b \cdot \varphi_w)(u)$$

が任意の $u \in U$ に対して成り立つからである。よって、

$$F(\varphi) \in \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V))$$

となっている。F が線形写像であることはすぐにわかる。

F が全単射であることを示すために、その逆写像を与えよう。

写像 $G : \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(U \otimes_B W, V)$ を $\psi \in \mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(U, V))$ に対して、線形写像

$$G(\psi) : U \otimes_B W \longrightarrow V, \quad u \otimes_B w \longmapsto \psi(w)(u), \quad u \in U,\ w \in W$$

を対応させる写像とする。このような線形写像が定まることは、

$$\psi(w)(u \cdot b) = (b \cdot \psi(w))(u) = \psi(b \cdot w)(u) \quad \text{for } u \in U,\ w \in W,\ b \in B$$

となることによる。さらに、

$$G(\psi)(a \cdot (u \otimes_B w)) = G(\psi)((a \cdot u) \otimes_B w) = \psi(w)(a \cdot u) = a \cdot (\psi(w)(u)) = a \cdot G(\psi)(u \otimes_B w)$$

が任意の $a \in A,\ u \in U,\ w \in W$ に対して成り立つので、$G(\psi)$ は左 A-加群準同型である。

$F \circ G = \mathrm{id},\ G \circ F = \mathrm{id}$ が成り立つので、F の全単射性が示された。 (Q.E.D.)

演習 1-14

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) 左 A-加群 V の 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, \boldsymbol{k})$ は次の作用に関して、右 A-加群になることを示せ：

$$(p \cdot a)(v) = p(a \cdot v) \qquad (p \in V^*,\ a \in A,\ v \in V)$$

この右 A-加群を V の**双対加群**と呼び、双対ベクトル空間と同じ記号 V^* を使って表わす。

(2) 右 A-加群 V の 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, \boldsymbol{k})$ は次の作用に関して、左 A-加群になることを示せ：

$$(a \cdot p)(v) = p(v \cdot a) \qquad (p \in V^*,\ a \in A,\ v \in V)$$

この左 A-加群を V の**双対加群**と呼び、双対ベクトル空間と同じ記号 V^* を使って表わす。

(3) 左 A-加群 V に対して、写像 $\iota_V : V \longrightarrow V^{**}$ を

$$\iota(v)(p) = p(v) \qquad (v \in V,\ p \in V^*)$$

によって定義する。ι_V は単射な左 A-加群準同型であって、次の自然性を持つことを示せ：左 A-加群準同型 $f : V \longrightarrow U$ に対して、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle \iota_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_U} \\ V^{**} & \xrightarrow{{}^{tt}f} & U^{**} \end{array}$$

解；

(1) $p \in V^*,\ a \in A$ に対して、$p \cdot a \in V^*$ となることはすぐにわかる。さらに、$p \in V^*,\ a, b \in A$ に対して、

$$\begin{cases} \cdot\ (p \cdot 1)(v) = p(1 \cdot v) = p(v), \\ \cdot\ ((p \cdot a) \cdot b)(v) = (p \cdot a)(b \cdot v) = p(a \cdot (b \cdot v)) = p(ab \cdot v) = (p \cdot ab)(v) \end{cases} \qquad \text{for } {}^\forall v \in V$$

となるから、与えられた作用に関して V^* は右 A-加群になる。

(2) も (1) と同様にして証明される。

(3) $\iota : V$ が単射な線形写像であることは、線形代数学でよく知られている事実であるから、$\iota : V$ が A の左作用を保つことを示す。

$a \in A,\ p \in V^*,\ v \in V$ を任意にとる。このとき、

$$\iota(a \cdot v)(p) = p(a \cdot v) = (p \cdot a)(v) = \iota(v)(p \cdot a) = (a \cdot \iota(v))(p)$$

となるので、確かに、ι は左 A-加群準同型である。

次に、ι_V が自然性を持つことを示す。$f : V \longrightarrow U$ を左 A-加群準同型とする。

このとき、任意の $v \in V$ と任意の $q \in U^*$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle ({}^{tt}f \circ \iota_V)(v),\ q \rangle &= \langle \iota_V(v) \circ {}^t f,\ q \rangle \\ &= \langle \iota_V(v),\ {}^t f(q) \rangle \\ &= \langle \iota_V(v),\ q \circ f \rangle \\ &= \langle q \circ f,\ v \rangle \\ &= \langle q,\ f(v) \rangle \\ &= \langle q,\ f(v) \rangle \\ &= \langle \iota_U(f(v)),\ q \rangle \\ &= \langle (\iota_U \circ f)(v),\ q \rangle \end{aligned}$$

となる。よって、

$${}^{tt}f \circ \iota_V = \iota_U \circ f$$

が示された。 (Q.E.D.)

注意 1°：(3) により、左 A-加群 V が有限次元のとき、ι_V によって、

$$V \cong V^{**} \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

が成り立つことがわかる (有限次元右 A-加群についても同様の結果が成り立つ)。

注意 $2°$：左 A-加群 V が有限次元のとき、

$$\iota_{V^*} = ({}^t\iota_V)^{-1} : V^* \longrightarrow V^{***}$$

が成り立つ (有限次元右 A-加群についても同様の結果が成り立つ)。

(proof)

${}^t\iota_V \circ \iota_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$ となることを示せばよい。

任意の $p \in V^*$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \langle ({}^t\iota_V \circ \iota_{V^*})(p),\ v\rangle &= \langle {}^t\iota_V(\iota_{V^*}(p)),\ v\rangle \\ &= \langle \iota_{V^*}(p) \circ \iota_V,\ v\rangle \\ &= \langle \iota_{V^*}(p),\ \iota_V(v)\rangle \\ &= \langle \iota_V(v),\ p\rangle \\ &= \langle p,\ v\rangle \end{aligned}$$

となる。故に、${}^t\iota_V \circ \iota_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$ となることが示された。 □

演習 1-15

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群 とする。このとき、次が成り立つことを示せ。

(1) $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ への $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ の左作用を

$$((a \otimes b) \cdot f)(v) = a \cdot f(b \cdot v) \qquad (f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ a, b \in A,\ v \in V)$$

によって定義すると、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ は左 A^e-加群になる。

(2) V に対応する表現 $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ は左 A^e-加群準同型である。

(3) V：有限次元 $\Longrightarrow$ $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V \cong V \otimes V^*$ as left A^e-modules

但し、$V \otimes V^*$ への $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ の左作用はそれぞれ次のようにして与える：

$$(a \otimes b) \cdot (v \otimes p) = a \cdot v \otimes b \cdot p \qquad (v \in V,\ p \in V^*,\ a, b \in A)$$

ここで、$(b \cdot p)(v) = p(b \cdot v)$ である。

(4) V：有限次元 $\Longrightarrow$ $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V \cong \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{\dim V \text{ 個}}$ as left A-modules

但し、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ は次の作用によって左 A-加群とみなしている。

$$(a \cdot f)(v) = a \cdot f(v) \qquad (f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ a \in A,\ v \in V)$$

注意：この演習における V^* への A^{op} の左作用は、演習 1-14 における V^* への A の右作用を A^{op} の左作用に読み替えたものに他ならない。

演習 1-15 の解；

(1) $f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ と $a, b \in A$ に対して、$(a \otimes b) \cdot f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ であることは容易にわかる。

$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ に対して

$$((1 \otimes 1) \cdot f)(v) = 1 \cdot f(1 \cdot v) = f(v) \qquad (v \in V)$$

となるので、$(1\otimes 1)\cdot f=f$ を得る。また、$f\in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ a_1,b_1,a_2,b_2\in A$ に対して

$$\begin{aligned}((a_1\otimes b_1)\cdot((a_2\otimes b_2)\cdot f))(v)&=a_1\cdot((a_2\otimes b_2)\cdot f)(b_1\cdot v)\\&=a_1\cdot(a_2\cdot f(b_2\cdot(b_1\cdot v)))\\&=(a_1a_2)f(b_2b_1\cdot v)\\&=(a_1a_2)\cdot f((b_1*b_2)\cdot v)\\&=(((a_1a_2)\otimes(b_1*b_2))\cdot f)(v)\\&=((a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2)\cdot f)(v),\quad \text{for}\ \ v\in V\end{aligned}$$

となる (ここで、$*$ は A^{op} の積を表わす) ので、

$$(a_1\otimes b_1)\cdot((a_2\otimes b_2)\cdot f)=((a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2))\cdot f$$

を得る。故に、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ は左 A^e-加群になる。

(2) $a,b,x\in A$ に対して、$\rho((a\otimes b)\cdot x)=(a\otimes b)\cdot\rho(x)$ となることを示す。

任意の $v\in V$ に対して

$$\begin{aligned}\rho((a\otimes b)\cdot x)(v)&=\rho(axb)(v)\\&=(\rho(a)\circ\rho(x)\circ\rho(b))(v)\\&=a\cdot\rho(x)(b\cdot v)\\&=((a\otimes b)\cdot\rho(x))(v)\end{aligned}$$

となる。よって、ρ は左 A^e-加群準同型である。

(3) $V\otimes V^*$ が左 A^e-加群になることは、演習 1-14 などからすぐにわかる。$\boldsymbol{k}$ 上の線形写像 $\varphi: V\otimes V^*\longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を

$$\varphi(v\otimes p)(w)=p(w)v \qquad\qquad (v,w\in V,\ p\in V^*)$$

によって定義する。V は有限次元なので、φ は線形同型写像である。φ が左 A^e-加群準同型でもあることを示す。$a,b\in A,\ v\in V,\ p\in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi((a\otimes b)\cdot(v\otimes p))=\varphi(a\cdot v\otimes b\cdot p): w\longmapsto &(b\cdot p)(w)a\cdot v,\quad w\in V\\&\qquad\|\\&p(b\cdot w)a\cdot v\\&\qquad\|\\&a\cdot p(b\cdot w)v\end{aligned}$$

であり、一方、

$$\begin{aligned}(a\otimes b)\cdot\varphi(v\otimes p): w\longmapsto &a\cdot\varphi(v\otimes p)(b\cdot w),\quad w\in V\\&\qquad\|\\&a\cdot p(b\cdot w)v\end{aligned}$$

であるから、

$$\varphi((a\otimes b)\cdot(v\otimes p))=(a\otimes b)\cdot\varphi(v\otimes p)$$

を得る。故に、左 A^e-加群として、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\cong V\otimes V^*$ を得る。

(4) $n = \dim V$ とおき、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とする。

写像 $F : \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V \longrightarrow \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n\text{ 個}}$ を

$$F(f) = (f(v_1), \cdots, f(v_n)) \qquad (f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V)$$

によって定義する。F は線形同型写像であり、A の作用を保つので、左 A-加群としての同型である。 (Q.E.D.)

演習 1-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$V,\ U$：左 A-加群
$\varphi : V \longrightarrow U$ を左 A-加群の同型 とする。
写像 $\tilde{\varphi} : \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} U$ を

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \quad f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$$

によって定義する。このとき次を示せ。
(1) $\tilde{\varphi}$ は左 A^e-加群の同型である。
(2) $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V,\ \sigma : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} U$ をそれぞれ A の $V,\ U$ への左作用に対応する表現とする。このとき、図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} U \end{tikzcd}$$

は可換である。

解；
(1) $a, b \in A$ および $f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ に対して、

$$\begin{aligned} ((a \otimes b) \cdot \tilde{\varphi}(f))(u) &= a \cdot \tilde{\varphi}(f)(b \cdot u) \\ &= a \cdot \varphi(f(\varphi^{-1}(b \cdot u)) \\ &= \varphi(a \cdot f(b \cdot \varphi^{-1}(u))) \qquad \varphi\text{：左 } A\text{-加群準同型} \\ &= (\varphi \circ ((a \otimes b) \cdot f) \circ \varphi^{-1})(u) \\ &= \tilde{\varphi}((a \otimes b) \cdot f)(u) \quad \text{for all } u \in U \end{aligned}$$

となる。よって、$\tilde{\varphi}$ は左 A^e-加群準同型である。$\tilde{\varphi}$ は全単射でもあるから、$\tilde{\varphi}$ は左 A^e-加群の同型である。
(2) φ は左 A-加群準同型であるから、任意の $a \in A$ に対して

$$\varphi \circ \rho(a) = \sigma(a) \circ \varphi$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi} \circ \rho)(a) &= \tilde{\varphi}(\rho(a)) \\ &= (\varphi \circ \rho(a) \circ \varphi^{-1})(a) \\ &= \sigma(a)\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\tilde{\varphi} \circ \rho = \sigma$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-17

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
V の部分加群 W に対して、

$$W^{\perp} = \{p \in V^* |\ p(W) = 0\}$$

とおく。
(1) $W^{\perp}$ は双対加群 V^* の部分加群であり、V の２つの部分加群 $W_1,\ W_2$ に対して

$$W_1 \subset W_2 \quad \Longrightarrow \quad W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$$

が成り立つことを示せ。
(2) $\dim V < \infty$ であるとする。V の部分加群 W に対して、次が成り立つことを示せ。
　① 右 A-加群として、$(V/W)^* \cong W^{\perp}$ かつ $V^*/W^{\perp} \cong W^*$
　② $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$
　③ $(W^{\perp})^{\perp} \cong W$ as left A-modules
(3) 写像 $\Phi : \{V$ の部分加群全体$\} \longrightarrow \{V^*$ の部分加群全体$\}$ を $\Phi(W) = W^{\perp}$ によって定義する。V が有限次元ならば、Φ は全単射であることを示せ。

解；
　(1)・$W^{\perp}$ が双対加群 V^* の部分加群であること：
　$W^{\perp}$ が V^* の部分線形空間であることは、すぐに確かめられる。$W^{\perp}$ が A の作用に関して閉じていることを示す。
　$a \in A,\ p \in W^{\perp}$ に対して

$$(p \cdot a)(W) = p(aW) \subset p(W) = 0$$

となるので、$p \cdot a \in W^{\perp}$ を得る。故に、$W^{\perp}$ は V^* の部分加群である。
　・$W_1,\ W_2$ を V の部分加群とし、$W_1 \subset W_2$ を満たしているとする。
　このとき、

$$p \in W_2^{\perp} \implies p(W_2) = 0 \implies p(W_1) = 0 \implies p \in W_1^{\perp}$$

となる。故に、$W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$ を得る。
　(2) ① $\pi : V \longrightarrow V/W$ を自然な射影とする。
　・$(V/W)^* \cong W^{\perp}$ as right A-modules であること：

各 $p \in W^\perp$ は、$p(W) = 0$ を満たすので、$\bar{p} \circ \pi = p$ を満たす線形写像 $\bar{p} : V/W \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を誘導する。$p \in W^\perp$ に対して、$\bar{p} \in (V/W)^*$ を対応させる写像 $F : W^\perp \longrightarrow (V/W)^*$ が右 A-加群の同型であることを示す。

F は $\boldsymbol{k}$-線形同型写像である。

$\because$)

F が $\boldsymbol{k}$-線形写像であることはすぐにわかる。

$p \in W^\perp$ が $\bar{p} = 0$ を満たすならば、任意の $v \in V$ に対して、$p(v) = \bar{p}(\pi(v)) = 0$ となる。故に、F は単射である。

任意に $q \in (V/W)^*$ に対して、$p = q \circ \pi : V \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を考えると、$p(W) = 0$ を満たすから $p \in W^\perp$ であり、$q = \bar{p}$ が成り立つ。したがって、F は全射である。 $\square$

また、$p \in W^\perp,\ a \in A$ に対して、$\overline{p \cdot a} = \bar{p} \cdot a$ となることは、商加群と双対加群への A の作用の仕方から、直ちにわかる。故に、F は右 A-加群準同型である。

・$V^*/W^\perp \cong W^*$ as right A-modules であること：

$i : W \longrightarrow V$ を包含写像とする。

写像 $G : V^* \longrightarrow W^*$ を $G(p) = p \circ i,\ p \in V^*$ によって定義する。G が右 A-加群準同型であることは簡単に確かめられる。

G は全射であり、$\mathrm{ker} G = W^\perp$ が成り立つ。

$\because$)

・G が全射であること：

$V = W \oplus W'$ となる V の部分線形空間 W' を 1 つとる。

任意の $f \in W^*$ に対して、$p \in V^*$ を

$$p|_W = f \quad p|_{W'} = 0$$

によって定義する。明らかに $G(p) = f$ であるから、G は全射である。

・$\mathrm{Ker} G = W^\perp$ であること：

$p \in W^\perp$ ならば、$p(W) = 0$ であるから、$G(p) = p \circ i = 0$ となる。故に、$W^\perp \subset \mathrm{Ker} G$ が成り立つ。逆に、$p \in \mathrm{Ker} G$ とすれば、$p \circ i = G(p) = 0$ であるから、$p(W) = 0$ が満たされる。故に、$p \in W^\perp$ である。故に、$\mathrm{Ker} G \subset W^\perp$ が成り立つ。 $\square$

準同型定理により、

$$V^*/W^\perp \cong W^* \qquad \text{as right } A\text{-modules}$$

を得る。

② ①より、$(V/W)^* \cong W^\perp$ であるから、この両辺の次元を比較することにより、

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

を得る。

③ 標準的な左 A-加群の同型写像

$$\iota : V \longrightarrow V^{**}, \quad \iota(v)(p) = p(v), \quad v \in V,\ p \in V^*$$

を考える (演習 1-14(3))。

このとき、$\iota(W) \subset (W^{\perp})^{\perp}$ が成り立つ。

$\because$)

$w \in W$ と $p \in W^{\perp}$ に対して、

$$\iota(w)(p) = p(w) = 0$$

となる。これは $\iota(w) \in (W^{\perp})^{\perp}$ となることを意味する。 □

② を V^* とその部分空間 $W^{\perp}$ について適用することにより

$$\dim W^{\perp} + \dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V^* = \dim V$$

を得る。この等式と②から

$$\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim W \underset{\substack{\uparrow \\ \iota \text{ は同型}}}{=} \dim \iota(W)$$

を得る。

線形代数学における次元定理から、

$$\iota(W) = (W^{\perp})^{\perp}$$

を得る。

(3) Φ は、③により、単射であることがわかる。

Φ の全射性を示す。

任意に V^* の部分加群 U をとる。

$$W := \bigcap_{p \in U} \mathrm{Ker} p$$

とおく。W の定義により、W は V の部分加群であり、

$$U \subset W^{\perp} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ❶$$

が成り立つ。

$\because$)

・W が V の部分加群であること：

$a \in A,\ w \in W$ に対して $a \cdot w \in W$ となることを示す (その他の条件が満たされることは簡単にわかる)。

$p \in U$ を任意にとると、U は V^* の部分加群であるから $p \cdot a \in U$ が成り立つ。したがって、

$$p(a \cdot w) = (p \cdot a)(w) \underset{\substack{\uparrow \\ w \in W,\ p \cdot a \in U}}{=} 0$$

であることがわかる。

故に、$a \cdot w \in \bigcap_{p \in U} \mathrm{Ker} p = W$ である。

・$U \subset W^{\perp}$ であること：

W の定義により、$p \in U,\ w \in W$ ならば $p(W) = 0$ となる。よって、$p \in U \implies p \in W^{\perp}$ が成り立つ。 □

一方、

$$\dim W^{\perp} = \dim(V/W) \leq \dim U \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ❷$$

が成り立つ。

$\because$)

$\dim W^{\perp} = \dim(V/W)$ であることは①から従う。

$\dim(V/W) \leq \dim U$ であることを示す。

$p \in U$ ならば $p(W) = 0$ であるから、線形写像 $\bar{p} : V/W \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が誘導される。このとき、写像

$$U \longrightarrow (V/W)^{*}, \quad p \longmapsto \bar{p}$$

は単射であることがわかる。したがって、

$$\dim V/W = \dim(V/W)^{*} \leq \dim U$$

を得る。 □

❶と❷から、$W^{\perp} = U$ を得る。故に、Φ は全射である。 (Q.E.D.)

演習 1-18

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。次を示せ。

(1) 左 A-加群準同型の系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A1)$$

が完全であるための必要十分条件は、任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(V, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(V, L) \quad \cdots\cdots (B1)$$

が完全になることである。

(2) 左 A-加群準同型の系列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A2)$$

が完全であるための必要十分条件は、任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L, V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N, V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M, V) \quad \cdots\cdots (B2)$$

が完全になることである。

解；

(1) i. 必要性：系列 (A1) は完全であるとする。V を任意の左 A-加群とする。

①$\mathrm{Im} f_* \subset \mathrm{Ker} g_*$ であること：$\alpha \in \mathrm{Hom}_A(V, M)$ とする。$g \circ f = 0$ だから、

$$g_*(f_*(\alpha)) = g \circ f \circ \alpha = 0$$

となる。よって、①は示された。

②$\mathrm{Ker} g_* \subset \mathrm{Im} f_*$ であること：$\alpha \in \mathrm{Ker} g_*$ とすると、$0 = g_*(\alpha) = g \circ \alpha$ である。これと仮定により、

$$\mathrm{Im}\alpha \subset \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$$

が得られる。仮定により、f は単射なので

$$\beta : V \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Im}\alpha \hookrightarrow \mathrm{Im}f \xrightarrow{f^{-1}} M$$

とおくと、β は左 A-加群準同型であって、$f \circ \beta = \alpha$ が成り立つ。よって、②は示された。
③f_* が単射であること：$\alpha \in \mathrm{Ker}f_*$ とすると、$f \circ \alpha = 0$ となる。仮定により f は単射であるから、$\alpha = 0$ を得る。故に、③は示された。

①②③より、必要性は証明された。

ii. 十分性：系列 (B1) が任意の左 A-加群 V に対して完全であると仮定する。$g_* \circ f_* = 0$ より、任意の $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(V, M)$ について $g \circ f \circ \alpha = 0$ となる。

$V = M$ かつ $\alpha = \mathrm{id}_V$ にとることにより、$g \circ f = 0$ を得る。したがって、$\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$ を得る。次に、

$V = \mathrm{Ker}g$ にとり、$\alpha : V = \mathrm{Ker}g \longrightarrow N$ を包含写像とする。このとき、$g_*(\alpha) = g \circ \alpha = 0$ であるから、(B1) の完全性により

$$^\exists\beta \in \mathrm{Hom}_A(V, M) \ \ \text{s.t.} \ \ f_*(\beta) = \alpha$$

となる。故に、

$$\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}(f \circ \beta) \subset \mathrm{Im}f$$

を得る。こうして、$\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$ が示された。

次に、f の単射性を示す。

$V = \mathrm{Ker}f$ にとり、$\alpha : V = \mathrm{Ker}f \longrightarrow M$ を包含写像とする。このとき、$f_*(\alpha) = f \circ \alpha = 0$ であるから $\alpha \in \mathrm{Ker}f_* = 0$ となる。よって、$\mathrm{Ker}f = 0$ が得られ、f の単射性が示された。

(2) i. 必要性：系列 (A2) は完全であるとする。V を任意の左 A-加群とする。
①$\mathrm{Im}g^* \subset \mathrm{Ker}f^*$ であること：$\alpha \in \mathrm{Hom}_A(L, V)$ とする。$g \circ f = 0$ だから、

$$f^*(g^*(\alpha)) = \alpha \circ g \circ f = 0$$

となる。よって、①は示された。
②$\mathrm{Ker}f^* \subset \mathrm{Im}g^*$ であること：$\alpha \in \mathrm{Ker}f^*$ とすると、$0 = f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ である。これと仮定により、

$$\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}\alpha$$

が得られる。よって、α は左 A-加群準同型 $\overline{\alpha} : N/\mathrm{Im}f \longrightarrow V$ を誘導する。

$$L \cong N/\mathrm{Ker}g = N/\mathrm{Im}f \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

であるから、左 A-加群準同型

$$\beta : L \cong N/\mathrm{Im}f \xrightarrow{\overline{\alpha}} V$$

が得られる。

$$\beta(g(n)) = \alpha(n) \qquad \text{for } ^\forall n \in N$$

であるから $g^*(\beta) = \alpha$ となる。よって、②は示された。
③g^* が単射であること：$\alpha \in \mathrm{Ker}g^*$ とすると、$\alpha \circ g = 0$ となる。仮定から、g は全射であるから、$\alpha = 0$ を得る。よって、③は示された。

①②③より、必要性は証明された。

ii. 十分性：系列 (B2) が任意の左 A-加群 V に対して完全であると仮定する。$f^* \circ g^* = 0$ より、任意の $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(L, V)$ について $\alpha \circ g \circ f = 0$ となる。

$V = L$ かつ $\alpha = \mathrm{id}_V$ にとることにより、$g \circ f = 0$ を得る。したがって、$\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}g$ を得る。次に、

$V = \mathrm{Coker}f = N/\mathrm{Im}f$ にとり、$\alpha : N \longrightarrow N/\mathrm{Im}f = V$ を自然な射影とする。このとき、定義によって、

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f = 0$$

故に、$\alpha \in \mathrm{Ker}f^* = \mathrm{Im}g^*$ となり、

$${}^{\exists}\beta \in \mathrm{Hom}_A(L, V) \text{ s.t. } g^*(\beta) = \alpha$$

を得る。これは

$$\mathrm{Ker}g \subset \mathrm{Ker}(\beta \circ g) = \mathrm{Ker}\alpha = \mathrm{Im}f$$

となることを意味する。こうして、$\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$ が示された。

次に、g の全射性を示す。$V = L/\mathrm{Im}g$ とおき、$\pi : L \longrightarrow L/\mathrm{Im}g = V$ を自然な射影とする。このとき、$g^*(\pi) = \pi \circ g = 0$ となる。仮定により、g^* は単射であるから、$\pi = 0$ を得る。これは $L = \mathrm{Im}g$ すなわち、g が全射になることを意味する。こうして、系列 (A2) の完全性が証明された。 (Q.E.D.)

注意：上の演習において $L = 0$ の場合を考えることにより、次を得る。

A を 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、$f : M \longrightarrow N$ を左 A-加群準同型とする。このとき、

f : が全射 $\iff$ 任意の左 A-加群 V に対して $f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ が単射

演習 1-19

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。次を示せ。

(1) 右 A-加群準同型の系列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A1)}$$

が完全であるための必要十分条件は、任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$M \otimes_A V \xrightarrow{f \otimes_A \mathrm{id}} N \otimes_A V \xrightarrow{g \otimes_A \mathrm{id}} L \otimes_A V \longrightarrow 0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(C1)}$$

が完全になることである。

(2) 左 A-加群準同型の系列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A2)}$$

が完全であるための必要十分条件は、任意の右 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$V \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} V \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} V \otimes_A L \longrightarrow 0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(C2)}$$

が完全になることである。

解；

(1) 必要性:$g : N \longrightarrow L$ は全射なので、$g \otimes_A \mathrm{id} : N \otimes_A V \longrightarrow L \otimes_A V$ の定義の仕方から、$g \otimes_A \mathrm{id}$ も全射である。よって、(C1) が完全であることを示すためには、$\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(g \otimes_A \mathrm{id})$ となることを示せばよい。

$g \circ f = 0$ であるから、$(g \otimes_A \mathrm{id}) \circ (f \otimes_A \mathrm{id}) = (g \circ f) \otimes_A \mathrm{id} = 0$, したがって、$\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(g \otimes_A \mathrm{id})$ を得る。

逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

まず、双線形写像 $\varphi : L \times V \longrightarrow N \otimes_A V/\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ を

$$\varphi(l, v) = \overline{n(l) \otimes_A v}, \qquad l \in L,\ v \in V,\ n(l) \text{ は } g(n(l)) = l \text{ を満たす } N \text{ の元}$$

によって定義する。但し、自然な射影 $N \otimes_A V \longrightarrow N \otimes_A V/\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ に関する $x \in N \otimes_A V$ の像を $\overline{x}$ と表わした。

φ は矛盾なく定義されていて、任意の $l \in L,\ v \in V, a \in A$ に対して $\varphi(l \cdot a, v) = \varphi(l, a \cdot v)$ を満たす。

$\because$)

$g : N \longrightarrow L$ は全射なので、任意の $l \in L$ に対して $g(n(l)) = l$ を満たす N の元が存在することに注意する。

$n(l)' \in N$ も $g(n(l)') = l$ を満たしているとする。このとき、$n(l) - n(l)' \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$ となるので、$n(l) - n(l)' = f(m),\ m \in M$ とおくことができる。したがって、

$$0 = \overline{(f \otimes_A \mathrm{id})(m \otimes_A v)} = \overline{f(m) \otimes_A v} = \overline{(n(l) - n(l)') \otimes_A v} = \overline{n(l) \otimes_A v} - \overline{n(l)' \otimes_A v}$$

となる。故に、φ は矛盾なく定義されている。

また、任意の $l \in L,\ v \in V, a \in A$ に対して

$$\varphi(l \cdot a, v) = \overline{n(l \cdot a) \otimes_A v} \underset{\uparrow}{=} \overline{n(l) \cdot a \otimes_A v} = \overline{n(l) \otimes_A a \cdot v} = \varphi(l, a \cdot v)$$

となる。 $\left(\begin{array}{l} g(n(l) \cdot a) = g(n(l)) \cdot a = l \cdot a \text{ ゆえ、} \\ n(l \cdot a) \text{ として } n(l) \cdot a \text{ を選ぶことができる。} \end{array} \right)$ $\square$

これより、φ は $\boldsymbol{k}$-線形写像 $\bar{\varphi} : L \otimes_A V \longrightarrow N \otimes_A V/\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ を誘導することがわかる。

$\bar{\varphi}$ は次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_A V \arrow[r, "g \otimes_A \mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi"'] & L \otimes_A V \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\
N \otimes_A V/\mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id}) &
\end{tikzcd}$$

但し、π は自然な射影を表わす。

$\because$)

$n \in N,\ v \in V$ を任意にとる。

$l := g(n)$ については、$g(n(l)) = l$ を満たす $n(l) \in N$ として n 自身をとることができるから、

$$(\bar{\varphi} \circ (g \otimes_A \mathrm{id}))(n \otimes_A v) = \bar{\varphi}(g(n) \otimes_A v) = \overline{n \otimes_A v} = \pi(n \otimes_A v)$$

となる。 □

この可換図式より、$x \in \mathrm{Ker}(g \otimes_A \mathrm{id})$ ならば、$\pi(x) = 0$ となることがわかる。$\mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ ゆえ、$x \in \mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ となり、$\mathrm{Ker}(g \otimes_A \mathrm{id}) \subset \mathrm{Im}(f \otimes_A \mathrm{id})$ となることが証明された。

以上より、系列 (C1) は完全である。

十分性：$V = {}_AA$ の場合の (C1) を考える。自然な同型 $\phi_M : M \otimes_A ({}_AA) \longrightarrow M$ が存在する (演習 1-12 の下の注意参照) ので、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A ({}_AA) \arrow[r, "f \otimes_A \mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_M"'] & N \otimes_A ({}_AA) \arrow[r, "g \otimes_A \mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_N"'] & L \otimes_A ({}_AA) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_L"] & 0 \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

上の可換図式の２つある横の系列のうち、仮定により、上の方は完全であるから、下の方も完全である。よって、系列 (A1) は完全である。

(2) も同様にして証明することができる。 (Q.E.D.)

演習 1-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。

I を集合とするとき、M の“I 個の直和”$M^{\oplus I}$ を次のように定義する。まず、各 $i \in I$ に対して $M_i := M \times \{i\} \subset M \times I$ とおき、全単射 $j_i : M \longrightarrow M_i,\ m \longmapsto (m, i)$ が左 A-加群の同型写像となるように、M_i に左 A-加群の構造を与える。すなわち、

和 $(m, i) + (m', i) = (m + m', i)$ for $m, m' \in M$

スカラー倍 $c \cdot (m, i) = (c \cdot m, i)$ for $m \in M,\ c \in \boldsymbol{k}$

A の左作用 $a \cdot (m, i) = (a \cdot m, i)$ for $m \in M,\ a \in A$

このようにして得られる左 A-加群の族 $\{M_i\}_{i \in I}$ に関する直和 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ を $M^{\oplus I}$ と記す。

このとき、左 A-加群 F について

$$F:\ 自由 \iff {}^{\exists}I:\ 集合\ \text{ s.t. }\ F \cong ({}_AA)^{\oplus I} \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となることを示せ (同様のことは右 A-加群についても成立する)。

解；

$\Longleftarrow$ の証明：$f : ({}_AA)^{\oplus I} \longrightarrow F$ を左 A-加群の同型とする。

各 $i_o \in I$ に対して $e_{i_o} \in ({}_AA)^{\oplus I}$ を

$$e_{i_o} = (\delta_{ii_o})_{i\in I}, \quad 但し、\delta_{ii_o} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ i = i_o \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義する。このとき、$\{e_i\}_{i\in I}$ は次を満たす。

(i) $^\forall x \in ({}_AA)^{\oplus I}, {}^\exists i_1, \cdots, i_k \in I, {}^\exists a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \in A \quad \text{s.t.} \quad x = a_{i_1}e_{i_1} + \cdots + a_{i_k}e_{i_k}$

(ii) $^\forall i_1, \cdots, i_n \in I \ (j \neq k \ \Rightarrow i_i \neq i_k)$

$$a_{i_1}e_{i_1} + \cdots + a_{i_n}e_{i_n} = 0 \implies a_{i_1} = \cdots = a_{i_n} = 0$$

したがって、$x_i := f(e_i),\ i \in I$ とおくと、$\{x_i\}_{i\in I}$ は F の基底になる。

$\Longrightarrow$ の証明：$\{x_i\}_{i\in I}$ を F の基底とする。

このとき、

$$^{\exists 1}f : ({}_AA)^{\oplus I} \longrightarrow F \quad：左\ A\text{-}加群準同型\ \ \text{s.t.}\ \ f(e_i) = x_i,\ i \in I$$

となる。ここで、各 $\{e_i\}$ は「$\Longleftarrow$ の証明」の中で定義した $({}_AA)^{\oplus I}$ の元を表わしている。自由加群の定義における条件 (i) から上の写像 f が全射であることが従う。また、自由加群の定義における条件 (ii) から上の写像 f が単射であることが従う。よって、f は左 A-加群の同型写像である。 (Q.E.D.)

注意：I が n 個の元よりなる有限集合のときには、$M^{\oplus I} \cong \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n\ 個}$ となる。これを $M^{\oplus n}$ または $\bigoplus_n M$ と書き表わす。

演習 1-21

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) 右 A-加群 V と左 A-加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ に対して、ベクトル空間としての自然な同型

$$V \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{i\in I}(V \otimes_A M_i)$$

が存在することを示せ。

(2) 左 A-加群 W と右 A-加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ に対して、ベクトル空間としての自然な同型

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A W \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A W)$$

が存在することを示せ。

解；

(1) 左 A-加群としての直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ に附随する標準的な単射を $j_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ とおく。$k_i := \mathrm{id}_V \otimes_A j_i : V \otimes_A M_i \longrightarrow V \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i)$ を考える。組 $(V \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i),\ \{k_i\}_{i\in I})$ は $\{V \otimes_A M_i\}_{i\in I}$ の直和になることを示す。

W を $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間とし、各 $i \in I$ に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像 $f_i : V \otimes_A M_i \longrightarrow W$ が与えられたとする。$v \in V$ を任意にとる。このとき、$f_{v,i} : M_i \longrightarrow W$ を $f_{v,i}(m_i) = f_i(v \otimes_A m_i),\ m_i \in M_i$ によって定義する。$f_{v,i}$ は $\boldsymbol{k}$-線形写像である。組 $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{j_i\}_{i\in I})$ は

ベクトル空間としての直和でもあるから、その普遍性により、

$$
{}^{\exists 1}f_v : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow W :\ \boldsymbol{k}\text{-線形}\ \ \text{s.t.}\quad
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "f_v"] & W \\
M_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "f_{v,i}"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる。$F : V \times \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow W$ を $F(v,x) = f_v(x),\ v\in V,\ x\in \bigoplus_{i\in I} M_i$ によって定義する。F は $\boldsymbol{k}$-双線形写像であって、

$$
F(v\cdot a, x) = F(v, a\cdot x) \qquad (v\in V,\ a\in A,\ x\in \bigoplus_{i\in I} M_i)
$$

を満たす。

∵)

$f_{va}(x) = f_v(ax)$ となることを示せばよい。f_{va} は、その定義から、任意の $i\in I$ について $f_{va}\circ j_i = f_{va,i}$ を満たす一意的な線形写像である。任意の $i\in I$ について

$$
f_v(aj_i(m_i))) \underset{\substack{\uparrow \\ j_i\ \text{は左}\ A\text{-加群準同型}}}{=} f_v(j_i(am_i))) = f_i(v\otimes_A am_i) = f_i(va\otimes_A m_i) = f_{va,i}(m_i),\ m_i\in M_i
$$

が成り立つ。故に、合成

$$
\bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\text{左から}\ a\ \text{を掛ける}} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{f_v} W
$$

は j_i と合成すると $f_{va,i}$ に一致する。よって、上の合成写像は f_{va} に一致する。 □

よって、テンソル積の普遍性から

$$
{}^{\exists 1}\bar{F} : V\otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \longrightarrow W \ \ \text{s.t.}\ \ \bar{F}(v\otimes_A x) = f_v(x)\ \ \text{for}\ {}^{\forall}v\in V,\ {}^{\forall}x\in \bigoplus_{i\in I} M_i
$$

となる。この $\bar{F}$ は任意の $i\in I$ に対して、次の図式を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
V\otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \arrow[r, "\bar{F}"] & W \\
V\otimes_A M_i \arrow[u, "k_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

実際、上の図式が可換になることは、任意の $v\in V,\ m_i\in M_i$ に対して

$$
(\bar{F}\circ k_i)(v\otimes_A m_i) = \bar{F}(v\otimes_A j_i(m_i)) = f_v(j_i(m_i)) = f_{v,i}(m_i) = f_i(v\otimes_A m_i)
$$

となることからわかる。$\bar{F}$ の一意性を示す。$G : V\otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \longrightarrow W$ も $G\circ k_i = f_i,\ i\in I$ を満たす線形写像とする。このとき、任意の $i\in I$ に対して

$$
G(v\otimes_A j_i(m_i)) = f_i(v\otimes_A m_i) = f_{v,i}(m_i)
$$

となるので、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_{v,i}"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \ni \arrow[d] & x \arrow[d, mapsto] \\ & W & \ni G(v\otimes_A x) \end{tikzcd}$$

直和の普遍性により、上の図式における縦の写像 $\bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow W,\ x \longmapsto G(v\otimes_A x)$ は f_v に一致する。故に、

$$G(v\otimes_A x) = f_v(x) = \bar{F}(v\otimes_A x) \qquad\qquad (v\in V,\ x\in \bigoplus_{i\in I} M_i)$$

となる。故に、$G=\bar{F}$ が示された。以上により、組 $(V\otimes_A(\bigoplus_{i\in I} M_i),\ \{k_i\}_{i\in I})$ は $\{V\otimes_A M_i\}_{i\in I}$ の直和である。直和の一意性から

$$V\otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{i\in I}(V\otimes_A M_i) \quad \text{as vector spaces}$$

を得る。

今、得た線形同型写像を $k_{V,\{M_i\}} : \bigoplus_{i\in I}(V\otimes_A M_i) \longrightarrow V\otimes_A(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ とおくとき、これが自然性をもつことを示す。すなわち、$\alpha : V \longrightarrow U$ を右 A-加群準同型、$\{f_i : M_i \longrightarrow N_i\}_{i\in I}$ を左 A-加群準同型の族としたとき、図式

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I}(V\otimes_A M_i) \arrow[r, "k_{V,\{M_i\}}"] \arrow[d, "\bigoplus_{i\in I}(\alpha\otimes_A f_i)"'] & V\otimes_A(\bigoplus_{i\in I} M_i) \arrow[d, "\alpha\otimes_A(\bigoplus_{i\in I} f_i)"] \\ \bigoplus_{i\in I}(U\otimes_A N_i) \arrow[r, "k_{U,\{N_i\}}"] & U\otimes_A(\bigoplus_{i\in I} N_i) \end{tikzcd}$$

が可換になることを示す。$j'_i : N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ を、左 A-加群としての直和 $\bigoplus_{i\in I} N_i$ に附随する標準的な単射とし、$k'_i := \mathrm{id}_U \otimes_A j'_i$ とおくと、$\bigoplus_{i\in I} f_i$ は図式

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\bigoplus_{i\in I} f_i"] & \bigoplus_{i\in I} N_i \\ M_i \arrow[u, "j'_i"] \arrow[r, "f_i"] & N_i \arrow[u, "j_i"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするような一意的な線形写像である。したがって、$\xi_i : V\otimes_A M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(V\otimes_A M_i)$ を直和 $\bigoplus_{i\in I}(V\otimes_A M_i)$ に附随する標準的な単射とし、$\eta_i : U\otimes_A N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(U\otimes_A N_i)$ を直和 $\bigoplus_{i\in I}(U\otimes_A N_i)$ に附随する標準的な単射とし、$k := k_{V,\{M_i\}},\ k' := k_{U,\{N_i\}}$ とおくと、任意の $i\in I$ に対して、次の図式が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}(V \otimes_A M_i) \arrow[r, "k"] & V \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} M_i) \arrow[r, "\alpha \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} f_i)"] & U \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} N_i) & \bigoplus_{i\in I}(U \otimes_A N_i) \arrow[l, "k'"'] \\
V \otimes_A M_i \arrow[u, "\xi_i"] \arrow[ur, "k_i = \mathrm{id} \otimes j_i"] \arrow[rrr, "\alpha \otimes_A f_i"] & & & U \otimes_A N_i \arrow[u, "\eta_i"'] \arrow[ul, "k'_i = \mathrm{id} \otimes j'_i"']
\end{tikzcd}
$$

$\bigoplus_{i\in I}(\alpha \otimes_A f_i)$ の定義から、

$$(k')^{-1} \circ (\alpha \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} f_i)) \circ k = \bigoplus_{i\in I}(\alpha \otimes_A f_i)$$

を得る。

(2) も (1) と同様に示すことができる。 (Q.E.D.)

演習 1-22

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
左 A-加群の有限個の族 $\{M_i\}_{i=1}^{l}$ に対して、

$$(\bigoplus_{i=1}^{l} M_i)^* \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_i^* \qquad \text{as right } A\text{-modules}$$

となることを示せ (右 A-加群の有限個の族に対しても同様の結果が成り立つ)。

解；

$M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_l$ とおき、この直和に附随する標準的な単射を $j_i : M_i \longrightarrow M$ $(i = 1, \cdots, l)$ とおく。写像 $F : M^* \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{l} M_i^*$ を

$$F(p) = (p \circ j_1, \cdots, p \circ j_l), \qquad p \in M^*$$

と定める。

F は右 A-加群準同型である。

∵)

F が $\boldsymbol{k}$-線形写像であることはすぐにわかるので、A の作用を保つことを示す。

$a \in A,\ p \in M^*$ を任意にとり、$F(p \cdot a) = F(p) \cdot a$ となることを示せばよい。そのためには、任意の $i = 1, \cdots, l$ に対して、

$$(p \cdot a) \circ j_i = (p \circ j_i) \cdot a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。任意の $m_i \in M_i$ に対して、

$$
\begin{aligned}
((p \cdot a) \circ j_i)(m_i) &= (p \cdot a)(j_i)(m_i)) \\
&= p(a \cdot j_i(m_i)) \\
&= p(j_i(a \cdot m_i)) \\
&= (p \circ j_i)(a \cdot m_i) \\
&= ((p \circ j_i) \cdot a)(m_i)
\end{aligned}
$$

となるので、$(*)$ が示された。 $\square$

F は全単射である。

$\because$)

・単射性：$p \in \mathrm{Ker}F \implies p=0$ を示せばよい。

$p \in \mathrm{Ker}F$ ならば、任意の $i=1\cdots,l$ について $p\circ j_i = 0$ である。

任意に $m \in M$ をとると、

$$m = j_1(m_1)+\cdots+j_l(m_l) \qquad (m_1 \in M_1,\ \cdots, m_l \in M_l) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

のように一意的に書くことができる。このとき、

$$p(m) = p(j_1(m_1)+\cdots+j_l(m_l)) = (p\circ j_1)(m_1)+\cdots+(p\circ j_l)(m_l) = 0+\cdots+0 = 0$$

が成り立つ。故に、$p=0$ となり、F は単射である。

. 全射性：任意に $(p_1,\cdots,p_l) \in M_1^* \oplus\cdots\oplus M_l^*$ をとる。このとき、写像 $p: M \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$p(m) = p_1(m_1)+\cdots+p_l(m_l), \quad m \in M$$

によって定義する。但し、$m \in M$ を $(**)$ のように書き表わした。

$p \in M^*$ であって、$F(p) = (p_1,\cdots,p_l)$ を満たしていることが確かめられる。よって、F は全射である。 $\square$

以上から、F は右 A-加群の同型 $M^* \cong \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{l} M_i^*$ を与える。 (Q.E.D.)

演習 1-23

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ の部分代数として

$$Z(\mathrm{End}_A({}_AA)) = \mathrm{End}_{A^e}({}_AA_A)$$

となることを示せ。

解；

$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ に対して、

$$\begin{aligned}
f \in Z(\mathrm{End}_A({}_AA)) &\iff \begin{cases} f \in \mathrm{End}_A({}_AA) \\ g \in \mathrm{End}_A({}_AA),\ f\circ g = g\circ f \end{cases} \\
&\underset{(1)}{\iff} \begin{cases} f \in \mathrm{End}_A({}_AA) \\ g \in \mathrm{End}_A({}_AA),\ {}^\forall x \in A,\ f(xg(1)) = f(x)g(1) \end{cases} \\
&\underset{(2)}{\iff} \begin{cases} f \in \mathrm{End}_A({}_AA) \\ a \in A,\ {}^\forall x \in A,\ f(xa) = f(x)a \end{cases} \\
&\iff f \text{ は両側 } (A,A)\text{-加群準同型} \\
&\iff f \in \mathrm{End}_{A^e}({}_AA_A)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

(1) g は左 A-加群準同型

(2) $\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{op}}$ (演習 1-11)

であることを使った。 (Q.E.D.)

§2. 冪等元と直既約加群

第 1 節で見たように、代数 A が 0 でない両側イデアル $I_1, \cdots, I_n$ の直和であるとき、A の単位元 1 をその直和分解に応じて $1 = e_1 + \cdots + e_n$ $(e_i \in I_i,\ i = 1, \cdots, n)$ と表わすと、任意の i について $e_i \neq 0$ であり、$e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ が成り立っている (演習 1-2)。一般に、$e^2 = e$ を満たす 0 でない元 e は冪等元と呼ばれる。よって、$e_1, \cdots, e_n$ はすべて冪等元である。さらに、この中の相異なる任意の 2 つの元の積は 0 になっているので、$e_1, \cdots, e_n$ は互いに直交する冪等元と呼ばれるものになっている。冪等元がそれ以上互いに直交する冪等元の和に分解することができないとき、原始冪等元であるとよばれる。原始冪等元は、加群の言葉でいうと、それ以上 0 でない加群の直和に分解できないような加群 (= 直既約加群) と対応している。ここでは、その対応関係を正確に述べたのち、冪零両側イデアルによる剰余代数の原始冪等元とそのイデアルで商をとる前の原始冪等元との関係について調べる。

定義 1-1

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

(1) $e \in A$ が**冪等元** (*idempotent*) $\iff$ $e \neq 0$ かつ $e^2 = e$

(2) $e_1, \cdots, e_n \in A$ が**互いに直交する冪等元** (*orthogonally idempotents*)

$\iff$ (i) 各 e_i $(i = 1, \cdots, n)$ は冪等元

(ii) $i \neq j$ に対して、$e_ie_j = 0$

補題 1-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、$e \in A$：冪等元　とする。

(1) $e = e_1 + \cdots + e_n$,　$e_1,\ \cdots,\ e_n$：互いに直交する冪等元

$\Longrightarrow$　$Ae = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$

(2) $Ae = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$,　$I_1,\ \cdots,\ I_n$：A の 0 でない左イデアル

$e = e_1 + \cdots + e_n$　　$(e_i \in I_i,\ i = 1, \cdots, n)$

$\Longrightarrow$ (i) $e_1,\ \cdots,\ e_n$：A の互いに直交する冪等元

(ii) $I_i = Ae_i$　$(i = 1, \cdots, n)$

(proof)

(1) 任意の $a \in A$ に対し、

$$ae = a(e_1 + \cdots + e_n) = ae_1 + \cdots + ae_n$$

となるから、

$$Ae = Ae_1 + \cdots + Ae_n$$

が成り立つ。$Ae_1,\ \cdots,\ Ae_n$ が A の中で直和になることを示すため、

$$a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = 0 \qquad (a_i \in A,\ i = 1, \cdots, n)$$

とおく。このとき、e_i を右から掛けて、$a_ie_i^2=0$ を得る。$e_i=e_i^2$ であるから、$ae_i=0$ を得る。故に、$Ae_1,\cdots,Ae_n$ は直和である。

(2) $e\in Ae$ であるから、与えられた直和分解に応じて、

$$e=e_1+\cdots+e_n \qquad (e_i\in I_i,\ i=1,\cdots,n)$$

と書くことができる。このとき、任意の $a_i\in I_i$ に対し、$a_i\in Ae$ であるから、

$$a_i=a_ie$$

となる。

∵)

$a_i=b_ie$ $(b_i\in A)$ と書く。e は冪等元であるから、

$$a_i=b_ie^2=a_ie$$

となる。 □

これより、

$$a_i=a_ie=a_ie_1+\cdots+a_ie_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

と書ける。I_i は左イデアルであるから、$a_ie_j\in I_j$ $(j=1,\cdots,n)$ である。$(*)$ の両辺の I_j-成分を比較して、

$$a_ie_j=\delta_{ij}a_i \quad (j=1,\cdots,n)$$

を得る。よって、$I_i=Ae_i$ であり、上式において $a_i=e_i$ に取ることにより、$e_ie_j=\delta_{ij}e_i$ $(j=1,\cdots,n)$ を得る。$I_i\neq 0$ から $e_i\neq 0$ であることがわかる。これで (2) も示された。(Q.E.D.)

定義 1-2

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

$e\in A$ が**原始冪等元** (*primitive idempotent*) であるとは、e が 2 つの直交する冪等元の和として書けない冪等元のことをいう。

定義 1-3

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

0 でない左 A-加群 V が**直既約** (*indecomposable*) であるとは、V が 0 でない 2 つの部分加群の直和として書けないことをいう。右 A-加群に対しても、同様にして直既約であるという概念が定義される。

補題 1-1 の系として、次の結果を得る。

補題 1-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$e\in A$：冪等元　とする。

このとき、

$$e\text{：原始冪等元} \iff A \text{ の左イデアル } Ae \text{ を左 } A\text{-加群とみたとき、直既約}$$

(proof)

e が原始冪等元でないとすると、

$$e = e_1 + e_2$$

となる直交する冪等元 e_1, e_2 が存在する。このとき、補題 1-1(1) から

$$Ae = Ae_1 \oplus Ae_2, \quad Ae_i \neq 0 \ \ (i = 1, 2)$$

となるので、Ae は直既約でない。

逆に、Ae が直既約でないとすると、

$$A = I_1 \oplus I_2$$

となる 0 でない左イデアル I_1, I_2 が存在する。補題 1-1(2) より、

$$e = e_1 + e_2$$

となる直交する冪等元 e_1, e_2 が存在する。よって、e は原始的でない。 (Q.E.D.)

代数 A とその剰余代数 $\overline{A}$ が与えられたとし、$\pi : A \longrightarrow \overline{A}$ を自然な射影とする。このとき、e が A の冪等元ならば、0 でない $\pi(e)$ は $\overline{A}$ の冪等元である (系 1-5 の証明参照)。逆に、$\overline{A}$ の冪等元 $\overline{e}$ に対して、$\pi(e) = \overline{e}$ となる A の冪等元 e は存在するだろうか。一般に、このような性質を持つ A の元 e は $\overline{e}$ の**持ち上げ** (*lift*) と呼ばれる。次の命題は、剰余代数 $\overline{A}$ が冪零両側イデアルによる商ならば、$\overline{A}$ の冪等元の持ち上げが常に存在することを主張する。

命題 1-3

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

I：A の冪零両側イデアル　とする。

$\overline{A} = A/I$ とおく ($I \neq A$ に注意。したがって、剰余代数を考えることができる)。

自然な射影 $A \longrightarrow \overline{A}$ による各 $a \in A$ の像を $\overline{a}$ と書き表わすことにする。

$\overline{c} \in \overline{A}$ $(c \in A)$ を $\overline{A}$ の冪等元とする。このとき、

$$^{\exists}e \in A：冪等元 \ \ \text{s.t.} \ \ \text{(i)}\ \overline{c} = \overline{e}$$

$$\text{(ii)}\ ある\ f(X) \in \mathbb{Z}[X],\ f(0) = 0\ によって\ \ e = f(c)$$

(proof)

$\overline{c} = \overline{a}$ を満たす $a \in A$ に対して、$n(a) \in \mathbb{N}$ を

$$n(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (a^2 - a)^n = 0\}$$

によって定める。ここで、$\overline{c} = \overline{a}$ ならば $a^2 - a \in I$ であり、また、I は冪零であるから、$(a^2 - a)^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在することに注意する。。

$$\mathcal{S} = \{a \in A \mid \overline{c} = \overline{a},\ a = f(c) \ \ \text{for some} \ \ f(X) \in \mathbb{Z}[X],\ f(0) = 0\}$$

とおく。$c \in \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S} \neq \phi$ であることに注意する。

関数 $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N},\ a \longmapsto n(a)$ の最小値を与える $\mathcal{S}$ の元を 1 つとり、これを e とおく。e が求めるものであることを示す。そのためには、$n(e) = 1$ を示せばよい。

$n(e) > 1$ であると仮定する。

$$t = e^2 - e \quad \in I$$

とおく。

$$e' = e - 2et + t$$

とおくと、

$$\overline{e'} = \overline{e} = \overline{c}$$

が成り立つ。また、

$$e' = -2e^3 + 3e^2$$

と書けるので、e' も定数項が 0 の整数係数の c に関する多項式として表わされる。

$$\begin{aligned}
(e')^2 - e' &= (e + (1-2e)t)^2 - (e + (1-2e)t) \\
&= e^2 + 2e(1-2e)t + (1-2e)^2t^2 - e - (1-2e)t
\end{aligned}$$

(e と t は可換)

$$\begin{aligned}
&= t + (2e - 4e^2 - 1 + 2e)t + (1-2e)^2t^2 \\
&= 4(e - e^2)t + (1 - 4e + 4e^2)t^2 \\
&= -4t^2 + t^2 + 4t^3 \\
&= 4t^3 - 3t^2 \\
&= t^2(4t - 3)
\end{aligned}$$

であるから、$\begin{cases} n(e) \text{ が偶数のとき、} n(e') \leq \dfrac{n(e)}{2}, \\ n(e) \text{ が奇数のとき、} n(e') \leq \dfrac{n(e)+1}{2} \end{cases}$ を得る。よって、$n(e)$ が偶数でも奇数でも、

$$n(e') \leq \frac{n(e)+1}{2} < n(e)$$

$n(e) > 1$ という仮定より

となる。これは、e の選び方に反する。

よって、$e^2 - e = 0$ である。$\overline{e} = \overline{c} \neq 0$ なので $e \neq 0$ である。 したがって、e は A の冪等元である。 (Q.E.D.)

命題 1-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

I：A の冪零両側イデアル　とする。

$\overline{A} = A/I$ とおく。

自然な射影 $A \longrightarrow \overline{A}$ による各 $a \in A$ の像を $\overline{a}$ と書き表わすことにする。

$\overline{c} \in \overline{A}$ $(c \in A)$ を $\overline{A}$ の冪等元、$e \in A$ を命題 1-3 の性質 (i)(ii) を満たす $\overline{c}$ の持ち上げとし、

$$\overline{c} = \overline{c_1} + \cdots + \overline{c_n}, \quad \overline{c_1}, \cdots, \overline{c_n} \text{ は } \overline{A} \text{ の直交する冪等元}$$

のように表わされているとする。このとき、

$^\exists e_1,\cdots,e_n$: 直交する A の冪等元 s.t. (i) $\overline{e_i}=\overline{c_i}$ $(i=1,\cdots,n)$

(ii) $e=e_1+\cdots+e_n$

(proof)

$n=1$ のとき、命題 1-3 に他ならない。

$n>1$ とし、$n-1$ のときには命題は正しいと仮定する。

まず、

$$\overline{ec_1e}=\overline{e}\cdot\overline{c_1}\cdot\overline{e}=\overline{c}\cdot\overline{c_1}\cdot\overline{c}=\overline{c_1}$$

がわかる。したがって、$\overline{ec_1e}$ は $\overline{A}$ の冪等元である。命題 1-3 により、

$^\exists e_1\in A$：冪等元 s.t. (i) $\overline{ec_1e}=\overline{e_1}$

(ii) ある $f_1(X)\in\mathbb{Z}[X]$, $f_1(0)=0$ によって $e_1=f(ec_1e)$

となる。

$$e'=e-e_1$$

とおく。e' は A の冪等元である。

$\because$)

・$e'\neq 0$ であること：

もし、$e'=0$ ならば、$e=e_1$ となる。このとき、

$$\overline{c}=\overline{e}=\overline{e_1}=\overline{c_1}$$

となる。これは、$n>1$ としたことに反する。

・$(e')^2=e'$ であること：

$e_1=f_1(ec_1e)$ であって、e は A の冪等元であるので、

$$ee_1=e_1=e_1e \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}(e')^2 =& e^2-ee_1-e_1e+e_1^2\\ =& e-ee_1-e_1e+e_1\\ =& e-e_1\\ =& e'\end{aligned}$$

を得る。 □

また、①から

$$e'e_1=e_1e'=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が得られる。さらに、

$$\overline{e'}=\overline{e}-\overline{e_1}=\overline{c}-\overline{c_1}=\overline{c_2}+\cdots+\overline{c_n}$$

となっている。これより、$\overline{e'} \neq 0$ であることもわかり ($\because n > 1$)、$\overline{e'}$ は $\overline{A}$ の冪等元であることがわかる。帰納法の仮定により、

$$^{\exists}e_2, \cdots, e_n：\text{直交する } A \text{ の冪等元 s.t. (i) } \overline{e_i} = \overline{c_i} \quad (i = 2, \cdots, n)$$
$$\text{(ii) } e' = e_2 + \cdots + e_n$$

となる。

$$e = e_1 + e' = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

であり、$i = 2, \cdots, n$ に対し、

$$e_1 e_i = e_1 e' e_i \underset{②}{\underset{\uparrow}{=}} 0, \qquad e_i e_1 = e_i e' e_1 \underset{②}{\underset{\uparrow}{=}} 0$$

故に、$e_1, e_2, \cdots, e_n$ は直交する冪等元である。 (Q.E.D.)

系 1-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
I：A の冪零両側イデアル　とする。
$\overline{A} = A/I$ とおく。
自然な射影 $A \longrightarrow \overline{A}$ による各 $a \in A$ の像を $\overline{a}$ と書き表わすことにする。
このとき、A の冪等元 $e \in A$ に関して

$$e \text{ が } A \text{ の原始冪等元} \iff \overline{e} \text{ が } \overline{A} \text{ の原始冪等元}$$

が成り立つ。

(proof)

系を証明する前に、「e が A の冪等元ならば、$\overline{e}$ は $\overline{A}$ の冪等元である」ことを証明しておく。

e が A の冪等元ならば、$e^2 = e$ であるから、$\overline{e}^2 = \overline{e}$ となることはすぐにわかる。示さなければならないことは、$\overline{e} \neq 0$ となることである。背理法による。もし、$\overline{e} = 0$ であったと仮定すると、$e \in I$ となる。I は冪零であるから、$e^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。しかし、e は冪等元であるから、

$$0 \neq e = e^n$$

となる。ここに矛盾が生じた。したがって、$\overline{e}$ は $\overline{A}$ の冪等元でなければならない。

さて、系を証明する。その対偶を示す。

e が A の原始冪等元でないとすると、

$$e = e_1 + e_2 \qquad (e_1, e_2 \text{ は直交する冪等元})$$

と書ける。このとき、

$$\overline{e} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$$

である。先に証明したように、$\overline{e}, \overline{e_1}, \overline{e_2}$ はすべて $\overline{A}$ の冪等元である。さらに、$\overline{e_1}$ と $\overline{e_2}$ とは直交している。よって、e が A の原始冪等元でないならば、$\overline{e}$ も $\overline{A}$ の原始冪等元でない。

逆に、$\overline{e}$ が $\overline{A}$ の原始冪等元でないとする。e は A の冪等元なので、$\overline{e}$ は $\overline{A}$ の冪等元ではあることに注意する。これより、

$$\overline{e} = \overline{c_1} + \overline{c_2} \qquad (\overline{c_1}, \overline{c_2} \text{ は直交する } \overline{A} \text{ の冪等元})$$

と表わされることがわかる。命題 1-4 より、

$$^{\exists}e_1, e_2：\text{直交する } A \text{ の冪等元} \ \text{ s.t. } \ \overline{e_i} = \overline{c_i} \ \ (i = 1, 2) \ \text{ かつ } \ e = e_1 + e_2$$

となる。したがって、e も原始冪等元でない。こうして、$\overline{e}$ が $\overline{A}$ の原始冪等元でないならば、e も A の原始冪等元でない。

これで、系は証明された。 (Q.E.D.)

演習 1-24

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群、$V \neq 0$ とする。
$E = \mathrm{End}_A V = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ は左 } A\text{-加群準同型}\}$ とおく。
次が成り立つことを示せ。
(1) $\mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ は直交する E の冪等元) であるとき、

$$V = \varepsilon_1(V) \oplus \cdots \oplus \varepsilon_n(V)$$

となり、各 $\varepsilon_i(V)$ は V の 0 でない部分加群になる。
(2) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ ($V_1, \cdots, V_n$ は V の 0 でない部分加群) であるとき、

$$^{\exists}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n：E \text{ の直交する冪等元} \ \text{ s.t. } \ \text{(i) } \mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$$
$$\text{(ii) } V_i = \varepsilon_i(V), \quad i = 1, \cdots, n$$

となる。

解；

(1) 任意に $v \in V$ をとると、

$$v = \mathrm{id}_V(v) = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)(v) = \varepsilon_1(v) + \cdots + \varepsilon_n(v)$$

となることから、

$$V = \varepsilon_1(V) + \cdots + \varepsilon_n(V)$$

となる。$\varepsilon_1(V), \cdots, \varepsilon_n(V)$ が直和になることを示す。

各 $\varepsilon_i(V)$ の元は $\varepsilon_i(v_i),\ v_i \in V_i$ と書ける。そこで、各 $\varepsilon_i(V)$ から元 $\varepsilon_i(v_i)$ をとり、

$$\varepsilon_1(v_1) + \cdots + \varepsilon_n(v_n) = 0$$

とおく。両辺に ε_i を作用せさせると、$\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} \varepsilon_i$ であることから、

$$\varepsilon_i(v_i) = 0$$

となる。これより、$\varepsilon_1(V), \cdots, \varepsilon_n(V)$ が V の中で直和になっていることがわかった。

$\varepsilon_i \neq 0$ なので $\varepsilon_i(V) \neq 0$ である。また、$\forall a \in A,\ \forall x \in \varepsilon_i(V)$ について、$x = \varepsilon_i(v),\ v \in V$ とおくことにより、

$$a \cdot x = a \cdot \varepsilon_i(v) = \underbrace{\varepsilon_i(a \cdot x)}_{\varepsilon_i \in E} \in \varepsilon_i(V)$$

であることがわかるから、$\varepsilon_i(V)$ は V の部分 A-加群である。

(2) 0 でない部分加群への直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ が与えられたとし、これに附随する自然な射影を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n : V \longrightarrow V$ とする：

$$\varepsilon_i(v_1 + \cdots + v_n) = v_i \qquad (v_1 \in V_1, \cdots, v_n \in V_n)$$

各 ε_i は左 A-加群準同型であるから、$\varepsilon_i \in E$ となる。また、$\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_i\ \ (i, j = 1, \cdots, n)$ および $\varepsilon_i(V) = V_i\ \ (i = 1, \cdots, n)$ が成り立つ。$V_i \neq 0$ より $\varepsilon_i \neq 0$ もわかる。これより、$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ は E の互いに直交する冪等元であることがわかる。次に、$\forall v \in V$ が $v = v_1 + \cdots + v_n\ \ (v_i \in V_i,\ i = 1, \cdots, n)$ と書けることから、

$$v = \varepsilon_1(v) + \cdots + \varepsilon_n(v) = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)(v)$$

を得る。これは、$\mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ となることを意味する。 (Q.E,D.)

次の演習問題に書かれている命題は、加群の直既約性を判定するための重要な手段を与える。

演習 1-25

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群、$V \neq 0$ 　とする。次を示せ。

$$V：直既約 \iff \mathrm{End}_A V \text{ の冪等元は } \mathrm{id}_V \text{ のみ}$$

解；

V が直既約でないとする。このとき、$V = V_1 \oplus V_2\ \ (V_1,\ V_2$ は V の 0 でない部分加群) と書ける。演習 1-24 により、

$$\mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \text{ は直交する冪等元})$$

と書ける。$\varepsilon_1 \neq 0,\ \varepsilon_2 \neq 0$ より、id_V と ε_1 は $\mathrm{End}_A V$ の異なる冪等元である。今の議論の対偶をとり、十分性が示された。

次に、V が直既約のときを考える。ε_1 を $\mathrm{End}_A V$ の冪等元とする。$\varepsilon_i \neq \mathrm{id}_V$ と仮定すると、$\varepsilon_2 := \mathrm{id}_V - \varepsilon_1 \neq 0$ であって、$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$ が成り立つから、ε_2 も $\mathrm{End}_A V$ の冪等元になる。$\mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ かつ $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_2\varepsilon_1 = 0$ が成り立つから、演習 1-24(1) により、

$$V = \varepsilon_1(V) \oplus \varepsilon_2(V)$$

のように V の 0 でない部分加群 $\varepsilon_1(V)$ と $\varepsilon_2(V)$ の直和に分解される。これは、V が直既約であることに反する。よって、必要性も示された。 (Q.E.D.)

演習 1-26

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$I\ (\neq A)$：A の両側イデアル　とする。
$\bar{A}=A/I$ とおく。
自然な射影 $\pi: A \longrightarrow \bar{A}$ による各 $a\in A$ の像を $\bar{a}$ と書き表わすことにする。
$e\in A$ を冪等元とする。このとき、左 A-加群として

$$Ae/Ie \cong \bar{A}\bar{e}$$

となることを示せ。

解；

$\pi(Ae)=\bar{A}\bar{e}$ かつ $\pi(Ie)=0$ であることはすぐにわかる。
$a\in A$ とし、$\pi(ae)=0$ とすると、$ae\in I$ である。

$$\therefore\ ae=(ae)e\ \in Ie$$

したがって、$\mathrm{Ker}(\pi|_{Ae})=Ie$ を得る。$\pi|_{Ae}: Ae \longrightarrow \bar{A}\bar{e}$ を左 A-加群準同型とみなして、準同型定理を適用して

$$\bar{A}\bar{e} \cong Ae/\mathrm{Ker}(\pi|_{Ae}) \cong Ae/Ie \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-27

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の代数閉体
$G=\langle g\rangle$：位数 m の巡回群 (g はその生成元)
$\omega\in\boldsymbol{k}$：1 の原始 m 乗根 ($i.e.\ \omega^m=1$ かつ $\omega^k\neq 0$ for $k=1,\cdots,m-1$)　とする。
このとき、$\boldsymbol{k}[G]$ の元

$$e_\alpha := \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i}g^i \qquad (\alpha=0,1,\cdots,m-1)$$

は

(i) $1=e_0+e_1+\cdots+e_{m-1}$
(ii) $\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は互いに直交する冪等元

を満たすことを示せ。したがって、$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は $\boldsymbol{k}[G]$ の基底をなす。

解；

(i) $1=e_0+e_1+\cdots+e_{m-1}$ となることを示すには、$i=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$\frac{1}{m}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i}=\delta_{i,0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。$i=1,\cdots,m-1$ のとき、$\omega^{-i}\neq 1$ であるから、

$$\frac{1}{m}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i}=\frac{1}{m}\frac{1-(\omega^{-i})^m}{1-\omega^{-1}}=\frac{1}{m}\frac{1-(\omega^m)^{-i}}{1-\omega^{-1}}=0$$

となる。$i=0$ のとき、

$$\frac{1}{m}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i}=\frac{1}{m}\sum_{\alpha=0}^{m-1}1=1$$

となる。故に、$(*)$ が示された。

(ii) $e_\alpha\neq 0$ であるから、$e_\alpha e_\beta=\delta_{\alpha,\beta}e_\alpha$ となることを示せばよい。

$$e_\alpha e_\beta=\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i-\beta j}g^{i+j}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i-\beta(k-i)}\bigr)g^k$$

であるから、$k=0,1,\cdots,m-1$ に対して

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{-\alpha i-\beta(k-i)}=\delta_{\alpha,\beta}\omega^{-\alpha k}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

となることを示せばよい。

$$\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{i(-\alpha+\beta)}=\begin{cases}\dfrac{1-(\omega^{-\alpha+\beta})^m}{1-\omega^{-\alpha+\beta}}=0 & \text{if}\quad -\alpha+\beta\not\equiv 0\pmod{m}\\ m & \text{if}\quad -\alpha+\beta\equiv 0\pmod{m}\end{cases}$$

なので、

$$(**)\text{ の左辺}=\frac{\omega^{-\beta k}}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{i(-\alpha+\beta)}=\delta_{\alpha,\beta}\omega^{-\beta k}=(**)\text{ の右辺}$$

が成り立つ。これで、$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ が $\boldsymbol{k}[G]$ の互いに直交する冪等元であることが示された。

$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は互いに直交する冪等元なので、一次独立系である。

$\because$)

$c_0e_0+c_1e_1+\cdots+c_{m-1}e_{m-1}=0,\qquad c_0,c_1,\cdots,c_{m-1}\in\boldsymbol{k}$ であるとする。

この両辺に e_α を掛けることにより、

$$c_\alpha e_\alpha=0$$

を得る ($\because\ e_\alpha e_\beta=\delta_{\alpha,\beta}e_\alpha$)。

$e_\alpha\neq 0$ ゆえ、$c_\alpha=0$ を得る。故に、$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は $\boldsymbol{k}$ 上一次独立である。 □

$\dim\boldsymbol{k}[G]=m$ であるから、$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は $\dim\boldsymbol{k}[G]$ を $\boldsymbol{k}$ 上張ることがわかる。故に、$\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,m-1}$ は $\boldsymbol{k}[G]$ の基底である。 (Q.E.D.)

注意：任意の有限群 G に対しても、既約指標を用いて、$\boldsymbol{k}[G]$ の互いに直交する冪等元を具体的に構成することができる。その作り方を述べよう。

群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ の既約表現 $\rho:\boldsymbol{k}[G]\longrightarrow\mathrm{End}(V)$ に対して、

$$\chi(x):=\mathrm{Tr}\rho(x)\qquad(x\in\boldsymbol{k}[G])$$

によって定義される写像 $\chi:\boldsymbol{k}[G]\longrightarrow\boldsymbol{k}$ を ρ に関する**既約指標** (*irreducible character*) と呼ぶ。$\boldsymbol{k}$ が標数 0 の代数閉体ならば、2 つの既約表現 ρ_1,ρ_2 に対して、

表現 ρ_1 と ρ_2 が同値 $\iff$ ρ_1 に関する既約指標と ρ_2 に関する既約指標が一致

が成り立つ (例えば、M.Isaacs・著『Character theory of finite groups』p.17 参照)。また、標数 0 の代数閉体ならば、$\boldsymbol{k}[G]$ は半単純なので、その既約表現の同値類の個数は有限個である (定理 2-8)。そこで、$\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_d$ を $\boldsymbol{k}[G]$ の既約指標の全体とし、

$$e_\alpha := \frac{\chi_\alpha(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g^{-1})g \qquad (\alpha = 0, 1, \cdots, d)$$

とおくと、$e_0, e_1, \cdots, e_d$ は

(i) $1 = e_0 + e_1 + \cdots + e_d$

(ii) $\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,d}$ は互いに直交する冪等元

を満たすことがわかる (M.Isaacs・著『Character theory of finite groups』p.16—19 参照)。

上の演習問題の結果は、G が位数 m の巡回群の場合には、既約指標が $\alpha = 0, 1, \cdots, m-1$ として

$$\chi_\alpha(g^i) = \omega^{\alpha i} \qquad (i = 0, 1, \cdots, m-1)$$

によって与えられるという事実に基づいている。

演習 1-28

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群 とする。V^* を演習 1-14 で定義された V の双対加群とするとき、次を示せ。

(1) V^*：直既約 $\Longrightarrow$ V：直既約

(2) $\dim V < \infty$ のとき、

$$V\text{：直既約} \iff V^*\text{：直既約}$$

解；

(1) $V = V_1 \oplus V_2$ (V_i：左 A-加群, $i = 1, 2$) であるとすると、演習 1-22 により、

$$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^* \qquad \text{as right } A\text{-modules}$$

となる。V^* は直既約であるから、$V_1^* = 0$ または $V_2^* = 0$ でなければならない。

$V_i^* = 0$ から $V_i = 0$ が従うから、V は直既約である。

(2) (1) により「$\Longleftarrow$」は示されているから、「$\Longrightarrow$」を証明すればよい。

(1) の V を V^* に取り替えて、の (1) 右 A-加群版を考えることにより、

$$V^{**}\text{：直既約} \Longrightarrow V^*\text{：直既約}$$

を得る。ここで、V が有限次元ならば、左 A-加群として $V^{**} \cong V$ となる (演習 1-14) から、

$$V\text{：直既約} \Longrightarrow V^*\text{：直既約}$$

となる。これで、「$\Longrightarrow$」が示された。 (Q.E.D.)

§3. Noether 加群と Artin 加群

ベクトル空間としては有限次元とは限らないが、任意の部分 A-加群の任意の昇鎖列が有限で止まる、任意の部分 A-加群の任意の降鎖列が有限で止まる、といったある種の有限性をもった加群は、特別によい性質を持っていて、よく研究されている。このような有限性の条件を満足する加群は、それぞれ Noether 加群、Artin 加群と呼ばれる。Noether 加群、Artin

加群は (可換) 環論において欠かすことのできない重要な概念であるが、ここではあまり深入りしない。それらが常に有限個の直既約加群の直和に分解できることを示す。

定義 1-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群 とする。

(1) M：**Noether 加群** (*Noetherian module*) $\Longleftrightarrow$ M の部分 A-加群の任意の昇鎖列

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots \text{ について、}$$
$$^{\exists}\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots\cdots$$

となる。

(2) M：**Artin 加群** (*Artinian module*) $\Longleftrightarrow$ M の部分 A-加群の任意の降鎖列

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots \text{ について、}$$
$$^{\exists}\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots\cdots$$

となる。

右 A-加群に対しても、同様、Noether 加群、Artin 加群という概念が定義される。

例題 1-6

(1) 左 A-加群 M が有限次元ならば、M は Artin 加群であり、Noether 加群である。

(2) D を体 $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数とする。全行列代数 $\mathrm{M}_n(D)$ の左正則加群は Artin 加群かつ Noether 加群である。

$\because$)

$A := \mathrm{M}_n(D)$ とおく。

D を $\{dI_n \mid d \in D\} \subset A$ と同一視する (但し、I_n は単位行列) ことにより、左正則加群 ${}_AA$ を左 D-加群とみなすことができる (D の A への左作用は A の左作用を $\{dI_n \mid d \in D\}$ に制限したものとして与える。これは、すべての成分に左から D の同じ元を一斉に掛けるという作用に他ならない)。このとき、左正則加群 ${}_AA$ の部分 A-加群は、${}_AA$ を左 D-加群とみなしたときの部分 D-加群でもある。

左 D-加群として $A \cong D^{\oplus n^2}$ であるから、左正則加群 ${}_AA$ の部分加群は、$D^{\oplus n^2}$ の左 D-部分加群とみなすことができる。

D は可除代数 (斜体) であるから、$D^{\oplus n^2}$ の左 D-部分加群について、次元を考えることができ、それは高々 n^2 である。よって、${}_AA$ の部分 A-加群の任意の降鎖列 $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$ について、$M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots\cdots$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。このことは、斜体上の有限次元左ベクトル空間において、その部分空間 V, W が $W \subset V$ かつ $\dim W = \dim V$ を満たせば、$W = V$ となることから従う。よって、${}_AA$ は左 Artin 加群である。${}_AA$ が左 Noether 加群であることも同様に示される。 □

(3) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X]$ を考える。正則加群 ${}_AA$ は

$$(X) \supsetneqq (X^2) \supsetneqq (X^3) \supsetneqq \cdots \supsetneqq (X^n) \supsetneqq \cdots\cdots$$

という減少列が得られるので、Artin 加群ではない。

(4) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の２変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X,Y]$ の $X, XY, XY^2, \cdots\cdots$ によって生成される部分代数とすると、正則加群 ${}_AA$ は Noether 加群ではない。

$\because)$

$k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$I_k := \boldsymbol{k}XY + \boldsymbol{k}XY^2 + \cdots + \boldsymbol{k}XY^k + \bigoplus_{\substack{i \geq 2 \\ j \geq 1}} \boldsymbol{k}X^iY^j$$

とおくと、これは ${}_AA$ の部分加群であって、$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3 \subsetneqq \cdots\cdots$ が成り立つ。よって、正則加群 ${}_AA$ は Noether 加群ではない。 $\square$

補題 1-7

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。このとき、次の２つは同値である。

(i) M は Noether 加群である。

(ii) M の任意の部分 A-加群は A 上有限生成である。

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：対偶を示す。

N を M の部分 A-加群であって、A-上有限生成でないものとする。

$$^\exists x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots \in N \ \text{：無限列}$$

$$\text{s.t.} \ \ N_k = Ax_1 + \cdots + Ax_k \ \ (k = 1, 2, \cdots) \ \text{とおくとき、}$$

$$N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq \cdots\cdots$$

であることがわかる。

$\because)$

N は有限生成でないので、$N_k \subsetneqq N$ である。よって、

$$^\exists x_{k+1} \in N \ \ \text{s.t.} \ \ N_k \not\ni x_{k+1}$$

となる。このとき、$N_k \subsetneqq N_{k+1}$ である。 $\square$

よって、N は Noether 加群ではない。よって、M も Noether 加群ではない。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：対偶を示す。

M は Noether 加群でないとすると、

$$M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq M_3 \subsetneqq \cdots\cdots$$

となる M の部分 A-加群の列が存在する。

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

とおく。N は M の部分加群である。N が有限生成でないことを示す。

もし、N が有限生成であると仮定すると、

$$^\exists m_1, \cdots, m_s \in N \ \ \text{s.t.} \ \ N = Am_1 + \cdots + Am_s$$

となる。各 m_i に対し、$m_i \in M_{k_i}$ となる $k_i \in \mathbb{N}$ を 1 つ選ぶ。$k_1, \cdots, k_s$ のうちで最大なものを k とおくと、$N = M_k$ となる。したがって、

$$M_k = M_{k+1} = \cdots\cdots = N$$

となる。これは、M の部分 A-加群の列 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ の選び方に反する。よって、N は有限生成でないことが示された。 (Q.E.D.)

注意 1°：体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X]$ の任意のイデアルは単項イデアルである (例えば、拙著『代数系入門』p.271 系 1 参照) から、上の補題によって、左正則加群 ${}_AA$ および右正則加群 A_A は Noether 加群である。**Hilbert の基底定理** (Noether 環上で有限個の元で生成される環は Noether 環である) を用いると、2 変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X, Y] = (\boldsymbol{k}[X])[Y]$ の左正則加群および右正則加群はまた Noether 加群であることがわかる。以下、これを繰り返すことにより、n 変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n]$ の左正則加群および右正則加群は Noether 加群であることがわかる。

注意 2°：上の補題と双対的に次が成り立つ (演習 1-29)。
M : 左 A-加群 とする。このとき、次の 2 つは同値である。
(i) M は Artin 加群である。
(ii) M の任意の商加群は有限余生成である。
ここで、左 A-加群 V が**有限余生成** (*finitely cogenerated*) であるとは、

$$\{V_i\}_{i \in I} : V \text{ の部分加群の族}, \ \bigcap_{i \in I} V_i = 0 \implies {}^{\exists}J \subset I : \text{有限部分集合 s.t. } \bigcap_{j \in J} V_j = 0$$

が満たされるときをいう。

補題 1-8
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：左 A-加群、$M \neq 0$ とする。
M：左 Noether 的 または 左 Artin 的
$\Longrightarrow M$ は有限個の直既約な部分 A-加群の直和として表わされる。

(proof)
対偶を示す。
M は有限個の直既約な部分 A-加群の直和として表わされないと仮定する。
すると、M は直既約でないから、

$$M = M_1 \oplus N_1 \qquad (M_1,\ N_1 : M \text{ の } 0 \text{ でない部分加群})$$

と書くことができる。M_1, N_1 が直既約であれば、補題の結論が成り立たないとしたことに反する。よって、M_1, N_1 のいずれか一方は直既約でない。N_1 が直既約でなかったとすると、

$$N_1 = M_2 \oplus N_2 \qquad (M_2,\ N_2 : M \text{ の } 0 \text{ でない部分加群})$$

と書くことができる。先程と同じ議論により、N_2 は直既約でないとしてよい。以下、この操作を無限に続ける。このとき、M の部分加群の昇鎖列

$$M_1 \underset{\neq}{\subsetneq} M_1 \oplus M_2 \underset{\neq}{\subsetneq} M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots\cdots$$

と M の部分加群の降鎖列

$$M \underset{\neq}{\supsetneq} N_1 \underset{\neq}{\supsetneq} N_2 \underset{\neq}{\supsetneq} \cdots\cdots$$

が得られる。

これは、前者から M が Noether 的でないことがわかり、後者から Artin 的でないことがわかる。 (Q.E.D.)

Noether 加群 (resp. Artin 加群) の部分加群および商加群はまた Noether 加群 (resp. Artin 加群) である。次にこれを示す。

補題 1-9

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \stackrel{i}{\longrightarrow} M_2 \stackrel{p}{\longrightarrow} M_3 \longrightarrow 0$$

について、次が成り立つ。

(1) M_2 が Noether 加群 $\Longleftrightarrow$ M_1 および M_3 が Noether 加群

(2) M_2 が Artin 加群 $\Longleftrightarrow$ M_1 および M_3 が Artin 加群

(proof)

「$\Longrightarrow$」の証明：

i は単射であるから、$M_1 \subset M_2$ とみることができる。M_1 の部分加群の昇鎖列、降鎖列はそれぞれ M_2 の部分加群の昇鎖列、降鎖列はとみなせるから、その昇鎖列、降鎖列は有限で止まる。したがって、M_2 がそれぞれ Noether 加群、Artin 加群ならば、M_1 も Noether 加群、Artin 加群である。

次に、M_2 が Noether 加群であるとし、M_3 の部分加群の昇鎖列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ を考える。M_2 の部分加群の昇鎖列 $p^{-1}(N_1) \subset p^{-1}(N_2) \subset \cdots$ が得られる。仮定により、

$$^{\exists}k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } p^{-1}(N_k) = p^{-1}(N_{k+1}) = \cdots$$

となる。p は全射であるから、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$p(p^{-1}(N_i)) = N_i$$

が成り立つ。故に、

$$N_k = N_{k+1} = \cdots$$

となる。したがって、M_3 も Noether 加群である。同様にして、M_2 が Artin 加群ならば、M_3 も Artin 加群になることが示される。

「$\Longleftarrow$」の証明：

M_1 および M_3 が Noether 加群であると仮定する。M_2 の部分加群の昇鎖列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ を考える。i によって $M_1 \subset M_2$ とみなし、M_1 の部分加群の昇鎖列

$$M_1 \cap N_1 \subset M_1 \cap N_2 \subset \cdots$$

が得られる。一方、p による像を考えて、M_3 の部分加群の昇鎖列

$$p(N_1) \subset p(N_2) \subset \cdots$$

が得られる。仮定により、十分 k を大きくとれば、

$$\begin{cases} \cdot\ M_1 \cap N_k = M_1 \cap N_{k+1} = \cdots\cdots \\ \cdot\ p(N_k) = p(N_{k+1}) = \cdots\cdots \end{cases}$$

が成り立つ。与えられた系列の完全性から $\mathrm{Ker}(p|_{N_i}) = M_1 \cap N_i$ である。これと準同型定理から、$i = k, k+1, \cdots$ のとき、

$$N_i/(M_1 \cap N_k) = N_i/(M_1 \cap N_i) \cong p(N_i) = p(N_k) \cong N_k/(M_1 \cap N_k)$$

である。故に、$N_i = N_k$ を得る。

$\because$)

$x \in N_i$ を任意にとる。上の同型から $p(x) = p(y)$ となる $y \in N_k$ が存在することがわかる。

$N_k \subset N_i$ であるから、$y \in N_i$ でもある。よって、$p(x) = p(y)$ より、

$$x - y \in \mathrm{Ker}(p|_{N_i}) = M_1 \cap N_i = M_1 \cap N_k \subset N_k$$

となる。$y \in N_k$ なので、$x \in N_k$ を得る。故に、$N_i \subset N_k$ となり、$N_i = N_k$ が示された。 $\square$

こうして、M_2 が Noether 加群であることが示された。M_1 および M_3 が Artin 加群であるときに、M_2 も Artin 加群となることも同様にして示される。 (Q.E.D)

注意：上の結果を繰り返し用いて、次が得られる。

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、$\{V_i\}_{i=1}^n$ を左 A-加群の族とする。このとき、

$$\bigoplus_{i=1}^n V_i : \text{Artin 加群} \iff {}^\forall i = 1, \cdots, n,\ \ V_i : \text{Artin 加群}$$

$$\bigoplus_{i=1}^n V_i : \text{Noether 加群} \iff {}^\forall i = 1, \cdots, n,\ \ V_i : \text{Noether 加群}$$

が成り立つ。

(proof)

Artin 加群の場合に証明する (Noether 加群の場合も同様に証明可能である)。

n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき、主張は明らかに成り立つ。

$n > 1$ とし、$n - 1$ のとき主張は成り立つと仮定する。

$V := \bigoplus_{i=1}^{n} V_i,\ V_n$ とおき、完全系列

$$0 \longrightarrow V_n \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/V_n \longrightarrow 0$$

を考える。ここで、i は直和 $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ に附随する標準的な単射であり、p は自然な射影である。上の補題により、

$$V : \text{Artin 加群} \iff V_n,\ V/V_n : \text{Artin 加群}$$

が成り立つ。左 A-加群として $V/V_n \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$ であるから、帰納法の仮定により、

$$V/V_n : \text{Artin 加群} \iff {}^{\forall} i = 1, \cdots, n-1,\ \ V_i : \text{Artin 加群}$$

が成り立つ。上の２つの $\iff$ をつなげて

$$V : \text{Artin 加群} \iff {}^{\forall} i = 1, \cdots, n-1, n,\ \ V_i : \text{Artin 加群}$$

を得る。これで、帰納法が完成した。 (Q.E.D.)

定義 1-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

(1) A：**左 Noether 代数** (*left Noetherian algebra*) $\iff$ 左正則加群 ${}_A A$ が Noether 加群

(2) A：**左 Artin 代数** (*left Artinian algebra*) $\iff$ 左正則加群 ${}_A A$ が Artin 加群

同様に、右正則加群が Artin 加群 (resp. Noether 加群) であるような代数は、**右 Artin 代数** (resp. **右 Noether 代数**) と呼ばれる。

注意 1°：左 Artin 代数は左 Noether 代数であり、右 Artin 代数は右 Noether 代数である (演習 2-14 参照)。しかしながら、左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) がいつでも右 Artin 代数 (resp. 右 Noether 代数) になるとは限らない (演習 1-31 参照) ので (非可換代数に対しては)「左」「右」の区別をつける必要がある。

注意 2°：有限次元代数は左 Artin 代数、右 Artin 代数、左 Noether 代数、右 Noether 代数である。

注意 3°：$\boldsymbol{k}$ 上の代数 A について

$$A\text{：右 Noether 代数} \iff A^{\mathrm{op}}\text{：左 Noether 代数}$$
$$A\text{：右 Artin 代数} \iff A^{\mathrm{op}}\text{：左 Artin 代数}$$

が成り立つ。

次は補題 1-9 の系である。

系 1-10

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

次の２つは同値である。

(i) A は 左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) である。

(ii) 任意の有限生成左 A-加群は Artin 加群 (resp. Noether 加群) である。

(proof)

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：

${}_AA$ は単位元 1 で生成されるから、有限生成である。よって、(ii) ならば (i) が成立する。

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

V を有限生成左 A-加群とする。このとき、

$$^{\exists}F:\ \text{有限階数の自由左 } A\text{-加群},\ \ ^{\exists}p : F \longrightarrow V:\ \text{全射な左 } A\text{-加群準同型}$$

となり、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}p \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} V \longrightarrow 0$$

が得られる。但し、i は包含写像である。補題 1-9 により、

$$F : \text{Artin (resp. Noether) 加群} \iff \mathrm{Ker}p,\ V : \text{Artin (resp. Noether) 加群}$$

が成り立つ。一方、仮定により、有限階数の自由左 A-加群 F は Artin 加群 (resp. Noether 加群) であることがわかる。

$\because$)

左正則加群 ${}_AA$ は Artin 加群 (resp. Noether 加群) であるから、それらの有限個の直和も Artin 加群 (resp. Noether 加群) である (補題 1-9 の下の注意参照)。よって、有限階数の自由左 A-加群 F は Artin 加群 (resp. Noether 加群) である。 □

こうして、V は Artin 加群 (resp. Noether 加群) であることが示された。 (Q.E.D.)

演習 1-29

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。このとき、次の２つは同値であることを示せ。

(i) M は Artin 加群である。

(ii) M の任意の商加群は有限余生成である。

解；

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：対偶を示す。

N を M の部分加群であって、$V := M/N$ が有限余生成でないものとする。このとき、

$$^{\exists}\{V_i\}_{i\in I} : V \text{ の部分加群の族 with } \bigcap_{i\in I} V_i = 0 \text{ s.t. } ^{\forall}J \subset I : \text{有限部分集合},\ \bigcap_{j\in J} V_j \neq 0$$

となる。この条件が満たされるためには、I は無限集合でなければならない。

まず任意に $i_1 \in I$ を取る。I の有限部分集合 $J = \{i_1\}$ に対して、$\bigcap_{j\in J} V_j \neq 0$ であるから、$V_{i_1} \neq 0$ である。また、$V_{i_1} \supsetneqq V_{i_1} \cap V_{i_2}$ となる $i_2 \in I$ をとることができる。実際、すべての $i \in I$ に対して $V_{i_1} = V_{i_1} \cap V_i$ であったとすると、$V_{i_1} = \bigcap_{i\in I} V_i = 0$ となり、矛盾が生じる。故に、$V_{i_1} \supsetneqq V_{i_1} \cap V_{i_2}$ となる $i_2 \in I$ が存在する。I の有限部分集合 $J = \{i_1, i_2\}$ に対して、$\bigcap_{j\in J} V_j \neq 0$ であるから $V_{i_1} \cap V_{i_2} \neq 0$ である。また、$V_{i_1} \cap V_{i_2} \supsetneqq V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_{i_3}$ となる $i_3 \in I$

をとることができる。実際、すべての $i \in I$ に対して $V_{i_1} \cap V_{i_2} = V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_i$ であったとすると、$V_{i_1} \cap V_{i_2} = \bigcap_{i \in I} V_i = 0$ となり、矛盾が生じる。以下、同様の考察を行うことにより、

$$^{\exists} i_1, i_2, i_3, \cdots \in I \quad \text{s.t.} \ \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} \supsetneqq \bigcap_{j=1}^{n+1} V_{i_j} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となることがわかる。故に、$V = M/N$ は Artin 加群でない。したがって、M も Artin 加群でない (補題 1-9 参照)。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：対偶を示す。

M は Artin 加群でないとする。このとき、

$$M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq M_3 \supsetneqq \cdots\cdots$$

となる M の部分 A-加群の列が存在する。$N := \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ とおく。M/N は有限余生成でない。これを示す。

$\pi : M \longrightarrow M/N$ を自然な射影とする。$\bigcap_{i=1}^{\infty} \pi(M_i) = \{0\}$ が成り立つ。

$\because$)

$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \pi(M_i)$ を任意にとる。

各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、$x = \pi(x_i)$ となる $x_i \in M_i$ が存在する。

各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、$x_1 - x_i \in N$ であるから、$x_1 \in N + M_i = M_i$ となる。これは、$x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = N$ となることを意味する。故に、$x = \pi(x_1) = 0$ を得る。 □

任意の有限部分集合 $J \subset \mathbb{N}$ に対して、$\bigcap_{j \in J} \pi(M_j) \neq 0$ となる。

$\because$)

J の元の中で最大なものを j_o とおくと、$\bigcap_{j \in J} \pi(M_j) = \pi(M_{j_0})$ となる。よって、$\bigcap_{j \in J} \pi(M_j) = 0$ であったとすると、$\pi(M_{j_o}) = 0$ となる。これは $M_{j_o} \subset N = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ となることを意味する。これより、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $M_{j_o} \subset M_i$ となるが、これは、$M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq M_3 \supsetneqq \cdots\cdots$ であることに反する。よって、$\bigcap_{j \in J} \pi(M_j) \neq 0$ でなければならない。 □

よって、M/N は有限余生成でないことがわかった。 (Q.E.D.)

演習 1-30

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数)

$\Longrightarrow \quad A \oplus B$：左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数)

となることを示せ。

解；

$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数とする。

$A\oplus B$ の左イデアルの降鎖列 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\cdots$ を任意に考える。

$A\oplus B$ の左イデアルは A の左イデアルと右イデアルの直和である (演習 1-3) から、任意の $i=1,2,3,\cdots$ に対して、$I_i=J_i\oplus K_i$ (J_i は A の左イデアル、K_i は B の左イデアル) と書くことができる。このとき、

$$\begin{array}{ll} J_1\supset J_2\supset J_3\supset\cdots\cdots & :A \text{ の左イデアルの降鎖列} \\ K_1\supset K_2\supset K_3\supset\cdots\cdots & :B \text{ の左イデアルの降鎖列} \end{array}$$

が得られる。$A,\ B$ は左 Artin 代数であるから、

$$^{\exists}n\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ \begin{cases} J_n=J_{n+1}=J_{n+2}=\cdots \\ K_n=K_{n+1}=K_{n+2}=\cdots \end{cases}$$

となる。このとき、

$$I_n=I_{n+1}=I_{n+2}=\cdots\cdots$$

となるから、$A\oplus B$ は左 Artin 代数である。

左 Noether 代数についても同様に示すことができる。 (Q.E.D.)

演習 1-31

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。

$$A:=\left\{\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\ \middle|\ x\in\boldsymbol{k},\ \alpha,\beta\in K\right\}$$

とおく。これは行列の通常の和と積に関して $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。

(1) A は右 Artin 代数かつ右 Noether 代数になることを示せ。

(2) $K/\boldsymbol{k}$ の拡大次数が無限のとき、A は左 Artin 代数でも、左 Noether 代数でもないことを示せ。

注意：上の例は F. Kasch・著『Modules and rings』による。拡大次数が無限となるような体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ の例として $K=\mathbb{R},\ \boldsymbol{k}=\mathbb{Q}$ や $K=\mathbb{Q}(t),\ \boldsymbol{k}=\mathbb{Q}$ などがある。

演習 1-31 の解；

(1) A の右イデアルは

❶ $\{0\}$

❷ A

❸ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:=\left\{\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \middle|\ x\in\boldsymbol{k},\ \alpha\in K\right\}$

❹ $\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}:=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta\in K\right\}$

❺ $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}K:=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & \beta\gamma \end{pmatrix}\ \middle|\ \gamma\in K\right\}$ (但し、$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

のみである。

$\because$)

I を 0 でも A でもない A の右イデアルとする。

i. $^\exists\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in I$ s.t. $x \neq 0$ のとき：

$$\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \quad I$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset I$$

となり、

$$\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \quad I$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset I$$

となる。I は和に関して閉じているから、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset I \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。また、

$$\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \in \quad I$$

となる。よって、もし、K のある元 $\gamma(\neq 0)$ に対して $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in I$ となるならば、$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ ゆえ、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in I$ となる。このとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad I$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \subset I \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。①②から $A \subset I$、すなわち、$I = A$ を得る。これは $I \neq A$ に矛盾する。よって、I に属する第 $(2,2)$-成分は 0 でなければならない。よって、

$$I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

ii. i. でないとき：I に属する任意の元の第 $(1,1)$-成分は 0 であるから、

$$I \subset \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} = K \oplus K$$

となる。したがって、I を K 上2次元のベクトル空間の部分空間とみなすことができる。よって、$0 < \dim_K I \leq 2$ である。

$\dim_K I = 2$ ならば、$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ となる。

$\dim_K I = 1$ のときを考える。$I \neq 0$ ゆえ、$0 \neq \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in I$ が存在する。このとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & \beta\gamma \end{pmatrix} \quad \in \quad I$$

であるから

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & \beta\gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in K \right\} \subset I$$

となる。左辺の集合は K 上 1 次元の I の部分空間である。$\dim_K I = 1$ であるから、左辺は I に一致しなければならない。故に、

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & \beta\gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in K \right\}$$

を得る。 □

このことから、

・A の右イデアルの昇鎖列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots\cdots$ であって、$I_n \neq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものは存在しない

・A の右イデアルの降鎖列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots$ であって、$I_n \neq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものは存在しない

ことがわかる。

$\because$)

A の右イデアル $I,\ J$ が $I \subsetneqq J$ を満たしているとする。このとき、$I \neq A$ であって、

$I = \{0\} \implies J = A,\ \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} K$ for some $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} K$ for some $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies J = A,\ \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \implies J = A$

$I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies J = A$

となる。よって、A の右イデアルの昇鎖列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots\cdots$ であって、$I_n \neq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものは存在しない。

A の右イデアル $I,\ J$ が $I \subsetneqq J$ を満たしているとする。このとき、$J \neq \{0\}$ であって

$J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} K$ for some $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies I = \{0\}$

$J = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \implies I = \{0\},\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} K$ for some $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies I = \{0\}$

$J = A \implies I = \{0\},\ \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} K$ for some $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって、A の右イデアルの降鎖列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots\cdots$ であって、$I_n \neq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものは存在しない。 □

故に、A は右 Noether 代数かつ右 Artin 代数である。
(2) 仮定により $\boldsymbol{k}$ 上一次独立な K の元の列 $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する。

$$a_i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。$x \in \boldsymbol{k},\ \alpha, \beta \in K$ に対して

$$\begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} a_i = \begin{pmatrix} 0 & x\omega_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。故に、

$$Aa_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x\omega_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を得る。このとき、A の左イデアルの昇鎖列

$$Aa_1 \subsetneqq Aa_1 + Aa_2 \subsetneqq Aa_1 + Aa_2 + Aa_3 \subsetneqq \cdots\cdots$$

が得られ、A の左イデアルの降鎖列

$$\sum_{i=1}^{\infty} Aa_i \supsetneqq \sum_{i=2}^{\infty} Aa_i \supsetneqq \sum_{i=3}^{\infty} Aa_i \supsetneqq \cdots\cdots$$

が得られる。このことは A が左 Noether 的でも左 Artin 的でもないことを意味する。(Q.E.D.)

演習 1-32

(1) 左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) の商代数は左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) であることを示せ。
(2) 左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) の部分代数は左 Artin 代数 (resp. 左 Noether 代数) になるとは限らないことを示せ。

解；
(1) $I \subsetneqq A$ を両側イデアルとする。A を左 Artin 代数とするとき、A/I が左 Artin 代数になることを示す。

左正則加群 ${}_AA$ は Artin 加群であるから、その商加群 ${}_AA/I$ は Artin 加群である (補題 1-9)。

商代数 A/I の左イデアルは自然に商加群 ${}_AA/I$ の部分加群とみなされるから、${}_AA/I$ の Artin 性により、商代数 A/I の左イデアルの降鎖列は (実質上) 有限で止まる。よって、A/I は左 Artin 代数である。左 Noether 性に関しても同様にして証明することができる。
(2) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の２変数多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X, Y]$ は左 Noether 代数であるが、$X, XY, XY^2, \cdots$ によって生成される部分代数 A は左 Noether 代数でない (例題 1-6(4) 参照)。よって、Noether 代数に関しては (2) の条件を満たす代数の例が得られた。

次に Artin 代数に関して示す。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の２変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X, Y]$ は

$$(X, Y) \supsetneqq (X, Y^2) \supsetneqq (X, Y^3) \supsetneqq \cdots \supsetneqq (X, Y^n) \supsetneqq \cdots\cdots$$

という減少列が得られるので、左 Artin 代数でない (例題 1-6(3) 参照)。しかしながら、その商体 $\boldsymbol{k}(X,Y)$ は左 Artin 代数である ($\because$ 例題 1-6(2) において、$D=\boldsymbol{k}(X,Y),\ n=1$ の場合を考えればよい)。よって、Artin 代数に関しても (2) の条件を満たす代数の例が得られた。

(Q.E.D.)

注意：演習 1-31 の代数を用いても (2) の条件を満たす代数と部分代数の例を与えることができる。演習 1-31 で証明したように、$K/\boldsymbol{k}$ が体の無限次拡大のとき、代数

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \ x \in \boldsymbol{k},\ \alpha, \beta \in K \right\}$$

は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として、左 Artin 代数でも左 Noether 代数でもない。

一方、A は K 上の全行列代数 $\mathrm{M}_2(K)$ を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみたときの部分代数であり、$\mathrm{M}_2(K)$ は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として左 Artin 代数かつ左 Noether 代数である (例題 1-6(2))。 □

演習 1-33

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。0 でない左 A-加群 M が**既約** (*irreducible*) であるとは、その部分加群が 0 と M 以外に存在しないときをいう。V を 0 でない左 A-加群 とする。V の部分加群の有限列

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_r = 0$$

が V の**組成列** (*composition series*) であるとは、

$$V_i \neq V_{i+1} \quad \text{かつ} \quad V_i/V_{i+1}\text{：既約} \quad (i = 0, 1, \cdots, r-1)$$

が満たされるときをいう。$r \geq 1$ をその組成列の**長さ** (*length*) という。次を示せ。

(1) 左 A-加群の組成列の長さは、組成列の選び方に依らずに一定である。

(2) 左 A-加群 $V \neq 0$ について

$$V\text{：組成列を持つ} \iff V\text{：Artin 加群かつ Noether 加群}$$

注意 1°：左 A-加群 V に対して、$\ell(V)$ を以下のように定義し、それを V の**長さ** (*length*) という。

・$V=0$ のとき、$\ell(V)=0$

・$V \neq 0$ かつ V が組成列を持つとき、

$$\ell(V) = (V\text{ の組成列の長さ})$$

(注：(1) により、この値は組成列の選び方に依らずに定まる。)

・$V \neq 0$ かつ V が組成列を持たないとき、$\ell(V)=\infty$

注意 2°：左 A-加群 V の長さ $\ell(V)$ は、ベクトル空間の次元 $\dim V$ の概念の一般化と考えることができる。実際、V を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、これを $A=\boldsymbol{k}$ として、左 A-加群とみなすとき、$\ell(V)=\dim V$ が成り立つ。なぜならば、$\dim V = n$ とおき、$\{v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n\}$ をその基底とするとき

$$V = \langle v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n \rangle \supset \langle v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle \supset \cdots \supset \langle v_1 \rangle \supset 0$$

が V の 1 つの組成列となるからである。

注意 3°：(1) の結果はより一般的な次の定理に集約される (証明は、例えば、山崎圭次郎・著『環と加群』p.519 参照)。

Jordan-Hölder の定理　A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、$V(\neq 0)$ を左 A-加群とする。このとき、V の 2 つの組成列

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_r = 0$$
$$V = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_s = 0$$

に対して、

$$r = s \text{　かつ　} {}^{\exists}\sigma \in S_r \text{ s.t. } U_i/U_{i+1} \cong V_{\sigma(i)}/V_{\sigma(i)+1} \quad \text{for all } i = 0, 1, \cdots, r-1$$

となる。

注意 4°：演習 1-31 の代数 A は

$$A \supset \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supset 0$$

を組成列に持つ。したがって、この演習問題の結果を使うことにより、A は右 Noether 代数かつ右 Artin 代数であることが再証明される。

演習 1-33 解；

まず、次が成り立つことに注意する。

「 左 A-加群 $V \neq 0$ が長さ r の組成列を持つ

$\Longrightarrow$ V の 0 でない任意の部分加群は長さが r 以下の組成列をもつ」$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$◎

$\because$)

$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_r = 0$ を左 A-加群 $V \neq 0$ の組成列とする。X を V の部分加群とする。このとき、

$$X = X \cap V_0 \supset X \cap V_1 \supset X \cap V_2 \supset \cdots \supset X \cap V_r = 0$$

は X の部分加群からなる列になる。さらに、任意の $i = 0, 1, \cdots, r-1$ に対して、包含写像 $X \cap V_i \hookrightarrow X \cap V_{i+1}$ は単射な左 A-加群準同型 $(X \cap V_i)/(X \cap V_{i+1}) \longrightarrow V_i/V_{i+1}$ を誘導することがわかる。V_i/V_{i+1} は既約であるから、

$$(X \cap V_i)/(X \cap V_{i+1}) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (X \cap V_i)/(X \cap V_{i+1}) \cong V_i/V_{i+1} \text{ as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。故に、

$$(X \cap V_i)/(X \cap V_{i+1}) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (X \cap V_i)/(X \cap V_{i+1}) \text{：既約}$$

を得る。列 $X = X \cap V_0 \supset X \cap V_1 \supset X \cap V_2 \supset \cdots \supset X \cap V_r = 0$ の中から、$X \cap V_j = X \cap V_{j+1}$ となる j を取り除いて列を作れば、X の組成列が得られる。また、その長さは当然 r 以下になる。　□

(1) 組成列を持つ左 A-加群 $V \neq 0$ に対して、その組成列の長さの中で最小の値を $c(V)$ と書くことにする。

左 A-加群 $V \neq 0$ が組成列を持つとし、$c(V) = r$ とおく。

◎により、$0 \neq W \subset V$ ならば、W は組成列を持ち、$c(W) \leq r$ が成り立つ。

$k=1,\cdots,r$ とし、次の主張を k に関する数学的帰納法で証明する。

「V の部分加群 $W \neq 0$ が $c(W)=k \implies W$ の任意の組成列の長さは k に等しい」

. $k=1$ のとき：

$c(W)=1$ ならば、$W \supset 0$ は W の組成列となる。このとき、W 自身が既約になる。したがって、W の部分加群は 0 または W のみである。これより、W の組成列は $W \supset 0$ 以外に存在しないので、W の任意の組成列の長さは 1 である。

. $1<k\leq r$ とし、$k-1$ のとき、帰納法の仮定は成り立つと仮定する。

$c(W)=k$ となる V の部分加群 W を考える。長さ k の組成列

$$W=W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k=0$$

をとる。また、

$$W=X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_l=0$$

を W の任意の組成列とする。

$c(W)=k$ であるから $k\leq l$ である。$l\leq k$ を証明する。

$k\geq 2$ より $W_1\neq 0$ であることに注意する。

(i) $W_1=X_1$ の場合：

$W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k=0$ は組成列であるから、$c(W_1)\leq k-1$ となる。帰納法の仮定から、W_1 の２つの組成列 $W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k=0$ および $W_1=X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_l=0$ の長さは等しい：$k-1=l-1$ 。故に、$k=l$ を得る。

(ii) $W_1\neq X_1$ の場合：

$W \supset W_1$ および $W \supset X_1$ の間に真の部分加群は存在しないので

$$W=W_1+X_1$$

が成り立つ。

$\because$)

もし、$W \supsetneqq W_1+X_1$ であるとすると、

$$W/W_1 \supsetneqq (W_1+X_1)/W_1, \quad W/X_1 \supsetneqq (W_1+X_1)/X_1$$

となる。$W/W_1,\ W/X_1$ は既約であるから、$(W_1+X_1)/W_1=0,\ (W_1+X_1)/X_1=0$ すなわち、$W_1+X_1=W_1,\ W_1+X_1=X_1$ を得る。よって、$X_1\subset W_1,\ W_1\subset X_1$ を得る。故に、$X_1=W_1$ を得る。これは仮定に反する。 $\square$

このとき、

$$W/W_1=(W_1+X_1)/W_1 \cong W_1/(X_1\cap W_1) \text{ ：既約}$$
$$W/X_1=(W_1+X_1)/X_1 \cong X_1/(X_1\cap W_1) \text{ ：既約}$$

を得る。さて、次の２つの部分加群の列を考える：

$$\begin{cases} W_1 \supsetneqq W_1\cap X_1 \supset W_2\cap X_1 \supset \cdots \supset W_k\cap X_1=0 & \cdots\cdots\cdots① \\ X_1 \supsetneqq W_1\cap X_1 \supset W_2\cap X_1 \supset \cdots \supset W_k\cap X_1=0 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

任意の $i = 1, \cdots, k-1$ に対して

$$(W_i \cap X_1)/(W_{i+1} \cap X_1) \text{ は既約かまたは } 0$$

である (◎の証明参照)。その一方、①は組成列ではない。

$\because$)

$W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k = 0$ は組成列であるから、$c(W_1) \leq k-1$ である。帰納法の仮定により、W_1 の任意の組成列の長さは $k-1$ 以下でなければならない。 $\square$

故に、①において $W_i \cap X_1 = W_{i+1} \cap X_1$ となる $i = 1, \cdots, k-1$ が存在することがわかる。

したがって、このような $W_i \cap X_1$ を②からすべて取り除けば、X_1 の組成列が得られる。故に、$c(X_1) \leq k-1$ を得る。帰納法の仮定から、X_1 の任意の組成列の長さは等しくなければならない。$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_l = 0$ は組成列であったから、$l - 1 = c(X_1) \leq k-1$ を得る。こうして、$l \leq k$ となることが示された。$k \leq l$ と合わせて、$k = l$ が示されたので、帰納法が完成した。

(2) 「$\Longrightarrow$」の証明：

長さ r の組成列を持つ左 A-加群 $V \neq 0$ を考える。$k = 1, \cdots, r$ とし、次の主張を k に関する数学的帰納法で証明する。

「長さ k の組成列を持つ V の部分加群は Artin 加群かつ Noether 加群である」 $\cdots\cdots(*)$

. $k = 1$ のとき：

長さ 1 の組成列を持つ部分加群は既約である。既約加群 X の部分加群は 0 と X の 2 つしかないので、$X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq X_3$ となるような X の部分加群の列は存在しない。したがって、X は左 Artin 加群かつ左 Noether 加群である。

. $1 \leq k < r$ のとき $(*)$ は成り立っていると仮定する：

$X \subset V$ を長さ $k+1$ の組成列を持つ部分加群とする。

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{k+1} = 0$$

を X の組成列とする。

このとき、$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{k+1} = 0$ は X_1 の組成列であって、長さは k であるから、帰納法の仮定により、X_1 は Artin 加群かつ Noether 加群である。X/X_1 は既約であるから、によって Artin 加群かつ Noether 加群である。したがって、補題 1-9 により、X も Artin 加群かつ Noether 加群である。

「$\Longleftarrow$」の証明：

左 A-加群 $V \neq 0$ を Noether 加群とする。

$$X \neq 0 \implies {}^{\exists}M \subset X：\text{部分加群 s.t. } X/M：\text{既約} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

となる。

$\because$)

まず、X は Noether 加群の部分加群として Noether 加群である (補題 1-9) であることに注意する。

任意の $M \subset X$ に対して X/M が既約でないと仮定する。すると、$M=0$ に対して $X/0=X$ は既約でないから、

$$^{\exists}M_1 \subsetneqq X \quad \text{s.t.} \quad M_1 \neq 0$$

となる。X/M_1 は既約でないから、

$$^{\exists}N_2 \subsetneqq X/M_1 \quad \text{s.t.} \quad N_2 \neq 0$$

となる。N_2 を自然な射影 $X \longrightarrow X/M_1$ によって引き戻して得られる X の部分加群を M_2 とおくと、$M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq X$ となる。X/M_2 は既約でないから、

$$^{\exists}N_3 \subsetneqq X/M_2 \quad \text{s.t.} \quad N_3 \neq 0$$

となる。N_3 を自然な射影 $X \longrightarrow X/M_2$ によって引き戻して得られる X の部分加群を M_3 とおくと、$M_2 \subsetneqq M_3 \subsetneqq X$ となる。以下、同様にして、真に増大する X の部分加群の列

$$M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq M_3 \subsetneqq \cdots\cdots$$

が得られる。これは X が Noether 加群であることに矛盾する □

$V \neq 0$ なので

$$^{\exists}X_1 : V \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad V/X_1 : \text{既約}$$

となる。もし、$X_1 = 0$ ならば、$V \supset X_1 = 0$ が組成列となる。

$X_1 \neq 0$ ならば、再び $(**)$ を適用して

$$^{\exists}X_2 : X_1 \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad X_1/X_2 : \text{既約}$$

となる。もし、$X_2 = 0$ ならば、$V \supset X_1 \supset X_2 = 0$ が組成列となる。

$X_2 \neq 0$ ならば、再び $(**)$ を適用して

$$^{\exists}X_3 : X_2 \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad X_2/X_3 : \text{既約}$$

となる。以下、同様の操作ことを繰り返すことにより、次の２通りのいずれかが起きることがわかる。

(i) $^{\exists}k \geq 1,\ ^{\exists}X_1, \cdots, X_k : V$ の部分加群の列 s.t. $V \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq X_k = 0$：組成列

(ii) $^{\exists}X_1, X_2, \cdots : V$ 部分加群の無限列 s.t. $V \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots\cdots$

もし、V が Artin 的でもあるななら ば、(ii) の場合は起こり得ない。よって、十分性も示された。 (Q.E.D.)

§4. 極大部分加群と極小部分加群

与えられた加群の中に (包含関係に関して) 極大な部分加群、極小な部分加群 (これは既約な部分加群とも呼ばれる) が存在するかどうかはわからない。ここでは、どのようなときに極大な部分加群、極小な部分加群が存在するのかについて調べる。特に、左正則加群に極大な部分加群 (=極大左イデアル)、極小な部分加群 (=極小左イデアル) が存在するか、という問

題を考える。結論を先に言えば、極小イデアルは存在するとは限らないが、極大イデアルはどのような代数にも常に存在する。ここではこの事実を Zorn の補題を用いて証明する。

定義 1-6

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

I：A の左 (resp. 右、両側) イデアル　とする。

(1) I：**極大** ($maximal$) $\iff$ (i) $I \neq A$

(ii) $I \subsetneqq J$ となる A の左 (resp. 右、両側) イデアル J は A に限る。

(2) I：**極小** ($mainimal$) $\iff$ (i) $I \neq 0$

(ii) $I \supsetneqq J$ となる A の左 (resp. 右、両側) イデアル J は 0 に限る。

定理 1-11(極大イデアルの存在定理)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

I：A の左 (resp. 右、両側) イデアル、$I \neq A$

$\Longrightarrow$ ${}^{\exists}\mathfrak{M}$：A の極大左 (resp. 右、両側) イデアル　s.t.　$I \subset \mathfrak{M}$

注意：極大イデアルは上で述べた定理によりどのような代数においても存在するが、極小イデアルは存在しない場合がある。例えば、体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式環 $\boldsymbol{k}[X]$ は極小イデアルを持たない。実際、$I(\neq 0)$ を $\boldsymbol{k}[X]$ のイデアルとすると、$\boldsymbol{k}[X]$ は単項イデアル環であるから、$I = (f(X))$ となる 0 でない多項式 $f(X)$ が存在する。このとき、$I = (f(X)) \supsetneqq (Xf(X))$ となるから、I は極小ではない。

この定理はもう少し一般的な定理の系として導かれる。そのために少し言葉や概念を準備しよう。

定義 1-7

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群

M：V の部分 A-加群　とする。

(1) M が V の**極大部分加群** ($maximal\ submodule$)

$\iff$ (i) $M \neq V$

(ii) N：V の部分 A-加群, $M \subsetneqq N \Longrightarrow N = V$

(2) M が V の**極小部分加群** ($minimal\ submodule$)

$\iff$ (i) $M \neq 0$

(ii) N：V の部分 A-加群, $M \supsetneqq N \Longrightarrow N = 0$

注意 1°：極大左イデアルの存在定理により、左正則加群 ${}_AA$ には極大な部分加群が存在するが、勝手な左 A-加群に対しては、極大な部分加群が存在するとは限らない。次の定理が知られている (T.Y.Lam・著『Exercises in classical ring theory』p.270–p.271 参照)：

定理(Hamsher, Renault)　R が左 Noether 代数のとき、

$$R：\text{左 Artin 代数} \iff \text{任意の 0 でない左 } R\text{-加群は極大部分加群を持つ}$$

が成り立つ。

この定理によれば、例えば、多項式代数 $A := \boldsymbol{k}[X]$ は左 Artin 的でない左 Noether 代数なので、極大部分加群をもたないような左 A-加群が存在することがわかる。

注意 2°：0 でない左 A-加群 V が Noether 加群 (resp. Artin 加群) ならば、V には極大部分加群 (resp. 極小部分加群) が存在する。

(proof)

左 A-加群 $V(\neq 0)$ が Noether 加群であるとする。

V が極大部分加群を持たないと仮定する。

零加群 0 は極大な部分加群でないから、

$$^{\exists}V_1：V \text{ の部分加群 s.t. } 0 \subsetneqq V_1,\ V_1 \neq V$$

となる。

仮定により V_1 は V の極大な部分加群でない。よって

$$^{\exists}V_1：V_2 \text{ の部分加群 s.t. } V_1 \subsetneqq V_2,\ V_2 \neq V$$

となる。以下、同様の考察を続けることにより、真に増大する部分加群の昇鎖列 $V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq V_3 \subsetneqq \cdots\cdots$ が得られる。これは V が Noether 加群であることに反する。故に、V には極大部分加群が存在する。

同様にして、0 でない左 Artin 加群には極小部分加群が存在することを示すことができる。

□

注意 3°：左自由 A 加群の直和因子となる左 A-加群は**射影的**であると呼ばれる (詳しくは第 8 節参照)。0 でない任意の射影的な左 A-加群には極大部分加群が存在することが知られている。証明はそれほど難しくないが、ここでは省略する (F.W.Anderson, K.R.Fuller・共著『Rings and categories of modules』p.198 Proposition 17.14 参照)。

定理 1-11 は次の定理の系として得られる。

定理 1-12

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：有限生成左 A-加群

$N(\neq M)$：M の部分 A-加群

$$\Longrightarrow\ ^{\exists}L：M \text{ の極大部分加群 s.t. } N \subset L$$

この定理を証明するのに、次の Zorn の補題を用いる。

Zorn の補題

X を空でない順序集合とする。

X の任意の鎖 (*i.e.* 空でない部分集合からなる全順序部分集合) が X 内に上界をもつならば、X 内に極大元が存在する。

注意 1°：順序集合 $(X, >)$ の鎖 $\mathfrak{C}$ が X **内に上界をもつ** (*upper bounded in* X) とは、

$$^\exists x_o \in X \ \text{ s.t. } \ ^\forall x \in \mathfrak{C},\ x_o \geq x$$

となるときをいう。

注意 2°：$(X, >)$ が順序集合のとき、新しい順序 $\succ$ を

$$x \succ y \iff y > x$$

によって定義することができる。このとき、順序 $\succ$ に関する上界は順序 $>$ に関する下界であり、順序 $\succ$ に関する極大元は順序 $>$ に関する極小元である。したがって、Zorn の補題は次のように述べても同じである。

Zorn の補題 順序集合 $X(\neq \emptyset)$ の任意の鎖が X 内に下界をもつならば、X 内に極小元が存在する。

ここでは、Zorn の補題の証明は行わない。これを認めて定理 1-12 を証明する。

(proof of Theorem 1-12)

$\{x_1, \cdots, x_r\}$ を M の生成元とする。

$$\mathcal{S} := \{U：M \text{ の部分加群} \mid N \subset U,\ U \neq M\}$$

とおく。$N \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

$\mathcal{S}$ は集合の包含関係を順序として順序集合になる。

$\mathfrak{C}$ を $\mathcal{S}$ 内の任意の鎖とする。

$$V := \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U$$

とおく。V は $\mathfrak{C}$ の $\mathcal{S}$ における上界である。

$\because$)

次の①②を示せばよい。

① 任意の $U \in \mathfrak{C}$ に対して $U \subset V$ となる。

② $V \in \mathcal{S}$ となる。

①は自明に成り立つので②を示す。そのためには

(i) $N \subset V$

(ii) $V \neq M$

(iii) V：M の部分加群

となることを示せばよい。

(i) は任意の $U \in \mathfrak{C}$ について $N \subset U$ となることから直ちに示される。

(ii) の証明：$V = M$ であったと仮定する。

すると $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset V = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U$ となる。各 x_i $(i = 1, \cdots, r)$ について $x_i \in U_i$ となる $U_i \in \mathfrak{C}$ をとる。$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、任意の $i, j = 1, \cdots, r$ に対して $U_i \subset U_j$ または $U_j \subset U_i$ が成り立つ。したがって、$U_1, \cdots, U_r$ の中には包含関係に関して最大なものが存在する。それを U_0 とおくと、$x_1, \cdots, x_r \in U_0$ となる。これは $V = Ax_1 + \cdots + Ax_r \subset U_0$

となることを意味する。これは $U_0 \in \mathfrak{C} \subset \mathcal{S}$ であることに反する。故に、$V \neq M$ である。

(iii) の証明：$x, y \in V$ を任意にとる。$x \in U,\ y \in U'$ となる $U, U' \in \mathfrak{C}$ が存在する。$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、$U \subset U'$ または $U' \subset U$ が成り立つ。したがって、$x, y \in U$ または $x, y \in U'$ となる。U, U' は M の部分加群なので、$x + y \in U$ または $x + y \in U'$ を得る。故に、$x, y \in V$ に対して $x + y \in V$ となることがわかった。

$x \in V$ と $a \in A$ に対して、$ax \in V$ となることは容易にわかる。

故に、V は M の部分加群である。 □

Zorn の補題から $\mathcal{S}$ には極大元が存在する。そのような極大元の 1 つを L とおく。
L は M の極大部分加群であって、$N \subset L$ を満たす。
$\because$)

$L \in \mathcal{S}$ ゆえ、$L \neq M$ であり、$N \subset L$ を満たす。

L が M の極大部分加群であることを示す。

L' を $L \subset L'$ を満たす M の部分加群とする。$N \subset L'$ なので、$L' \neq M$ ならば、$L' \in \mathcal{S}$ となる。L の $\mathcal{S}$ における極大性により、$L' = L$ でなければならない。故に、

$$L' : M \text{ の部分加群、} L \subset L' \implies L = L' \text{ または } L' = M$$

となることが示されたので、L は M の極大部分加群である。 □

これで、定理は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 1-11)
・極大左イデアルの存在について：

$I \neq A$ を左イデアルとする。A の部分集合 J が左イデアルであることと左正則加群 ${}_AA$ の部分加群であることは同値であるから、

$$J : \text{極大左イデアル} \iff J : {}_AA \text{ の極大部分加群}$$

が成立する。${}_AA$ は A 上 1 で生成されているから有限生成である。したがって、${}_AA$ には I を含む極大部分加群 $\mathfrak{M}$ が存在する (定理 1-12)。この $\mathfrak{M}$ は I を含む極大左イデアルである。
・極大右イデアルの存在について：

$I \neq A$ を右イデアルとする。A の部分集合 J が右イデアルであることと右正則加群 A_A の部分加群であることは同値である。右正則加群 A_A を左 A^{op}-加群とみなすと、

$$J : \text{極大右イデアル} \iff J : A_A \text{ の極大部分左 } A^{\mathrm{op}}\text{-加群}$$

が成立する。左 A^{op}-加群 A_A は 1 によって生成されるから有限生成である。したがって、A_A には I を含む部分左 A^{op}-加群 $\mathfrak{M}$ が存在する (定理 1-12)。この $\mathfrak{M}$ は I を含む極大右イデアルである。
・極大両側イデアルの存在について：

$I \neq A$ を両側イデアルとする。A の部分集合 J が両側イデアルであることと両側正則加群 ${}_AA_A$ の部分加群であることは同値である。両側正則加群 ${}_AA_A$ を左 A^e-加群とみなすと、

$$J : \text{極大両側イデアル} \iff J : {}_AA_A \text{ の極大部分左 } A^e\text{-加群}$$

が成立する。左 A^e-加群 ${}_AA_A$ は 1 によって生成されるから有限生成である。したがって、${}_AA_A$ には I を含む極大な部分左 A^e-加群 $\mathfrak{M}$ が存在する (定理 1-12)。この $\mathfrak{M}$ は I を含む極大両側イデアルである。 (Q.E.D.)

自分自身が極小部分加群になっているような左 A-加群は、加群の中でも特に重要なので、特別な呼び名が付けらている。

定義 1-8

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。0 でない左 A-加群 M が**既約** (*irreducible*) あるいは**単純** (*simple*) であるとは、M の部分加群が $\{0\}$ と M 自身以外に存在しないことをいう。同様にして、右 A-加群に対しても、既約という概念が定義される。

注意 1°：左 A-加群 V の部分加群 M について

$$M \text{ が } V \text{ の極小部分加群} \iff M \text{ が } V \text{ の既約な部分加群}$$

という言い替えが成り立つ。このノートでは、極小部分加群という言葉よりは、もっぱら、既約な部分加群という言葉を用いる。なお、「既約 (irrducible)」という用語はここで述べたものとは異なる意味で使われる場合がある (F.Kasch『Modules and rings』、B. Stenström『Rings of quotients』p.119 など) ので、読み比べるときには注意が必要である。

注意 2°：左 A-加群 M が既約ならば直既約である。しかし、逆は成立しない。例えば、次のような生成元と関係式によって記述される体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A を考える。

生成元：$g,\ x$

関係式：$g^2 = 1,\ x^2 = 0,\ xg = -gx$

このとき、$M = \boldsymbol{k}(1+g) + \boldsymbol{k}(x+xg) \subset A$ は左正則加群の部分加群になる。M は直既約であるが、既約ではない。実際、M は $\{0\}$ でも自分自身でもない部分加群 $\boldsymbol{k}(x+xg)$ を含むので、既約ではない。一方、M を 0 でない 2 つの部分加群の直和として表わすことはできない。なぜならば、M の 1 次元部分加群は $\boldsymbol{k}(x+xg)$ に限るからである。

注意 3°：A が有限次元ならば、既約な左 A-加群、既約な右 A-加群は有限次元であり、その次元は $\dim A$ を超えない。

(proof)

V を既約な左 A-加群とする。$0 \neq v \in V$ をとる。このとき、$Av \subset V$ は V の 0 でない部分加群となる。

したがって、V の既約性により、$Av = V$ でなければならない。$a_1, \cdots, a_n$ を A の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とすると、Av は $\boldsymbol{k}$ 上 $a_1 \cdot v, \cdots, a_n \cdot v$ によって張られるから、$\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}Av \leq n = \mathrm{dim}A$ となる。

既約な右 A-加群についても同様である。 □

次の命題は代数の表現論を展開する上で最も基本的であり、いたるところで使われる。

命題 1-13(**Schur の補題**)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) $M,\ N$：既約な左 A-加群

$f: M \longrightarrow N$ ：左 A-加群準同型、$f \neq 0 \implies f$：同型写像

(2) M：既約な左 A-加群 $\implies \mathrm{End}_A M$：可除代数

さらに、$\boldsymbol{k}$ が代数閉体であって、M が有限次元ならば、

$$\mathrm{End}_A M = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$$

が成り立つ。

(proof)

(1) $\mathrm{Ker} f$ は M の部分加群である。M の既約性により、$\mathrm{Ker} f = 0$ または $\mathrm{Ker} f = M$ となる。$f \neq 0$ なので、 $\mathrm{Ker} f \neq M$ である。故に、$\mathrm{Ker} f = 0$、すなわち、f は単射である。

一方、$\mathrm{Im} f$ は N の部分加群である。N の既約性により、$\mathrm{Im} f = 0$ または $\mathrm{Im} f = N$ となる。$f \neq 0$ なので、$\mathrm{Im} f \neq 0$ である。故に、$\mathrm{Im} f = N$、すなわち、f は全射である。

f は全単射な左 A-加群準同型、すなわち、同型写像である。

(2) (1) により、任意の $0 \neq f \in \mathrm{End}_A M$ は可逆である。したがって、$\mathrm{End}_A M$ は可除代数である。

以下、$\boldsymbol{k}$ は代数閉体、M は有限次元であるとする。

このとき、$\mathrm{End}_A M = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ となることは、代数閉体上の有限次元可除代数は基礎体と同型になる (演習 1-5) ことから従う。なお、直接 $\mathrm{End}_A M = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ を証明することもできる。それには以下のようにすればよい。

$f \in \mathrm{End}_A M$ を任意にとる。$\boldsymbol{k}$ は代数閉体であり、$\dim M < \infty$ であるから、f の固有値は $\boldsymbol{k}$ 内に存在する。$\alpha \in \boldsymbol{k}$ を f の 1 つの固有値とする。

$g := f - \alpha \cdot \mathrm{id}_M$ は左 A-加群準同型である。さらに、α は f の固有値なので、

$$^{\exists} v (\neq 0) \in M \quad \text{s.t.} \quad f(v) = \alpha v \quad i.e. \quad g(v) = 0$$

となる。これは、g が同型写像でないことを意味する。よって、(1) の対偶より、$g = 0$ でなければならない。こうして、$f = \alpha \mathrm{id}_M$ が示された。 (Q.E.D.)

注意：Schur の補題の逆は成立しない。すなわち、$\mathrm{End}_A M = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ であるが、既約でない左 A-加群 M と有限次元代数 A が存在する。

(proof)

$\boldsymbol{k}$ を任意の体とし、代数

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を考える。また、M を $\{e_1, e_2\}$ を $\boldsymbol{k}$ 上の基底に持つベクトル空間とする。A は M に次のように作用する：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} e_1 = \alpha e_1, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} e_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$$

この作用に関して M は左 A-加群になる。

M には $\boldsymbol{k}e_1 \subset M$ という 0 でない部分加群が存在するから既約でない。

一方、$f : M \longrightarrow M$ を左 A-加群準同型とする。

$$f(e_1) = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \quad f(e_2) = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \qquad (c_{ij} \in \boldsymbol{k})$$

とおく。

$$f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f(e_2), \quad f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(e_2)$$

より、

$$c_{12} = c_{21} = 0, \quad c_{11} = c_{22}$$

を得る。よって、$f = c_{11}\mathrm{id}_M$ を得る。よって、$\mathrm{End}_A M = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ である。 □

演習 1-34

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$J(\neq A)$：A の両側イデアル　とする。このとき、

$$A/J \text{ の左イデアル } \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A \text{ の左イデアルで、} J \text{ を含むもの}$$

$$A/J \text{ の極大左イデアル } \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A \text{ の極大左イデアルで、} J \text{ を含むもの}$$

が成り立つことを示せ。(注：右、両側イデアルの場合も同様のことがいえる。)

解；

$\pi : A \longrightarrow A/J$ を自然な射影とする。写像

$\{A/J$ の左イデアル全体$\} \longrightarrow \{J$ を含む A の左イデアル全体$\}$, $\mathfrak{a} \longmapsto \pi^{-1}(\mathfrak{a})$

$\{J$ を含む A の左イデアル全体$\} \longrightarrow \{A/J$ の左イデアル全体$\}$, $I \longmapsto \pi(I)$

は互いに他の逆写像である。したがって、

$$A/J \text{ の左イデアル } \overset{1:1}{\longleftrightarrow} J \text{ を含む } A \text{ の左イデアル}$$

を得る。さらに、I_1, I_2 を A の左イデアルで、$J \subset I_1, I_2$ を満たすものとすると、

$$I_1 \subset I_2 \iff \pi(I_1) \subset \pi(I_2)$$

が成り立つので、

$$A/J \text{ の極大左イデアル } \overset{1:1}{\longleftrightarrow} J \text{ を含む } A \text{ の極大左イデアル}$$

が成り立つ。 (Q.E.D.)

演習 1-35

体 $\boldsymbol{k}$ の元からなる無限列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 全体からなる集合 A は

和 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} + \{b_i\}_{i=0}^{\infty} = \{a_i + b_i\}_{i=0}^{\infty}$ 　スカラー倍 $\lambda\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{\lambda a_i\}_{i=0}^{\infty}$ $(\lambda \in \boldsymbol{k})$

に関して $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間になる。このベクトル空間上に次のような積を導入する：

$$\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \cdot \{b_i\}_{i=0}^{\infty} = \{a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_2b_0, a_0b_3 + a_3b_0, \cdots\cdots\}$$

以下のことを証明せよ。

(1) A はこの積によって $\boldsymbol{k}$ 上の可換代数になる。
(2) A の極大イデアルは唯一であり、それは $J=\{\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\in A \mid a_0=0\}$ によって与えられる。
(3) $M:=\{f\in A_A^* \mid J\subset \mathrm{Ker}f\}$ とおく。M は A_A^* の唯一の極小部分加群である。
(4) 左正則加群 ${}_AA$ は有限生成であるが、Noether 加群ではない。
(5) 右正則加群の双対加群 ${}_AA^*$ は有限余生成であるが、Artin 加群ではない。

解；
(1) $a=\{a_i\}_{i=0}^{\infty},\ b=\{b_i\}_{i=0}^{\infty},\ c=\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ を A の任意の 3 元とする。このとき、

$$(ab)c \text{ の第 } n \text{ 項}=\begin{cases}(a_0b_0)c_0 & n=0\\ (a_0b_n+a_nb_0)c_0+(a_0b_0)c_n & n=1,2,\cdots\end{cases}$$
$$a(bc) \text{ の第 } n \text{ 項}=\begin{cases}a_0(b_0c_0) & n=0\\ a_0(b_0c_n+b_nc_0)+a_n(b_0c_0) & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

が成り立つ。故に、$(ab)c=a(bc)$ が成り立つ。単位元は、初項のみ 1 で、あとはすべて 0 である元によって与えられる。よって、A は問題文の中にある積に関して代数になる。可換であることもすぐに確かめられる。
(2) まず、J が A の極大イデアルであることを示す。
・J がイデアルであること：
J はその定義から A の部分線形空間である。また、$a=\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\in A,\ b=\{bs_i\}_{i=0}^{\infty}\in J$ ならば、$b_0=0$ なので ab の初項は $a_0b_0=0$ となる。よって、$ab\in J$ となる。故に、J は A のイデアルである。
・J が A の極大イデアルであること：
A のイデアル I が $J\subsetneqq I$ を満たしているとする。このとき、
$$^{\exists}a=\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\in I \ \text{ s.t. } \ a_0\neq 0$$
となる。よって、
$$\{a_0,0,0,\cdots\cdots\}=a-\{0,a_1,a_2,\cdots\cdots\}\in I$$
を得る。$a_0\neq 0$ ゆえ、$1=\{1,0,0,\cdots\cdots\}\in I$ であることがわかる。これは $I=A$ に同値である。故に、J は A の極大イデアルである。
・A の極大イデアルが唯一であること：
$I\subset A$ を A の極大イデアルとする。
もし、I に属するすべての元の初項が 0 ならば、$I\subset J$ となる。I は極大イデアルなので、$I=J$ を得る。
I に属する元 a であって、初項が 0 でないものが存在すると仮定する。その初項の逆元倍をすることにより、
$$^{\exists}b=\{b_i\}_{i=0}^{\infty}\in I \ \text{ s.t. } \ b_0=1$$
であることがわかる。
$$c:=\{0,b_1,b_2,\cdots\cdots\}$$

とおくと

$$c = cb \in I$$

が成り立つ。したがって、$1 = b - c \in I$ となる。これは $I = A$ を意味するが、I は極大イデアルであるとしたことに矛盾する。故に、A の極大イデアルは J 以外に存在しない。

(3) $M := \{f \in A_A^* \mid J \subset \mathrm{Ker} f\}$ とおく。

M は A_A^* の部分加群である。

$\because$)

M が A_A^* の部分線形空間になっていることはすぐにわかる。

$a \in A$ の作用で保たれることを見る。

$a \in A$ の A_A^* への左作用は

$$(a \cdot f)(x) = f(xa) \qquad\qquad (a, x \in A,\ f \in A_A^*)$$

によって与えられる (演習 1-14(2))。今、$f \in M$ とすると、

$$(a \cdot f)(J) = f(Ja) \underset{\substack{\uparrow \\ J\text{ は }A\text{ のイデアル}}}{\subset} f(J) = 0$$

を得る。

よって、$a \cdot f \in M$ となる。故に、M は A_A^* の部分加群である。 □

・M が A_A^* の極小部分加群であること：

これは $\underset{\uparrow}{\dim M = 1}$ となることからわかる。

$\because$)

$\varphi : M \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を $\varphi(f) = f(1)$ によって定義する。φ は $\boldsymbol{k}$-線形写像である。

φ は全射である。実際、$\lambda \in \boldsymbol{k}$ を任意にとる。このとき、$f : A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を $f(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}) = \lambda a_0$ と定める。f は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像である。さらに、$f(J) = 0$ を満たすから、$f \in M$ となっている。故に、$\varphi(f) = \lambda$ となり、φ は全射である。

φ は単射である。実際、$f \in M$ が $\varphi(f) = 0$ であったとすると、任意の $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して

$$f(a) = f(a_0 1 + \{0, a_1, a_2, \cdots, \cdots\}) = a_0 f(1) + f(\{0, a_1, a_2, \cdots, \cdots\}) = 0$$

となる。故に、$f = 0$ となるので、φ は単射である。 □

・A_A^* の極小部分加群が唯一であること：

N を A_A^* の 0 でない部分加群とする。

$0 \neq f \in N$ をとり、固定する。

$f(J) = 0$ ならば、$f \in M$ である。$\dim M = 1$ であるから、M の任意の元は f のスカラー倍である。よって、$M \subset N$ となる。

$f(J) \neq 0$ のときを考える。この場合には $a \in J$ であって、$f(a) \neq 0$ となるものが存在する。すると、$a \cdot f(1) = f(a) \neq 0$ なので、$0 \neq a \cdot f \in N$ である。一方、$(a \cdot f)(J) = f(Ja) = f(0) = 0$

となるので、$a \cdot f \in M$ となる。先程と同様に、M の任意の元は $a \cdot f$ のスカラー倍になるので、$M = \boldsymbol{k}(a \cdot f) \subset N$ を得る。

以上から、$M \subset N$ が示された。

(4) 左正則加群 ${}_AA$ は 1 で生成されるから、有限生成である。${}_AA$ が Noether 加群でないことを示す。

$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して

$$J_k := \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in A \mid a_0 = 0,\ a_i = 0\ (i > k)\}$$

とおく。J_k は A のイデアルであって、

$$J_1 \subsetneqq J_2 \subsetneqq J_3 \subsetneqq \cdots\cdots$$

となることがわかる。故に、${}_AA$ が Noether 加群でない。

(5) まず、右正則加群の双対加群 A_A^* が有限余生成であることを示す。

$\{V_i\}_{i \in I}$ を A_A^* の部分加群の族であって、$\bigcap_{i \in I} V_i = 0$ を満たすものとする。もし、任意の $i \in I$ に対して、$V_i \neq 0$ であったならば、$M \subset V_i$ となる。よって、

$$M \subset \bigcap_{i \in I} V_i = 0$$

となり、矛盾が生じる。よって、ある $i \in I$ について $V_i = 0$ でなければならない。このことは A_A^* が有限余生成であることを意味する。

次に、A_A^* が Artin 加群でないことを示す。(4) で述べたイデアル J_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を考える。

$$M_k := \{f \in A_A^* \mid J_k \subset \mathrm{Ker} f\}$$

とおく。M_k は A_A^* の部分加群であって、

$$M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq M_3 \supsetneqq \cdots\cdots$$

を満たす。

$\because$)

> J_k は A のイデアルなので、M_k は A_A^* の部分加群になる。また、その定義から、
>
> $$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots\cdots$$
>
> を満たす。$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $M_k \neq M_{k+1}$ となることを示す。
>
> 線形写像 $f : A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を $f(\{a_i\}_{i=0}^{\infty}) = a_{k+1}$ によって定義する。$f(J_k) = 0$ であるが、$f(J_{k+1}) \neq 0$ である。したがって、$f \in M_k - M_{k+1}$ となる。故に、$M_k \neq M_{k+1}$ となることも示された。 $\square$

故に、A_A^* は Artin 加群でない。 (Q.E.D.)

注意：A の部分代数

$$B := \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in A \mid {}^{\exists}n \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ {}^{\forall}i \geq n,\ \ a_i = 0\}$$

に対しても、上と同様の結果が成り立つ。B は、可算無限個の変数からなる多項式代数 $\boldsymbol{k}[X_1, X_2, \cdots\cdots]$ を X_iX_j $(i, j = 1, 2, \cdots\cdots)$ で生成されるイデアルで割って得られる代数と同型である。また、縦横が“自然数”によってパラメートライズされた正方行列 $(a_{ij})_{i,j=1,2,\cdots\cdots}$ 全体の中で、$a_{ii} = a_{jj}$ $(i, j = 1, 2, \cdots\cdots)$ かつ $a_{ij} = 0$ $(i \neq j,\ i \neq 1)$ を満たすものからなる部分代数と同型である (F.W.Anderson, K.R.Fuller・共著『Rings and categories of modules』GTM13, p.132)。

演習 1-36

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：左 A-加群　とする。このとき、次が成り立つことを示せ。
M：既約 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}I \subset A$：極大な左イデアル s.t. $M \cong A/I$ as left A-modules

解；

「$\Longrightarrow$」の証明：$0 \neq m_o \in M$ を 1 つ取り、固定する。このとき、$\varphi : {}_AA \longrightarrow M$ を $\varphi(a) = a \cdot m_o,\ a \in A$ によって定義する。φ は全射な左 A-加群準同型となる。

$\because$)

φ が左 A-加群準同型になることはすぐに確かめられる。すると、$\mathrm{Im}\varphi$ は M の部分加群になる。$0 \neq m_o \in \mathrm{Im}\varphi$ であるから、M の既約性により、$\mathrm{Im}\varphi = M$ を得る。故に、φ は全射である。 $\square$

準同型定理によって、

$${}_AA/\mathrm{Ker}\varphi \cong M \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。$\mathrm{Ker}\varphi$ は ${}_AA$ の部分加群であるが、これを代数 A の部分集合と見ると、左イデアルとなる。この左イデアルが極大であることを示す。まず、$\varphi(1) = m_0 \neq 0$ なので、$\mathrm{Ker}\varphi \neq {}_AA$ であることに注意する。$\mathrm{Ker}\varphi \subsetneqq J \subset A$ を満たす A の左イデアル J を考える。このとき、自然な射影 $\pi : {}_AA \longrightarrow {}_AA/\mathrm{Ker}\varphi$ による J の像を $\bar{J}$ とおく。すると、$\bar{J}$ は ${}_AA/\mathrm{Ker}\varphi$ の部分左 A-加群になる。さらに、$\mathrm{Ker}\varphi \subsetneqq J$ なので、$\bar{J} \neq 0$ でもある。ところが、${}_AA/\mathrm{Ker}\varphi \cong M$ により、${}_AA/\mathrm{Ker}\varphi$ は既約であるから、$\bar{J} = {}_AA/\mathrm{Ker}\varphi$ でなければならない。これは $\bar{J} = {}_AA$ であることを意味する。こうして、$\mathrm{Ker}\varphi$ は極大な左イデアルであることが示された。

「$\Longleftarrow$」の証明：A を極大な左イデアル I としたとき、A/I が左 A-加群として既約なことを示せばよい。

左 A-加群 A/I の部分左 A-加群とは、代数 A/I の左イデアルのことに他ならない (注：A/I の左 A-加群の構造は、左イデアル I を左正則加群 ${}_AA$ の部分加群とみなして得られる商加群 ${}_AA/I$ として与えている) から、A/I の左イデアルは 0 と自分自身しかないことを示せばよい。

任意に左イデアル $0 \neq J \subset A/I$ をとる。このとき、$p : A \longrightarrow A/I$ を自然な射影とすると、p は代数準同型であるから、$p^{-1}(J)$ は A の左イデアルであって、$I \subsetneqq \mathrm{Ker}p \subset p^{-1}(J) \subset A$ を満たす。I の極大性から $p^{-1}(J) = A$ を得る。このことは、$J = p(p^{-1}(J)) = p(A) = A/I$

となること意味する (∵ p は全射)。

こうして、A/I の左 A-加群としての既約性が証明された。 (Q.E.D.)

注意：極大左イデアルの存在定理と上の結果から、任意の代数 A に対して、少なくとも 1 つは既約な左 A-加群が存在することがわかる。

演習 1-37

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数

$\Longrightarrow$ 0 でない任意の左 A-加群には既約な部分加群が存在する。

このことを示せ。

解；

V を 0 でない左 A-加群とする。

$0 \neq x \in V$ をとる。Ax は 0 でない V の部分加群である。Ax に既約な部分加群が存在することを示せばよい。

左 A-加群 Ax は有限生成である (∵ 1 つの元 x で生成されている) から、Artin 加群になる (系 1-10)。

定義 1-7 の下の注意 2° により、 Ax には極小な部分加群、すなわち、既約な部分加群が存在する。 (Q.E.D.)

演習 1-38

(1) 多項式代数 $\mathbb{C}[X]$ の既約表現の次元は 1 であることを示せ。

(2) 多項式代数 $\mathbb{R}[X]$ の既約表現の次元は 1 または 2 であることを示せ。

(3) $n \in \mathbb{N}$ を任意にとる。多項式代数 $\mathbb{Q}[X]$ は n 次元の既約表現を持つことを示せ。

解；

最初に、少し一般的な状況で考える。$\boldsymbol{k}$ を体とし、V を多項式代数 $\boldsymbol{k}[X]$ の表現とする。

演習 1-36 より、

$$V：\text{既約} \iff {}^{\exists}I : \text{極大左イデアル} \ \ \text{s.t.} \ \ V \cong \boldsymbol{k}[X]/I \quad \text{as left } \boldsymbol{k}[X]\text{-modules}$$

である。$\boldsymbol{k}[X]$ は単項イデアル整域である (拙著『代数系入門』p.271 系 1) から、ある多項式 $f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ によって $I = (f(X))$ と書くことができる。$f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ に対して

$$(f(X))：\text{極大イデアル} \quad \iff \quad f(X)：\text{既約多項式}$$

が成り立つから、

$$V：\text{既約} \quad \iff \quad {}^{\exists}f(X) \in \boldsymbol{k}[X]：\text{既約多項式} \ \ \text{s.t.} \ \ V \cong \boldsymbol{k}[X]/(f(X))$$

となる。このとき、

$$\dim V = \dim(\boldsymbol{k}[X]/(f(X))) = \deg f(X)$$

であるから、多項式代数 $\boldsymbol{k}[X]$ の既約表現はすべて有限次元であることがわかる。

(1) $\boldsymbol{k} = \mathbb{C}$ のとき： $\mathbb{C}[X]$ の既約多項式は 1 次式である (代数学の基本定理) から、既約な左 $\mathbb{C}[X]$-加群の次元は 1 である。

(2) $\boldsymbol{k}=\mathbb{R}$ のとき：$\mathbb{R}[X]$ の既約多項式は 1 次式か 2 次式である (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.210 系参照) から、既約な左 $\mathbb{R}[X]$-加群の次元は 1 または 2 である。
(3) $\boldsymbol{k}=\mathbb{Q}$ のとき：n を勝手な自然数とする。X^n+2 は $\mathbb{Q}$ 上既約である (Eisenstein の既約判定法による。例えば、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.41 参照) から、$\mathbb{Q}[X]/(X^n+2)$ は n 次元の既約な左 $\mathbb{Q}[X]$-加群である。 (Q.E.D.)

演習 1-39

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
V：左 A-加群、$W\subset V$：部分加群　について

$$V/W：\text{既約} \iff W \text{ は } V \text{ の極大な部分加群}$$

となることを示せ。

解；
「$\Longrightarrow$」の証明：V/W は既約な左 A-加群であるとする。
$W \subsetneqq N$ を満たす V の部分加群 N をとる。このとき、自然な射影 $\pi: V \longrightarrow V/W$ による像 $\pi(N)$ は V/W の部分加群であって、

$$\pi(N)\neq 0$$

となる。V/W の既約性から $\pi(N)=V/W$ がわかる。
したがって、

$$^\forall v\in V,\ ^\exists x\in N \ \text{ s.t. } \ \pi(v)=\pi(x) \ \ i.e.\ \ v-x\in W$$

となる。$W\subset N$ であるから、$v\in x+W\subset N$ となる。故に、$V\subset N$ が示された。こうして「$W\subsetneqq N \implies N=V$」となることがわかったので、$W$ は V の極大な部分加群である。
「$\Longleftarrow$」の証明：W は V の極大な部分加群とする。
$W\neq V$ なので、$V/W\neq 0$ である。
$T\subset V/W$ を部分加群とする。このとき、自然な射影 $\pi: V\longrightarrow V/W$ による引き戻し $\pi^{-1}(T)$ は $\pi^{-1}(0)=W$ を含む V の部分加群となる。
W は V の極大部分加群であるから $\pi^{-1}(T)=W$ または $\pi^{-1}(T)=V$ となる。
したがって、$T \underset{\substack{\uparrow \\ \pi \text{ は全射}}}{=} \pi(\pi^{-1}(T))=0$ または $T \underset{\substack{\uparrow \\ \pi \text{ は全射}}}{=} \pi(\pi^{-1}(T))=V/W$ となる。 (Q.E.D.)

演習 1-40

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$V,\ W$：有限次元既約左 A-加群　とする。このとき、

$$V\not\cong W \quad \text{as left } A\text{-modules} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\not\cong \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}W \quad \text{as left } A^e\text{-modules}$$

となることを示せ ($\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ への $A^e=A\otimes A^{\mathrm{op}}$ の左作用は演習 1-15(1) 参照)。

解；
対偶を示す。左 A^e-加群として、$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\cong\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}W$ であるとすると、左 A-加群としても $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\cong\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}W$ であるから、演習 1-15(2) から、

$$\underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{\dim V \text{ 個}} \cong \underbrace{W \oplus \cdots \oplus W}_{\dim W \text{ 個}} \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。このとき、次元を比較して

$$\dim V = \dim W$$

を得る。そこで、$n = \dim V$ とおき、次のような合成写像 $\varphi_i : V \longrightarrow W$ を考える。

$$\varphi_i : V \xrightarrow{\iota} V^{\oplus n} \xrightarrow{\cong} W^{\oplus n} \xrightarrow{p_i} W$$

ここで、ι は $\iota(v) = (v, 0, \cdots, 0)$, $v \in V$ によって定義される包含写像であり、p_i は $p_i(w_1, \cdots, w_n) = w_i$, $w_j \in W$ $(j = 1, \cdots, n)$ によって定義される射影である。φ_i は左 A-加群準同型である。今、$0 \neq v_0 \in V$ を 1 つとると、$\iota(v_0) \neq 0$ であるから、$\iota(v_0)$ を同型 $V^{\oplus n} \cong W^{\oplus n}$ で写したものを $(w_1, \cdots, w_n)$ とおくと、少なくとも 1 つの i に対して $w_i \neq 0$ であることがわかる。したがって、少なくとも 1 つの i に対して $\varphi_i : V \longrightarrow W$ は 0-写像ではない。V, W は既約であるから、このような i に対して、φ_i は左 A-加群の同型となる (命題 1-13(1))。これで証明が終わった。 (Q.E.D.)

注意：左 A-加群として、$\underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{\dim V \text{ 個}} \cong \underbrace{W \oplus \cdots \oplus W}_{\dim W \text{ 個}}$ であることがわかった時点で Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理 (定理 3-6) を使えば、直ちに $V \cong W$ が得られる。

演習 1-41

G：有限アーベル群

k：次の①②を満たす体　とする。

$$\begin{cases} \text{① 1 の原始 } |G| \text{ 乗根を含む} \\ \text{② 標数は 0、または、標数は } p > 0 \text{ であって } |G| \text{ は } p \text{ で割り切れない} \end{cases}$$

このとき

$$\rho : \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \mathrm{End}V：\text{既約表現} \implies \dim V = 1$$

となることを示せ。

解；

$|G| = n$ とおくと、任意の $g \in G$ に対して、$g^n = 1$ となる。したがって、

$$\rho(g)^n = \mathrm{id}_V$$

が成り立つ。これより、$\rho(g)$ の最小多項式は $X^n - 1$ を割り切ることがわかる。

$\boldsymbol{k}$ の標数は 0 または $\boldsymbol{k}$ の標数は $p > 0$ であって $p \not| n$ であるので、$\rho(g)$ の最小多項式は重根を持たない。

$\because$)

$\rho(g)$ の最小多項式を $m(X)$ とおく。

$n = 1$ のとき、 $m(X) = X - 1$ となるしかなく、したがって、重根を持たない。

$n > 1$ とする。$m(X)$ は $X^n - 1$ を割り切るので、$X^n - 1 = m(X)h(X)$ を満たす $h(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ が存在する。

$m(X)$ の微分 $m'(X)$ が 0 であると仮定する：$m'(X)=0$ 。このとき、$\boldsymbol{k}$ の標数は 0 または $\boldsymbol{k}$ の標数は $p>0$ であって $p\not| n$ であるから

$$0 \neq nX^{n-1} = m'(X)h(X) + m(X)h'(X) = m(X)h'(X)$$

が成り立つ。故に、

$$m(X) = X^k \qquad \text{for some } k \in \{1, \cdots, n-1\}$$

が成り立つ ($\because$ 多項式に関する因数分解の一意性と $m(X)$ の最高次の係数が 1)。よって、

$$X^n - 1 = m(X)h(X) = cX^k h(X) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。しかしながら、$(*)$ の左辺の定数項は 0 でないのに、$(*)$ の右辺には定数項は現れない ($\because\ k \geq 1$)。ここに矛盾が生じた。よって、$m'(X) \neq 0$ となる。これは $m(X)$ が重根を持たないことを意味する (拙著『あるてぃんの Galois Thoery』p.99 系 1 参照)。
□

$\boldsymbol{k}$ は 1 の原始 n 乗根を含むので、$\rho(g)$ の最小多項式の根はすべて $\boldsymbol{k}$ 内に存在する (*i.e.* $\rho(g)$ の最小多項式は $\boldsymbol{k}[X]$ において一次式の積に分解する)。よって、

「任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)$ は対角化可能である。」 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ❶

他方、G はアーベル群であるから、

「任意の $g, h \in G$ に対して $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \rho(g)$ が成り立つ。」 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ❷

❶❷から、線形変換の族 $\{\rho(g) : V \longrightarrow V \mid g \in G\}$ は同時対角化可能であることがわかる。このことは、ρ が 1 次元表現の $\dim V$ 個の直和に分解することを意味する。

$\because$)

線形変換の族 $\{\rho(g) \mid g \in G\}$ は同時対角化可能であるので、

$$^{\exists}\{v_i\}_{i=1}^{l} : V \text{ の } \boldsymbol{k} \text{ 上の基底 \ s.t. } {}^{\forall}g \in G,\ {}^{\forall}i \in \{1, \cdots, l\}$$

$$\rho(g)(v_i) = \rho_i(g)v_i \ \text{ for some } \rho_i(g) \in \boldsymbol{k}$$

となる。このとき、$V_i := \boldsymbol{k}v_i\ (i=1,\cdots,l)$ は左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群 V の部分 $\boldsymbol{k}[G]$-加群であり、

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l \qquad \text{as left } \boldsymbol{k}[G]\text{-modules}$$

が成り立つ。したがって、$\rho_i : \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \mathrm{End}V_i\ (i=1,\cdots,l)$ を

$$\rho_i(\sum_{g\in G} c_g g) = \sum_{g \in G} c_g \rho_i(g) \qquad\qquad (c_g \in \boldsymbol{k},\ g \in G)$$

によって定義すれば、ρ は 1 次元表現 $\rho_1, \cdots, \rho_l$ の直和になる。 □

したがって、ρ が既約ならば、$\dim V = 1$ でなければならない。 (Q.E.D.)

演習 1-42

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) V：有限次元左 A-加群 とする。このとき、

$$V : \text{既約} \iff V^* : \text{既約}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\dim A < \infty$ であるとする。このとき、
$V_1, \cdots, V_r$：既約な左 A-加群の同型類に関する完全代表系
$\iff$ $V_1^*, \cdots, V_r^*$：既約な右 A-加群の同型類に関する完全代表系
が成り立つことを示せ。

解；
(1) V が有限次元ならば、写像

$$\{V \text{ の部分加群全体}\} \longrightarrow \{V^* \text{ の部分加群全体}\}, \quad W \longmapsto W^\perp$$

は全単射である (演習 1-17(3))。したがって、V が有限次元のとき

$$\begin{aligned} V\text{：既約} &\iff V \text{ の部分加群は } \{0\} \text{ と } V \text{ のみ} \\ &\iff V^* \text{ の部分加群は } \{0\} \text{ と } V^* \text{ のみ} \\ &\iff V^*\text{：既約} \end{aligned}$$

が成り立つ。
(2) $V_1, \cdots, V_r$ を既約な左 A-加群の同型類に関する完全代表系であるとする。
有限次元代数の既約加群はすべて有限次元である (定義 1-8 注意 3°) から、(1) により、$V_1^*, \cdots, V_r^*$ は既約な右 A-加群になる。また、

$$V_i^* \cong V_j^* \quad \text{as right } A\text{-modules} \implies V_i \cong V_i^{**} \cong V_j^{**} \cong V_j \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。よって、$V_1^*, \cdots, V_r^*$ は互いに同型でない。
さらに、U が既約な右 A-加群であるとすると U は有限次元であるから、(1) により、U^* は既約な左 A-加群になる。したがって、$U^* \cong V_i$ となる $i \in \{1, \cdots, r\}$ が存在する。このとき、

$$U \cong U^{**} \cong V_i^* \qquad \text{as right } A\text{-modules}$$

を得る。故に、$V_1^*, \cdots, V_r^*$ は既約な右 A-加群の同型に関する完全代表系である。
「$\Longleftarrow$」についても同様にして証明することができる。 (Q.E.D.)

注意：上の演習問題の (2) では、A の既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系は有限個であると仮定したが、これは常に正しい (定理 3-11 参照)。

§5. 根基

ここでは、代数の根基という概念を導入する。すべての極大左イデアルの共通部分は根基と呼ばれる。根基は、すべての左既約加群への左作用が消えるような元全体と一致する。その結果として、根基は常に両側イデアルであることがわかる。ここでの目標は、左 Artin 的な代数において、その根基が両側冪零イデアルの中で最大であることを示すことである。

定義 1-9
A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
A のすべての極大左イデアルの共通部分を A の**根基** (*radical*) といい、$\mathrm{rad}A$ という記号で表わす。

注意 1°：上では代数の根基を極大左イデアルを用いて定義したが、根基はすべての極大右イデアルの共通部分とも一致する (演習 1-48) ことがわかる (*i.e.* 根基は左右対称性を持つ)。

注意 2°：上で述べた根基の概念は Jacobson によって導入されたので、**Jacobson 根基**と呼ばれることが多い。根基の概念は、代数の半単純性の特徴付けに有効に使われる (第 2 章参照)。

補題 1-14

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、
$a \in A$ に対して、

$$a \in \mathrm{rad}A \iff \text{任意の } x \in A \text{ に対して } 1 - xa \text{ は左逆元をもつ}$$

が成り立つ。

(proof)

i. 必要性： $a \in \mathrm{rad}A$ とする。

$1 = xa + (1 - xa)$ と表わすことができるので、$1 - xa$ はどのような極大左イデアルにも含まれない。

$\because$)

もし、$1-xa$ が A のある極大左イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれたと仮定する。$xa \in \mathrm{rad}A \subset \mathfrak{m}$ であるから $1 = xa + (1 - xa) \in \mathfrak{m}$ が得られ、$\mathfrak{m} \neq A$ であることに矛盾する。 $\square$

したがって、任意の極大左イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$0 \neq A(1 - xa) \not\subset \mathfrak{m}$ となる。これより、$A = A(1 - xa)$ でなければならない (極大イデアルの存在定理)。故に、$1 = y(1 - xa)$ となる $y \in A$ が存在する。

ii. 十分性： 対偶を証明する。

$a \notin \mathrm{rad}A$ ならば、ある極大左イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$a \notin \mathfrak{m}$ となる。すると、$\mathfrak{m}$ の極大性から $Aa + \mathfrak{m} = A$ となる。特に、$xa + b = 1$ を満たす $x \in A$ と $b \in \mathfrak{m}$ が存在する。$1 - xa = b \in \mathfrak{m}$ より、$1 - xa$ は左逆元を持たない。 (Q.E.D.)

補題 1-14 により、$a \in \mathrm{rad}A$ ならば $1 - a$ は左逆元をもつので、$(1 - a)x = 0$ ならば $x = 0$ となる。次の系は、この事実が a を $\mathrm{rad}A$ に含まれる A の左イデアル $\mathfrak{a}$ に置き換え、x を有限生成左 A-加群 M に置き換えても成り立つことを主張している。なお、次の系は「中山の補題」として広く知られているが、これは正しくなく、本来は「東屋の補題」と呼ぶべきものであるらしい (その歴史的経緯については、永田雅宜・著『local rings』Interscience, 1962, p.212–213 を参照。この補題は、永尾汎・津島行男・共著『有限群の表現』では「東屋-中山の補題」として引用され、永田雅宜・著『可換環論』『可換体論』では「Krull-東屋の補題」として引用されいる。)

系 1-15(東屋の補題あるいは“ **中山の補題** ”)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：有限生成左 A-加群
$\mathfrak{a}$：A の左イデアル、$\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}A$　であるとする。
このとき、$\mathfrak{a}M = M$ ならば $M = \{0\}$ となる。

(proof)

$M \neq \{0\}$ であると仮定する。$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を M の A 上の生成系のうち要素の個数が最小のもとする。

$u_n \in M = \mathfrak{a}M$ より、

$$u_n = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n \quad (a_i \in \mathfrak{a},\ 1 \leq i \leq n)$$

と書くことができる。このとき、

$$(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$$

となるが、$a_n \in \mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}A$ なので、$1 - a_n$ は左逆元をもつ (補題 1-14)。したがって、u_n は $\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$ で生成される M の部分加群に含まれる。これは、$\{u_1, \cdots, u_n\}$ の選び方に矛盾する。故に、$M = \{0\}$ でなければならない。 (Q.E.D.)

系 1-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$\Longrightarrow$ A の任意の冪零 (左、両側) イデアル $\mathfrak{n}$ に対して $\mathfrak{n} \subset \mathrm{rad}A$ となる。

(proof)

$a \in \mathfrak{n}$ とする。任意の $x \in A$ に対して、$xa \in \mathfrak{n}$ となるので、

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ (xa)^n = 0$$

となる。このとき、$1 - xa$ は $1 + xa + (xa)^2 + \cdots + (xa)^{n-1}$ を逆元に持つ。補題 1-14 より $a \in \mathrm{rad}A$ を得る。 (Q.E.D.)

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A が**左 Artin 代数** (*left Artinian algebra*) であるとは、左正則加群 ${}_AA$ が左 Artin 加群になるときをいった (定義 1-5)。

この節の目標は、次の定理の証明である。

定理 1-17

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数

$\Longrightarrow$ $\mathrm{rad}A$ は A の最大冪零両側イデアル

まず、$\mathrm{rad}A$ が両側イデアルであることを示すために、零化イデアルの概念を導入する。

定義 1-10

A ：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。

$$\mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$$

とおく。$\mathrm{ann}M$ は A の両側イデアルになる。これを M の**零化イデアル** (*annihilator*) という。

注意：左 A-加群 $M_1,\ M_2$ が同型ならば、$\mathrm{ann}M_1 = \mathrm{ann}M_2$ が成り立つ。
(proof)
$f : M_1 \longrightarrow M_2$ を左 A-加群の同型とする。このとき、任意の $a \in A$ に対して

$$\begin{aligned}
a \in \mathrm{ann}(M_1) &\iff aM_1 = 0 \\
&\iff a \cdot m_1 = 0 \quad \text{for all } m_1 \in M_1 \\
&\iff a \cdot f(m_1) = 0 \quad \text{for all } m_1 \in M_1 \qquad f\text{：左 } A\text{-加群準同型かつ単射} \\
&\iff a \cdot m_2 = 0 \quad \text{for all } m_2 \in M_2 \qquad f\text{：全射} \\
&\iff aM_2 = 0 \\
&\iff a \in \mathrm{ann}(M_2)
\end{aligned}$$

となる。 □

次の補題は、既約表現 (の完全代表系) から代数の根基が決まることを言っている。したがって、具体的に与えられた代数に対しては、既約表現の完全代表系が決定できれば、それらの零化イデアルの共通部分を計算することにより、その根基を決定することができる (演習 1-44)。

補題 1-18
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{ann}M$$

が成り立つ。ここで、$\mathcal{M}$ は既約な左 A-加群の全体を表わす。
特に、$\mathrm{rad}A$ は両側イデアルである。

(proof)
i. 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $\mathrm{rad}A \subset \mathrm{ann}M$ となること：
これを証明するには、$\mathrm{ann}M$ が A の極大左イデアルの共通部分として表せることを示せばよい。
$0 \neq x \in M$ とする。M は既約なので $M = Ax$ となる。したがって、写像 $A \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ は全射な左 A-加群準同型である。この写像の核を $\mathrm{ann}(x)$ とおくと、これは極大な左イデアルになる。

∵)
$\mathrm{ann}(x)$ が A の左イデアルになることはすぐにわかる。また、準同型定理により

$$A/\mathrm{ann}(x) \cong M \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。M の既約性から左イデアル $\mathrm{ann}(x)$ の極大性が導かれる (演習 1-36 参照)。
実際、$\mathfrak{a} \supset \mathrm{ann}(x)$ を A の左イデアルとし、$\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{ann}(x)$ を自然な射影とする。π の全射性により、$\pi(\mathfrak{a})$ は $A/\mathrm{ann}(x)$ の左イデアルとなる。
$A/\mathrm{ann}(x)$ は左 A-加群として既約加群 M に同型であるから、$A/\mathrm{ann}(x)$ の左イデアルは $\{0\}$ か自分自身に限られる。
したがって、$\pi(\mathfrak{a}) = \{0\}$ または $\pi(\mathfrak{a}) = A/\mathrm{ann}(x)$ となる。前者の場合、$\mathfrak{a} = \mathrm{ann}(x)$ となり、後者の場合、$\mathfrak{a} = A$ となる。故に、$\mathrm{ann}(x)$ は A の極大左イデアルである。 □

$$\mathrm{ann}M = \bigcap_{0 \neq x \in M} \mathrm{ann}(x)$$

なので、i. は示された。

ii. $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{ann}M \subset \mathrm{rad}A$ となること：

これを示すには、任意の極大左イデアル $\mathfrak{m}$ がある $\mathrm{ann}M \ \ (M \in \mathcal{M})$ を含むことを示せばよい。

$\mathfrak{m}$ を A の極大左イデアルとする。このとき、剰余代数 $A/\mathfrak{m}$ は自然な射影 $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ を経由して、左 A-加群になる。$\mathfrak{m}$ の極大性により $M := A/\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ が成り立つ。さらに、$\mathrm{ann}M \subset \mathfrak{m}$ となる。

$\because$)

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{ann}M &\implies aM = 0 \qquad i.e. \quad aA/\mathfrak{m} = 0 \\ &\implies aA \subset \mathfrak{m} \\ &\implies a \in \mathfrak{m} \end{aligned}$$

これで、ii. が示された。

i. と ii. から、補題は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 1-17)

$R = \mathrm{rad}A$ とおく。

$$R \supset R^2 \supset R^3 \supset \cdots\cdots$$

であり、A は左 Artin 代数であることから、$R^n = R^{n+1} = \cdots\cdots$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。$R^n = \{0\}$ となることを背理法で示す。

$R^n \neq \{0\}$ であると仮定する。

$$\mathcal{S} = \{\ \mathfrak{a} : A \text{ の左イデアル} \mid R^n\mathfrak{a} \neq 0\}$$

を考える。$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

$\mathcal{S}$ の任意の鎖が $\mathcal{S}$ 内に極小元を持つことを証明する。

$\mathfrak{C}$ を $\mathcal{S}$ 内の鎖とする。$\bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{a}$ が極小元になることを示す。そのためには、$\bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{a}$ がある $\mathfrak{a}_o \in \mathfrak{C}$ と一致することを示せばよい。

$\mathfrak{C}$ が有限集合のときは示すべきことは明らかである。$\mathfrak{C}$ が無限集合の場合を考える。$\mathfrak{C}$ が最小元を持つことを証明する。これを示すのに、ここでまた、背理法を用いる。$\mathfrak{C}$ が最小元を持たないと仮定する。すると、勝手に 1 つ選んだ $\mathfrak{a}_1 \in \mathfrak{C}$ は最小元ではないから、$\mathfrak{a}_1 \supsetneqq \mathfrak{a}_2$ となる $\mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{C}$ が存在する。仮定により、$\mathfrak{a}_2$ も最小元ではないから、$\mathfrak{a}_2 \supsetneqq \mathfrak{a}_3$ となる $\mathfrak{a}_3 \in \mathfrak{C}$ が存在する。以下、これを続けると、$\mathfrak{C}$ の元の無限列

$$\mathfrak{a}_1 \supsetneqq \mathfrak{a}_2 \supsetneqq \mathfrak{a}_3 \supsetneqq \cdots\cdots$$

が得られる。しかし、A は左 Artin 代数であるので、このようなことは起こり得ない。よって、$\mathfrak{C}$ には最小元が存在する。これを $\mathfrak{a}_o$ とおけば、明らかに $\displaystyle\bigcap_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_o$ を満たしている。

これで、$\mathcal{S}$ の任意の鎖が $\mathcal{S}$ 内に極小元を持つことが示された。Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ には極小元が存在する。これを $\mathfrak{a}$ とおく。

$$R\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}\ \ \text{かつ}\ \ R^n(R\mathfrak{a})=R^{n+1}\mathfrak{a}=R^n\mathfrak{a}\neq\{0\}$$

であるから、$\mathfrak{a}$ の極小性により、$R\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ でなければならない。

さらに、$\mathfrak{a}$ は A 上有限生成である。

$\because$)

$R^n\mathfrak{a}\neq 0$ より、$R^nu\neq 0$ となる $u\in\mathfrak{a}$ が存在する。

$Au\subset\mathfrak{a}$ であって、$R^nAu\neq 0$ であるから、$\mathfrak{a}$ の極小性により、$\mathfrak{a}=Au$ でなければならない。

故に、$\mathfrak{a}$ は 1 個の元で生成される。 □

したがって、系 1-15 により、$\mathfrak{a}=\{0\}$ を得る。これは、$\mathfrak{a}\in\mathcal{S}$ に反する。故に、$R^n=\{0\}$ であることがわかった。よって、$R=\mathrm{rad}A$ は冪零な両側イデアルである (両側イデアルであることは、補題 1-18 を参照)。

系 1-16 より $R=\mathrm{rad}A$ は冪零な両側イデアルのうち最大である。 (Q.E.D.)

演習 1-43

$\boldsymbol{k}$ を体とする。全行列代数 $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ およびその部分代数 $A:=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{k}\right\}$ の根基を求めよ。

解；

$\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ の両側イデアルは $\{0\}$ と $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ のみである。

$\mathrm{rad}(\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}))$ は冪零な両側イデアルである (定理 1-17) から、

$$\mathrm{rad}(\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}))=\{0\}$$

を得る。次に、A の根基を調べる。$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix}\in A$ について、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix}\in\mathrm{rad}A\\
\iff&\ \text{任意の}\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\0&\gamma'\end{pmatrix}\in A\ \text{に対して}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\0&\gamma'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{pmatrix}\ \text{は可逆}\\
\iff&\ \text{任意の}\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\0&\gamma'\end{pmatrix}\in A\ \text{に対して}\ \begin{pmatrix}1-\alpha\alpha'&-(\alpha'\beta+\beta'\gamma)\\0&1-\gamma\gamma'\end{pmatrix}\ \text{は可逆}\\
\iff&\ \text{任意の}\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\0&\gamma'\end{pmatrix}\in A\ \text{に対して}\ (1-\alpha\alpha')(1-\gamma\gamma')\neq 0\\
\iff&\ \alpha=\gamma=0
\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\mathrm{rad}A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-44

G：位数 m の巡回群

k：次の①②を満たす体　とする。

$$\begin{cases} \text{① } 1 \text{ の原始 } m \text{ 乗根を含む} \\ \text{② 標数は } 0\text{、または、標数は } p > 0 \text{ であって } m \text{ は } p \text{ で割り切れない} \end{cases}$$

このとき

(1) $\boldsymbol{k}[G]$ の既約表現を求めよ。

(2) $\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = 0$ となることを示せ。

解；

(1) $\rho : \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ を既約表現とする。演習 1-41 より、$\dim V = 1$ であるから、代数として $\mathrm{End}(V) \cong \boldsymbol{k}$ となる。故に、ρ は $\rho : \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ という代数準同型と考えてよい。このとき、G の生成元 g に対して

$$\rho(g)^m = \rho(g^m) = \rho(1) = 1$$

となるから、$\rho(g)$ は 1 の m 乗根であることがわかる。

したがって、$\omega \in \boldsymbol{k}$ を 1 の原始 m 乗根とすれば、

$$\rho(g) = \omega^\alpha \quad \text{for some } \alpha \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$$

にように表わされる。ρ は代数準同型なので、

$$\rho(g^i) = \rho(g)^i = \omega^{\alpha i} \qquad (i \in \{0, 1, \cdots, m-1\})$$

を満たす。

逆に、任意の $\alpha \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ に対して

$$\rho_\alpha(g^i) = \omega^{\alpha i} \qquad (i \in \{0, 1, \cdots, m-1\})$$

によって定義される $\boldsymbol{k}$-線形写像 $\rho_\alpha : \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ は代数準同型になるから、

$$\{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{m-1}\}$$

は $\boldsymbol{k}[G]$ の既約表現全体になることがわかる。

(2) $\boldsymbol{k}$ を ρ_α によって左 $\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G])$-加群とみなしたものを M_α とおく。このとき、

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = \bigcap_{\alpha=0}^{m-1} \mathrm{ann}(M_\alpha)$$

となる。ここで、

$$\mathrm{ann}(M_\alpha) = \{ \sum_{i=0}^{m-1} c_i g^i \mid c_i \in \boldsymbol{k}\ (0 \le i \le m-1),\ \sum_{i=0}^{m-1} c_i \omega^{\alpha i} = 0 \}$$

であるから、

$$\sum_{i=0}^{m-1} c_i g^i \in \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G])$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \cdots & (\omega^{m-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{m-1} & (\omega^2)^{m-1} & \cdots & (\omega^{m-1})^{m-1} \end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ X}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (*)$$

$\det X$ は Vandermonde 型の行列式になるから、

$$\det X = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{0 \le j < k \le m-1} (\omega^j - \omega^k) \neq 0$$

となる。故に、$(*)$ は自明な解 $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ しか持たない。故に、

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = 0$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

注意：実は、条件①がなくても $\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = 0$ となることが、後述の演習 1-70 を用いるとわかる。さらに、第 2 章では任意の有限群 G について $\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = 0$ となることが示される (例題 2-3 Maschke の定理を参照)。

演習 1-45

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

J を A の両側イデアルで、$J \neq A$ を満たすものとする。このとき、

$$\mathrm{rad}(A/J) = \Big(\bigcap_{\substack{I\ :\ A \text{ の極大} \\ \text{左イデアルで} \\ J \subset I \text{ となるもの}}} I\Big)/J$$

が成り立つことを示せ。

解；

$$A/J \text{ の左イデアル} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A \text{ の左イデアルで、} J \text{ を含むもの}$$

$$A/J \text{ の極大左イデアル} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} A \text{ の極大左イデアルで、} J \text{ を含むもの}$$

が成り立つ (演習 1-34 参照)。

$\mathcal{I} := \{ I \mid I$ は A の極大左イデアルで、$J \subset I$ となるもの $\}$ とおく。

このとき、

$$\Big(\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I\Big)/J \subset \bigcap_{I \in \mathcal{I}} (I/J) = \mathrm{rad}(A/J)$$

となる。逆に、$\xi \in \mathrm{rad}(A/J)$ とする。$\xi = x + J$ $(x \in A)$ とおく。

$\xi \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} (I/J)$ より、任意の $I \in \mathcal{I}$ に対して、$\xi = x_I + J$ となる $x_I \in I$ が存在する。

$$\therefore\ x = x_I + J \qquad \text{for all } I \in \mathcal{I}$$

$$\therefore\ x \in I \qquad \text{for all } I \in \mathcal{I}$$

$$\therefore\ x \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$$

$$\therefore\ \xi = x + J \in (\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I)/J$$

故に、

$$\mathrm{rad}(A/J) = (\bigcap_{\substack{I\ :\ A \text{ の極大} \\ \text{左イデアルで} \\ J \subset I \text{ となるもの}}} I)/J$$

が成り立つ。 (Q.E.D.)

演習 1-46

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

J：A の両側イデアル、$J \neq A$ とする。このとき、次を示せ。

$$\mathrm{rad}(A/J) = 0 \implies \mathrm{rad}A \subset J$$

解；

$\pi : A \longrightarrow A/J$ を自然な射影とする。

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{I\ :\ A \text{ の極大左イデアル}} I \quad \subset \quad \bigcap_{\substack{I\ :\ A \text{ の極大左イデアル} \\ \text{で } J \subset I \text{ となるもの}}} I$$

であるから、演習 1-45 より、$\pi(\mathrm{rad}A) \subset \mathrm{rad}(A/J)$ となる。

したがって、$\mathrm{rad}(A/J) = 0$ ならば、$\pi(\mathrm{rad}A) = 0$、すなわち、$\mathrm{rad}A \subset J$ を得る。(Q.E.D.)

演習 1-47

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

I：A の左イデアル とする。このとき、次の 4 つは同値なことを示せ。

① $I \subset \mathrm{rad}A$ となる。

② ${}^\forall a \in I$ に対して、$1 - a$ は A において左逆元をもつ。

③ ${}^\forall a \in I$ に対して、$1 - a$ は A において逆元をもつ。

A の左イデアル J が $J + I = A$ を満たすならば、$J = A$ である。

解；

① $\Longrightarrow$ ②：補題 1-14 から直ちに得られる。

② $\Longrightarrow$ ③：$a \in I$ とすると、仮定により、$1 - a$ は A において左逆元をもつので、

$${}^\exists b \in A \ \text{ s.t. } \ b(1-a) = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。このとき、

$$b = ba + 1$$

と書けるが、$-ba \in I$ なので、$1-(-ba)$ も A において左逆元をもつ。したがって、

$$^{\exists}c \in A \quad \text{s.t.} \quad cb = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となる。よって、$(*)$ と $(**)$ から

$$c = c \cdot 1 = cb(1-a) = 1-a$$

を得る。

$$\therefore \ 1 = cb = (1-a)b$$

を得る。故に、b は $1-a$ の右逆元でもあることが示された。

③ $\Longrightarrow$ ④：A の左イデアル J が $J+I=A$ を満たしているとする。このとき、

$$1 = a + b \quad (a \in I, \ b \in J)$$

と書くことができる。$b = 1-a$ は可逆であるから、$J = A$ を得る。

④ $\Longrightarrow$ ①：$\mathrm{rad}A$ は A のすべての極大左イデアルの共通部分として定義されているから、$I \subset \mathrm{rad}A$ を証明するためには、I が A のすべての極大左イデアルに含まれることを示せばよい。

J を A の勝手な極大左イデアルとする。

$I \not\subset J$ であると仮定すると、$J \subsetneqq I + J$ となる。J の極大性により $I+J=A$ を得る。

ここで、仮定を用いて $J=A$ がわかる。しかしながら、これは J を A の極大左イデアルにとったことに矛盾する。よって、$I \subset J$ でなければならない。 (Q.E.D.)

演習 1-48

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に対して、

$$\mathrm{rad}A = (A \text{ のすべての極大右イデアルの共通部分})$$

が成り立つことを示せ。

解；

$$\mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{rad}A$$

となることを示せばよい。次の❶❷が成り立つ。

❶ $\mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}})$ は A^{op} の両側イデアルである (補題 1-18) から、A の両側イデアルでもある。したがって、$\mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}})$ は A の左イデアルである。

❷ 演習 1-47 により、任意の $x \in \mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}})$ に対して $1-x$ は A^{op} において逆元をもつ。したがって、それは A においても逆元をもつ。

❶❷に再び演習 1-47 を適用して、$\mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}}) \subset \mathrm{rad}A$ を得る。

全く同様にして、$\mathrm{rad}A \subset \mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}})$ となることが示されるから、$\mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{rad}A$ が得られた。 (Q.E.D.)

演習 1-49

次のような生成元と関係式で記述された体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A について以下の問いに答えよ。

生成元：$g, \ x$

関係式：$g^2 = 1, \ x^2 = 0, \ gx = -xg$

(1) $\dim A = 4$ を示せ。
(2) A の根基 $\mathrm{rad}A$ を求めよ。

解；

(1) V を $\{g, x\}$ を $\boldsymbol{k}$ 上の基底にもつベクトル空間とする。このとき、与えられた代数 A は、V のテンソル代数 $\mathcal{T}(V)$ を $\{g^2-1,\ x^2,\ gx+xg\}$ によって生成されるイデアル $\mathcal{I}$ で割って得られる商代数になる：$A=\mathcal{T}(V)/\mathcal{I}$ 。$\dim A \leq 4$ であることは、その関係式から直ちにわかる。$\dim A = 4$ であることを示すために、A の「モデル」を構成する。

$G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を加法群とみて、$H=\langle g\rangle$ を位数 2 の (乗法) 群とする。直積集合 $G\times H$ の元を $\boldsymbol{k}$ 上の基底とするようなベクトル空間 $T:=\boldsymbol{k}[G\times H]$ を考える。T は次のような積に関して (結合的な) 代数になる：

$$(a, g^i)(b, g^j) = (-1)^{bi}(a+b, g^{i+j}) \qquad (a, b\in G,\ i, j\in\mathbb{Z})$$

単位元は $(0, g^0)$ である。さて、写像 $f:\mathcal{T}(V)\longrightarrow T$ を

$$f(g)=(0,g),\quad f(x)=(1,g^0)$$

となるような代数準同型とする。

$$f(x^ig^j)=f(x)^if(g)^j=(1,g^0)^i(0,g)^j=(i,g^0)(0,g^j)=(i,g^j)$$

より、f は全射である。また、

$$\begin{aligned} f(g^2)&=(0,g^2)=(0,g^0)\\ f(x^2)&=(2,g^0)=(0,g^0)\\ f(gx+xg)&=(0,g)(1,g^0)+(1,g^0)(0,g)=(0,g^0)\end{aligned}$$

となるから、f は全射な代数準同型 $\bar{f}:A=\mathcal{T}(V)/\mathcal{I}\longrightarrow T$ を誘導する。

よって、

$$4=\dim T=\dim\mathrm{Im}\bar{f}\leq\dim A$$

を得る。したがって、$\dim A=4$ であることが証明された。また、$\bar{f}$ が代数の同型であることも証明された。

(2) $I=\boldsymbol{k}x+\boldsymbol{k}gx$ は A の冪零両側イデアルである。よって、$I\subset\mathrm{rad}A$ である。

・$\boldsymbol{k}$ の標数が 2 でないとき、$\mathrm{rad}A=I$ を示す。

$e_0=\frac{1+g}{2},\ e_1=\frac{1-g}{2}$ とおくと、任意の $a\in\mathrm{rad}A$ は

$$a=\alpha e_0+\beta e_1+\gamma e_0x+\delta e_1x \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\boldsymbol{k})$$

のように表わすことができる。$e_0^2=e_0,\ e_1^2=e_1,\ e_0e_1=e_1e_0=0,\ xe_0=e_1x,\ xe_1=e_0x$ が成り立つから、

$$a^n=\alpha^ne_0+\beta^ne_1+(e_0x\ と\ e_1x\ の一次結合の項) \qquad (n\geq 1)$$

となる。$\mathrm{rad}A$ は冪零なので、$a^n=0$ となる $n\in\mathbb{N}$ が存在する。この n に対して、$\alpha^n=\beta^n=0$ となる。故に、$\alpha=\beta=0$ となり、$a\in I$ となることが証明された。

・$\boldsymbol{k}$ の標数が 2 のとき、$\mathrm{rad}A=I+\boldsymbol{k}(1-g)$ を示す。

$\boldsymbol{k}$ の標数が 2 なので、$(1-g)^2 = 2(1-g) = 0$ および $gx = xg$ が成り立つ。よって、$J = I + \boldsymbol{k}(1-g)$ とおくと、これは A の両側イデアルであり、$J^2 = 0$ を満たす。よって、$J \subset \mathrm{rad}A$ であるが、$\dim J = 3$ であって $\dim(\mathrm{rad}A) \leq 3$ ($\because$ 根基は単位元を含まない) より、$I + \boldsymbol{k}(1-g) = J = \mathrm{rad}A$ を得る。 (Q.E.D.)

§6. Hochschild コホモロジーと代数の拡大

代数 A とその両側加群 M が与えられると、Hochschild コホモロジーと呼ばれるコホモロジー群が定義される。ここでは、その 2 次元コホモロジーが代数 A の拡大 (の同型類) と 1 対 1 に対応していることを示す。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：両側 A-加群　とする。
0 以上の整数 n に対して、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 $C^n(A,M)$ を次のように定義する：

$$C^0(A,M) = M,$$
$$C^n(A,M) = \{\, \text{双一次写像 } f : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{ 個}} \longrightarrow M \text{ の全体} \,\} \quad (n \geq 1)$$

$n \geq 0$ に対して、線形写像 $\delta^n : C^n(A,M) \longrightarrow C^{n+1}(A,M)$ を

$$\begin{aligned}(\delta^n f)&(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \\ &= a_1 \cdot f(a_2, \cdots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{n+1}) \\ &\qquad + (-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_n) \cdot a_{n+1},\end{aligned}$$

$f \in C^{n+1}(A,M),\ a_1, \cdots, a_n, a_{n+1} \in A$ によって定義する。

例えば、
$n=0$ のとき：$(\delta^0 m)(a) = a \cdot m - m \cdot a, \quad m \in M,\ a \in A$
$n=1$ のとき：$(\delta^1 f)(a,b) = a \cdot f(b) - f(ab) + f(a) \cdot b, \quad f \in C^1(A,M),\ a,b \in A$
$n=2$ のとき：$(\delta^2 f)(a,b,c) = a \cdot f(b,c) - f(ab,c) + f(a,bc) - f(a,b) \cdot c, \quad f \in C^2(A,M)$, $a,b,c \in A$ となる。

補題 1-19
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：両側 A-加群　とする。
このとき、上のように定義されるベクトル空間と線形写像の組の列 $\{(C^n(A,M), \delta^n)\}_{n \geq 0}$ は cochain complex である。よって、そのコホモロジー群

$$H^n(A,M) := \mathrm{Ker}\delta^n / \mathrm{Im}\delta^{n-1} \qquad (n \geq 0)$$

が定義される。但し、$\mathrm{Im}\delta^{-1} = 0$ とみなす。$H^n(A,M)$ を代数 A の M 上の n 次元 **Hochschild コホモロジー群**という。

注意： $H^n(A,M)$ をコホモロジー群と呼ぶが、実際には、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間である。

(proof of Lemma 1-19)

1°. $n=0$ の場合：$m \in M,\ a, b \in A$ に対して、

$$
\begin{aligned}
((\delta^1 \circ \delta^0)(m))(a,b) &= a(\delta^0 m)(b) - (\delta^0 m)(ab) + (\delta^0 m)(a)b \\
&= a(bm - mb) - ((ab)m - m(ab)) + (am - ma)b \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。故に、$\delta^1 \circ \delta^0 = 0$ を得る。

2°. $n=1$ の場合：$f \in C^1(A,M),\ a,b,c \in A$ に対して、

$$
\begin{aligned}
((\delta^2 \circ \delta^1)(f))(a,b,c) &= a(\delta^1 f)(b,c) - (\delta^1 f)(ab,c) + (\delta^1 f)(a,bc) - (\delta^1 f)(a,b)c \\
&= a(bf(c) - f(bc) + f(b)c) - ((ab)f(c) - f((ab)c) + f(ab)c) \\
&+ (af(bc) - f(a(bc)) + f(a)(bc)) - (af(b) - f(ab) + f(a)b)c \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。故に、$\delta^2 \circ \delta^1 = 0$ を得る。

3°. $n=2$ の場合：$f \in C^2(A,M),\ a,b,c,d \in A$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&((\delta^3 \circ \delta^2)(f))(a,b,c,d) \\
&= a(\delta^2 f)(b,c,d) - (\delta^2 f)(ab,c,d) + (\delta^2 f)(a,bc,d) - (\delta^2 f)(a,b,cd) + (\delta^2 f)(a,b,c)d \\
&= a(bf(c,d) - f(bc,d) + f(b,cd) - f(b,c)d) \\
&- ((ab)f(c,d) - f(abc,d) + f(ab,cd) - f(a,bc)d) \\
&+ (af(bc,d) - f(abc,d) + f(a,bcd) - f(a,b)cd) \\
&- (af(b,c) - f(ab,c) + f(a,bc) - f(a,b)c)d \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。故に、$\delta^3 \circ \delta^2 = 0$ を得る。

4°. $n=3$ の場合：$f \in C^3(A,M),\ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 \in A$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&((\delta^4 \circ \delta^3)(f))(a,b,c,d) \\
&= a_1(\delta^3 f)(a_2,a_3,a_4,a_5) - (\delta^3 f)(a_1a_2,a_3,a_4,a_5) + (\delta^3 f)(a_1,a_2a_3,a_4,a_5) \\
&\quad - (\delta^3 f)(a_1,a_2,a_3a_4,a_5) + (\delta^3 f)(a_1,a_2,a_3,a_4a_5) - (\delta^3 f)(a_1,a_2,a_3,a_4)a_5 \\
&= a_1(a_2 f(a_3,a_4,a_5) - f(a_2a_3,a_4,a_5) + f(a_2,a_3a_4,a_5) - f(a_2,a_3,a_4a_5) + f(a_2,a_3,a_4)a_5) \\
&- (a_1a_2 f(a_3,a_4,a_5) - f(a_1a_2a_3,a_4,a_5) + f(a_1a_2,a_3a_4,a_5) - f(a_1a_2,a_3,a_4a_5) + f(a_1a_2,a_3,a_4)a_5) \\
&+ (a_1 f(a_2a_3,a_4,a_5) - f(a_1a_2a_3,a_4,a_5) + f(a_1,a_2a_3a_4,a_5) - f(a_1,a_2a_3,a_4a_5) + f(a_1,a_2a_3,a_4)a_5) \\
&- (a_1 f(a_2,a_3a_4,a_5) - f(a_1a_2,a_3a_4,a_5) + f(a_1,a_2a_3a_4,a_5) - f(a_1,a_2,a_3a_4a_5) + f(a_1,a_2,a_3a_4)a_5) \\
&+ (a_1 f(a_2,a_3,a_4a_5) - f(a_1a_2,a_3,a_4a_5) + f(a_1,a_2a_3,a_4a_5) - f(a_1,a_2,a_3a_4a_5) + f(a_1,a_2,a_3)a_4a_5) \\
&- (a_1 f(a_2,a_3,a_4) - f(a_1a_2,a_3,a_4) + f(a_1,a_2a_3,a_4) - f(a_1,a_2,a_3a_4) + f(a_1,a_2,a_3)a_4)a_5 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。故に、$\delta^4 \circ \delta^3 = 0$ を得る。

5°. $n \geq 4$ の場合：$f \in C^n(A, M),\ a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \in A$ とする。
$((\delta^{n+1} \circ \delta^n)(f))(a_1, a_2, \cdots, a_{n+2})$ は次の①②③の和である。

① $= a_1(\delta^n f)(a_2, \cdots, a_{n+1}, a_{n+2})$

② $= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (\delta^n f)(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})$

③ $= (-1)^{n+2} (\delta^n f)(a_1, \cdots, a_{n+1}) a_{n+2}$

②を計算する。②は次のの和である。

$$= -(\delta^n f)(a_1 a_2, a_3, \cdots, a_{n+2})$$

$$= \underset{\text{Ⓒ}}{\underline{-a_1 a_2 f(a_3, \cdots, a_{n+2})}} + f(a_1 a_2 a_3, a_4, \cdots, a_{n+2})$$

$$\underset{\text{Ⓔ}}{\underline{-\sum_{i=3}^{n+1} (-1)^{i-1} f(a_1 a_2, a_3, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})}} \underset{\text{Ⓑ}}{\underline{-(-1)^{n+1} f(a_1 a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}) a_{n+2}}}$$

$$= (\delta^n f)(a_1, a_2 a_3, a_4, \cdots, a_{n+2})$$

$$= \underset{\text{Ⓐ}}{\underline{a_1 f(a_2 a_3, a_4, \cdots, a_{n+2})}} - f(a_1 a_2 a_3, a_4, \cdots, a_{n+2}) + f(a_1, a_2 a_3 a_4, a_5, \cdots, a_{n+2})$$

$$+ \underset{\text{Ⓔ}}{\underline{\sum_{i=4}^{n+1} (-1)^{i-1} f(a_1, a_2 a_3, a_4, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})}} + \underset{\text{Ⓑ}}{\underline{(-1)^{n+1} f(a_1, a_2 a_3, a_4, \cdots, a_{n+1}) a_{n+2}}}$$

$$= \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^i (\delta^n f)(a_1, a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})$$

$$= \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^i \{ a_1 f(a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2}) + \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j f(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})$$

$$+ (-1)^{i-1} f(a_1, \cdots, a_{i-2}, a_{i-1} a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{n+2}) + (-1)^i f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i a_{i+1} a_{i+2}, a_{i+3}, \cdots, a_{n+2})$$

$$+ \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{j-1} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+2}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1}) a_{n+2} \}$$

$$= \underset{\text{Ⓐ}}{\underline{\sum_{i=3}^{n-1} (-1)^i a_1 f(a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})}} + \underset{\text{Ⓓ}}{\underline{\sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{i+j} f(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})}}$$

$$- \sum_{i=3}^{n-1} f(a_1, \cdots, a_{i-2}, a_{i-1} a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{n+2}) + \sum_{i=3}^{n-1} f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i a_{i+1} a_{i+2}, a_{i+3}, \cdots, a_{n+2})$$

$$+ \underset{\text{Ⓔ}}{\underline{\sum_{i=3}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j-1} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+2})}}$$

$$+ \underset{\text{Ⓑ}}{\underline{(-1)^{n+1} \sum_{i=3}^{n-1} (-1)^i f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1}) a_{n+2}}}$$

$$= (-1)^n (\delta^n f)(a_1, \cdots, a_n a_{n+1}, a_{n+2})$$

$$= \underset{\text{Ⓐ}}{\underline{(-1)^n a_1 f(a_2, \cdots, a_n a_{n+1}, a_{n+2})}} + \underset{\text{Ⓓ}}{\underline{(-1)^n \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j f(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_n a_{n+1}, a_{n+2})}}$$

$$+ (-1)^n (-1)^{n-1} f(a_1, \cdots, a_{n-1} a_n a_{n+1}, a_{n+2}) + (-1)^n (-1)^n f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n a_{n+1} a_{n+2})$$

$$+ \underset{\text{Ⓑ}}{\underline{(-1)^n (-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_n a_{n+1}) a_{n+2}}}$$

$$= (-1)^{n+1}(\delta^n f)(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}a_{n+2})$$

$$= \underline{(-1)^{n+1}a_1 f(a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}a_{n+2})}_{\text{Ⓐ}} + \underline{(-1)^{n+1}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j f(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+1}a_{n+2})}_{\text{Ⓓ}}$$

$$+ (-1)^{n+1}(-1)^n f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n a_{n+1}a_{n+2}) + \underline{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_n)a_{n+1}a_{n+2}}_{\text{Ⓒ}}$$

これより、

$$\text{②} = + + + + = \text{Ⓐ} + \text{Ⓑ} + \text{Ⓒ} + \text{Ⓓ} + \text{Ⓔ}$$

を得る。ここで、

$$\text{Ⓐ} = \sum_{i=2}^{n+1} a_1 f(a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})$$

$$\text{Ⓑ} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1+i} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1})a_{n+2}$$

$$\text{Ⓒ} = -a_1 a_2 f(a_3, \cdots, a_{n+2}) + f(a_1, \cdots, a_n)a_{n+1}a_{n+2}$$

$$\text{Ⓓ} = \sum_{i=3}^{n+1}\sum_{j=1}^{i-2}(-1)^{i+j} f(a_1, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2})$$

$$\text{Ⓔ} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+2}^{n+1}(-1)^{i+j-1} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+2})$$

$$= \sum_{j=3}^{n+1}\sum_{i=1}^{i-2}(-1)^{i+j-1} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+2})$$

となるから、

$$\text{Ⓓ} + \text{Ⓔ} = 0$$

となる。故に、

$$((\delta^{n+1} \circ \delta^n)(f))(a_1, a_2, \cdots, a_{n+2})$$

$$= \text{①} + \text{②} + \text{③}$$

$$= \text{①} + \text{Ⓐ} + \text{Ⓑ} + \text{Ⓒ} + \text{Ⓓ} + \text{Ⓔ} + \text{③}$$

$$= \text{①} + \text{Ⓐ} + \text{Ⓑ} + \text{Ⓒ} + \text{③}$$

$$= a_1 a_2 f(a_3, \cdots, a_{n+2})$$

$$+ a_1 \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1} f(a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2}) + (-1)^{n+1} a_1 f(a_2, \cdots, a_{n+1})a_{n+2}$$

$$+ \sum_{i=2}^{n+1} a_1 f(a_2, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+2}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1+i} f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1})a_{n+2}$$

$$- a_1 a_2 f(a_3, \cdots, a_{n+2}) + f(a_1, \cdots, a_n)a_{n+1}a_{n+2}$$

$$+ (-1)^{n+2} a_1 f(a_2, \cdots, a_{n+1})a_{n+2} + (-1)^{n+2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1})a_{n+2}$$

$$+ (-1)^{n+2}(-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_n)a_{n+1}a_{n+2}$$

$$= 0$$

これで、$n \geq 4$ の場合にも $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ となることが証明された。 (Q.E.D.)

定義 1-11

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：両側 A-加群
B：$\boldsymbol{k}$ 上の代数
$\rho : B \longrightarrow A$：全射な代数準同型
$i : \mathrm{Ker}\rho \longrightarrow M$ ：線形同型写像　とする。
i が ρ-同変写像、*i.e.*

$$i(bxb') = \rho(b)i(x)\rho(b') \quad \text{for } {}^\forall b, b' \in B,\ {}^\forall x \in \mathrm{Ker}\rho$$

となるとき、組 (B, ρ, i) を M による A の**拡大**と呼ぶ。

注意：$\mathrm{Ker}\rho$ は B の両側イデアルなので、$\mathrm{Ker}\rho$ は両側 B-加群と思える。

補題 1-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間
B：$\boldsymbol{k}$ 上の代数
$\rho : B \longrightarrow A$：全射な代数準同型
$i : \mathrm{Ker}\rho \longrightarrow M$ ：線形同型写像　とする。
このとき、
　M に両側 A-加群の構造が入って、組 (B, ρ, i) が M による A の拡大
　　$\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Ker}\rho)^2 = \{0\}$
となる。

(proof)
i. 必要性：
　$x, y \in \mathrm{Ker}\rho$ とする。このとき、

$$i(xy) = i(xy1) = \rho(x)i(y)\rho(1) = 0$$
$$\therefore\ xy = 0$$
$$\therefore\ (\mathrm{Ker}\rho)^2 = \{0\}$$

ii. 十分性：
　M への A の左作用、右作用を

$$a \cdot m = i(b \cdot i^{-1}(m)) \qquad (a, \in A,\ b \in \rho^{-1}(a),\ m \in M)$$
$$m \cdot a = i(i^{-1}(m) \cdot b) \qquad (a, \in A,\ b \in \rho^{-1}(a),\ m \in M)$$

により定義する。この作用は矛盾なく定義されている。
　$\because$)
　　ρ の全射性により、$\rho^{-1}(a) \neq \emptyset$ に注意する。
　　$b, b' \in \rho^{-1}(a)$ に対して、$b - b' \in \mathrm{Ker}\rho$ となる。
　　故に、$(b - b') \cdot i^{-1}(m)\ \in (\mathrm{Ker}\rho)^2 = \{0\}$,
　　　$i^{-1}(m) \cdot (b - b')\ \in (\mathrm{Ker}\rho)^2 = \{0\}$

よって、

$$\begin{cases} b \cdot i^{-1}(m) = b' \cdot i^{-1}(m), \\ i^{-1}(m) \cdot b = i^{-1}(m) \cdot b' \end{cases}$$

が成り立つ。故に、$a \cdot m,\ m \cdot a$ は well-defined である。□

この２つの作用は可換である。

∵)

$a, a' \in A,\ m \in M$ とする。

$$\begin{aligned} (a \cdot m) \cdot a' &= i(b \cdot i^{-1}(m)) \cdot a' \\ &= i((b \cdot i^{-1}(m)) \cdot b') \qquad b \in \rho^{-1}(a),\ b' \in \rho^{-1}(a') \text{ とした。} \\ &= i(b \cdot (i^{-1}(m) \cdot b')) \\ &= a \cdot i(i^{-1}(m) \cdot b') \\ &= a \cdot (m \cdot a') \end{aligned}$$

以上より、M は両側 A-加群になる。

さらに、その作用の定義から、$b, b' \in B,,\ x \in \mathrm{Ker}\rho$ に対して、

$$\rho(b)i(x)\rho(b') = i(bxb')$$

が成り立つ。故に、(B, ρ, i) は M による A の拡大である。 (Q.E.D.)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：両側 A-加群　とする。

$(B, \rho, i),\ (B', \rho', i')$ を M による A の拡大とする。

(B, ρ, i) と (B', ρ', i') が**同値**

$\iff {}^{\exists}\ \varphi : B \longrightarrow B'$ ：代数の同型 s.t. $\rho = \rho' \circ \varphi,\quad i = i' \circ \varphi|_{\mathrm{Ker}\rho}$

このとき、$(B, \rho, i) \sim (B', \rho', i')$ と書く。

注意： $\rho = \rho' \circ \varphi$ より、$\varphi(\mathrm{Ker}\rho) = \mathrm{Ker}\rho'$ が成り立つ。

２次元 Hochschild コホモロジー $H^2(A, M)$ は代数 A の M による 拡大の同型類がいくつあるか、という量を表わしている。

定理 1-21

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：両側 A-加群　とする。このとき、

$$H^2(A, M) \cong \{M \text{ による } A \text{ の拡大}\}/\sim \qquad \text{as sets}$$

が成り立つ。

(proof)

$f \in \mathrm{Ker}\delta^2$ とする。このとき、M による A の拡大を以下のようにつくる。

まず、ベクトル空間としての直和 $A \oplus M$ を考え、これに次のような積を入れる。

$$(a,u)\cdot(b,v) = (ab, av+ub+f(a,b)) \qquad (a,b \in A,\ u,v \in M)$$

$A \oplus M$ はこの積に関して $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。この代数を B_f とおく。

$\because$)

$m : B_f \times B_f \longrightarrow B_f$ を上で定義した積とする。

i. m が双一次写像であること：これは、すぐに確かめられるので、証明を略す。

ii. m が結合律を満たすこと：

$$\begin{aligned}((a,u)\cdot(b,v))\cdot(c,w) &= (ab,\ av+ub+f(a,b))\cdot(c,w)\\ &= ((ab)c,\ (ab)w+(av+ub+f(a,b))c+f(ab,c))\\ &= (a(bc),\ a(bw+vc)+ubc+f(a,b)c+f(ab,c))\\ &= (a(bc),\ a(bw+vc)+ubc+af(b,c)+f(a,bc)) \quad f \in \mathrm{Ker}\delta^2\\ &= (a(bc),\ a(bw+vc+f(b,c))+ubc+f(a,bc))\\ &= (a,u)\cdot(bc,\ bw+vc+f(b,c))\\ &= (a,u)\cdot((b,v)\cdot(c,w))\end{aligned}$$

iii. 単位元の存在：

$(1,-f(1,1))$ が単位元となる。これを示すために、次のことに注意する。

$f \in \mathrm{Ker}\delta^2$ より $a,b,c \in A$ に対して

$$af(b,c) - f(ab,c) + f(a,bc) - f(a,b)c = 0.$$

この式において、

$a=b=1$ として、$f(1,c)f(1,1)c=0$、

$b=c=1$ として、$af(1,1)-f(a,1)=0$ を得る。

これを用いて、任意の $(a,v) \in B_f$ に対して

$$(1,\ -f(1,1))(a,v) = (a,\ v-f(1,1)a+f(1,a)) = (a,v),$$

$$(a,v)(1,-f(1,1)) = (a,\ -af(1,1)+v+f(a,1)) = (a,v)$$

であることがわかる。よって、$(1,-f(1,1))$ は B_f の単位元である。 $\square$

第一成分への射影 $\rho : B_f \longrightarrow A$ は全射な代数準同型である。また、第二成分への射影 $i : \mathrm{Ker}\rho \longrightarrow M$ は線形同型写像である ($\because\ \mathrm{Ker}\rho = 0 \oplus M$)。さらに、$(a,v),(b,u) \in B_f,\ (0,w) \in \mathrm{Ker}\rho$ について、

$$\rho(a,v)i(0,w)\rho(b,u) = awb,$$

$$i((a,v)(0,w)(b,u)) = i((0,aw)(b,u)) = i(0,awb) = awb$$

となる。したがって、(B_f,ρ,i) は M による A の拡大である。

次に、$f, f' \in \mathrm{Ker}\delta^2$ とし、$f-f' \in \mathrm{Im}\delta^1$ であるとする。

このとき、$(B_f,\rho,i) \sim (B_{f'},\rho',i')$ となることを示す。

$f-f' \in \mathrm{Im}\delta^1$ より、$^\exists\, g : A \longrightarrow M$: 線形写像 s.t. $f-f' = \delta^1 g$ となる。

写像 $\varphi : B_f \longrightarrow B_{f'}$ を

$$\varphi(a, v) = (a, v + g(a)) \qquad (a \in A,\ v \in M)$$

により定義する。φ は代数の同型である。

∵)

・φ が単位元を保つこと：

$\varphi(1, -f(1,1)) = (1, -f(1,1) + g(1))$ であるが、

$f(1,1) - f'(1,1) = (\delta^1 g)(1,1) = g(1)$

なので、$\varphi(1, -f(1,1)) = \varphi(1, -f'(1,1))$ が成り立つ。

・φ が積を保つこと：$(a, v),\ (b, u) \in B_f$ に対して、

$$\begin{aligned}
\varphi((a,v)(b,u) &= \varphi(ab,\ au - vb + f(a,b)) \\
&= (ab,\ au + vb + f(a,b) + g(ab)) \\
&= (ab,\ au + vb + f'(a,b) + ag(b) + g(a)b) \qquad \begin{aligned} &f(a,b) - f'(a,b) \\ &= ag(b) - g(ab) + g(a)b \end{aligned} \\
&= (ab,\ a(u + g(b)) + (v + g(a))b + f'(a,b)) \\
&= (a, v + g(a))(b, u + g(b)) \\
&= \varphi(a,v)\varphi(b,u)
\end{aligned}$$

となる。故に、φ は積を保つ。

φ が全単射であることはすぐにわかるから、φ は代数の同型を与える。 □

$$(\rho' \circ \varphi)(a, v) = \rho'(a, v + g(a)) = a = \rho(a, v) \qquad \text{for } {}^\forall a \in A,\ v \in M$$

ゆえ、$\rho' \circ \varphi = \rho$ が成り立つ。

また、$i' \circ \varphi|_{\mathrm{Ker}\rho} = i$ となる ($g(0) = 0$ であることによる)。

故に、$[f] \in H^2(A, M)$ に対し、M による A の拡大の同値類 $[(B_f, \rho, i)]$ を対応させる写像 $\Psi : H^2(A, M) \longrightarrow \{M$ による A の拡大全体$\}/\sim$ が矛盾なく定まる。

この対応が全単射であることを示す。そのために、逆対応を作る。

(B, ρ, i) を M による A の拡大とする。

$\sigma : A \longrightarrow B$ を $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_A$ を満たす線形写像とする。

(注：このような σ は存在する。実際、$B = \mathrm{Ker}\rho \oplus V$ となる B の部分空間 V をとると、

$$\begin{array}{ccccc}
A & \cong & B/\mathrm{Ker}\rho & \cong & V \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
a & \longleftrightarrow & \bar{b} & \longleftrightarrow & b\ \text{の第２成分} \\
 & (\rho(b) = a) & & &
\end{array}$$

となる。そこで、$\sigma : A \cong V \hookrightarrow B$ とおけばよい。)

このとき、$f_\sigma : A \times A \longrightarrow M$ を

$$f_\sigma(a, b) = i(\sigma(a)\sigma(b) - \sigma(ab)) \qquad (a, b \in A)$$

により定義する。f_σ は双一次写像であり、$f_\sigma \in \mathrm{Ker}\delta^2$ である。

$\because$)

まず、$\sigma(a)\sigma(b)-\sigma(ab) \in \mathrm{Ker}\rho$ に注意する。これから、f_σ の式の右辺が意味を持つ。

$\sigma,\ i$ の線形性などから、f_σ は双一次写像であることがわかる。

次に、$f_\sigma \in \mathrm{Ker}\delta^2$ であることを示す。

$$\begin{aligned}
\sigma((ab)c) &= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(ab,c)+\sigma(ab)\sigma(c)\\
&= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(ab,c)+(-(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b)+\sigma(a)\sigma(b))\sigma(c)\\
&= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(ab,c)-(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b)\sigma(c)+\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\\
\sigma(a(bc)) &= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,bc)+\sigma(a)\sigma(bc)\\
&= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,bc)+\sigma(a)(-(i^{-1}\circ f_\sigma)(b,c)+\sigma(b)\sigma(c))\\
&= -(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,bc)-\sigma(a)(i^{-1}\circ f_\sigma)(b,c)+\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)
\end{aligned}$$

よって、

$$(i^{-1}\circ f_\sigma)(ab,c)+(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b)\sigma(c)=(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,bc)+\sigma(a)(i^{-1}\circ f_\sigma)(b,c)$$

を得る。上式の 4 つの項はそれぞれ $\mathrm{Ker}\rho$ の元であるから、この両辺に i を施すと、

$$\begin{array}{ccc}
f_\sigma(ab,c)+i((i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b)\cdot\sigma(c)) & = & f_\sigma(a,bc)+i(\sigma(a)\cdot(i^{-1}\circ f_\sigma)(b,c))\\
\| \quad \leftarrow & i:\rho\text{-同変} & \rightarrow \quad \|\\
i((i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b))\cdot\rho(\sigma(c)) & & \rho(\sigma(a))\cdot i((i^{-1}\circ f_\sigma)(b,c))
\end{array}$$

$$\therefore\ f_\sigma(ab,c)+f_\sigma(a,b)c=f_\sigma(a,bc)+af_\sigma(b,c) \quad \square$$

$\sigma' : A \longrightarrow B$ を $\rho\circ\sigma'=\mathrm{id}_A$ を満たす別の線形写像とする。

このとき、$f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Im}\delta^1$ となる。

$\because$)

$$\begin{aligned}
&(i^{-1}\circ f_\sigma)(a,b)-(i^{-1}\circ f_{\sigma'})(a,b)\\
=&\sigma(a)\sigma(b)-\sigma(ab)-\sigma'(a)\sigma'(b)+\sigma'(ab)\\
=&\sigma(a)(\sigma(b)-\sigma'(b))-(\sigma(ab)-\sigma'(ab))+(\sigma(a)-\sigma'(a))\sigma'(b)\\
=&\sigma(a)(\sigma-\sigma')(b)-(\sigma-\sigma')(ab)+(\sigma-\sigma')(a)\sigma'(b)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&(f_\sigma-f_{\sigma'})(a,b)\\
=&i(\underbrace{\sigma(a)\cdot(\sigma-\sigma')(b)}_{\in\,\mathrm{Ker}\rho})-i(\underbrace{(\sigma-\sigma')(ab)}_{\in\,\mathrm{Ker}\rho})+i(\underbrace{(\sigma-\sigma')(a)\cdot\sigma'(b)}_{\in\,\mathrm{Ker}\rho})\\
=&\rho((\sigma(a))\cdot i((\sigma-\sigma')(b))-(i\circ(\sigma-\sigma'))(ab)+i(\sigma-\sigma')(a))\cdot\rho(\sigma'(b))\\
=&a\cdot(i\circ(\sigma-\sigma'))(b)-(i\circ(\sigma-\sigma'))(ab)+(i\circ(\sigma-\sigma'))(a)\cdot b\\
=&\delta^1(i\circ(\sigma-\sigma'))(a,b)
\end{aligned}$$

となる。故に、

$$f_\sigma - f_{\sigma'} = \delta^1(i\circ(\sigma-\sigma')) \in \mathrm{Im}\delta^1$$

であることが示された。 $\square$

よって、$[f_\sigma] \in H^2(A,M)$ は σ の選び方によならい。
(B,ρ,i), (B',ρ',i') を M による A の拡大とし、$(B,\rho,i) \sim (B',\rho',i')$ であるとする。
$\sigma : A \longrightarrow B$ を $\rho\circ\sigma = \mathrm{id}_A$ を満たす線形写像とし、
$\sigma' : A \longrightarrow B'$ を $\rho'\circ\sigma' = \mathrm{id}_A$ を満たす線形写像とする。
このとき、$[f_\sigma] = [f_{\sigma'}]$ となる。
$\because$)

$$\begin{aligned}
&(i'^{-1}\circ(f_\sigma - f_{\sigma'}))(a,b)\\
=&(i'^{-1}\circ i)(\sigma(a)\sigma(b)-\sigma(ab)) - (\sigma'(a)\sigma'(b)-\sigma'(ab))\\
=&\varphi(\sigma(a)\sigma(b)-\sigma(ab)) - \sigma'(a)\sigma'(b)+\sigma'(ab)\\
=&(\varphi\circ\sigma)(a)(\varphi\circ\sigma)(b) - \sigma'(a)\sigma'(b)+\sigma'(ab)-(\varphi\circ\sigma)(ab)\\
=&(\varphi\circ\sigma)(a)(\varphi\circ\sigma-\sigma')(b) + (\varphi\circ\sigma-\sigma')(a)\sigma'(b)-(\varphi\circ\sigma-\sigma')(ab)
\end{aligned}$$

となる。ここで、任意の $a \in A$ について、$(\varphi\circ\sigma-\sigma')(a) \in \mathrm{Ker}\rho'$ ゆえ、

$$\begin{aligned}
&(f_\sigma - f_{\sigma'})(a,b)\\
=&\underbrace{i'((\varphi\circ\sigma)(a)(\varphi\circ\sigma-\sigma')(b))}_{\rho'(\varphi\circ\sigma)(a))i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(b))} + \underbrace{i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(a)\sigma'(b))}_{i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(a))\rho'(\sigma'(b))} - i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(ab))\\
=&ai'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(b)) + i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(a))b - i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(ab))
\end{aligned}$$

となる。$\varphi\circ\sigma-\sigma'$ の像が $\mathrm{Ker}\rho'$ に含まれているので、
$g : A \longrightarrow M$ を

$$g(a) = i'((\varphi\circ\sigma-\sigma')(a)) \qquad (a\in A)$$

によって定義すると、g は線形写像であって、

$$(f_\sigma - f_{\sigma'})(a,b) = ag(b) - g(ab) + g(a)b = (\delta^1 g)(a,b)$$

を満たす。故に、

$$f_\sigma - f_{\sigma'} = \delta^1 g$$

となり、$[f_\sigma] = [f_{\sigma'}]$ が示された。 $\square$

これより、写像 $\Phi : \{M$ による A の拡大全体$\}/\sim \longrightarrow H^2(A,M)$, $[(B,\rho,i)] \longmapsto [f_\sigma]$ が定まる。
Φ と Ψ は互いに他の逆写像である。これを示す。

. $\Phi\circ\Psi=\mathrm{id}$ であること：

$[f]\in H^2(A,M),\ f\in\mathrm{Ker}\delta^2$ とする。$\Psi([f])=[(B_f,\rho,i)]$ とおく。ここで、$\rho:B_f\longrightarrow A$ は第一成分への射影であり、$i:\mathrm{Ker}\rho\longrightarrow M$ は第二成分への射影である。

$\sigma:A\longrightarrow B_f$ を $\sigma(a)=(a,0)$ により定義する。

$$\rho\circ\sigma=\mathrm{id}_A \quad \text{かつ} \quad \sigma:\text{線形}$$

が成り立つ。この σ を用いて、

$$\begin{aligned} f_\sigma(a,b)&=i(\sigma(a)\sigma(b)-\sigma(ab))\\ &=i((a,0)(b,0)-(ab,0))\\ &=i((ab,f(a,b))-(ab,0))\\ &=f(a,b)\end{aligned}$$

となる。よって、$f_\sigma=f$ を得る。故に、

$$(\Phi\circ\Psi)([f])=\Phi([B_f,\rho,i])=[f_\sigma]=[f]$$

となる。

. $\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}$ であること：

(B,ρ,i) を M による A の拡大とする。

$\sigma:A\longrightarrow B$ を $\rho\circ\sigma=\mathrm{id}_A$ を満たす線形写像とする。

$f_\sigma\in\mathrm{Ker}\delta^2$ を用いて作られる M による A の拡大を (B_{f_σ},ρ',i') とおく：

$$B_{f_\sigma}=A\oplus M,\quad \rho':B_{f_\sigma}\longrightarrow A:\text{第一成分への射影},\quad i':B_{f_\sigma}\longrightarrow M\ \text{第二成分への射影}.$$

このとき、$(B_{f_\sigma},\rho',i')\sim(B,\rho,i)$ となることを示せばよい。

まず、$B=\sigma(A)\oplus\mathrm{Ker}\rho$ が成り立つことに注意する。

$\because)$

任意の $b\in B$ について、

$$\sigma(\rho(b))\in\sigma(A),\quad b-\sigma(\rho(b))\in\mathrm{Ker}\rho$$

となる。故に、

$$b=\sigma(\rho(b))+(b-\sigma(\rho(b)))\in\sigma(A)+\mathrm{Ker}\rho$$

となる。また、

$b\in\sigma(A)\cap\mathrm{Ker}\rho$ ならば、$b=\sigma(a)\ (a\in A)$ とおけて、

$$0=\rho(b)=\rho(\sigma(a))=a$$

となる。故に、

$$b=\sigma(a)=\sigma(0)=0$$

となり、$B=\sigma(A)\oplus\mathrm{Ker}\rho$ となることが示された。 $\square$

この直和分解を用いて、写像 $\varphi:B\longrightarrow B_{f_\sigma}$ を

$$\varphi(\sigma(a),x)=(a,i(x)) \qquad (a\in A,\ x\in\mathrm{Ker}\rho)$$

により定義する。$\rho\circ\sigma=\mathrm{id}_A$ により、σ は単射であるから、上式は意味を持つ。また、明らかに、φ は線形同型写像である。

φ が2つの拡大 (B_{f_σ},ρ',i'), (B,ρ,i) の間の同値を与えることを示す。

① φ が代数準同型であること：

まず、φ が単位元を保つことを見る。

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\varphi(\sigma(\rho(1)),\ 1-\sigma(\rho(1)))\\&=\varphi(\sigma(1),\ 1-\sigma(1)) && \rho\text{：代数準同型}\\&=(1,\ i(1-\sigma(1)))\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$i^{-1}(f_\sigma(1,1))=\sigma(1)\sigma(1)-\sigma(1)=\sigma(1)(\sigma(1)-1)$$

なので、

$$\begin{aligned}-f_\sigma(1,1)=&i(\sigma(1)(1-\sigma(1))\\=&\rho(\sigma(1))i(1-\sigma(1)) && i\text{：}\rho\text{-同変}\\=&1\cdot i(1-\sigma(1))\\=&i(1-\sigma(1)) && \rho\circ\sigma=\mathrm{id}_A\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\varphi(1)=(1,\ -f_\sigma(1,1))\qquad B_{f_\sigma}\text{ の単位元}$$

となることが示された。

次に、φ が積を保つことを見る。$b,b'\in B$ に対して、

$$\begin{aligned}\varphi(b)\varphi(b')&=(\rho(b),\ i(b-\sigma(\rho(b))\ )\cdot(\rho(b'),\ i(b'-\sigma(\rho(b'))\ )\\&=(\rho(b)\rho(b'),\ \underbrace{\rho(b)i(b'-\sigma(\rho(b')))}_{\|\atop i(bb'-b\sigma(\rho(b')))}+\underbrace{i(b-\sigma(\rho(b)))\rho(b')}_{\|\atop i(bb'-\sigma(\rho(b))b')}+\underbrace{f_\sigma(\rho(b),\rho(b'))}_{\|\atop i(\sigma(\rho(b))\sigma(\rho(b'))-\sigma(\rho(b)\rho(b')))}\ )\\&=(\rho(b)\rho(b'),\ i(bb'-\sigma(\rho(bb'))+\underbrace{bb'-b\sigma(\rho(b'))-\sigma(\rho(b))b'+\sigma(\rho(b))\sigma(\rho(b')))}_{\substack{\| \\ (b-\sigma(\rho(b)))\cdot(b'-\sigma(\rho(b'))) \\ \Cap \\ (\mathrm{Ker}\rho)^2 \\ \| \\ \{0\}}}\ )\\&=(\rho(bb'),\ i(bb'-\sigma(\rho(bb'))\ )\\&=\varphi(bb')\end{aligned}$$

故に、φ は代数準同型である。

② $\rho' \circ \varphi = \rho$ および $i' \circ \varphi|_{\mathrm{Ker}\rho} = i$ であること：

$b \in B$ に対して、

$$(\rho' \circ \varphi)(b) = \rho'(\rho(b),\ i(b - \sigma(\rho(b)))\ ) = \rho(b)$$

であるから、$\rho' \circ \varphi = \rho$ が成り立つ。また、$b \in \mathrm{Ker}\rho$ に対して

$$(i' \circ \varphi)(b) = i'(0, i(b)) = i(b)$$

となるから、$i' \circ \varphi|_{\mathrm{Ker}\rho} = i$ が成り立つ。

①②により、$(B_{f_\sigma}, \rho', i') \sim (B, \rho, i)$ が示された。したがって、$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ が証明された。

とにより、定理は証明された。 (Q.E.D.)

M による A の拡大 (B, ρ, i) に対して、$\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_A$ となる線形写像 $\sigma : A \longrightarrow B$ が存在するから、

$$^{\exists}\ C : B \text{ の部分ベクトル空間 s.t. } B = \mathrm{Ker}\rho \oplus C \quad \text{as vector spaces}$$

が得られる (上の定理の証明参照)。 次の系は、もし、$H^2(A, M) = 0$ ならば、σ を代数準同型に選ぶことができることを言っている。

系 1-22

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：両側 A-加群 とする。このとき、

$H^2(A, M) = 0 \implies {}^{\forall}(B, \rho, i) : M$ による A の拡大,

$$^{\exists}\ C : B \text{ の部分代数 s.t. } B = \mathrm{Ker}\rho \oplus C \quad \text{as vector spaces}$$

(proof)

. (B, ρ, i) と (B', ρ', i') を同値な M による A の拡大とする：$(B, \rho, i) \sim (B', \rho', i')$。

(B, ρ, i) について系の結論が成り立つならば、(B', ρ', i') についても成り立つ。

$\because$)

(B, ρ, i) について系の結論が成り立つので、

$$^{\exists}C : B \text{ の部分代数 s.t. } B = \mathrm{Ker}\rho \oplus C \quad \text{as vector spaces}$$

となる。$(B, \rho, i) \sim (B', \rho', i')$ ゆえ、

$$\varphi : B \longrightarrow B' : \text{代数の同型 s.t.} \quad \rho = \rho' \circ \varphi,\ i' \circ \varphi|_{\mathrm{Ker}\varphi} = i$$

が成り立つ。特に、$\varphi(\mathrm{Ker}\rho) = \mathrm{Ker}\rho'$ であるから、

$$B' = \varphi(B) = \varphi(\mathrm{ker}\rho) \oplus \varphi(C) = \mathrm{Ker}\rho' \oplus \varphi(C)$$

となる。φ は代数準同型ゆえ、$\varphi(C)$ は B' の部分代数になる。よって、(B', ρ', i') についても、系の結論が成り立つ。

. $f \in \mathrm{ker}\delta^2$ とする。$f \in \mathrm{Im}\delta^1$ ならば、定理 1-21 の証明の中のように構成される拡大 (B_f, ρ, i) について、系の結論が成り立つ。

$\because$)

$f = \delta^1 g, \quad g : A \longrightarrow M$: 線形 とする。

$\sigma : A \longrightarrow B_f$ を $\sigma(a) = (a, -g(a))$ と定める。

σ は代数準同型である。実際、

$$\begin{aligned}
\sigma(ab) &= (ab,\ -g(ab)) \\
&= (ab,\ -ag(b) - g(a)b + f(a,b)) && \delta^1 g = f \text{ より } f(ab) = ag(b) - g(a)b + g(ab) \\
&= (a, -g(a))\ (b, -g(b)) \\
&= \sigma(a)\sigma(b) \\
\sigma(1) &= (1, -g(1)) && \text{上の式に } a = b = 1 \text{ を代入} \\
&= (1, -f(1,1))
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sigma \text{ は代数準同型である。}$$

また、$\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_A$ となる。

故に、$C := \sigma(A)$ とおくと、C は B_f の部分代数であって、ベクトル空間として、$B_f = \mathrm{Ker}\rho \oplus C$ と分解される (定理 1-21 の証明の部分参照)。

. $H^2(A, M) = 0$ のとき、任意の拡大 (B, ρ, i) について、系の結論が成り立つ。

$\because$)

(B, ρ, i) を M による A の拡大とする。定理 1-21(の証明) より、

$$^{\exists} f \in \ker\delta^2 \ \ \text{s.t.}\ \ (B, \rho, i) \sim (B_f, \rho', i')$$

となる。ここで、$\rho' : B_f \longrightarrow A$ は第一成分への射影であり、$i' : B_f \longrightarrow M$ は第二成分への射影である。

$H^2(A, M) = 0$ ゆえ、$f \in \mathrm{Im}\delta^1$ となる。

により、(B_f, ρ', i') について系の結論が成り立つ。したがって、により、(B, ρ, i) について系の結論が成り立つ。 (Q.E.D.)

演習 1-50

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：両側 A-加群 とする。

$N := \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A, M)$ は次のようにして、両側 A-加群となる：$f \in N,\ a \in A$ に対して、

$(af)(a') = af(a')$

$(fa)(a') = f(aa') - f(a)a', \quad a' \in A.$

このとき、$n \geq 2$ について、

$$H^n(A, M) \cong H^{n-1}(A, N)$$

が成り立つことを示せ。

解；

・N が両側 A-加群になること：

N が左 A-加群になることは、左作用の定義から明らかである。

N が右 A-加群になることを示す。$\langle\ ,\ \rangle : N \times A \longrightarrow M$ を $(f, a) \longmapsto f(a)$ によって定義される双線形写像とする。このとき、任意の $f \in N,\ a, b, a' \in A$ に対して

$$\begin{aligned}\langle (fa)b,\ a' \rangle &= \langle fa,\ ba' \rangle - \langle fa,\ b \rangle a' \\ &= \langle f,\ a(ba') \rangle - \langle f,\ a \rangle (ba') - \langle f,\ ab \rangle a' + (\langle f,\ a \rangle b) a' \\ &= \langle f,\ (ab)a' \rangle - \langle f,\ ab \rangle a' \\ &= \langle f(ab),\ a' \rangle\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ (fa)b = f(ab)$$

よって、N は右 A-加群である。

A の N への左作用と右作用とが可換なことを見る。

$$\begin{aligned}\langle (af)b,\ a' \rangle &= \langle af,\ ba' \rangle - \langle af,\ b \rangle a' \\ &= a\langle f,\ ba' \rangle - a\langle f,\ b \rangle a' \\ &= a(\langle f,\ ba' \rangle - \langle f,\ b \rangle a') \\ &= a\langle fb,\ a' \rangle \\ &= \langle a(fb),\ a' \rangle\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ (af)b = a(fb)$$

以上より、N は両側 A-加群である。

$n \geq 1$ とする。

$f \in C^n(A, M)$ に対して、$\bar{f} \in C^{n-1}(A, N)$ を

$$\bar{f}(a_1, \cdots, a_{n-1})(a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n), \quad a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in A$$

により定義する。$f \in C^n(A, M)$ に対して

$$\overline{\delta^n f} = \delta^{n-1} \bar{f} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

$\because)$

$$\begin{aligned}&\overline{\delta^n f}(a_1, \cdots, a_n)(a_{n+1}) = (\delta^n f)(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \\ &= a_1 f(a_2, \cdots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \cdots, a_n) a_{n+1} \\ &= a_1 \bar{f}(a_2, \cdots, a_n)(a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \bar{f}(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_n)(a_{n+1}) \\ &\quad + \underbrace{(-1)^n \bar{f}(a_1, \cdots, a_{n-1})(a_n a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \bar{f}(a_1, \cdots, a_{n-1})(a_n) \cdot a_{n+1}}_{\displaystyle \| \\ (-1)^n (\bar{f}(a_1, \cdots, a_{n-1}) \cdot a_n)(a_{n+1})} \\ &= (a_1 \bar{f}(a_2, \cdots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \bar{f}(a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

$+(-1)^n\bar{f}(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot a_n)(a_{n+1})$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \overline{\delta^n f}(a_1,\cdots,a_n) =& a_1\bar{f}(a_2,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\bar{f}(a_1,\cdots,a_ia_{i+1},\cdots,a_n)\\ &+(-1)^n\bar{f}(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot a_n\\ =&(\delta^{n-1}\bar{f})(a_1,\cdots,a_n)\quad\square\end{aligned}$$

よって、$f\in C^n(A,M)$ について、

$$\begin{cases} f\in\mathrm{Ker}\delta^n & \Longleftrightarrow\ \bar{f}\in\mathrm{Ker}\delta^{n-1}\\ f\in\mathrm{Im}\delta^n & \Longleftrightarrow\ \bar{f}\in\mathrm{Im}\delta^{n-1}\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\because$)

$$\begin{aligned} f\in\mathrm{Ker}\delta^n &\Longleftrightarrow\ \delta^n f=0\\ &\Longleftrightarrow\ \delta^{n-1}\bar{f}=0\\ &\Longleftrightarrow\ \bar{f}\in\mathrm{Ker}\delta^{n-1}\end{aligned}$$

一般に、$g\in C^{n+1}(A,M)$ について、
$\bar{g}=0\iff g=0$

$$f\in\mathrm{Im}\delta^n\ \Longleftrightarrow\ {}^\exists\, g\in C^n(A,M)\ \text{ s.t. }\ f=\delta^n g$$

である。このとき、

$$\bar{f}=\overline{\delta^n g}=\delta^{n-1}\bar{g}$$

故に、$\bar{f}\in\mathrm{Im}\delta^{n-1}$ となる。

逆に、$\bar{f}\in\mathrm{Im}\delta^{n-1}$ ならば、

$${}^\exists\, h\in C^{n-1}(A,N)\ \text{ s.t. }\ \bar{f}=\delta^{n-1}h$$

となる。$g\in C^n(A,M)$ を $g(a_1,\cdots,a_n):=h(a_1,\cdots,a_{n-1})(a_n)$ で定義すると、$\bar{g}=h$ となる。

$$\begin{aligned}&\therefore\quad \bar{f}=\delta^{n-1}h=\delta^{n-1}\bar{g}=\overline{\delta^n g}\\ &\therefore\quad f=\delta^n g\\ &\therefore\quad f\in\mathrm{Im}\delta^n\quad\square\end{aligned}$$

写像 $C^n(A,M)\xrightarrow{\beta}C^{n-1}(A,N),\ f\longmapsto\bar{f}$ は線形同型写像であるから、$n\geq 2$ のとき、

$$H^n(A,M)=\mathrm{Ker}\delta^n/\mathrm{Im}\delta^{n-1}\cong\beta(\mathrm{Ker}\delta^n)/\beta(\mathrm{Im}\delta^{n-1})=\mathrm{Ker}\delta^{n-1}/\mathrm{Im}\delta^{n-2}=H^{n-1}(A,N)$$

を得る。 (Q.E.D.)

§7. フロベニウス代数

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、2つの標準的な左 A-加群を考えることができる。1つは A の左正則加群 ${}_AA$ であり、もう1つは、次のような作用を伴った $A^*=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A,\boldsymbol{k})$ である：

$$(a\cdot p)(b)=p(ba)\qquad\qquad (p\in A^*,\ a\in A,\ b\in A)$$

この左 A-加群を $(A_A)^*$ または A_A^* と書く (演習 1-14 参照)。この２つの左 A-加群が同型となるような有限次元代数はフロベニウス代数と呼ばれる。ここでは、代数がフロベニウス代数となるための同値な条件について述べる。

定義 1-12

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。

A：**フロベニウス代数** (*Frobenius algebra*) $\Longleftrightarrow$ ${}_AA \cong A_A^*$ as left A-modules

注意：上のフロベニウス代数の定義では、左 A-加群を用いているので「左フロベニウス代数」と呼ぶべきなのではないかと思われるかもしれないが、その心配はいらない。後で証明するように、

$$ {}_AA \cong A_A^* \quad \text{as left } A\text{-modules} \quad \Longleftrightarrow \quad A_A \cong {}_AA^* \quad \text{as right } A\text{-modules} $$

が成立するからである (命題 1-24)。ここで、${}_AA^*$ は左正則加群 ${}_AA$ の双対加群を表わしている (演習 1-14)。

補題 1-23

A, B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。このとき、

(1) A, B：フロベニウス代数 $\Longleftrightarrow$ $A \oplus B$：フロベニウス代数

(2) A, B：フロベニウス代数 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$：フロベニウス代数

(proof)

(1) i. 十分性：左 A-加群の同型 $f : {}_AA \longrightarrow A_A^*$ と左 B-加群の同型 $f : {}_BB \longrightarrow B_B^*$ が存在すると仮定する。このとき、写像 $h : A \oplus B \longrightarrow (A \oplus B)^*$ を

$$ \langle h(a,b),\ (x,y) \rangle = \langle f(a),\ x \rangle + \langle g(b),\ y \rangle, \qquad (a,b),(x,y) \in A \oplus B $$

により定義する。h は ${}_{(A\oplus B)}(A \oplus B)$ から $((A \oplus B)_{(A\oplus B)})^*$ への左 $A \oplus B$-加群の同型である。

$\because$)

1°. h が左 $A \oplus B$-加群準同型であること：

$(a,b),(c,d),(x,y) \in A \oplus B$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle h((c,d)\cdot(a,b)),\ (x,y) \rangle &= \langle h(c \cdot a, d \cdot b),\ (x,y) \rangle \\
&= \langle f(c \cdot a),\ x \rangle + \langle g(d \cdot b),\ y \rangle \\
&= \langle c \cdot f(a),\ x \rangle + \langle d \cdot g(b),\ y \rangle \\
&= \langle f(a),\ x \cdot c \rangle + \langle g(b),\ y \cdot d \rangle \\
&= \langle h(a,b),\ (x \cdot c, y \cdot d) \rangle \\
&= \langle h(a,b),\ (x,y) \cdot (c,d) \rangle \\
&= \langle (c,d) \cdot h(a,b),\ (x,y) \rangle
\end{aligned}
$$

となる。

2°. h が単射であること：

$h(a,b)=0$ とする。任意の $(x,y)\in A\oplus B$ に対して、$\langle h(a,b),(x,y)\rangle=0$ となる。特に、

$$\begin{cases} y=0 \text{ にとると、} 0=\langle h(a,b),(x,0)\rangle=\langle f(a),x\rangle \text{ となる。故に、} f(a)=0 \text{ となる。} \\ x=0 \text{ にとると、} 0=\langle h(a,b),(0,y)\rangle=\langle g(b),y\rangle \text{ となる。故に、} g(b)=0 \text{ となる。} \end{cases}$$

f,g は同型なので、$a=0,b=0$ を得る。故に、h は単射である。

3°. h が全射であること：

$\dim A<\infty, \dim B<\infty$ より、2° から h の全射性が得られる。 □

ii. 必要性：$h: {}_{(A\oplus B)}(A\oplus B)\longrightarrow (A\oplus B)^*_{(A\oplus B)}$ を左 $A\oplus B$-加群の同型とする。

$f:A\longrightarrow A^*$ を $\langle f(a),\ x\rangle=\langle h(a,0),\ (x,0)\rangle,\ \ a,x\in A$ によって定義し、

$g:B\longrightarrow B^*$ を $\langle g(b),\ x\rangle=\langle h(0,b),\ (0,y)\rangle,\ \ b,y\in B$ によって定義する。

f は A_A から A^*_A への左 A-加群の同型であり、g は B_B から B^*_B への左 B-加群の同型である。

∵)

f について示す。

任意の $a,x,a'\in A$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle f(a'\cdot a),\ x\rangle &= \langle h(a'\cdot a,0),\ (x,0)\rangle \\ &= \langle h((a',0)\cdot(a,0)),\ (x,0)\rangle \\ &= \langle (a',0)\cdot h(a,0),\ (x,0)\rangle \\ &= \langle h(a,0),\ (x,0)\cdot(a',0)\rangle \\ &= \langle h(a,0),\ (x\cdot a',0)\rangle \\ &= \langle f(a),\ x\cdot a'\rangle \end{aligned}$$

となるので、f は左 A-加群準同型である。

次に、f の単射性を示す。

$f(a)=0$ であるとする。

任意の $(x,y)\in A\oplus B$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle h(a,0),\ (x,y)\rangle &= \langle h(a,0),\ (x,0)+(0,y)\rangle \\ &= \langle h(a,0),\ (x,0)\rangle+\langle h(a,0),\ (0,y)\rangle \\ &= \langle f(a),\ x\rangle+\langle h(a,0),\ (0,y)\rangle \\ &= \langle h(a,0),\ (0,y)\rangle \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \langle h(a,0),\ (0,y)\rangle &= \langle h((a,0)\cdot(0,1)),\ (0,y)\rangle=\langle (a,0)\cdot h(0,1),\ (0,y)\rangle \\ &= \langle h(0,1),\ (0,y)\cdot(a,0)\rangle=\langle h(0,1),\ (0,0)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、$h(a,0)=0$ となることがわかった。h は同型であるから、$(a,0)=(0,0)$ を得る。故に、$a=0$ となり、f の単射性が証明された。

A は有限次元なので、f の全射性は f の単射性から従う。

g が同型であることも同様にして証明される。 $\square$

(2) $\psi : A^* \otimes B^* \longrightarrow (A \otimes B)^*$ を

$$\langle \psi(p \otimes q),\ a \otimes b \rangle = p(a)q(b) \qquad\qquad (p \in A^*,\ q \in B^*,\ a \in A,\ b \in B)$$

によって定まる $\boldsymbol{k}$ 上の線形同型写像とする。$A^* \otimes B^*$ を左 A-加群 A^*_A と左 B-加群 B^*_B とのテンソル積により左 $A \otimes B$-加群とみなしたものを $A^*_A \otimes B^*_B$ と書く。具体的には、$A^*_A \otimes B^*_B$ は、$A \otimes B$ の左作用が

$$\langle (a \otimes b) \cdot (p \otimes q),\ x \otimes y \rangle = \langle (a \cdot p) \otimes (b \cdot q),\ x \otimes y \rangle = p(xa)q(yb)$$

$p \in A^*,\ q \in B^*,\ a, x \in A,\ b, y \in B$、によって与えられるような左 $A \otimes B$-加群である。

ψ は $A^*_A \otimes B^*_B$ から $(A \otimes B)^*_{(A \otimes B)}$ への左 $A \otimes B$-加群の同型となる。

$\because$)

ψ が $A \otimes B$ の左作用を保つことのみ確かめればよい。

$p \in A^*,\ q \in B^*, a, x \in A,\ b, y \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \psi((x \otimes y) \cdot (p \otimes q)),\ a \otimes b \rangle &= \langle \psi((x \cdot p) \otimes (y \cdot q)),\ a \otimes b \rangle \\
&= (x \cdot p)(a)(y \cdot q)(b) \\
&= p(ax)q(by) \\
&= \langle \psi(p \otimes q),\ ax \otimes by \rangle \\
&= \langle \psi(p \otimes q),\ (a \otimes b) \cdot (x \otimes y) \rangle \\
&= \langle (x \otimes y) \cdot \psi(p \otimes q),\ a \otimes b \rangle \quad \square
\end{aligned}$$

A と B はフロベニウス代数であるから、

$$\begin{gathered}
{}^{\exists}\alpha : {}_A A \longrightarrow A^*_A : \text{左 } A\text{-加群の同型} \\
{}^{\exists}\beta : {}_B B \longrightarrow B^*_B : \text{左 } B\text{-加群の同型}
\end{gathered}$$

となる。このとき、線形同型写像

$$\alpha \otimes \beta : A \otimes B \longrightarrow A^* \otimes B^*$$

は $({}_A A) \otimes ({}_B B)$ から $(A_A)^* \otimes (B_B)^*$ への左 $A \otimes B$-加群準同型となる (演習 1-8)。

左 $A \otimes B$-加群として ${}_{(A \otimes B)}(A \otimes B) = ({}_A A) \otimes ({}_B B)$ であるから、合成写像 $\psi \circ (\alpha \otimes \beta)$ により、左 $A \otimes B$-加群の同型 ${}_{(A \otimes B)}(A \otimes B) \cong (A \otimes B)^*_{(A \otimes B)}$ が与えられる。 (Q.E.D.)

フロベニウス代数であることの同値な言い換えを述べるために、言葉を 1 つ用意する。

定義 1-13

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が**結合的** (*associative*)

$$\iff f(ab, c) = f(a, bc) \quad \text{for } {}^\forall a, b, c \in A$$

命題 1-24

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 とする。

次の 5 つは互いに同値な条件である。

(i) A はフロベニウス代数である。

(ii) $A_A \cong ({}_A A)^*$ as right A-modules

(iii) ${}^\exists p \in A^*$ s.t. $\mathrm{Ker}\, p$ に含まれる A の左イデアルは $\{0\}$ のみ

(iv) ${}^\exists p \in A^*$ s.t. $\mathrm{Ker}\, p$ に含まれる A の右イデアルは $\{0\}$ のみ

(v) ${}^\exists f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$：非退化な結合的双一次形式

注意：双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が**非退化** (*non-degenerate*) であるとは

$$f(a, b) = 0 \ \text{ for all } a \in A \implies b = 0$$

となるときをいう。これは A の基底 $\{a_i\}_{i=1}^n$ を 1 つとったとき、行列 $(f(a_i, a_j))_{1 \le i,j \le n}$ が正則であるという条件に他ならない。したがってまた、

$$f \text{ が非退化} \iff 「f(a, b) = 0 \ \text{ for all } b \in A \implies a = 0」$$

が成立する。

命題を示すために、補題を準備する。

補題 1-25

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) $\alpha : {}_A A \longrightarrow A^*_A$ を左 A-加群準同型とし、$p = \alpha(1)$ とおく。このとき、

$$\langle \alpha(a),\ x \rangle = p(xa) \qquad \text{for } {}^\forall a, x \in A$$

が成り立つ。但し、$\langle\ ,\ \rangle$ は A と A^* の自然なペアリングである。

したがって、写像 $\mathrm{Hom}_A({}_A A, A^*_A) \longrightarrow A^*,\ \ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ は線形同型写像である。さらに、この同型の下で、左 A-加群 $\alpha : {}_A A \longrightarrow A^*_A$ と A^* の元 p が対応しているとするとき、

$$\begin{aligned} &\alpha : \text{単射} \iff \mathrm{Ker}\, p \text{ に含まれる } A \text{ の左イデアルは } \{0\} \text{ のみ} \\ &\alpha : \text{全射} \iff A^* \text{ の任意の元は } ap\ (a \in A) \text{ と書ける} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) $\alpha : A_A \longrightarrow {}_A A^*$ を右 A-加群準同型とし、$p = \alpha(1)$ とおく。このとき、

$$\langle \alpha(a),\ x \rangle = p(ax) \qquad \text{for } {}^\forall a, x \in A$$

が成り立つ。但し、$\langle\ ,\ \rangle$ は A と A^* の自然なペアリングである。

したがって、写像 $\mathrm{Hom}_A(A_A, {}_AA^*) \longrightarrow A^*,\ \ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ は線形同型写像である。さらに、この同型の下で、右 A-加群 $\alpha : A_A \longrightarrow {}_AA^*$ と A^* の元 p が対応しているとするとき、

$$\alpha : \text{単射} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\, p \text{ に含まれる } A \text{ の右イデアルは } \{0\} \text{ のみ}$$
$$\alpha : \text{全射} \quad \Longleftrightarrow \quad A^* \text{ の任意の元は } pa\ (a \in A) \text{ と書ける}$$

が成り立つ。

(proof)

(1) α は左 A-加群準同型なので、

$$\langle \alpha(a),\ x\rangle = \langle a\cdot\alpha(1),\ x\rangle = \langle a\cdot p,\ x\rangle = p(xa) \quad \text{for } {}^\forall x, a \in A$$

となる。したがって、

写像 $\mathrm{Hom}_A({}_AA, A^*_A) \longrightarrow A^*,\ \ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ と

写像 $A^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AA, A^*_A),\ \ p \longmapsto \alpha_p,$ 　但し、α_p は各 $a \in A$ に対して、$\alpha_p(a) : x \longmapsto p(xa)$ という A^* の元を対応させる写像、は互いに他の逆写像になる。

$\because)$

α_p が ${}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型となることを示しておかなければならない。これは、$a, b, x \in A$ に対して、

$$\langle \alpha_p(b\cdot a),\ x\rangle = p(x(ba)) = p((xb)a) = \langle \alpha_p(a),\ xb\rangle = \langle b\cdot\alpha_p(a),\ x\rangle$$

となることから得られる。

左 A-加群 $\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A$ に対して、$p = \alpha(1)$ とおくと、任意の $a, x \in A$ に対して $\langle\alpha(a),\ x\rangle = p(ax)$ となることから、$\alpha_p = \alpha$ であることがわかる。また、$p \in A^*$ に対して、$\alpha_p(1) = p$ となる。よって、上で与えた２つの写像は互いに他の逆写像の関係にある。 □

次に、これらの同型写像の下で、左 A-加群 $\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A$ と A^* の元 p が対応しているとする。このとき、

$$\begin{aligned}
\alpha : \text{単射} &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\alpha = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow p(xa) = 0 \ \text{ for } {}^\forall x \in A \ \text{ ならば } \ a = 0 \\
&\Longleftrightarrow xa \in \mathrm{Ker}\, p \ \text{ for } {}^\forall x \in A \ \text{ ならば } \ a = 0 \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, p \text{ に含まれる } A \text{ の左イデアルは } \{0\} \text{ のみ} \\
\alpha : \text{全射} &\Longleftrightarrow {}^\forall q \in A^*,\ \ {}^\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ \alpha(a) = q \\
&\Longleftrightarrow {}^\forall q \in A^*,\ \ {}^\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ a\cdot p = q
\end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) も (1) と同様にして証明される。　(Q.E.D.)

補題 1-26

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ に対して、線形写像 ${}^t\alpha : A \longrightarrow A^*$ を

$$\langle {}^t\alpha(a), x\rangle = \langle \alpha(x), a\rangle \qquad \text{for } a, x \in A$$

によって定義する。

(1) ${}^{tt}\alpha = \alpha$ となる。

(2) α：全射 $\Longrightarrow$ ${}^t\alpha$：単射　となる。

(3) α が ${}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型ならば、${}^t\alpha$ は A_A から ${}_AA^*$ への右 A-加群準同型となる。

(4) α が A_A から ${}_AA^*$ への右 A-加群準同型ならば、${}^t\alpha$ は ${}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型となる。

したがって、${}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型全体と A_A から ${}_AA^*$ への右 A-加群準同型全体との間に 1 対 1 対応が存在する。

(proof)

(1) は ${}^t\alpha$ の定義から直ちに従う。

(2) 線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ は全射であると仮定する。

$a \in A$ は ${}^t\alpha(a) = 0$ を満たしているとする。

このとき、任意の $x \in A$ に対して、$\langle \alpha(x), a\rangle = \langle {}^t\alpha(a), x\rangle = 0$ となる。

したがって、α の全射性により、任意の $q \in A^*$ に対して、$q(a) = 0$ を得る。

もし、$a \neq 0$ ならば、a を含む A の基底をとることができる。この基底の a 以外の元については 0 の値をとり、a については 1 をとるような $q_0 \in A^*$ を考えることができる。すると、この q_0 については $q_0(a) = 1 \neq 0$ となり、すべての $q \in A^*$ に対して $q(a) = 0$ となることに矛盾する。よって、$a = 0$ でなければならない。

したがって、${}^t\alpha$ は単射である。

(3) $\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A$ を左 A-加群準同型とする。このとき、任意の $a, b, x \in A$ に対して、

$$\langle {}^t\alpha(ab), x\rangle = \langle \alpha(x), ab\rangle = \langle b \cdot \alpha(x), a\rangle = \langle \alpha(b \cdot x), a\rangle = \langle {}^t\alpha(a), b \cdot x\rangle = \langle {}^t\alpha(a) \cdot b, x\rangle$$

となるから、${}^t\alpha$ は A_A から ${}_AA^*$ への右 A-加群準同型である。

(4) は (3) と同様にして証明される。

(1)(3)(4) により、左 A-加群準同型 $\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A$ に対して、右 A-加群準同型 ${}^t\alpha : A_A \longrightarrow {}_AA^*$ を対応させる写像は、線形同型写像 $\{{}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型全体$\}$ $\longrightarrow \{A_A$ から ${}_AA^*$ への右 A-加群準同型全体$\}$ を与えることがわかる。 (Q.E.D.)

補題 1-27

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ に対して、双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$, $f(a, b) = \langle \alpha(b), a\rangle$, $a, b \in A$ を対応させる規則は、$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A, A^*)$ から双一次形式 $A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ 全体からなるベクトル空間への線形同型写像を与える。但し、$\langle\ ,\ \rangle$ は A と A^* の自然なペアリングである。

さらに、上の同型写像の下で、線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ と双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が対応しているとするとき、

(1) α : 単射 $\iff$ f : 非退化
(2) α は ${}_AA$ から $(A_A)^*$ への左 A-加群準同型 $\iff$ f : 結合的な双一次形式
が成り立つ。

(proof)

双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ 全体からなる集合を $\mathfrak{B}(A \times A, \boldsymbol{k})$ によって表わすことにする。

写像 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A, A^*) \longrightarrow \mathfrak{B}(A \times A, \boldsymbol{k}), \quad \alpha \longmapsto f,$

但し、f は $f(a,b) = \langle \alpha(b), a \rangle, \ a, b \in A$ によって定義される双一次形式

と写像 $\mathfrak{B}(A \times A, \boldsymbol{k}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A, A^*), \quad f \longmapsto \alpha,$

但し、α は $\langle \alpha(b), a \rangle = f(a,b), \ a, b \in A$ によって定義される線形写像

とは互いに他の逆写像である。したがって、これら 2 つの写像は線形同型写像である。

(1) 上の同型写像の下で、線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ と双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が対応しているとする。このとき、

$$
\begin{aligned}
f : \text{非退化} &\iff f(a,b) = 0 \ \text{ for } {}^\forall a \in A \ \ \text{ならば} \ \ b = 0 \\
&\iff \alpha(b) = 0 \ \ \text{ならば} \ \ b = 0 \\
&\iff \alpha : \text{単射}
\end{aligned}
$$

(2) 上の同型写像の下で、線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ と双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が対応しているとする。

α が ${}_AA$ から A^*_A への左 A-加群準同型のとき、

$$
f(ab, c) = \langle \alpha(c), ab \rangle = p((ab)c) = p(a(bc)) = \langle \alpha(bc), a \rangle = f(a, bc)
$$

$p = \alpha(1)$ とおく。補題 1-25(1) 参照

となる。故に、f は結合的である。

逆に、f が結合的であるとする。このとき、任意の $a, b, x \in A$ に対して、

$$
\langle \alpha(ba), x \rangle = f(x, ba) = f(xb, a) = \langle \alpha(a), xb \rangle = \langle b \cdot \alpha(a), x \rangle
$$

となる。故に、α は左 A-加群準同型である。 (Q.E.D.)

(proof of Proposition 1-24)

(i) $\iff$ (iii) : A は有限次元なので、左 A-加群準同型 $\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A$ が同型写像であることと単射であることとは同値である。したがって、補題 1-25(1) により、

$$
\begin{aligned}
&{}^\exists \alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A : \text{左 } A\text{-加群の同型} \\
&\qquad \iff {}^\exists p \in A^* \ \text{s.t.} \ \ \mathrm{Ker}\, p \ \text{に含まれる } A \text{ の左イデアルは } \{0\} \text{ のみ}
\end{aligned}
$$

を得る。

(ii) $\iff$ (iv) : 上と同様の方法により、補題 1-25(2) から得られる。

(i) $\iff$ (ii) : A が有限次元であることと補題 1-26 より、線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\text{左 } A\text{-加群準同型 } \alpha : {}_AA \longrightarrow (A_A)^* \text{ が同型} &\iff \text{左 } A\text{-加群準同型 } \alpha : {}_AA \longrightarrow (A_A)^* \text{ が全射} \\
&\iff \text{右 } A\text{-加群準同型 } {}^t\alpha : A_A \longrightarrow {}_AA^* \text{ が単射} \\
&\iff \text{右 } A\text{-加群準同型 } {}^t\alpha : A_A \longrightarrow {}_AA^* \text{ が同型}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(i) $\Longleftrightarrow$ (v)：A が有限次元であることと補題 1-27 より、

$$^{\exists}\alpha : {}_A A \longrightarrow A_A^* \ \text{:左 } A\text{-加群の同型} \quad \Longleftrightarrow \quad {}^{\exists}f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k} \ \text{:非退化な結合的双一次形式}$$

を得る。 (Q.E.D.)

例題 1-28

(1) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の n 次全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ はフロベニウス代数である。

(2) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数はフロベニウス代数である。

(3) 有限群 G の体 $\boldsymbol{k}$ 上の群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ はフロベニウス代数である。

(proof)

(1) $f : \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \times \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を $f(X,Y) = \mathrm{Tr}(XY),\ \ X,Y \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ によって定義する。f は非退化な双一次形式である。また、明らかに結合的である。命題 1-24 より、$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ はフロベニウス代数である。

(2) D を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数とする。$p : D \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を線形写像とする。

$p \neq 0$ とする。このとき、$\mathrm{Ker}\, p \neq D$ である。D は可除代数であるから、D に含まれる左イデアルは $\{0\}$ しかない。よって、$\mathrm{Ker}\, p$ には $\{0\}$ でない D の左イデアルは含まれない。命題 1-24 から、D はフロベニウス代数である。

(3) 非退化かつ結合的な双一次形式 $f : \boldsymbol{k}[G] \times \boldsymbol{k}[G] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が存在することを示せばよい (命題 1-24)。このような双一次形式 f の 1 つは

$$f(g,h) = \delta_{gh,1} \qquad (g,h \in G)$$

によって与えられる。実際、f が結合的な双一次形式になることはすぐにわかる。

f が非退化なことを示す。$y \in \boldsymbol{k}[G]$ に対して

$$^{\forall}g \in G, \ \ f(g,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

となることを示せばよい。任意の $g \in G$ に対して $f(g,y) = 0$ となる y をとり、

$$y = \sum_{h \in G} a_h h \qquad (a_h \in \boldsymbol{k})$$

と書く。

$$f(g,y) = \sum_{h \in G} a_h f(g,h) = \sum_{h \in G} a_h \delta_{gh,1} = a_{g^{-1}}$$

であるから、$f(g,y) = 0$ から $a_{g^{-1}} = 0$ を得る。$g \in G$ は任意であるから、$y = 0$ を得る。故に、f は非退化である。したがって、$\boldsymbol{k}[G]$ はフロベニウス代数である。 (Q.E.D.)

次の結果は例題 1-28(1) の拡張になっている。

命題 1-29

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数、$n \geq 1$ とする。

A：フロベニウス代数 $\Longrightarrow$ $\mathrm{M}_n(A)$：フロベニウス代数

(proof)

$$\mathrm{M}_n(A) \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \otimes A \quad \text{as algebras}$$

であるから (演習 1-4)、補題 1-23(2) と例題 1-28(1) から、$\mathrm{M}_n(A)$ はフロベニウス代数であることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 1-51

$\boldsymbol{k}$ を体とする。$\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ の部分代数

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k} \right\}$$

はフロベニウス代数ではないことを示せ。このことから、フロベニウス代数の部分代数がフロベニウス代数になるとは限らないことがわかる。

解；

A がフロベニウス代数でないことを示すには、任意の $p \in A^*$ に対して、$\mathrm{Ker}\, p$ が 0 以外の左イデアルを含むことを示せばよい (命題 1-24)。

$p \in A^*$ を任意にとり、

$$\alpha = p(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),\ \beta = p(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),\ \gamma = p(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

とおく。このとき、

$$\mathrm{Ker}\, p = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$$

となる。

① $\alpha = 0$ のとき：$\mathrm{Ker}\, p$ は A の左イデアル

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; x \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を含む。

② $\beta = 0$ のとき：$\mathrm{Ker}\, p$ は A の左イデアル

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; y \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を含む。

③ $\alpha\beta \neq 0$ のとき：$\mathrm{Ker}\, p$ は A の左イデアル

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & -\frac{\beta}{\beta}x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; x \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を含む。

$p \in A^*$ に対して上記 3 つのうちのいずれかが起きるが、いずれの場合にも A の 0 でない左イデアルを $\mathrm{Ker}\, p$ は含んでいることがわかる。よって、A はフロベニウス代数でない。

一方、$\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ はフロベニウス代数であった (例題 1-28) から、フロベニウス代数の部分代数がフロベニウス代数になるとは限らないことがわかった。 (Q.E.D.)

演習 1-52

体 $\boldsymbol{k}$ 上の二変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X,Y]$ の次の２つの商代数を考える。

$A := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1},Y^{n+1}),\quad B := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1},X^nY,X^{n-1}Y^2,\cdots,XY^n,Y^{n+1})$

A はフロベニウス代数であるが、B はフロベニウス代数ではないことを示せ。このことから、フロベニウス代数の商代数がフロベニウス代数になるとは限らないことがわかる。

解；

まず、A がフロベニウス代数になることを示す。

$p: A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$p([f]) = (f \text{ における } X^nY^n \text{ の係数}) \qquad f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$$

によって定義する。但し、$[f] \in A$ は $f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の同値類を表わす。

p は矛盾なく定義されていて、$\boldsymbol{k}$-線形写像であることがわかる。

$\because)$

p は矛盾なく定義されていることを確かめる。

そのためには、$\tilde{p}: \boldsymbol{k}[X,Y] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$\tilde{p}(f) = (f \text{ における } X^nY^n \text{ の係数}) \qquad f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$$

によって定義したとき、$\tilde{p}((X^{n+1},Y^{n+1})) = \{0\}$ となることを示せばよい。

$$(X^{n+1},Y^{n+1}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \boldsymbol{k}X^{n+i+1}Y^j + \sum_{i,j=0}^{\infty} \boldsymbol{k}X^iY^{n+j+1}$$

であるから、(X^{n+1},Y^{n+1}) の任意の元について、その X^nY^n の係数は 0 である。故に、$\tilde{p}((X^{n+1},Y^{n+1})) = \{0\}$ を得る。 □

$\operatorname{Ker} p$ が A の 0 でない左イデアル I を含んでいると仮定する。

$0 \neq [f] \in I$ をとる。

A は $\{[X^iY^j] \mid 0 \le i,j \le n\}$ によって $\boldsymbol{k}$ 上張られるから、

$$[f] = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}[X^iY^j] \qquad (a_{ij} \in \boldsymbol{k},\ i,j = 0,1,\cdots,n)$$

と書くことができ、$[f] \neq 0$ であることから $a_{kl} \neq 0$ となる $k,l \in \{0,1,\cdots,n\}$ が存在する。

すると、I は A の左イデアルであるから、

$$\begin{aligned}
[X^{n-k}Y^{n-l}(\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}X^iY^j)] &= X^{n-k}Y^{n-l}[\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}X^iY^j] \\
&= X^{n-k}Y^{n-l}(\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}[X^iY^j]) \\
&= X^{n-k}Y^{n-l}[f] \in I \subset \operatorname{Ker} p
\end{aligned}$$

となる。しかしながら、

$$p([X^{n-k}Y^{n-l}(\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}X^iY^j)]) = p([\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}X^{n-k+i}Y^{n-l+j}]) = a_{kl} \neq 0$$

となる。ここに矛盾が生じた。よって、$\mathrm{Ker}\, p$ は A の 0 以外の左イデアル I を含まない。故に、A はフロベニウス代数である。

次に、B がフロベニウス代数でないことを示す。

$f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の B における同値類を改めて $[f]$ と書くことにする。

$$\boldsymbol{k}[X^n],\ \boldsymbol{k}[X^{n-1}Y],\ \boldsymbol{k}[X^{n-2}Y^2],\ \cdots, \boldsymbol{k}[XY^{n-1}],\ \boldsymbol{k}[Y^n]$$

はすべて B の 1 次元イデアルになっていることに注意する。

$p \in B^*$ を任意にとる。B は $\{[X^iY^j] \mid i,j \geq 0,\ i+j \leq n\}$ によって $\boldsymbol{k}$ 上張られるから、$p([X^iY^j]) = \alpha_{ij}\ \ (i,j \geq 0,\ i+j \leq n)$ とおくと、

$$\mathrm{Ker}\, p = \{\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n}} a_{ij}[X^iY^j] \in B \mid \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq n}} a_{ij}\alpha_{ij} = 0\}$$

となる。

① $i+j=n$ を満たすある $i,j \geq 0$ に対して $\alpha_{ij} = 0$ のとき：

$\mathrm{Ker}\, p$ は $\boldsymbol{k}[X^iY^j]$ を含む。$i+j=n$ なので、$\boldsymbol{k}[X^iY^j]$ は B のイデアルである。故に、$\mathrm{Ker}\, p$ は 0 でない B の左イデアルを含む。

② $i+j=n$ を満たす任意の $i,j \geq 0$ に対して $\alpha_{ij} \neq 0$ のとき：

$\mathrm{Ker}\, p$ は $\boldsymbol{k}[X^n - \alpha_{n0}\alpha_{0n}^{-1}Y^n]$ を含む。 $\boldsymbol{k}[X^n - \alpha_{n0}\alpha_{0n}^{-1}Y^n]$ は B のイデアルであるから、$\mathrm{Ker}\, p$ は 0 でない B の左イデアルを含む。

①②より、任意の $p \in B^*$ に対して $\mathrm{Ker}\, p$ は 0 でない B の左イデアルを含む。故に、B はフロベニウス代数ではない。

B は A の商代数であるので、フロベニウス性は商をとる操作で遺伝しないことがわかる。

(Q.E.D.)

注意 1°：上記の例は、T.Y.Lam・著『Lectures on modules and rings』GTM189,Springer,p.68 によった。同じページに、フロベニウス代数の商代数がフロベニウス代数でないような例をもう 1 つ見つけることができる。

注意 2°：フロベニウス代数の商代数がいつフロベニウスになるか？という問題は中山正によって解かれている。A をフロベニウス代数とし、$I \subsetneqq A$ をその両側イデアルとするとき、

$$\text{商代数 } A/I\text{：フロベニウス} \iff {}^{\exists}x \in A\ \ \text{s.t.}\ \ r(I) = xA = Ax$$

が成り立つ。但し、$r(I) = \{a \in A \mid Ia = 0\}$ である (演習 1-54)。

演習 1-53

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上のフロベニウス代数 とする。
空でない部分集合 $X \subset A$ に対して

$$l(X) := \{a \in A \mid aX = 0\}, \qquad r(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\}$$

と定める。このとき、A の左イデアル X と右イデアル Y に対して

$$l(r(X)) = X, \qquad r(l(Y)) = Y$$

が成り立つ、すなわち、A は**再消去性** (*double annihilator property*) を持つ。これを以下の (1)(2) の系として導け。
非退化な結合的双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ と空でない部分集合 $X \subset A$ に対して

$$^{\perp}X := \{a \in A \mid f(a, x) = 0 \ \text{ for all } x \in X\}$$
$$X^{\perp} := \{a \in A \mid f(x, a) = 0 \ \text{ for all } x \in X\}$$

とおく。このとき

(1) $X \subset A$：部分線形空間 $\implies$ $(^{\perp}X)^{\perp} = {}^{\perp}(X^{\perp}) = X$
$\dim(X^{\perp}) = \dim(^{\perp}X) = \dim A - \dim X$

(2) X：A の左イデアル $\implies$ $r(X) = X^{\perp}$
Y：A の右イデアル $\implies$ $l(X) = {}^{\perp}X$

解；

(1) $\dim X = m,\ \dim A = n$ とおく。X の基底 $\{a_i\}_{i=1}^{m}$ に A のベクトル $a_{m+1}, \cdots, a_n$ を付け加えて、A の基底 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ を作る。写像 $\varphi : A \longrightarrow \boldsymbol{k}^n$ を

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} f(a_1, a) \\ \vdots \\ f(a_n, a) \end{pmatrix}, \qquad a \in A$$

と定める。f は非退化なので、φ は線形同型写像である。

$\because$)

φ が単射であることを示せば十分である。
$a \in \mathrm{Ker}\varphi$ とすると、任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して $f(a_i, a) = 0$ となる。
これは、$\{a_i\}_{i=1}^{n}$ が A の基底であることから、任意の $b \in A$ に対して $f(b, a) = 0$ となることと同値である。f の非退化性から $a = 0$ を得る。故に、φ は単射である。 □

このとき、

$$\varphi(X^{\perp}) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1 = \cdots = c_m = 0 \right\}$$

が成り立つ。

$\because$)

$$\varphi(X^{\perp}) = \{\varphi(a) \mid a \in A,\ f(a_i, a) = 0 \ \ (i = 1, \cdots, m)\}$$

であるから、

$$\varphi(X^{\perp}) \subset \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1 = \cdots = c_m = 0 \right\}$$

が成り立つ。逆に、

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (c_1 = \cdots = c_m = 0,\ c_{m+1}, \cdots, c_n \in \boldsymbol{k})$$

を任意にとると、φ は全射であるから、$\varphi(a) = c$ となる $a \in A$ が存在する。このとき、

$$f(a_1, a) = c_1 = 0,\ \cdots, f(a_m, a) = c_m = 0$$

であるから、$a \in X^{\perp}$ となる。故に、$c = \varphi(a) \in \varphi(X^{\perp})$ であることも示された。 □

これより、

$$\dim(X^{\perp}) = \dim \varphi(X^{\perp}) = n - m = \dim A - \dim X \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が示された。φ のかわりに、

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} f(a, a_1) \\ \vdots \\ f(a, a_n) \end{pmatrix}, \qquad a \in A$$

によって定義される $\psi : A \longrightarrow \boldsymbol{k}^n$ を考えることにより、上と同様にして、

$$\dim({}^{\perp}X) = \dim A - \dim X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となることがわかる。

①②を用いて、A の部分線形空間 X に対して、

$$\dim{}^{\perp}(X^{\perp}) = \dim X, \quad \dim({}^{\perp}X)^{\perp}$$

が成立することがわかる。また、$X^{\perp}$, ${}^{\perp}X$ の定義から、

$${}^{\perp}(X^{\perp}) \supset X, \quad ({}^{\perp}X)^{\perp} \supset X$$

が成り立つことがわかる。これらのことから、

$${}^{\perp}(X^{\perp}) = X, \quad ({}^{\perp}X)^{\perp} = X$$

を得る。

(2) まず、次のことに注意する。

(i) $p(x) := f(x, 1),\ x \in A$ とおくと $\operatorname{Ker} p$ には $\{0\}$ 以外の左イデアルは含まれない (補題 1-25(1)、補題 1-27、命題 1-24 の証明参照)。

(ii) $q(x) := f(1, x),\ x \in A$ とおくと $\operatorname{Ker} q$ には $\{0\}$ 以外の右イデアルは含まれない (補題 1-25(1)、補題 1-26、補題 1-27、命題 1-24 の証明参照)。

さて、X を A の左イデアルとする。このとき、$a \in A$ に対して Xa は A の左イデアルであるから、(ii) により、

$$\begin{aligned} a \in X^{\perp} &\iff f(xa, 1) = f(x, a) = 0 \ \text{ for all } x \in X \\ &\iff p(Xa) = 0 \\ &\iff Xa = 0 \\ &\iff a \in r(X) \end{aligned}$$

を得る。同様に、A の右イデアル Y と $a \in A$ について、aY が右イデアルであることから、

$$a \in {}^{\perp}X \iff q(aY) = 0 \iff aY = 0 \iff a \in l(X)$$

を得る。これで、(2) が示された。

最後に、A の左イデアル X と A の右イデアル Y に対して $l(r(X)) = X,\ r(l(Y)) = Y$ となることを示す。

$l(r(X)) = X$ となることは以下のようにしてわかる。

$$l(r(X)) \underset{\substack{\uparrow \\ r(X)\ \text{は右イデアル}}}{=} {}^{\perp}(X^{\perp}) \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} X$$

$l(Y)$ が左イデアルになることから、同様にして、$r(l(Y)) = Y$ が得られる。 (Q.E.D.)

注意 1°：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A とその空でない部分集合 X に対して、$l(X)$ は A の左イデアル、$r(X)$ は A の右イデアルになる。さらに、X が左イデアルのとき $l(X)$ は両側イデアルになり、X が右イデアルのとき $r(X)$ は両側イデアルになる。

注意 2°：再消去性はフロベニウス代数を含むもう少し広いクラスの代数に対して成立する。このような代数は第 3 章で扱われる。

注意 3°：再消去性をもつ代数 A については、次のことが成り立つ。写像

$$\begin{array}{ccc} \{A\ \text{の左イデアル全体}\} & \longrightarrow & \{A\ \text{の右イデアル全体}\} \\ \Cup & & \Cup \\ X & \longmapsto & r(X) \end{array}$$

と写像

$$\begin{array}{ccc} \{A\ \text{の右イデアル全体}\} & \longrightarrow & \{A\ \text{の左イデアル全体}\} \\ \Cup & & \Cup \\ Y & \longmapsto & l(Y) \end{array}$$

は互いに他の逆写像であり、左イデアル X_1, X_2 に対して

$$X_1 \subset X_2 \iff r(X_2) \subset r(X_1)$$

が成立し、右イデアル Y_1, Y_2 に対して

$$Y_1 \subset Y_2 \iff l(Y_2) \subset l(Y_1)$$

が成立する。

(演習 1-54)(中山正)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上のフロベニウス代数

$I \subsetneqq A$：A の両側イデアル　とする。このとき、

$$A/I\text{：フロベニウス代数} \iff {}^{\exists}a \in A \ \text{ s.t. } \ r(I) = aA = Aa$$

となることを示せ。但し、$r(I) = \{a \in A \mid Ia = 0\}$ である。

解；

「$\Longrightarrow$」の証明：

$A,\ A/I$ はフロベニウス代数なので、

$$\begin{cases} {}^{\exists}p : A \longrightarrow \boldsymbol{k}\text{：}\boldsymbol{k}\text{-線形写像} & \text{s.t. } \operatorname{Ker} p \text{ は 0 以外の } A \text{ の左イデアルを含まない} \\ {}^{\exists}q : A/I \longrightarrow \boldsymbol{k}\text{：}\boldsymbol{k}\text{-線形写像} & \text{s.t. } \operatorname{Ker} q \text{ は 0 以外の } A/I \text{ の左イデアルを含まない} \end{cases}$$

となる。$\pi : A \longrightarrow A/I$ を自然な射影とする。このとき、

$${}^{\exists}a \in A \ \text{ s.t. } \ q \circ \pi = p_a$$

が成り立つ。但し、$p_a \in A^*$ は $p_a(x) = p(xa),\ x \in A$ によって定義される。

$\because$)

$\alpha : A \longrightarrow A^*$ を $\langle \alpha(a),\ x \rangle = p(xa),\ a, x \in A$ によって定義する。ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は A と A^* との自然なペアリングを表わす。α は左 A-加群の同型となる (補題 1-25(1))。$q \circ \pi \in A^*$ であるから、

$${}^{\exists}a \in A \ \text{ s.t. } \ q \circ \pi = \alpha(a)$$

となる。このとき、

$$(q \circ \pi)(x) = \alpha(a)(x) = p(xa) = p_a(x) \qquad (x \in A)$$

となる。よって、$q \circ \pi = p_a$ が成り立つ。 □

$$r(I) = aI = Ia$$

が成り立つことを示す。

演習 1-53 により、

$$r(I) = I^{\perp} \underset{\uparrow}{=} \{a \in A \mid p(Ia) = 0\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$$\left(\begin{array}{c} \because \ \ f(x, a) = \langle \alpha(a), x \rangle,\ x, a \in A \text{ とおくと、} \\ f \text{ は非退化かつ結合的な双一次形式 (補題 1-27)} \end{array} \right)$$

が成り立つことに注意する。

・$r(I) = aA$ であること：各 $x \in A$ に対して $\pi(x) = \bar{x}$ とおく。

まず、$aA \subset r(I)$ となることを示す。そのためには $a \in r(I)$ となることを示せばよい ($\because I$ は右イデアルなので、$r(I)$ は両側イデアルである)。さて、

$$p(Ia) \subset p(I) = (q \circ \pi)(I) = q(0) = 0$$

であるから、$(*)$ により、$a \in r(I)$ となることがわかる。

次に、$r(I) \subset aA$ となることを示す。これを示すには、$l(r(I)) \supset l(aA)$ となることを示せばよい ($\because A$ は再消去性を持つから)。

$b \in l(aA)$ を任意にとる。このとき、$b(aA) = 0$ であるから、$ba = 0$ を得る。このとき、

$$q((A/I)\bar{b}) = (q \circ \pi)(Ab) = p_a(Ab) = p(Aba) = 0$$

となる。したがって、$(A/I)\bar{b} \subset \operatorname{Ker} q$ を得る。しかしながら、$\operatorname{Ker} q$ は A/I の 0 でない左イデアルを含まないから、$(A/I)\bar{b} = 0$ すなわち $b \in I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-53}}}{=} l(r(I))$ を得る。これで、$l(r(I)) \supset l(aA)$ となることが示された。

・$r(I) = Aa$ であること：

$r(I) = aA$ であることはわかったから、$a \in r(I)$ となる。$r(I)$ は両側イデアルであるから、$Aa \subset r(I)$ を得る。逆向きの包含関係が成り立つことを示す。そのためには、$l(Aa) \subset l(r(I))$ となることを示せばよい ($\because$ A は再消去性を持つから)。

$b \in l(Aa)$ を任意にとる。$b(Aa) = 0$ となるから、$ba = 0$ である。ここから先は、$l(r(I)) \supset l(aA)$ の証明と同様にして、$b \in I = l(r(I))$ となることがわかる。故に、$Aa \supset r(I)$ も示された。

「$\Longleftarrow$」の証明：

ある $a \in A$ に対して $r(I) = Aa = Aa$ であると仮定する。

このとき、$q : A/I \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$q(\bar{b}) = p(ba) \qquad (b \in A)$$

によって定義する。q は矛盾なく定義されている。

$\because$)

$b_1, b_2 \in A$ が $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$ を満たしているとする。このとき、$b_1 - b_2 \in I$ となる。

一方、$a \in r(I)$ であるから、$Ia = 0$ を得る。したがって、

$$(b_1 - b_2)a = 0$$

を得る。故に、

$$b_1 a = b_2 a$$

となり、これらを p で写した像も等しい。 □

q は $\boldsymbol{k}$-線形写像である。$\operatorname{Ker} q$ が 0 以外の A/I の左イデアルを含まないことを示せばよい (命題 1-24)。

J を A/I の左イデアルであって、$q(J) = 0$ を満たすものとする。$\bar{b} \in J$ を任意にとる。このとき、$(A/I)\bar{b} \subset J$ であるから、$q((A/I)\bar{b}) = 0$ である。よって、

$$p(Aba) = q((A/I)\bar{b}) = 0$$

を得る。これより、$Aba = 0$ すなわち $ba = 0$ が得られる ($\because$ $\operatorname{Ker} p$ には 0 でない A の左イデアルは含まれない)。したがって、

$$b \in l(aA) \underset{\substack{\uparrow \\ aA = r(I)}}{=} l(r(I)) \underset{\substack{\uparrow \\ A\text{ は再消去性を持つ}}}{=} I$$

となる。

$$\therefore \quad \bar{b} = 0$$

$$\therefore \quad J = 0$$

となる。これで、十分性も示された。 (Q.E.D.)

演習 1-55

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。
A の双対空間 A^* は

$$(a \cdot p)(x) = p(ap), \qquad (p \cdot b)(x) = p(bx) \qquad\qquad (a, b \in A,\ p \in A^*)$$

によって両側 (A, A)-加群になる (演習 1-14 参照)。この両側 (A, A)-加群を ${}_AA^*_A$ と書くことにする。
次の２つは同値であることを示せ。

① ${}_AA_A \cong {}_AA^*_A$　as (A, A)-bimodules
② ${}^\exists f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$：非退化な結合的双一次形式　s.t.　$f(a, b) = f(b, a)$ for ${}^\forall a, b \in A$

上の同値な条件を満たす代数 A は**対称代数** (*symmetric algebra*) と呼ばれる。

解；
① $\Longrightarrow$ ②の証明：
　両側 (A, A)-加群として、${}_AA_A \cong {}_AA^*_A$ ならば、両側 (A, A)-加群としての同型 $\alpha : {}_AA_A \longrightarrow {}_AA^*_A$ が存在する。
　α は左 A-加群 ${}_AA$ から A^*_A への同型写像とみなすことができるので、$f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を

$$f(a, b) = \langle \alpha(b), a \rangle, \qquad a, b \in A$$

によって定義すると、f は非退化な結合的双一次形式となる (補題 1-27)。
　任意の $a, b \in A$ に対して

$$\begin{aligned} f(b, a) &= \langle \alpha(a),\ b \rangle \\ &= \langle \alpha(1 \cdot a),\ b \rangle \\ &= \langle \alpha(1) \cdot a,\ b \rangle \\ &= \langle \alpha(1),\ ab \rangle && \alpha \text{ は右 } A\text{-加群準同型} \\ &= \langle b \cdot \alpha(1),\ a \rangle && \alpha \text{ は左 } A\text{-加群準同型} \\ &= \langle \alpha(b),\ a \rangle \\ &= f(a, b) \end{aligned}$$

となるので、f は対称である。
② $\Longrightarrow$ ①の証明：
　非退化で結合的な対称双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が存在すると仮定する。
　このとき、次の条件を満たす線形写像 $\alpha : A \longrightarrow A^*$ が一意的に定まる：

$$f(a, b) = \langle \alpha(b), a \rangle, \qquad a, b \in A.$$

α は左 A-加群 ${}_AA$ から A^*_A への同型写像である (補題 1-27)。
　さらに、任意の $a, b, c \in A$ に対して、

$$\langle \alpha(bc), a \rangle = f(a, bc) = f(bc, a) = f(b, ca) = f(ca, b) = \langle \alpha(b), ca \rangle = \langle \alpha(b) \cdot c, a \rangle$$

となるので、

$$\alpha(bc) = \alpha(b) \cdot c$$

が成り立つ。よって、α は右 A-加群 A_A から ${}_A A^*$ への準同型である。

以上より、α は両側 (A, A)-加群 ${}_A A_A$ から ${}_A A^*_A$ への同型写像である。 (Q.E.D.)

注意 1°：定義から「A：対称代数 $\Longrightarrow$ A：フロベニウス代数」が成り立つ。

注意 2°：例題 1-28 の 3 種類の代数

① $\boldsymbol{k}$ 上の全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$

② $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数

③ 有限群 G の $\boldsymbol{k}$ 上の群代数 $\boldsymbol{k}[G]$

はすべて対称代数である。①と③の代数が対称代数であることは、例題 1-28 の証明の中で与えられている双一次形式が対称であることから直ちにわかる。②の代数が対称代数であることを証明するには、分解体の概念が必要である (証明は演習 4-17 参照)。

注意 3°：補題 1-23 と同様のことが対称代数に対して成立する。

A, B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。このとき、

(1) A, B：対称代数 $\Longleftrightarrow$ $A \oplus B$：対称代数

(2) A, B：対称代数 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$：対称代数

(proof)

(1)「$\Longrightarrow$」の証明：

$f : A \longrightarrow A^*$ および $g : B \longrightarrow B^*$ をそれぞれ両側 (A, A)-加群の同型、両側 (B, B)-加群の同型とする。

このとき、写像 $h : A \oplus B \longrightarrow (A \oplus B)^*$ を

$$\langle h(a, b),\ (x, y) \rangle = \langle f(a),\ x \rangle + \langle g(b),\ y \rangle \qquad (a, b), (x, y) \in A \oplus B$$

によって定義する。補題 1-23(1) の証明により、h は左 $A \oplus B$-加群の同型写像である。

$(a, b), (c, d), (x, y) \in A \oplus B$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle h((a, b) \cdot (c, d)),\ (x, y) \rangle &= \langle h(a \cdot c, b \cdot d),\ (x, y) \rangle \\
&= \langle f(a \cdot c),\ x \rangle + \langle g(b \cdot d),\ y \rangle \\
&= \langle f(a) \cdot c,\ x \rangle + \langle g(b) \cdot d,\ y \rangle \\
&= \langle f(a),\ c \cdot x \rangle + \langle g(b),\ d \cdot y \rangle \\
&= \langle h(a, b),\ (c \cdot x, d \cdot y) \rangle \\
&= \langle h(a, b),\ (c, d) \cdot (x, y) \rangle \\
&= \langle h(a, b) \cdot (c, d),\ (x, y) \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、h は右 $A \oplus B$-加群準同型写像でもある。

故に、h は ${}_{A \oplus B}(A \oplus B)_{A \oplus B}$ から ${}_{A \oplus B}(A \oplus B)^*_{A \oplus B}$ への両側 $(A \oplus B, A \oplus B)$-加群の同型である。

「$\Longleftarrow$」の証明：

$h : A \oplus B \longrightarrow (A \oplus B)^*$ を両側 $(A \oplus B, A \oplus B)$-加群の同型とする。このとき、

$f : A \longrightarrow A^*$ を $\langle f(a),\ x\rangle = \langle h(a,0),\ (x,0)\rangle,\ a, x \in A$ によって定義し、

$g : B \longrightarrow B^*$ を $\langle g(b),\ y\rangle = \langle h(0,b),\ (0,y)\rangle,\ b, y \in B$ によって定義する。補題 1-23(1) の証明により、$f,\ g$ はそれぞれ左 A-加群の同型、左 B-加群の同型である。$f,\ g$ はそれぞれ右 A-加群準同型、左 B-加群準同型でもある。

$\because$)

f についてのみ示す (g についても同様に示すことができる)。

$a, a', x \in A$ に対して、

$$\begin{aligned}
\langle f(a,a'),\ x\rangle &= \langle h(a\cdot a',0),\ (x,0)\rangle \\
&= \langle h(a,0)\cdot(a',0),\ (x,0)\rangle \\
&= \langle h(a,0),\ (a',0)\cdot(x,0)\rangle \\
&= \langle h(a,0),\ (a'\cdot x,0)\rangle \\
&= \langle f(a),\ a'\cdot x\rangle \\
&= \langle f(a)\cdot a',\ x\rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。故に、f は右 A-加群準同型である。 □

(2) $\psi : A^* \otimes B^* \longrightarrow (A \otimes B)^*$ を

$$\langle \psi(p\otimes q),\ a\otimes b\rangle = p(a)q(b) \qquad (p \in A^*,\ q \in B^*,\ a \in A,\ b \in B)$$

によって定まる $\boldsymbol{k}$ 上の線形同型写像とする。補題 1-23(2) により ψ は左 $A \otimes B$-加群の同型である。

ψ は ${}_AA^* \otimes {}_BB^*$ から ${}_{A\otimes B}(A\otimes B)^*$ への右 $A \otimes B$-加群準同型でもある。

$\because$)

ψ が $A \otimes B$ の右作用を保つことを示す。

$p \in A^*,\ q \in B^*, a, x \in A,\ b, y \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \psi((p\otimes q)\cdot(x\otimes y)),\ a\otimes b\rangle &= \langle \psi((p\cdot x)\otimes(q\cdot y)),\ a\otimes b\rangle \\
&= (p\cdot x)(a)(q\cdot y)(b) \\
&= p(xa)q(yb) \\
&= \langle \psi(p\otimes q),\ xa\otimes yb\rangle \\
&= \langle \psi(p\otimes q),\ (x\otimes y)\cdot(a\otimes b)\rangle \\
&= \langle \psi(p\otimes q)\cdot(x\otimes y),\ a\otimes b\rangle \quad \square
\end{aligned}$$

故に、両側 $(A \otimes B, A \otimes B)$-加群として $({}_AA^*_A) \otimes ({}_BB^*_B) \cong {}_{A\otimes B}(A\otimes B)^*_{A\otimes B}$ が成り立つ。

A と B は対称代数であるから、

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}\alpha : {}_AA \longrightarrow A^*_A : \text{両側 } (A,A)\text{-加群の同型}\\&{}^{\exists}\beta : {}_BB \longrightarrow B^*_B : \text{両側 } (B,B)\text{-加群の同型}\end{aligned}$$

となる。このとき、線形同型写像

$$\alpha \otimes \beta : A \otimes B \longrightarrow A^* \otimes B^*$$

は $({}_AA) \otimes ({}_BB)$ から $(A_A)^* \otimes (B_B)^*$ への左 $A \otimes B$-加群準同型であり、$(A_A) \otimes (B_B)$ から $({}_AA)^* \otimes ({}_BB)^*$ への右 $A \otimes B$-加群準同型である (演習 1-8)。故に、両側 $(A \otimes B, A \otimes B)$-加群として $({}_AA_A) \otimes ({}_BB_B) \cong ({}_AA^*_A) \otimes ({}_BB^*_B)$ となる。

両側 $(A \otimes B, A \otimes B)$-加群として ${}_{A\otimes B}(A \otimes B)_{A\otimes B} = ({}_AA_A) \otimes ({}_BB_B)$ であるから、$\alpha \otimes \beta$ と ψ との合成により

$${}_{A\otimes B}(A \otimes B)_{A\otimes B} \cong {}_{A\otimes B}(A \otimes B)^*_{A\otimes B} \qquad \text{as } (A \otimes B, A \otimes B)\text{-bimodules}$$

が成り立つ。よって、$A \otimes B$ は対称代数である。 □

§8. 単射的加群と射影的加群

P を左 A-加群 (resp. 右 A-加群) とする。このとき、左 A 加群 (resp. 右 A-加群) の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

に対して $\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, L) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L, P) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N, P) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M, P) \longrightarrow 0$$

が常に完全になるとは限らない。前者が常に完全系列となるとき、P は射影的であると呼ばれ、後者が常に完全系列となるとき P は単射的であると呼ばれる。正則加群 ${}_AA$, A_A は射影的である。また、A が有限次元ならば、$({}_AA)^*$, $(A_A)^*$ は単射的である。ここでは、左 A-加群が射影的な加群、単射的な加群になるための同値な条件について述べる。

定義 1-14

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
左 A-加群準同型の完全系列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ が**分解する** (*split*)
$\iff$ ${}^{\exists}s : P \longrightarrow N$: 左 A-加群準同型 s.t. $g \circ s = \mathrm{id}_P$

補題 1-30

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。 左 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

に対して、次の 4 つは同値である。

(i) 上の完全系列は分解する。

(ii) $g_* : \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, P)$ は全射である。

(iii) $f(M)$ は N の直和因子である。

(iv) $N = f(M) \oplus P'$ かつ $P' \cong P$ となる N の部分加群 P' が存在する。

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：任意に $h \in \mathrm{Hom}_A(P, P)$ をとる。仮定により、

$$^\exists s : P \longrightarrow N \ \ \text{s.t.} \ \ g \circ s = \mathrm{id}_P$$

となる。このとき、$g \circ s \circ h = h$ であるから、$g_* : \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, P)$ は全射である。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：$\mathrm{id}_P \in \mathrm{Hom}_A(P, P)$ に対して、$g_*(s) = \mathrm{id}_P$ となる $s \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ が存在する。故に、補題の完全系列は分解する。

(i) $\Longrightarrow$ (iv)：$s \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ を $g \circ s = \mathrm{id}_P$ となる左 A-加群準同型とするとき、$N = f(M) \oplus s(P)$ となることを示す。

任意に $n \in N$ をとる。このとき、

$$n - (s \circ g)(n) \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$$

となるので、

$$N = f(M) + s(P)$$

であることがわかる。また、$n \in f(M) \cap s(P)$ とすると、$n = f(m),\ m \in M$ と書けるので、$g(n) = (g \circ f)(m) = 0$ である。一方、$n = s(p),\ p \in P$ と書けるので、$p = (g \circ s)(p) = g(n) = 0$ となる。故に、$n = 0$ である。これで、

$$N = f(M) \oplus s(P)$$

となることがわかった。

(iv) $\Longrightarrow$ (iii)：これは自明に成り立つ。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

$$^\exists U : N \text{ の部分加群} \ \ \text{s.t.} \ \ N = f(M) \oplus U$$

であるとする。このとき、$g|_U : U \longrightarrow P$ は同型である。

$\because$)

$$\mathrm{Ker}(g|_U) = (\mathrm{Ker} g) \cap U = (\mathrm{Im} f) \cap U = 0$$

となることから、$g|_U$ は単射である。また、g は全射なので、

$$^\forall p \in P,\ ^\exists n \in N \ \ \text{s.t.} \ \ g(n) = p$$

であるが、

$$n = f(m) + u \qquad (m \in M,\ u \in U)$$

と書けるので、

$$p = g(n) = g(f(m)) + g(u) = g(u)$$

となる。故に、$g|_U$ は全射である。 □

さて、$s : P \longrightarrow N$ を合成

$$P \xrightarrow{(g|_U)^{-1}} U \hookrightarrow N$$

により定義する。s は左 A-加群準同型であり、$g \circ s = \mathrm{id}_P$ を満たす。 (Q.E.D.)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とすると、

左 A-加群準同型の系列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ が完全

$\Longleftrightarrow$ 任意の左 A-加群 P に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, L)$ が完全

が成り立つ (演習 1-18 参照)。しかしながら、全射な左 A-加群準同型 $g : N \longrightarrow L$ に対して $g_* : \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, L)$ が全射になるとは限らないので、共変関手 $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ は完全ではない。そこで、次の定義を設ける。

定義 1-15

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群　とする。

P : **射影的** (*projective*) $\Longleftrightarrow$ 任意の全射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$f_* : \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N)$ は全射

注意 1°：上で説明したように、左 A-加群 P が射影的であるための必要十分条件は、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

が $\boldsymbol{k}$-線形写像の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, L) \longrightarrow 0$$

に写されることである。

注意 2°：右 A-加群に対しても、射影的という概念が同様にして定義される。

命題 1-31

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群　とする。このとき、 次の 3 つは同値である。

(i) P は射影的である。

(ii) 左 A-加群準同型の任意の完全系列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ は分解する。

(iii) P はある自由左 A-加群の直和因子である。

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

左 A-加群準同型の完全系列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ が与えられたとする。

g は全射であるから、仮定により、$g_* : \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, P)$ は全射である。補題 1-30 により、与えられた完全系列は分解する。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

任意の左 A-加群は自由左 A-加群の商として得られるから、次の形の完全系列が存在する。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0, \qquad F\text{：自由左 }A\text{-加群}$$

仮定により、この完全系列は分解する。したがって、補題 1-30 の証明から、P は F の直和因子に同型である。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

仮定により、

$$^{\exists}F : \text{自由左 }A\text{-加群}, \quad P' : F \text{ の部分加群 \ s.t. } \ F = P \oplus P'$$

となる。任意の全射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(F, M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{Hom}_A(F, N) \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Hom}_A(P, M) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P, N)
\end{tikzcd}$$

但し、$i : P \longrightarrow F$ は自然な全射である。

$$i^* : \mathrm{Hom}_A(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M), \qquad i^* : \mathrm{Hom}_A(F, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N)$$

は全射であるから、

$$f_* : \mathrm{Hom}_A(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F, N)$$

が全射であることを示せばよい。

$\beta \in \mathrm{Hom}_A(F, N)$ を任意にとる。$\{x_i\}_{i \in I}$ を F の基とする。f は全射であるから、各 i に対して、$\beta(x_i) = f(y_i)$ となる y_i が存在する。このとき、$\alpha(x_i) = y_i$ $(i \in I)$ を満たす左 A-加群準同型 α をとれば、

$$\beta = f \circ \alpha = f_*(\alpha)$$

となっていることがわかる。よって、$f_* : \mathrm{Hom}_A(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F, N)$ は全射である。上の可換図式により、$f_* : \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N)$ も全射である。 (Q.E.D.)

注意 1°：上の命題の (iii) で考えることにより、自由 A-加群は射影的であることがわかる。特に、左正則加群 ${}_AA$ および右正則加群 A_A は射影的である。

注意 2°：自由加群でない射影加群は沢山存在する。例えば、全行列代数 $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ の左イデアル

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を正則加群の部分加群とみなす。I は射影的な左 $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$-加群である。なぜならば、正則加群の部分加群

$$J := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, c, d \in \boldsymbol{k} \right\}$$

をとると $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}) = I \oplus J$ となるので、I は $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ の直和因子になるからである。しかしながら、I は自由でない。もし、I が左 $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$-加群として自由であったとすると、

$$A \in \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}),\ AX = O \implies A = O$$

を満たす $X \in I$ が存在しなければならない。$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

・$a = b = 0$ ならば、$A = I_2$ (単位行列)

・$a \neq 0$ ならば、$A = \begin{pmatrix} a^{-1}b & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

・$b \neq 0$ ならば、$A = \begin{pmatrix} -1 & ab^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

をとると $AX = O$ となる。このことは I には $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ 上の基は存在しないことを意味する。よって、左 $\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$-加群 I は自由ではない。

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とすると、

左 A-加群準同型の系列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ が完全

$\iff$ 任意の左 A-加群 V に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L, V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N, V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M, V)$ が完全

が成り立つ (演習 1-18 参照)。しかしながら、単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して $f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ が全射になるとは限らないので、反変関手 $\mathrm{Hom}_A(-,\ V)$ は完全ではない。そこで、次の定義を設ける。

定義 1-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群　とする。

V : **単射的** (*injective*) $\iff$ 任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ は全射

注意 1°： 上で説明したように、左 A-加群 V が単射的であるための必要十分条件は、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

が $\boldsymbol{k}$-線形写像の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L, V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N, V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M, V) \longrightarrow 0$$

に写されることである。

注意 2°：右 A-加群に対しても、単射的という概念が同様にして定義される。

命題 1-32

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群　とする。このとき、次の 3 つは同値である。

(i) V は単射的である。

(ii) 左 A-加群準同型の任意の完全系列 $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ は分解する。

(iii) V は、V を含む任意の左 A-加群の直和因子である。

この命題を示すため、左 A-加群の押し出しという概念を導入する。

A を 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、V, V_1, V_2 を左 A-加群とする。

$f_i : V \longrightarrow V_i \ (i = 1, 2)$ を左 A-加群準同型とする。

このとき、

$$X := (V_1 \times V_2)/\{(f_1(v), -f_2(v)) \mid v \in V\}$$

とおく。X は左 A-加群となる。X を組 (f_1, f_2) の**押し出し** (*pushout*) と呼ぶ。

補題 1-33(押し出しの普遍性)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$V,\ V_1,\ V_2$：左 A-加群

$f_i : V \longrightarrow V_i \ (i = 1, 2)$：左 A-加群準同型

X：組 (f_1, f_2) の押し出し　とする。

$g_i : V_i \longrightarrow X \ (i = 1, 2)$ を合成

$$V_i \xrightarrow{\varepsilon_i} V_1 \times V_2 \xrightarrow{\pi} X$$

によって定義する。ここで、ε_i は自然な単射、π は自然な全射である。このとき、図式

$$\begin{tikzcd} & V_1 \arrow[dr, "g_1"] & \\ V \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & X \\ & V_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

は可換になる。さらに、左 A-加群 Y と左 A-加群準同型 $g'_i : V_i \longrightarrow Y \ (i = 1, 2)$ に対し、図式

$$\begin{tikzcd} & V_1 \arrow[dr, "g'_1"] & \\ V \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \\ & V_2 \arrow[ur, "g'_2"'] & \end{tikzcd}$$

が可換であるならば、

$$^{\exists 1}\psi : X \longrightarrow Y : \text{左 } A\text{-加群準同型} \ \text{ s.t. } \ g'_i = \psi \circ g_i \ \ (i = 1, 2)$$

となる。

(proof)

任意の $v \in V$ に対して、

$$\begin{aligned}(g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_2)(v) &= (\pi \circ (\varepsilon_1 \circ f_1 - \varepsilon_2 \circ f_2))(v) \\ &= \pi(\varepsilon_1(f_1(v)) - \varepsilon_2(f_2(v))) \\ &= \pi(f_1(v), -f_2(v)) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、最初の図式は可換である。

次に、$g'_i : V_i \longrightarrow Y \ (i=1,2)$ を左 A-加群準同型であって、$g'_1 \circ f_1 = g'_2 \circ f_2$ を満たすものとする。

$\widetilde{\psi} : V_1 \times V_2 \longrightarrow Y$ を $\widetilde{\psi}(v_1, v_2) = g'_1(v_1) + g'_2(v_2)$ により定義する。$\widetilde{\psi}$ は左 A-加群準同型である。さらに、

$$\widetilde{\psi}(f_1(v), -f_2(v)) = g'_1(f_1(v)) - g'_2(f_2(v)) = 0 \quad \text{for } {}^\forall v \in V$$

となるので $\widetilde{\psi}$ は左 A-加群準同型 $\psi : X \longrightarrow Y$ を誘導する。

$$(\psi \circ g_i)(v_i) = \phi(\pi(\varepsilon_i(v_i))) = \widetilde{\psi}(\varepsilon_i(v_i)) = g'_i(v_i) \quad \text{for } \forall v \in V,\ i=1,2$$

より、ϕ は $\psi \circ g_i = g'_i \ (i=1,2)$ を満たす。

$\psi' : X \longrightarrow Y$ も $\psi' \circ g_i = g'_i \ (i=1,2)$ を満たす左 A-加群準同型とする。このとき、任意の $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi'(\pi(v_1, v_2)) &= \psi'(\pi(\varepsilon_1(v_1) + \varepsilon_2(v_2))) \\
&= \psi'(\pi(\varepsilon_1(v_1)) + \pi(\varepsilon_2(v_2))) \\
&= \psi'(g_1(v_1) + g_2(v_2)) \\
&= g'_1(v_1) + g'_2(v_2) \\
&= \widetilde{\psi}(v_1, v_2) \\
&= \psi(\pi(v_1, v_2))
\end{aligned}$$

となる。故に、$\psi' = \psi$ が示された。 (Q.E.D.)

補題 1-34

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$V,\ V_1,\ V_2$：左 A-加群
$f_i : V \longrightarrow V_i \ (i=1,2)$：左 A-加群準同型
X：組 (f_1, f_2) の押し出し　とする。
$g_i : V_i \longrightarrow X \ (i=1,2)$ を合成

$$V_i \xrightarrow{\varepsilon_i} V_1 \times V_2 \xrightarrow{\pi} X$$

によって定義する。ここで、ε_i は自然な単射、π は自然な全射である。このとき、
(1) g_1 は左 A-加群の同型 $\mathrm{Coker} f_1 \cong \mathrm{Coker} g_2$ を誘導する。
(2) f_1 が単射ならば、g_2 も単射である。

(proof)

(1) $\pi_2 : X \longrightarrow X/\mathrm{Im} g_2 = \mathrm{Coker} g_2$ を自然な射影とし、$\overline{g_1} : V_1 \longrightarrow \mathrm{Coker} g_2$ を合成

$$V_1 \xrightarrow{g_1} X \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Coker} g_2$$

により定義する。$\overline{g_1}$ は左 A-加群準同型の合成として左 A-加群準同型となる。$\overline{g_1}$ が全射であって、$\mathrm{Ker}\overline{g_1} = \mathrm{Im} f_1$ となることを示す。

① $\overline{g_1}$ が全射であること：X の任意の元は $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ として

$$\pi(v_1, v_2) = \pi(v_1, 0) + \pi(0, v_2) = g_1(v_1) + g_2(v_2)$$

と書ける。よって、Cokerg_2 の任意の元は

$$[\pi(v_1, v_2)] = [g_1(v_1)] = \overline{g_1}(v_1)$$

と書ける。ここで、$x \in X$ が属する Coker$g_2 = X/\mathrm{Im}g_2$ の同値類を $[x]$ と書いている。故に、$\overline{g_1}$ は全射である。

② Ker$\overline{g_1}$ = Imf_1 であること：

$$\begin{aligned} v_1 \in \mathrm{Im}f_1 &\implies v_1 = f_1(v) \ \ \text{for some } v \in V \\ &\implies \overline{g_1}(v_1) = \overline{g_1}(f_1(v)) \\ &\qquad\qquad\quad = [g_1(f_1(v))] \\ &\qquad\qquad\quad = [g_2(f_2(v))] \\ &\qquad\qquad\quad = 0 \\ &\qquad \therefore \mathrm{Im}f_1 \subset \mathrm{Ker}\overline{g_1}. \end{aligned}$$

逆に、

$$\begin{aligned} v_1 \in \mathrm{Ker}\overline{g_1} &\implies \overline{g_1}(v_1) = 0 \ \ \text{for some } v \in V \\ &\implies [g_1(v_1)] = 0 \\ &\implies g_1(v_1) \in \mathrm{Im}g_2 \\ &\implies {}^{\exists}v_2 \in V_2 \ \ \text{s.t.} \ \ g_1(v_1) = g_2(v_2) \\ &\implies {}^{\exists}v_2 \in V_2 \ \ \text{s.t.} \ \ \pi(v_1, 0) = \pi(0, v_2) \quad i.e. \ \ \pi(v_1, -v_2) = 0 \\ &\implies {}^{\exists}v_2 \in V_2 \ \ \text{s.t.} \ \ v_1 - v_2 \in \{(f_1(v), -f_2(v)) \ |v \in V\} \\ &\implies {}^{\exists}v_2 \in V_2, \ \ {}^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.} \ \ v_1 = f_1(v), \ v_2 = f_2(v) \\ &\qquad \therefore \ \mathrm{Ker}\overline{g_1} \subset \mathrm{Im}f_1. \end{aligned}$$

これで、②も示された。

①②より、$\overline{g_1}$ は同型 Coker$f_1 = V_1/\mathrm{Im}f_1 \cong$ Cokerg_2 を誘導する。

(2) $v_2 \in V_2$ が $g_2(v_2) = 0$ を満たしているとする。このとき、

$$(0, v_2) \in \{(f_1(v), -f_2(v)) \mid v \in V\}$$

であるから、

$${}^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.} \ \ f_1(v) = 0, \quad -f_2(v) = v_2$$

となる。f_1 は単射であるから、$v = 0$、故に $v_2 = 0$ を得る。よって、g_2 は単射である。

(Q.E.D.)

(proof of Proposition 1-32)

(ii) と (iii) が同値であることは直ちにわかる (補題 1-30 参照)。

(i) $\Longrightarrow$ (ii): V は単射的であるとする。

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を左 A-加群準同型の完全系列とする。

f は単射な左 A-加群準同型であるから、

$$f^* : \mathrm{Hom}_A(M, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, V)$$

は全射である。特に、

$${}^{\exists}t : M \longrightarrow V：\text{左 } A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad t \circ f = \mathrm{id}_V$$

となる。これは、完全系列 $(*)$ が分解することを意味する。

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。

任意に $h \in \mathrm{Hom}_A(M, V)$ をとり、組 (f, h) の押し出し P を考える：

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dr, "g_1"] & \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & P \\
 & V \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

補題 1-34 により、g_2 は単射になる。

完全系列

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\ g_2\ } P \xrightarrow{\ natural\ proj.\ } P/\mathrm{Im}g_2 \longrightarrow 0$$

に仮定を適用して、

$${}^{\exists}g : P \longrightarrow V：\text{左 } A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad g \circ g_2 = \mathrm{id}_V$$

となる。

$$t = g \circ g_1 : N \longrightarrow V$$

とおく。このとき、

$$t \circ f = g \circ g_1 \circ f = g \circ g_2 \circ h = \mathrm{id}_V \circ h = h$$

を得る。よって、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ は全射である。 (Q.E.D.)

補題 1-35

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：$\boldsymbol{k}$ 上の左 A-加群　とする。

$V^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, \boldsymbol{k})$ は次のようにして右 A-加群になる (演習 1-14 参照)：

$$(f \cdot a)(v) = f(a \cdot v) \qquad\qquad (f \in V^*,\ a \in A,\ v \in V)$$

V が有限次元のとき、以下のことが成り立つ。

(1) V：射影的 $\Longleftrightarrow$ V^*：単射的

(2) V：単射的 $\Longleftrightarrow$ V^*：射影的

(proof)

(1)・「$\Longrightarrow$」の証明：

V は射影的であるとする。

右 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow V^* \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

を考える。これは、左 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{{}^t g} M^* \xrightarrow{{}^t f} V^{**} \cong V$$

を誘導する。

V^* は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元なので、${}^t f$ は全射である。

$\because$)

$\{v_i\}_{i=1}^n$ を V の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とし、$\{v_i^*\}_{i=1}^n$ をその双対基底とする。
$f(v_i^*) = m_i \ (i = 1, \cdots, n)$ とおく。
${}^t f : M^* \longrightarrow V$ は

$$\langle {}^t f(\alpha),\ v_i^* \rangle = \langle \alpha,\ f(v_i^*) \rangle, \quad \alpha \in M^*,\ i = 1, \cdots, n$$

を満たす写像として特徴づけることができる。

${}^t f$ が全射であることを示す。まず、f は単射なので、$\{m_i\}_{i=1}^n$ は M の一次独立系である。したがって、これらに M のベクトルを付け加えて、M の基底 $\mathcal{B}$ を作ることができる。$m_i^* \in M^*$ を m_i に対して 1 の値をとり、m_i 以外の $\mathcal{B}$ の元については 0 の値をとるような線形写像とする。このとき、

$${}^t f(m_i^*) = v_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ。実際、

$$\langle {}^t f(m_i^*),\ v_j^* \rangle = \langle m_i^*,\ f(v_j^*) \rangle = \langle m_i^*,\ m_j \rangle = \delta_{ij}$$

となる。故に、${}^t f$ は全射である。 $\square$

以上から、左 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{{}^t g} M^* \xrightarrow{{}^t f} V \longrightarrow 0$$

が得られた。V は射影的なので、この完全系列は分解する。すなわち、

$$^\exists\ h : V \longrightarrow M^* : 左\ A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad {}^t f \circ h = \mathrm{id}$$

となる。このことから、

$${}^t h \circ {}^{tt} f = \mathrm{id}_{V^*}$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{}^{tt}f"'] & M \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[ddl, "{}^t h \circ \iota"] \\
M^{**} \arrow[d, "{}^t h"'] & \\
V^* &
\end{tikzcd}$$

ι は標準的な単射を表わす。左の図式から、

$$({}^t h \circ \iota) \circ f = \mathrm{id}_{V^*}$$

を得る。このことは、最初に与えた右 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow V^* \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

が分解することを意味する。命題 1-32 により、V^* は単射的である。

・「$\Longleftarrow$」の証明：
　V は単射的であるとする。
　右 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} V^* \longrightarrow 0$$

を考える。これが分解することを示せばよい（命題 1-31)。
　g は全射なので、$h : V \xrightarrow{\iota_V} V^{**} \xrightarrow{{}^t g} N^*$ は単射である。但し、ι_V は標準的な単射である。
　V は単射的であるから、$h^* : \mathrm{Hom}_A(N^*, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, V)$ は全射である。したがって、

$$^\exists r \in \mathrm{Hom}_A(N^*, V) \ \text{ s.t. } \ r \circ h = \mathrm{id}_V$$

となる。よって、

$${}^t\iota_V \circ {}^{tt}g \circ {}^t r = {}^t h \circ {}^t r = \mathrm{id}_{V^*}$$

を得る。ここで、図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad g \quad} & V^* \\ {\scriptstyle \iota_N}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota_{V^*}} \\ N^{**} & \xrightarrow[\quad {}^{tt}g \quad]{} & V^{***} \end{array}$$

は可換であり、

$${}^t\iota_V \circ \iota_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$$

が成り立つから、

$$g \circ \iota_N^{-1} \circ {}^t r = {}^t\iota_V \circ {}^{tt}g \circ {}^t r = \mathrm{id}_{V^*}$$

を得る。このことは、右 A-加群準同型の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} V^* \longrightarrow 0$$

が分解することを意味する。故に、V^* は射影的である。
(2) (1) において、V を V^* にとればよい。 (Q.E.D.)

注意：同様の結果は V を有限次元右 A-加群とした場合にも成り立つ。

命題 1-36
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
　　$\Longrightarrow ({}_AA)^*,\ (A_A)^*$：単射的

(proof)
　右正則加群 A_A および左正則加群 ${}_AA$ は射影的であるから、上の補題により、$({}_AA)^*$ および $(A_A)^*$ は単射的である。 (Q.E.D.)

注意：${}_AA$ が単射的でないような有限次元代数 A はフロベニウス代数ではないことが、この命題からわかる (このような具体例については演習 1-58 を参照)。

演習 1-56
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$\{V_i\}_{i\in I}$：左 A-加群の族　とする。次を示せ。

(1) $\prod_{i\in I} V_i$ ：単射的 $\iff$ 各 V_i $(i \in I)$ が単射的
(2) $\bigoplus_{i\in I} V_i$ ：射影的 $\iff$ 各 V_i $(i \in I)$ が射影的

解；

(1) $f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。また、直積 $V = \prod_{i\in I} V_i$ に附随する自然な射影を $\pi_i : V \longrightarrow V_i$ $(i \in I)$ とおく。

i. 必要性： $i \in I$ を任意に取り、固定する。$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V_i)$ が全射になることを示せばよい。

任意に $\xi \in \mathrm{Hom}_A(M, V_i)$ を取る。

直積の普遍性から、

$$^{\exists 1}\alpha : M \longrightarrow V \text{ 左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \pi_i \circ \alpha = \xi, \ \ \pi_j \circ \alpha = 0 \ \ (j \neq i)$$

となる。仮定により、

$$^{\exists}\beta : N \longrightarrow V \text{ 左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \beta \circ f = \alpha$$

となる。このとき、

$$\pi_i \circ \beta \circ f = \pi_i \circ \alpha = \xi$$

となり、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V_i)$ の全射性が証明された。

ii. 十分性：任意に $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M, V)$ を取る。各 $i \in I$ に対して、合成 $M \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\pi_i} V_i$ を考える。仮定により、

$$^{\exists}\beta_i : N \longrightarrow V_i \text{ ：左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \beta_i \circ f = \pi_i \circ \alpha$$

となる。直積の普遍性により、

$$^{\exists 1}\beta : N \longrightarrow V \text{ ：左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \pi_i \circ \beta = \beta_i \ \ (i \in I)$$

となる。このとき、任意の $i \in I$ に対して、

$$\pi_i \circ \beta \circ f = \pi_i \circ \alpha$$

となるので、直積の普遍性から $\beta \circ f = \alpha$ を得る。よって、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ は全射である。

(2) $f : M \longrightarrow N$ を全射な左 A-加群準同型とする。また、直和 $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ に附随する自然な単射を $j_i : V \longrightarrow V_i$ $(i \in I)$ とおく。

i. 必要性： $i \in I$ を任意に取り、固定する。$f_* : \mathrm{Hom}_A(V_i, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V_i, N)$ が全射になることを示せばよい。

任意に $\xi \in \mathrm{Hom}_A(V_i, N)$ を取る。

直和の普遍性から、

$$^{\exists 1}\alpha : V \longrightarrow N \text{ 左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \alpha \circ j_i = \xi, \ \alpha \circ j_k = 0 \ \ (k \neq i)$$

となる。仮定により、

$$^{\exists}\beta : V \longrightarrow M \text{ 左 } A\text{-加群準同型 s.t. } f \circ \beta = \alpha$$

となる。このとき、

$$f \circ \beta \circ j_i = \alpha \circ j_i = \xi$$

となり、$f_* : \mathrm{Hom}_A(V_i, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V_i, N)$ の全射性が証明された。
ii. 十分性：任意に $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(V, N)$ を取る。各 $i \in I$ に対して、合成 $V_i \xrightarrow{j_i} V \xrightarrow{\alpha} N$ を考える。仮定により、

$$^{\exists}\beta_i : V_i \longrightarrow M \text{ ：左 } A\text{-加群準同型 s.t. } f \circ \beta_i = \alpha \circ j_i$$

となる。直和の普遍性により、

$$^{\exists 1}\beta : V \longrightarrow M \text{ ：左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \beta \circ j_i = \beta_i \ \ (i \in I)$$

となる。このとき、任意の $i \in I$ に対して、

$$f \circ \beta \circ j_i = f \circ \beta_i = \alpha \circ j_i$$

となるので、直和の普遍性から $f \circ \beta = \alpha$ を得る。よって、$f_* : \mathrm{Hom}_A(V, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, N)$ は全射である。 (Q.E.D.)

注意：有限集合 I に対しては、直和加群 $\bigoplus_{i \in I} V_i$ は直積加群 $\prod_{i \in I} V_i$ と同型であるから、左 A-加群 $V_1, \cdots, V_n$ に対して、

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \text{ ：単射的} \iff \text{各 } V_i \ (i = 1, \cdots, n) \text{ が単射的}$$

となる。これから次が得られる。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：単射的な左 A-加群　とする。このとき、
$W \subset V$：左 A-加群としての直和因子 $\Longrightarrow$ W：単射的

$\because$)

この主張は演習 1-56(2) の帰結として直ちに得られるが、直接的な証明も与えておく。V は単射的なので、任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、写像

$$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V) \text{ は全射}$$

である。今、$V = W \oplus W'$ (左 A-加群としての直和分解) であるとし、$p : V \longrightarrow W$ をその直和分解に附随する W への射影とする。また、$i : W \hookrightarrow V$ を包含写像とする。このとき、仮定により、任意の $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M, W)$ に対して、

$$^{\exists}\alpha \in \mathrm{Hom}_A(N, V) \ \text{ s.t. } \ f^*(\alpha) = i \circ \beta$$

となる。したがって、次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[r, "\alpha"] & V = W \oplus W' \arrow[r, "p"] & W \\
W \arrow[urr, "i"] \arrow[urrr, "\mathrm{id}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

すなわち、$\alpha' := p \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_A(N, W)$ が $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M, W)$ の $f^* : \mathrm{Hom}_A(N, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, W)$ に関する 1 つの逆像になる。故に、W は単射的である。 □

演習 1-57

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、
左正則加群 ${}_AA$ が単射的 $\Longleftrightarrow$ 任意の有限生成射影的な左 A-加群は単射的
となることを示せ。

解；

左正則加群 ${}_AA$ は射影的である (命題 1-29 証明の下の注意参照) から、十分性が成り立つ。

必要性を示す。V を任意の有限生成射影的な左 A-加群とする。V は自由 A-加群の直和因子に同型である (命題 1-31 参照) が、V は有限生成なので、有限個の左正則加群の直和の直和因子に同型である。

∵)

$v_1, \cdots, v_n \in V$ を A 上の生成元とする。

F を $e_1, \cdots, e_n$ を基とする自由左 A 加群とし、$f : F \longrightarrow V$ を $f(e_i) = v_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たす左 A-加群準同型とする。f は全射であるから、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \overset{i}{\hookrightarrow} F \xrightarrow{\ f\ } V \longrightarrow 0$$

が得られる。V は射影的なので、この完全系列は分解する (命題 1-31(ii)$\Longrightarrow$(iii) の証明参照)。したがって、V は F の直和因子になる。 □

さて、${}_AA$ が単射的ならばその有限個の直和も単射的であるから (演習 1-56)、その直和因子 V も単射的になる (演習 1-56 の下注意参照)。これで、必要性も証明された。 (Q.E.D.)

演習 1-58

体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k} \right\}$$

について、左正則加群 ${}_AA$ は単射的でないことを示せ。

解；

M を $\{e_1, e_2\}$ を $\boldsymbol{k}$ 上の基底にもつベクトル空間とし、M への A の作用を

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot e_1 = \alpha e_1, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot e_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$$

によって定義する。$N := \boldsymbol{k} e_1$ は M の部分加群であるから、$f : N \longrightarrow M$ を包含写像とすると、f は単射な左 A-加群準同型である。ところが、$f^* : \mathrm{Hom}_A(M, {}_AA) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, {}_AA)$ は全射ではない。

実際、$\varphi : N \longrightarrow {}_AA$ を $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像とすると、$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(N, {}_AA)$ となる。もし、$\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_A(M, {}_AA)$ であって、$\tilde{\varphi} \circ f = \varphi$ となるものが存

在したと仮定すると、任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k}$ に対して

$$\beta\varphi(e_1) + \gamma\tilde{\varphi}(e_2) = \tilde{\varphi}(\beta e_1 + \gamma e_2) = \tilde{\varphi}(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} e_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(e_2)$$

が成り立つ。この等式は

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(e_2)$$

と同値である。したがって、$\tilde{\varphi}(e_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ とおくと、上式の第 $(1,1)$-成分を比較して

$$\beta = a(\alpha - \gamma)$$

を得る。任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k}$ に対してこの式を満たす a は存在しない。ここに、矛盾が生じた。こうして、f^* は全射でないことがわかり、左正則加群 ${}_AA$ は単射的でないことが示された。 (Q.E.D.)

演習 1-59

実数体 $\mathbb{R}$ 上の 3 変数多項式代数の商代数 $A := \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$ について考える。

$\varphi : A \oplus A \oplus A \longrightarrow A$ を

$$\varphi(1,0,0) = x,\ \varphi(0,1,0) = y,\ \varphi(0,0,1) = z$$

となる左 A-加群準同型とする。このとき、

$$P := \mathrm{Ker}\varphi$$

は射影的であることを示せ。

解；

$x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = 1$ なので、

$$Ax + Ay + Az = A$$

が成り立つ。よって、φ は全射である。

$\because$)

任意の $a \in A$ は $a = a_1x + a_2y + a_3z \ \ (a_1, a_2, a_3 \in A)$ と書くことができる。

このとき、

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, a_2, a_3) &= \varphi((a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3)) \\ &= a_1\varphi(1,0,0) + a_2\varphi(0,1,0) + a_3\varphi(0,0,1) \\ &= a_1x + a_2y + a_3z \\ &= a \end{aligned}$$

を得る。故に、φ は全射である。 □

したがって、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} A^{\oplus 3} \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

が得られる。A は射影的であるから、この完全系列は分解する (命題 1-31)。

したがって、

$$A^{\oplus 3} \cong P \oplus A \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。P は自由加群 $A^{\oplus 3}$ の直和因子であるから、射影的である。 (Q.E.D.)

注意：実は P は自由ではない (その証明は易しくない)。この事実は、2 次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ の接束 (tangent bundle) が自明でないことに関連している。

§9. 平坦加群と忠実平坦加群

P を右 A-加群とする。このとき、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

に対して $\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} P \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} P \otimes_A L \longrightarrow 0$$

は常に完全になるとは限らない。これが常に完全系列となるとき、P は平坦であると呼ばれる。また、この逆も成り立つとき、すなわち、左 A-加群の系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

が完全となることと $\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} P \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} P \otimes_A L \longrightarrow 0$$

が完全となることが同値であるとき、P は忠実平坦であると呼ばれる。任意の射影加群は平坦であり、任意の自由加群は忠実平坦である。ここでは、右 A-加群が平坦あるいは忠実平坦になるための同値な条件について述べる。

定義 1-17

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

(1) P：右 A-加群 とする。

P：**平坦** (*flat*) $\Longleftrightarrow$ 任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$\mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N$ は単射

(2) P：左 A-加群 とする。

P：**平坦** (*flat*) $\Longleftrightarrow$ 任意の単射な右 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$f \otimes_A \mathrm{id}_P : M \otimes_A P \longrightarrow N \otimes_A P$ は単射

注意 1°：左 A-加群 P について

$$P\text{：平坦} \iff P\text{：右 } A^{\mathrm{op}}\text{-加群として平坦}$$

が成り立つ。

(proof)

左 A-加群 P は平坦であると仮定する。

任意の単射な左 A^{op}-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ を考える。

M, N を通常の方法で右 A-加群とみなすと、f は単射な右 A-加群準同型となる。

P の平坦性により、$f \otimes_A \mathrm{id}_P : M \otimes_A P \longrightarrow N \otimes_A P$ は単射である。

ここで、$X = M, N$ に対して、線形同型写像 $\phi_X : X \otimes_A P \longrightarrow P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} X$ を

$$\phi_X(x \otimes_A p) = p \otimes_{A^{\mathrm{op}}} x \qquad (x \in X,\ p \in P)$$

によって定義することができ、次の図式が可換になることに注意しよう。

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_A P & \xrightarrow{\phi_M} & P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} M \\
{\scriptstyle f \otimes_A \mathrm{id}_P} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} f} \\
N \otimes_A P & \xrightarrow{phi_N} & P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} N
\end{array}$$

この可換図式から、$\mathrm{id}_P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} f : P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} M \longrightarrow P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} N$ も単射となることがわかる。故に、P は右 A^{op}-加群として平坦である。

同様の議論により、P が右 A^{op}-加群として平坦ならば、 P は左 A-加群として平坦であることがわかる。 □

注意 2°：左 A-加群準同型の系列 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ が完全

$\Longrightarrow$ 任意の右 A-加群 P に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A f} P \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A g} P \otimes_A L \longrightarrow 0$ が完全

が成り立つ (演習 1-19)。したがって、右 A-加群 P が平坦であるための必要十分条件は、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

が $\boldsymbol{k}$-線形写像の完全系列

$$0 \longrightarrow P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A f} P \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A g} P \otimes_A L \longrightarrow 0$$

に写されることである。同様のことが、平坦な左 A-加群についても成立する。

注意 3°：${}_A\mathbb{M}$ によって、左 A-加群を対象とし、それらの間の左 A-加群準同型を射とする圏を表わす。また、$Vect_{\boldsymbol{k}}$ によって、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間を対象とし、それらの間の $\boldsymbol{k}$-線形写像を射とする圏を表わす。右 A-加群 P に対して、

$$P \otimes_A - : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow Vect_{\boldsymbol{k}}$$

を

$$M：\text{左 } A\text{-加群} \longmapsto P \otimes_A M$$

$$f : M \longrightarrow N：\text{左 } A\text{-加群準同型} \longmapsto \mathrm{id}_P \otimes_A f$$

によって定義される共変関手とする。このとき

$$P：\text{平坦} \iff P \otimes_A -：\text{完全}$$

が成り立つ。

(proof)

P：平坦 $\iff$ 任意の左 A-加群準同型の完全系列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ に対して、

$P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} P \otimes_A N$ が完全

であることを示せばよい。十分性は明らかであるから、必要性について示す。

P は平坦であるとし、任意に左 A-加群準同型の完全系列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ を考える。

$N' := g(M)$ とおき、$g' : M \longrightarrow N'$ を g の値域 (= 終域) を N' に置き換えて得られる写像とする。

g' は全射であり、左 A-加群準同型の系列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N' \longrightarrow 0$ は完全である。したがって、左 A-加群準同型の完全系列

$$P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A g} P \otimes_A N' \longrightarrow 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を得る (演習 1-19)。$i : N' \longrightarrow N$ を包含写像とすると、これは単射な左 A-加群準同型であるから、P の平坦性により $\mathrm{id} \otimes_A i : P \otimes_A N' \longrightarrow P \otimes_A N$ は単射となる。

したがって、

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes_A g) \underset{\substack{\uparrow \\ g = i \circ g'}}{=} \mathrm{Ker}((\mathrm{id} \otimes_A i) \circ (\mathrm{id} \otimes_A g')) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{id} \otimes_A i \text{ は単射}}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes_A g') \underset{\substack{\uparrow \\ (*) \text{ の完全性}}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A f)$$

を得る。

故に、$P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A g} P \otimes_A N$ は完全である。 □

注意 4°：右正則加群 A_A および左正則加群 ${}_AA$ は平坦である。

(proof)

任意の左 A-加群 M に対して、

$$\phi_M : M \longrightarrow (A_A) \otimes_A M, \qquad \phi_M(x) = 1 \otimes_A x, \qquad x \in M$$

は線形同型写像である。この ϕ_M は、任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle \phi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_N} \\ (A_A) \otimes_A M & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A f} & (A_A) \otimes_A N \end{array}$$

を可換にする。したがって、

$$f：単射 \iff \mathrm{id} \otimes_A f：単射$$

が成り立つ。故に、A_A は平坦である。同様にして、${}_AA$ が平坦な左 A-加群であることを示すことができる。 □

次の補題は平坦加群を考える上で基本的である。

補題 1-37

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

(1) $\{P_i\}_{i\in I}$：右 A-加群の族 とする。このとき、

$$\bigoplus_{i\in I} P_i：平坦 \iff 任意の\ i \in I\ について、P_i\ は平坦$$

(2) 右 A-加群 P に対して、

$$P\ の任意の有限生成部分加群が平坦 \implies P：平坦$$

(proof)

(1) $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ とおく。

演習 1-21 により、任意の左 A-加群 M に対して、ベクトル空間としての自然な同型

$$\phi_M : P \otimes_A M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I}(P_i \otimes_A M)$$

が存在する。自然性から、任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_A M & \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A f} & P \otimes_A N \\ {\scriptstyle \phi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_N} \\ \bigoplus_{i \in I}(P_i \otimes_A M) & \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I}(\mathrm{id}_{P_i} \otimes_A f)} & \bigoplus_{i \in I}(P_i \otimes_A N) \end{array}$$

は可換である。これより、

P：平坦 $\iff$ 任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して $\bigoplus_{i \in I}(\mathrm{id}_{P_i} \otimes_A f)$ は単射

を得る。一般に、線形写像の族 $\{f_i\}_{i \in I}$ に対して、$\bigoplus_{i \in I} f_i$ が単射であることと任意の $i \in I$ について f_i が単射であることは同値であるから、

P：平坦 $\iff$ 任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して
$\mathrm{id}_{P_i} \otimes_A f$ はすべての $i \in I$ について単射
$\iff$ すべての $i \in I$ について P_i は平坦

となる。

(2) $f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。

$\xi := \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes_A m_i \in P \otimes_A M$ が $(\mathrm{id}_P \otimes_A f)(\xi) = 0$ を満たしていると仮定する。

P' を $p_1, \cdots, p_n$ によって生成される P の部分右 A-加群とする。P' は有限生成であるから、仮定により、$\mathrm{id}_{P'} \otimes_A f : P' \otimes_A M \longrightarrow P' \otimes_A N$ は単射である。

今、$\xi \in P' \otimes_A M$ であって

$$0 = (\mathrm{id}_P \otimes_A f)(\xi) = (\mathrm{id}_{P'} \otimes_A f)(\xi)$$

であるので、$\xi = 0$ を得る。こうして、$\mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N$ は単射であることが示された。

故に、P は平坦である。 (Q.E.D.)

注意：左 A-加群についても、補題と同様のことが成り立つ。

上の補題の (1) と正則加群の平坦性から、次の結果が直ちに得られる。

系 1-38

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。
任意の射影的な右 A-加群、左 A-加群は平坦である。

(proof)

右 A-加群の場合に示す (左 A-加群の場合も同様にして証明される)。

上の補題 1-37(1) と正則な右 A-加群が平坦である (定義 1-17 注意 3° 参照) ことから、自由な右 A-加群は平坦である。

射影加群は自由加群の直和因子である (命題 1-31) から、再び上の補題 1-37(1) により、射影加群は平坦である。 (Q.E.D.)

加群の平坦性は次のようにも言い換えることができる。

命題 1-39

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 A-加群　とする。

このとき、次は同値である。

(i) P は平坦である。

(ii) 次の形の任意の右 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

と任意の左 A-加群 M に対して、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow R \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M} Q \otimes_A M \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}_M} P \otimes_A M \longrightarrow 0$$

は完全である。

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明：系列

$$R \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M} Q \otimes_A M \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}_M} P \otimes_A M \longrightarrow 0$$

は常に完全である (演習 1-19) ので、$\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M : R \otimes_A M \longrightarrow Q \otimes_A M$ が単射であることを証明すればよい。

任意の左 A-加群は自由な左 A-加群の商として得られるから、

$$^{\exists}F：\text{自由な左 } A\text{-加群},\ ^{\exists}N：\text{左 } A\text{-加群} \ \ \text{s.t.} \ \ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0：\text{完全}$$

となる。次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
R \otimes_A N & \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N} & Q \otimes_A N & \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}_N} & P \otimes_A N \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_R \otimes_A i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Q \otimes_A i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_P \otimes_A i} \\
R \otimes_A F & \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F} & Q \otimes_A F & \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}_F} & P \otimes_A F \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_R \otimes_A p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Q \otimes_A p} & & \\
R \otimes_A M & \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M} & Q \otimes_A M & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

上の可換図式において、それぞれの横の系列、縦の系列は完全である (演習 1-19)。

さらに、

$$\begin{cases} \cdot\ \mathrm{id}_P \otimes_A i \text{ は単射 } (\because\ P \text{ の平坦性による}) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \cdot\ \varphi \otimes_A \mathrm{id}_F \text{ は単射 } (\because \text{ 自由加群は平坦}) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

$x \in R \otimes_A M$ が $(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M)(x) = 0$ を満たしているとする。

$\mathrm{id}_R \otimes_A p$ は全射であるから、

$$x = (\mathrm{id}_R \otimes_A p)(\tilde{x}) \qquad (\tilde{x} \in R \otimes_A F)$$

と書き表わすことができる。上の図式の左下の正方形部分の可換性から、

$$(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F)(\tilde{x}) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_Q \otimes_A p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_Q \otimes_A i)$$

となる。そこで、

$$(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F)(\tilde{x}) = (\mathrm{id}_Q \otimes_A i)(y) \qquad (y \in Q \otimes_A N)$$

と書く。上の図式の右上の正方形部分の可換性と真ん中の横の系列の完全性から

$$((\mathrm{id}_P \otimes_A i) \circ (\psi \otimes_A \mathrm{id}_N))(y) = ((\psi \otimes_A \mathrm{id}_F) \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F))(\tilde{x}) = 0$$

を得る。①により、$\mathrm{id}_P \otimes_A i$ は単射であるから、上式は $(\psi \otimes_A \mathrm{id}_N)(y) = 0$ に同値である。故に、

$$(\psi \otimes_A \mathrm{id}_N))(y) \in \mathrm{Ker}(\psi \otimes_A \mathrm{id}_N) = \mathrm{Im}(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N)$$

となる。したがって、

$$(\psi \otimes_A \mathrm{id}_N))(y) = (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N)(z) \qquad (z \in R \otimes_A N)$$

とおくことができる。このとき、上の図式の左上の正方形部分の可換性により、

$$\begin{aligned} ((\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_R \otimes_A i))(z) &= ((\mathrm{id}_Q \otimes_A i) \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N))(z) \\ &= (\mathrm{id}_Q \otimes_A i)(y) \\ &= (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F)(\tilde{x}) \end{aligned}$$

となる。②により、$\varphi \otimes_A \mathrm{id}_F$ は単射であるから、

$$\tilde{x} = (\mathrm{id}_R \otimes_A i)(z)$$

を得る。したがって、上の図式の一番左の縦の系列の完全性により

$$x = (\mathrm{id}_R \otimes_A p)(\tilde{x}) = ((\mathrm{id}_R \otimes_A p) \circ (\mathrm{id}_R \otimes_A i))(z) = 0$$

となる。こうして $\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M$ が単射であることがわかった。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明：

$i : N \longrightarrow M$ を単射な左 A-加群準同型とする。

$\mathrm{id}_P \otimes_A i : P \otimes_A N \longrightarrow P \otimes_A M$ が単射になることを示せばよい。

任意の右 A-加群は自由な右 A-加群の商として得られるから、

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0, \quad Q \text{ は自由}$$

という形の右 A-加群準同型の完全系列が存在する。

このとき、$\bar{M} := M/N$ とおき、$p : M \longrightarrow \bar{M}$ を自然な射影として、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_A N \arrow[r, "\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mathrm{id}_R \otimes_A i"'] & Q \otimes_A N \arrow[r, "\psi \otimes_A \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q \otimes_A i"] & P \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_P \otimes_A i"] & 0 \\
R \otimes_A M \arrow[r, "\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_R \otimes_A p"'] & Q \otimes_A M \arrow[r, "\psi \otimes_A \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q \otimes_A p"] & P \otimes_A M \arrow[r] & 0 \\
R \otimes_A \bar{M} \arrow[r, "\varphi \otimes_A \mathrm{id}_{\bar{M}}"] & Q \otimes_A \bar{M} & &
\end{tikzcd}$$

上の可換図式において、それぞれの横の系列、縦の系列は完全である (演習 1-19) ことに注意する。

$x \in P \otimes_A N$ が $(\mathrm{id}_P \otimes_A i)(x) = 0$ を満たしているとする。

$\psi \otimes_A \mathrm{id}_N$ は全射であるから、

$$x = (\psi \otimes_A \mathrm{id}_N)(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} \in P \otimes_A N$$

のように書くことができる。上の図式の右上の正方形部分の可換性と真ん中の横の系列の完全性から

$$(\mathrm{id}_Q \otimes_A i)(\tilde{x}) \in \mathrm{Ker}(\psi \otimes_A \mathrm{id}_M) = \mathrm{Im}(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M)$$

を得る。よって、

$$(\mathrm{id}_Q \otimes_A i)(\tilde{x}) = (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M)(y), \qquad y \in R \otimes_A M$$

と書くことができる。上の図式の左下の正方形部分の可換性と真ん中の縦の系列の完全性から、

$$((\varphi \otimes_A \mathrm{id}_{\bar{M}}) \circ (\mathrm{id}_R \otimes_A p))(y) = ((\mathrm{id}_Q \otimes_A p) \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M))(y) = ((\mathrm{id}_Q \otimes_A p) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes_A i))(\tilde{x}) = 0$$

を得る。ここで、(ii) の仮定から、$\varphi \otimes_A \mathrm{id}_{\bar{M}}$ は単射である。したがって、上式は $(\mathrm{id}_R \otimes_A p)(y) = 0$ に同値である。上の図式の一番左の縦の系列の完全性により、

$$y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_R \otimes_A p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_R \otimes_A i)$$

となる。そこで、

$$y = (\mathrm{id}_R \otimes_A i)(z), \qquad z \in R \otimes_A N$$

と書くと、上の図式の左上の正方形部分の可換性により

$$((\mathrm{id}_Q \otimes_A i) \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N))(z) = ((\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_R \otimes_A i))(z) = (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M)(y) = (\mathrm{id}_Q \otimes_A i)(\tilde{x})$$

となる。ここで、Q は自由加群であったから、平坦である (系 1-38)。したがって、$\mathrm{id}_Q \otimes_A i$ は単射となる。故に、上式は $(\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N)(z) = \tilde{x}$ に同値である。これより、

$$x = (\psi \otimes_A \mathrm{id}_N)(\tilde{x}) = ((\psi \otimes_A \mathrm{id}_N) \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}_N))(z) = 0$$

を得る ($\because$ 一番上にある横の列の完全性)。

以上により、$\mathrm{id}_P \otimes_A i$ が単射であることが示され、したがって、P が平坦であることが示された。 (Q.E.D.)

加群が平坦かどうかは、正則加群に関して平坦かどうかで判定することができる。これについて述べよう。

命題 1-40
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
P：右 A-加群　とする。
このとき、次は同値である。

(i) P は平坦である。

(ii) A の任意の有限生成左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して、写像

$$P \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow P, \quad p \otimes_A x \longmapsto p \cdot x$$

は単射である。

注意 1°：(ii) の写像の像は

$$P\mathfrak{A} = \{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \mid p_i \in P,\ x_i \in \mathfrak{A}\ (i = 1, \cdots, n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

であるから、(ii) の条件は

(ii)$'$ A の任意の有限生成左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して、写像

$$P \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow P\mathfrak{A}, \quad p \otimes_A x \longmapsto p \cdot x$$

は全単射である。

と書きかえることができる。

注意 2°：(ii) および (ii)$'$ において、「有限生成」という条件はなくてもかまわない (補題 1-37(2))。

上の命題の「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」は包含写像 $\iota : \mathfrak{A} \longrightarrow {}_AA$ とのテンソル積 $\mathrm{id}_P \otimes_A \iota$ を考えるだけで、簡単に証明することができる。「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」を証明するためには、少し準備が必要である。まず、平坦加群の概念を細分化して、M-平坦という概念を導入する。

定義 1-18
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
(1) M：左 A-加群、P：右 A-加群　　とする。
P：M**-平坦** (M-*flat*) $\iff$ 任意の単射な左 A-加群準同型 $f : M' \longrightarrow M$ に対して
$\mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A M' \longrightarrow P \otimes_A M$ は単射
(2) M：右 A-加群、P：左 A-加群　とする。
P：M**-平坦** (M-*flat*) $\iff$ 任意の単射な右 A-加群準同型 $f : M' \longrightarrow M$ に対して
$f \otimes_A \mathrm{id}_P : M' \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A P$ は単射

注意：右 A-加群 P について

$$P：\text{平坦} \iff \text{任意の左 } A\text{-加群 } M \text{ について、} M\text{-平坦}$$

が成り立つ。

補題 1-41

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：左 A-加群
N：M の部分加群　とする。このとき、
P：M-平坦な右 A-加群 $\Longrightarrow$ P：N-平坦かつ M/N-平坦

(proof)

・P が N-平坦であること：

$f : N' \longrightarrow N$ を任意の単射な左 A-加群準同型とする。

$i : N \longrightarrow M$ を包含写像とすると、合成 $i \circ f : N' \longrightarrow M$ は単射である。

P は M-平坦であるから、$\mathrm{id}_P \otimes_A (i \circ f) = (\mathrm{id}_P \otimes_A i) \circ (\mathrm{id}_P \otimes_A f)$ は単射となる。したがって、$(\mathrm{id}_P \otimes_A f)$ も単射となり、P は N-平坦である。

・P が M/N-平坦であること：

W を M/N の部分加群とし、$f : W \longrightarrow M/N$ を包含写像とする。P が M/N-平坦であることを示すには、$\mathrm{id}_P \otimes_A f$ が単射なことを示せばよい。

$\pi : M \longrightarrow M/N$ を自然な射影として、$M' := \pi^{-1}(W)$ とおく。M' は N を含む M の部分加群なので、左 A-加群の系列

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i'} M' \xrightarrow{\pi|_{M'}} W \longrightarrow 0$$

は完全である。但し、i' は包含写像を表わす。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & M' & \xrightarrow{\pi|_{M'}} & W & \longrightarrow & 0 \quad 完全 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}_N}\downarrow & & {\scriptstyle f|_{M'}}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{\pi} & M/N & \longrightarrow & 0 \quad 完全
\end{array}$$

ここで、$i : N \longrightarrow M$ は包含写像を表わす。

上の可換図式において、P とのテンソル積をとることにより、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
P \otimes_A N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A i'} & P \otimes_A M' & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A (\pi|_{M'})} & P \otimes_A W & \longrightarrow & 0 \quad 完全 \\
{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_A \mathrm{id}_N}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_A (f|_{M'})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_A f} & & \\
P \otimes_A N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A i} & P \otimes_A M & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A \pi} & P \otimes_A (M/N) & \longrightarrow & 0 \quad 完全
\end{array}$$

P は M-平坦であるから、$\mathrm{id} \otimes_A (f|_{M'}) : P \otimes_A M' \longrightarrow P \otimes_A M$ は単射である。

したがって、$\mathrm{id} \otimes_A f : P \otimes_A W \longrightarrow P \otimes_A (M/N)$ も単射である。

$\because$)

左 A-加群 L に対して、$F(L) := P \otimes_A L$、左 A-加群準同型 g に対して、$F(g) := \mathrm{id}_P \otimes_A g$ と書くことにする。

$x \in P \otimes_A W$ が $F(f)(x) = 0$ を満たしているとする。

$F(\pi|_{M'})$ は全射であるから、$x = F(\pi|_{M'})(y)$ となる $y \in F(M')$ が存在する。このとき、図式の右側の正方形部分の可換性から

$$(F(\pi) \circ F(f|_{M'}))(y) = (F(f) \circ F(\pi|_{M'}))(y) = F(f)(x) = 0$$

となるから、

$$F(f|_{M'})(y) \in \mathrm{Ker}F(\pi) = \mathrm{Im}F(i)$$

となる。

$$F(f|_{M'})(y) = F(i)(z), \qquad z \in F(N)$$

とおくと、図式の左側の正方形部分の可換性から

$$F(i)(z) = (F(f|_{M'}) \circ F(i'))(z)$$

となる。したがって、

$$F(f|_{M'})(y) = (F(f|_{M'}) \circ F(i'))(z)$$

が成り立つが、$F(f|_{M'})$ は単射であるので、

$$y = F(i')(z) \in \mathrm{Im}F(i') = \mathrm{Ker}F(\pi|_{M'})$$

を得る。よって、

$$x = F(\pi|_{M'})(y) = 0$$

となり、$\mathrm{Ker}F(f) = 0$ が示された。故に、$F(f)$ は単射である。 $\square$

これで、P が M/N-平坦であることが証明された。 (Q.E.D.)

補題 1-42

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$\{M_i\}_{i \in I}$：左 A-加群の族
P：右 A-加群　とする。このとき、
任意の $i \in I$ に対して、P は M_i-平坦 $\Longrightarrow$ P：$\bigoplus_{i \in I} M_i$-平坦

(proof)

証明を 3 段階に分ける。

① $I = \{1, 2\}$ の場合：

P を $M = M_1 \oplus M_2$-平坦な右 A-加群とする。

M' を M の任意の部分加群とし、$f : M' \longrightarrow M$ を単射な左 A-加群準同型とする。

$\mathrm{id}_P \otimes_A f$ が単射になることを示す。

$i_1 : M_1 \longrightarrow M$ を $i_1(x_1) = (x_1, 0),\ x_1 \in M_1$ によって定義される標準的な単射とし、$p_2 : M \longrightarrow M_2$ を $p_2(x_1, x_2) = x_2,\ (x_1, x_2) \in M$ によって定義される標準的な全射とする。左 A-加群の系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

は完全である。

$M_1 := i_1^{-1}(M'),\ M_2 := p_2(M')$ とおき、$i'_1 := i_1|_{M'_1} : M'_1 \longrightarrow M',\ p'_2 := p_2|_{M'} : M' \longrightarrow M_2$ とおくと、左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M'_1 \xrightarrow{i'_1} M' \xrightarrow{p'_2} M'_2 \longrightarrow 0$$

を得る。

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'_1 \arrow[r, "i'_1"] \arrow[d, "j_1"'] & M' \arrow[r, "p'_2"] \arrow[d, "f"'] & M'_2 \arrow[r] \arrow[d, "j_2"] & 0 & \text{完全} \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i_1"] & M \arrow[r, "p_2"] & M_2 \arrow[r] & 0 & \text{完全}
\end{tikzcd}$$

但し、上の図式において、j_1, j_2 は包含写像である。

P とのテンソル積をとることにより、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_A M'_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_A i'_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes_A j_1"'] & P \otimes_A M' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_A p'_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes_A f"'] & P \otimes_A M'_2 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes_A j_2"] & 0 & \text{完全} \\
P \otimes_A M_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_A i_1"] & P \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_A p_2"] & P \otimes_A M_2 \arrow[r] & 0 & \text{完全}
\end{tikzcd}$$

P は M_i-平坦 $(i = 1, 2)$ であったから、$\mathrm{id} \otimes_A j_1 : P \otimes_A M'_1 \longrightarrow P \otimes_A M_1$ および $\mathrm{id} \otimes_A j_2 : P \otimes_A M'_2 \longrightarrow P \otimes_A M_2$ は単射である。

また、標準的な射影 $p_1 : M \longrightarrow M_1,\ p_1(x_1, x_2) = x_1,\ (x_1, x_2) \in M$ に対して、$(\mathrm{id} \otimes_A p_1) \circ (\mathrm{id} \otimes_A i_1) = \mathrm{id}$ となるから、$\mathrm{id} \otimes_A i_1 : P \otimes_A M_1 \longrightarrow P \otimes_A M$ は単射である。

$\mathrm{id} \otimes_A j_1,\ \mathrm{id} \otimes_A j_2,\ \mathrm{id} \otimes_A i_1$ の単射性と上の図式の可換性から、$\mathrm{id} \otimes_A f$ の単射性が従う。

$\because$)

> 左 A-加群 L に対して、$F(L) := P \otimes_A L$、左 A-加群準同型 g に対して、$F(g) := \mathrm{id}_P \otimes_A g$ と書くことにする。
>
> $x \in F(M')$ が $F(f)(x) = 0$ を満たしているとする。
>
> $$(F(j_2) \circ F(p'_2))(x) = (F(p_2) \circ F(f))(x) = 0$$
>
> であるから、$F(j_2)$ の単射性により $F(p'_2)(x) = 0$ を得る。$\mathrm{Ker}F(p'_2) = \mathrm{Im}F(i'_1)$ であるから、
>
> $$x = F(i'_1)(y), \qquad y \in F(M'_1)$$
>
> と書くことができる。すると、
>
> $$0 = F(f)(x) = (F(f) \circ F(i'_1))(y) = (F(i_1) \circ F(j_1))(y)$$
>
> となる。$F(i_1),\ F(j_1)$ は単射であったから、上式は $y = 0$ となることを意味する。
>
> 故に、$x = F(i'_1)(y) = 0$ となり、$F(f)$ は単射である。 □

こうして、P が $M_1 \oplus M_2$-平坦であることが証明された。

② I が有限集合の場合：

$I = \{1, \cdots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおいて、数学的帰納法を用いて証明する。

. $n=1$ のとき：証明すべきことは何もない。

. $n>1$ であるとし、$n-1$ のとき補題は正しいと仮定する。

$M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ とおき、P が M-平坦であることを証明する。

$N:=\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ とおくと、帰納法の仮定により、P は N-平坦である。

$M=N\oplus M_n$ であるから、①により、P は M-平坦であることがわかる。

これで、帰納法が完成した。

③ I が一般の場合：

補題 1-37(2) により、$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ の任意の有限生成部分加群 M' について、P が M'-平坦であることを示せばよい。そのためには、包含写像 $f: M' \longrightarrow M$ に対して、$\mathrm{id}_P \otimes_A f$ が単射になることを証明すればよい。

M' が M の有限生成部分加群ならば、ある有限集合 $J\subset I$ が存在して、$M'\subset \bigoplus_{i\in J} M_i$ となることに注意する。

$\because$)

$x_1,\cdots,x_n\in M'$ を M' の A 上の生成元とする。

各 $k=1,\cdots,n$ に対して、x_k を $x_k=(m_{k,i})_{i\in I},\ m_{k,i}\in M_i$ と表わすことにすると、直和の定義から、

$$J_k := \{i\in I \mid m_{k,i}\neq 0\}$$

は I の有限部分集合である。そこで、

$$J=\bigcup_{k=1}^{n} J_k$$

とおけば、J は I の有限部分集合であって、すべての $k=1,\cdots,n$ に対して、$x_k\in \bigoplus_{i\in J} M_i$ とみなすことができる。 $\square$

したがって、f は包含写像 $g: M' \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i$ と包含写像 $h: \bigoplus_{i\in J} M_i \longrightarrow M$ との合成に分解できる：$f=h\circ g$ 。

②により、P は $\bigoplus_{i\in J} M_i$-平坦であるから、$\mathrm{id}_P\otimes_A g: P\otimes_A M' \longrightarrow P\otimes_A (\bigoplus_{i\in J} M_i)$ は単射である。

一方、$\bigoplus_{i\in J} M_i$ は M の直和因子であるから、$\mathrm{id}_P\otimes_A h: P\otimes_A (\bigoplus_{i\in J} M_i) \longrightarrow P\otimes_A M$ は単射である

$\because$)

$M_J:=\bigoplus_{i\in J} M_i,\ N_J:=\bigoplus_{i\in I-J} M_i$ とおくと、演習 1-21(1) から、自然な同型 $P\otimes_A M = P\otimes_A (M_J\oplus N_J) \cong (P\otimes_A M_J)\oplus(P\otimes_A N_J)$ が存在する。$h': N_J \longrightarrow M$ を直和 $M=M_J\oplus N_J$ に附随する標準的な単射とすると、演習 1-21(1) の証明から、組 $(P\otimes_A M, \{\mathrm{id}_P\otimes_A h,\ \mathrm{id}_P\otimes_A h'\})$ は $\{M_J\oplus N_J,\ P\otimes_A M_J\}$ の直和であることがわか

る。特に、$\mathrm{id}_P \otimes_A h$ はその直和分解に附随する標準的な単射であるから、もちろん、単射である。 $\square$

したがって、$\mathrm{id}_P \otimes_A f = (\mathrm{id}_P \otimes_A h) \circ (\mathrm{id}_P \otimes_A g)$ も単射である。こうして、I が一般の場合にも、補題は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Proposition 1-40)
(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明：
$\mathfrak{A}$ を A の左イデアルとする。
P は平坦なので、包含写像 $\iota : \mathfrak{A} \longrightarrow {}_AA$ に対して、

$$P \otimes_A \mathfrak{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A \iota} P \otimes_A ({}_AA) \cong P$$

は単射である。この合成写像は命題の (ii) の写像と一致しているので、(ii) が成り立つ。
(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明：
任意の左 A-加群 M に対して、P が M-平坦となることを示せばよい。
まず、仮定により、P は ${}_AA$-平坦である。
したがって、F を自由な左 A-加群とすると、補題 1-42 により、P は F-平坦である。
任意の左 A-加群 M は自由な左 A-加群の商として得られるから、補題 1-41 により、P は M-平坦である。 (Q.E.D.)

今までは、左 A-加群準同型の完全系列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ に対して $P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} P \otimes_A N$ が完全となる右 A-加群 P について考察してきた。ここからは、この逆も成り立つような右 A-加群について考察しよう。

命題 1-43
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
P：右 A-加群　とする。
次の 3 つは同値である。

(i) 左 A-加群準同型 $f : L \longrightarrow M,\ g : M \longrightarrow N$ に対して
$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ $P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A g} P \otimes_A N$ が完全となる。

(ii) P は平坦であって、任意の左 A-加群 M に対して $P \otimes_A M = 0 \implies M = 0$

(iii) P は平坦であって、任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$$\mathrm{id}_P \otimes_A f = 0 \implies f = 0$$

上の 3 つの同値な条件 (のうちの 1 つ) が満たされるとき、P は**忠実平坦** (*faithfully flat*) であるという。

(proof)
(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

(i) における「$\Longrightarrow$」の部分は $P \otimes_A -$ が完全な共変関手であることを意味するから、P は平坦である (定義の下の注意 3°)。

M を任意の左 A-加群とし、$P \otimes_A M = 0$ であると仮定する。

このとき、$O := \{0\}$ を零加群とすると、完全系列 $P \otimes_A O \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A g} P \otimes_A O$ が得られる。ここで、f, g は自明に定義される左 A-加群準同型である。

仮定により、$O \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} O$ は完全である。したがって、

$$0 = \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g = M$$

を得る。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

$f : M \longrightarrow N$ を左 A-加群準同型とし、$\mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N$ は 0-写像であるとする。

$N' := f(N)$ とおき、f の値域を N' に制限することにより得られる写像 $M \longrightarrow N'$ を f' とおく。

f' は全射であるから、$\mathrm{id} \otimes_A f' : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N'$ は全射である。故に、$i : N' \longrightarrow N$ を包含写像とすると、

$$0 = \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A f) \underset{\substack{\uparrow \\ f = i \circ f'}}{=} \mathrm{Im}((\mathrm{id} \otimes_A i) \circ (\mathrm{id} \otimes_A f')) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{id} \otimes_A f' \text{ は全射}}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i)$$

となる。

故に、$\mathrm{id} \otimes_A i : P \otimes_A N' \longrightarrow P \otimes_A N$ は 0-写像となる。

一方、P は平坦であって、i は単射であるから、$\mathrm{id} \otimes_A i : P \otimes_A N' \longrightarrow P \otimes_A N$ は単射である。

これより、$P \otimes_A N' = 0$ であることがわかる。

ここで (ii) の仮定を用いると、$N' = 0$ が得られる。こうして、$f = 0$ が証明された。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

P の平坦性により、(i) における「$\Longrightarrow$」の部分が従う (定義 1-17 の下の注意 3°)。

(i) における「$\Longleftarrow$」の部分を示す。

左 A-加群準同型 $f : L \longrightarrow M,\ g : M \longrightarrow N$ に対して

$$P \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A f} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A g} P \otimes_A N \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が完全であると仮定する。

$$\mathrm{id} \otimes_A (g \circ f) = (\mathrm{id} \otimes_A g) \circ (\mathrm{id} \otimes_A f) = 0 : P \otimes_A L \longrightarrow P \otimes_A N$$

であるから、仮定により、

$$g \circ f = 0 : L \longrightarrow N$$

を得る。したがって、

$$\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$$

となる。逆向きの包含関係も成り立つことを示すためは、自然な射影 $p : \mathrm{Ker} g \longrightarrow \mathrm{Ker} g / \mathrm{Im} f$ が 0-写像であることを示せばよい。そのためには、仮定 (iii) により、$\mathrm{id} \otimes_A p : P \otimes_A \mathrm{Ker} g \longrightarrow P \otimes_A (\mathrm{Ker} g / \mathrm{Im} f)$ が 0-写像であることを示せばよい。

完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}f \xrightarrow{i} \mathrm{Ker}g \xrightarrow{p} \mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f \longrightarrow 0$$

を考える。但し、i は包含写像である。

P は平坦であるから、次の $\boldsymbol{k}$-線形写像の系列は完全である：

$$0 \longrightarrow P \otimes_A \mathrm{Im}f \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A i} P \otimes_A \mathrm{Ker}g \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A p} P \otimes_A (\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f) \longrightarrow 0.$$

したがって、ベクトル空間としての同型

$$P \otimes_A (\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f) \cong (P \otimes_A \mathrm{Ker}g)/\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i)$$

を得る。これより、

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i) = P \otimes_A \mathrm{Ker}g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

が示されれば、$P \otimes_A (\mathrm{Ker}g/\mathrm{Im}f) = 0$、すなわち、$\mathrm{id} \otimes_A p = 0$ であることがわかる。以下、$(**)$ を証明する。

$j : \mathrm{Ker}g \longrightarrow M$ と $k : \mathrm{Im}f \longrightarrow M$ を包含写像とする。$k = j \circ i$ が成り立つ。よって、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_A \mathrm{Im}f \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes_A i"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes_A k"'] & & P \otimes_A \mathrm{Ker}g \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes_A j"] \\
& P \otimes_A M &
\end{tikzcd}$$

P の平坦性により、写像 $\mathrm{id} \otimes_A j$ は単射なので、$(**)$ を証明するためには

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A k) = \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A j)$$

を示めせばよいが、これは次からわかる。

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A k) \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A f) \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes_A g) \underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A j)$$

ここで、(1)(2)(3) は以下の理由で成立する。

(1) f' を f の値域を $\mathrm{Im}f$ に置き換えることにより得られる写像 $L \longrightarrow \mathrm{Im}f$ とすると、$f = k \circ f'$ となる。f' は全射なので、$\mathrm{id} \otimes_A f' : P \otimes_A L \longrightarrow P \otimes_A \mathrm{Im}f$ も全射である (演習 1-19)。したがって、$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A k) = \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A f)$ が成り立つ。

(2) $(*)$ の完全性による。

(3) P の平坦性により、完全系列 $\mathrm{Ker}g \xrightarrow{j} M \xrightarrow{g} N$ は完全系列 $P \otimes_A \mathrm{ker}g \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A j} P \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_A g} P \otimes_A N$ に写されることによる。

以上で、「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」の証明も終わった。 (Q.E.D.)

注意 1°：忠実平坦という言葉は「忠実に平坦」の略であり、「忠実かつ平坦」と同義ではない。ここで、右 A-加群 P が**忠実** (*faithful*) であるとは、$a \in A,\ P \cdot a = 0 \implies a = 0$ が満たされるときをいう (第３章第９節において、ある重要なクラスの代数の忠実加群の構造が詳しく扱われる)。常に、

$$P：\text{忠実平坦} \implies P：\text{忠実かつ平坦}$$

が成り立つ (演習 1-64) が、逆が成り立つとは限らない (演習 1-65)。

注意 2°：左 A-加群についても、上の補題と同様の結果が成り立ち、忠実平坦という概念が定義される。さらに、P が左 A-加群のとき、

$$P\text{：左 } A\text{-加群として忠実平坦} \iff P\text{：右 } A^{\mathrm{op}}\text{-加群として忠実平坦}$$

が成り立つ。

(proof)

P が左 A-加群として忠実平坦であるとすると、上の命題の左 A-加群版における (ii) から、

(※)「P は左 A-加群として平坦であり、$M \otimes_A P = 0$ を満たす右 A-加群 M は零加群 0 に限る。」

P は左 A-加群として平坦なので、定義 1-17 の下の注意 1° から、P は右 A^{op}-加群として平坦である。

M を左 A^{op}-加群であって、$P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} M = 0$ を満たしているものとする。

線形同型写像 $\phi : M \otimes_A P \longrightarrow P \otimes_{A^{\mathrm{op}}} M$ が $\phi(m \otimes_A p) = p \otimes_{A^{\mathrm{op}}} m,\ m \in M,\ p \in P$ によって定義されるから、$M \otimes_A P = 0$ を得る。ここで (※) を適用すれば、$M = 0$ が得られる。よって、上の命題の (ii) から、P は右 A^{op}-加群として忠実平坦である。

同様の議論により、P が右 A^{op}-加群として忠実平坦ならば、左 A-加群としても忠実平坦であることが証明される。 □

注意 3°：P が忠実平坦な右 A 加群であるとき、左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ について

$$f\text{：単射 (resp. 全射、全単射)} \iff \mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N\text{：単射 (resp. 全射、全単射)}$$

が成り立つ (上の命題の (i) の条件による)。

次の命題は平坦加群が忠実平坦であるかどうかをチェックするときに有効である。

命題 1-44

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：平坦な右 A-加群　とする。このとき

$$P\text{：忠実平坦} \iff A \text{ の任意の極大左イデアル } \mathfrak{m} \text{ に対して } P\mathfrak{m} \neq P$$

(proof)

・「$\Longrightarrow$」の証明：

P を忠実平坦な右 A-加群とする。$P \neq 0$ である (命題 1-43(ii))。

$\mathfrak{m}$ を A の極大左イデアルとする。

商代数 $A/\mathfrak{m}$ を左正則加群 ${}_AA$ の商代数とみなす。このとき、

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (A/\mathfrak{m} \neq 0 \text{ および } P \text{ は忠実平坦})}}{0 \neq} P \otimes_A (A/\mathfrak{m}) \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{演習 1-12})}}{\cong} P/P\mathfrak{m} \qquad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

となる。故に、$P \neq P\mathfrak{m}$ となる。

・「$\Longleftarrow$」の証明：

P は平坦な右 A-加群であって、任意の極大左イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$P\mathfrak{m} \neq P$ を満たしていると仮定する。

P が忠実平坦であることを示すには、0 でない任意の左 A-加群 M について、$P \otimes_A M \neq 0$ となることを証明すればよい。

$M \neq 0$ なので、$0 \neq x \in M$ が存在する。このとき、

$$^{\exists}\mathfrak{A} : A \text{ の左イデアル} \quad \text{s.t.} \quad Ax \cong A/\mathfrak{A} \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる (左 A-加群準同型 $A \longrightarrow Ax,\ a \longmapsto ax,\ a \in A$ に準同型定理を適用)。

$Ax \neq 0$ ゆえ、$\mathfrak{A} \neq A$ となる。したがって、$\mathfrak{A}$ を含む A の極大左イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する。

仮定により、$P\mathfrak{m} \neq P$ なので、$P\mathfrak{A} \underset{\substack{\uparrow \\ (\because\ P\mathfrak{A} \subset P\mathfrak{m} \subsetneqq P)}}{\neq} P$ となる。

ここで、P は平坦であるから、$P \otimes_A M$ は

$$P \otimes_A Ax \cong P \otimes_A (A/\mathfrak{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-12}}}{\cong} P/P\mathfrak{A} \neq 0$$

を部分加群として含む。

故に、$P \otimes_A M \neq 0$ となる。したがって、P は忠実平坦である。 (Q.E.D.)

例題 1-45

A：体 $\boldsymbol{k}$ の代数とする。

(1) 0 でない任意の自由右 A-加群は忠実平坦である。

(2) P：平坦な右 A-加群、Q：忠実平坦な右 A-加群 $\Longrightarrow$ $P \oplus Q$：忠実平坦

(proof)

(1) まず、自由右 A-加群は平坦であることに注意する ()。これより、0 でない自由右 A-加群 F が忠実平坦であることを示すには、任意の極大左イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$F\mathfrak{m} \neq F$ となることを示せばよい (命題 1-44)。

$\mathfrak{m}$ を A の任意の極大左イデアルであるとする。

$A\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \neq A$ であるから、右正則加群 A_A は忠実平坦である。

一般に、$F(\neq 0)$ を自由右 A-加群とし、$F = \bigoplus_{i \in I} x_i A$ と表わす。

各 $i \in I$ に対して $x_i A \cong A_A$ であるから、$x_i A$ は忠実平坦である。したがって、

$$(x_i A)\mathfrak{m} \neq x_i A$$

が成り立つ。よって、$F\mathfrak{m} \neq F$ となり、F は忠実平坦であることがわかる。

(2) 平坦加群の直和はまた平坦であるから、$P \oplus Q$ は平坦である。

$\mathfrak{m}$ を A の任意の極大左イデアルであるとする。このとき、Q の忠実平坦性により

$$(P \oplus Q)\mathfrak{m} = P\mathfrak{m} \oplus Q\mathfrak{m} \subset P \oplus Q\mathfrak{m} \subsetneqq P \oplus Q$$

となる。故に、命題 1-44 により、$P \oplus Q$ は忠実平坦である。 (Q.E.D.)

演習 1-60

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：平坦な右 A-加群

N：P の部分加群　とする。このとき

P/N：平坦 $\iff$ A の任意の有限生成左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して $N \cap P\mathfrak{A} = N\mathfrak{A}$ が成り立つことを示せ。

解；

$\bar{P} = P/N$ とおき、$\pi : P \longrightarrow \bar{P}$ を自然な射影とする。

$i : N \longrightarrow P$ を包含写像とする。

$\mathfrak{A}$ を (有限生成) 左イデアルとする。右 A-加群準同型の系列

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} \bar{P} \longrightarrow 0$$

は完全であるから、$\boldsymbol{k}$-線形写像の系列

$$N \otimes_A \mathfrak{A} \xrightarrow{i \otimes_A \mathrm{id}} P \otimes_A \mathfrak{A} \xrightarrow{\pi \otimes_A \mathrm{id}} \bar{P} \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow 0$$

は完全である。したがって、$\pi \otimes_A \mathrm{id} : P \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow \bar{P} \otimes_A \mathfrak{A}$ は、線形同型写像

$$P \otimes_A \mathfrak{A}/\mathrm{Im}(i \otimes_A \mathrm{id}) \longrightarrow \bar{P} \otimes_A \mathfrak{A}$$

を誘導する。一方、全射な線形写像

$$\pi' := \pi|_{P\mathfrak{A}} : P\mathfrak{A} \longrightarrow \bar{P}\mathfrak{A}$$

について $\mathrm{Ker}\pi' = N \cap P\mathfrak{A}$ であるから、π' は線形同型写像

$$P\mathfrak{A}/N \cap P\mathfrak{A} \longrightarrow \bar{P}\mathfrak{A}$$

を誘導する。

以上から、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_A \mathfrak{A} \arrow[dr, "自然な射影"] \arrow[drr, "\pi'"] \arrow[dd, "f"'] & & \\
 & P \otimes_A \mathfrak{A}/\mathrm{Im}(i \otimes_A \mathrm{id}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & \bar{P} \otimes_A \mathfrak{A} \arrow[dd, "g"] \\
P\mathfrak{A} \arrow[r, "自然な射影"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] & P\mathfrak{A}/N\mathfrak{A} \arrow[d, "\bar{id}"'] & \\
 & P\mathfrak{A}/N \cap P\mathfrak{A} \arrow[r, "\cong"] & \bar{P}\mathfrak{A} \\
P\mathfrak{A} \arrow[ur, "自然な射影"] \arrow[urr, "\pi \otimes_A \mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

ここで、f, h は命題 1-40(ii) のように定義される全射な線形写像であり、$\bar{f}, \bar{\mathrm{id}}$ はそれぞれ f, id から誘導される全射である。

さて、P は平坦であるから f は線形同型である。さらに、$f(\mathrm{Im}(i \otimes_A \mathrm{id})) = N\mathfrak{A}$ であるから、$\bar{f} : P \otimes_A \mathfrak{A}/\mathrm{Im}(i \otimes_A \mathrm{id}) \longrightarrow P\mathfrak{A}/N\mathfrak{A}$ も線形同型となる。よって、

$$\bar{\mathrm{id}} \text{ が線形同型} \iff g \text{ が線形同型}$$

が成り立つ。これは

$$N \cap P\mathfrak{A} = N\mathfrak{A} \iff g \text{ が線形同型}$$

と同値である。こうして、

任意の (有限生成) 左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して、$N \cap P\mathfrak{A} = N\mathfrak{A}$ となる

$\iff$ 任意の (有限生成) 左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して、g が線形同型

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{命題 1-40}}}{\iff}$ $\bar{P}$ が平坦

となることが示された。 (Q.E.D.)

演習 1-61

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 A-加群　とする。

右 A-加群 P に**捩れがない** (*forsion-free*) とは、右零因子でない元 $a \in A$ に対して、$x{\cdot}a = 0$ となる $x \in P$ は $x = 0$ のみであるときをいう。ここで、$a \in A$ が**右零因子でない**とは、$b \in A$ について $ba = 0$ ならば $b = 0$ が成り立つときをいう。

次を示せ。

(1) P：平坦 $\Longrightarrow$ P には捩れがない

(2) A が**左主イデアル域**のとき、

$$P\text{：平坦} \iff P \text{ に捩れがない}$$

注意： 代数 A が**左主イデアル域** (*left principal ideal domain*) であるとは、

(i) A は零因子を持たない (*i.e.* $a, b \in A$ について $ab = 0$ ならば、$a = 0$ または $b = 0$)

(ii) A の任意の左イデアルは 1 つの元で生成される

の 2 つの条件が満たされるときをいう。例えば、体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式代数 $\boldsymbol{k}[X]$ や可除代数は左主イデアル域である。

演習 1-61 の解；

(1) $a \in A$ は右零因子でないとする。

写像 $f : A \longrightarrow A$ を $f(x) = xa,\ x \in A$ によって定義する。

$a \in A$ は右零因子でないので、f は左正則加群 ${}_AA$ から ${}_AA$ の単射な左 A-加群準同型である。

よって、P の平坦性により、写像 $\mathrm{id}_P \otimes_A f : P \otimes_A A \longrightarrow P \otimes_A A$ は単射となる。

標準的な同型

$$\phi : P \longrightarrow P \otimes_A A, \qquad p \longmapsto p \otimes_A 1, \qquad p \in P$$

に関して、合成

$$\phi^{-1} \circ (\mathrm{id}_P \otimes_A f) \circ \phi : P \longrightarrow P$$

は

$$p \longmapsto p \cdot a, \qquad p \in P$$

という写像になるが、これが単射になる ($\because\ \mathrm{id}_P \otimes_A f$ は単射) ことから、P に捩れがないことがわかる。

(2) 必要性は (1) による。十分性を示す。

P に捩れがないと仮定する。

命題 1-40 により、P が平坦であることを示すには、A の任意の左イデアル $\mathfrak{A}$ について、$\mathrm{id}_P \otimes_A \iota : P \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow P \otimes_A A$ が単射であることを示せばよい。但し、$\iota : \mathfrak{A} \longrightarrow A$ は包含写像である。

仮定により、A の任意の左イデアルは $\mathfrak{A} = Aa$ と表わすことができる。

$a = 0$ ならば $\mathfrak{A} = 0$ となるので、明らかに f は単射である。

以下、$a \neq 0$ の場合を考える。

仮定により、A には零因子が存在しないから、a は右零因子でない。よって、写像

$$r_a : P \longrightarrow P, \qquad p \longmapsto p \cdot a, \qquad p \in P$$

は単射となる。一方、$f : A \longrightarrow A$ を $f(x) = xa,\ x \in A$ によって定め、$\phi : P \longrightarrow P \otimes_A A$ を標準的な同型とすると、(1) でも見たように、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{r_a} & P \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ P \otimes_A A & \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A f} & P \otimes_A A \end{array}$$

故に、$\mathrm{id}_P \otimes_A f$ は単射である。f は全射な左 A-加群準同型 $\nu : A \longrightarrow \mathfrak{A},\ x \longmapsto xa,\ x \in A$ と包含写像 $\iota : \mathfrak{A} \longrightarrow A$ との合成に分解することができる：$f = \iota \circ \nu$ 。したがって、

$$\mathrm{id}_P \otimes_A f = (\mathrm{id}_P \otimes_A \iota) \circ (\mathrm{id}_P \otimes_A \nu)$$

と表わすことができるが、$\mathrm{id}_P \otimes_A f$ が単射であることと $\mathrm{id}_P \otimes_A \nu$ が全射であることから、$\mathrm{id}_P \otimes_A \iota : P \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow P \otimes_A A$ が単射であることがわかる。 (Q.E.D.)

注意：(1) の逆は正しくない。1 つの例が次の演習問題で与えれらえる。

演習 1-62

体 $\boldsymbol{k}$ 上の 2 変数多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X, Y]$ について考える。
このとき、X, Y によって生成される (右) イデアル $\mathfrak{A} := (X, Y)$ には捩れがないが、これは右 A-加群として平坦でないことを示せ。

解；

$A = \boldsymbol{k}[X, Y]$ は整域なので、その右正則加群に捩れがない。したがって、その部分加群 $\mathfrak{A} = (X, Y)$ にも捩れがない。

$\mathfrak{A}$ は平坦でないことを示す。

そのためには、写像

$$f : \mathfrak{A} \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}, \quad a \otimes_A b \longrightarrow ab, \qquad a, b \in \mathfrak{A}$$

が単射でないことを示せばよい (命題 1-40)。

$$f(X \otimes_A Y - Y \otimes_A X) = XY - YX = 0$$

であるから、「$X \otimes_A Y \neq Y \otimes_A X \quad \text{in} \quad \mathfrak{A} \otimes_A \mathfrak{A}$」が証明されればよい。

$\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ を自然な射影とし、

$$g := \pi \otimes_A \pi : \mathfrak{A} \otimes_A \mathfrak{A} \longrightarrow (\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2) \otimes_A (\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2)$$

を考える。$\bar{X} = \pi(X),\ \bar{Y} = \pi(Y)$ とおく。このとき、$\{\bar{X} \otimes_A \bar{X},\ \bar{X} \otimes_A \bar{Y},\ \bar{Y} \otimes_A \bar{X},\ \bar{Y} \otimes_A \bar{Y}\}$ は $(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2) \otimes_A (\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2)$ の $\boldsymbol{k}$ 上の基底である。

$\because$)

$V = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ とおく。V は $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間として $\{\bar{X},\ \bar{Y}\}$ を 基底を持つ。また、任意の $a \in A$ に対して、$\chi(a) \in \boldsymbol{k}$ をその定数項とすれば、

$$a \cdot \bar{X} = \bar{X} \cdot a = \chi(a)\bar{X}, \qquad a \cdot \bar{Y} = \bar{Y} \cdot a = \chi(a)\bar{Y}$$

が成り立つことがわかる。故に、任意の $v \in V$ と $a \in A$ について $a \cdot v = v \cdot a = \chi(a)v$ が成り立つ。

今、$\varphi : V \times V \longrightarrow V \otimes_{\boldsymbol{k}} V$ を $\varphi(u,v) = u \otimes v,\ v,u \in V$ によって定義すると、これは $\boldsymbol{k}$-双線形写像であるばかりでなく、

$$\varphi(u{\cdot}a, v) = \chi(a)\varphi(u,v) = \varphi(u, a{\cdot}v) \qquad (u,v \in V,\ a \in A)$$

を満たすから、テンソル積の普遍性により

$${}^{\exists 1}\bar{\varphi} : V \otimes_A V \longrightarrow V \otimes_{\boldsymbol{k}} V : \boldsymbol{k}\text{-線形写像} \ \text{ s.t. } \ \bar{\varphi}(u \otimes_A v) = \varphi(u,v) \qquad \text{for } {}^{\forall}u, v \in V$$

となることがわかる。

また、写像 $\psi : V \times V \longrightarrow V \otimes_A V$ を $\psi(u,v) = u \otimes_A v,\ v,u \in V$ によって定義すると、これは $\boldsymbol{k}$-双線形写像であるから、テンソル積の普遍性により

$${}^{\exists 1}\bar{\psi} : V \otimes_{\boldsymbol{k}} V \longrightarrow V \otimes_A V : \boldsymbol{k}\text{-線形写像} \ \text{ s.t. } \ \bar{\psi}(u \otimes v) = \varphi(u,v) \qquad \text{for } {}^{\forall}u, v \in V$$

となることがわかる。$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}$ かつ $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = \mathrm{id}$ であることがテンソル積の普遍性によって容易に確かめられるから、$\bar{\varphi}$ は線形同型であることがわかる。

したがって、$\{\bar{X} \otimes_A \bar{X},\ \bar{X} \otimes_A \bar{Y},\ \bar{Y} \otimes_A \bar{X},\ \bar{Y} \otimes_A \bar{Y}\}$ は $V \otimes_A V$ の $\boldsymbol{k}$ 上の基底となる。 □

これより、

$$g(X \otimes_A Y) \neq g(Y \otimes_A X)$$

となることがわかる。故に、$X \otimes_A Y \neq Y \otimes_A X$ となることが示された。 (Q.E.D.)

演習 1-63

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：平坦な右 A-加群

M：左 A-加群

$M_1,\ M_2$：M の部分左 A-加群 とする。このとき

$$P \otimes_A (M_1 \cap M_2) = (P \otimes_A M_1) \cap (P \otimes_A M_2) \qquad \text{in} \quad P \otimes_A M$$

が成り立つことを示せ。

解；

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 \cap M_2 & \xrightarrow{j_1} & M_1 & \xrightarrow{p_1} & M_1/M_1 \cap M_2 & \longrightarrow & 0 \quad \text{完全} \\
 & & {\scriptstyle j_2}\downarrow & & {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow\wr\| & & \\
0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{i_2} & M_1 + M_2 & \xrightarrow{p_2} & (M_1 + M_2)/M_2 & \longrightarrow & 0 \quad \text{完全}
\end{array}$$

但し、上の図式において、i_1, i_2, j_1, j_2 は包含写像、p_1, p_2 は自然な射影である。

P は平坦であるから、

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P \otimes_A (M_1 \cap M_2) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A j_1} & P \otimes_A M_1 & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A p_1} & P \otimes_A (M_1/M_1 \cap M_2) & \longrightarrow & 0 \quad \text{完全} \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_A j_2}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_A i_1}\downarrow & & \downarrow\wr\| & & \\
0 & \longrightarrow & P \otimes_A M_2 & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A i_2} & P \otimes_A (M_1 + M_2) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A p_2} & P \otimes_A ((M_1 + M_2)/M_2) & \longrightarrow & 0 \quad \text{完全}
\end{array}$$

を得る。$i : M_1 \cap M_2 \longrightarrow M_1 + M_2$ を包含写像とすると、$i_1 \circ j_1 = i = i_2 \circ j_2$ であるから、

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_1) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_2)$$

となる。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

$x \in \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_1) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_2)$ を任意にとる。

$$x = (\mathrm{id} \otimes_A i_1)(x_1) = (\mathrm{id} \otimes_A i_2)(x_2), \qquad x_1 \in P \otimes_A M_1,\ x_2 \in P \otimes_A M_2$$

と書く。このとき、

$$(\mathrm{id} \otimes_A p_2)((\mathrm{id} \otimes_A i_1)(x_1)) = (\mathrm{id} \otimes_A p_2)(x) = (\mathrm{id} \otimes_A p_2)((\mathrm{id} \otimes_A i_2)(x_2)) = 0$$

となる。よって、

$$(\mathrm{id} \otimes_A p_1)(x_1) = 0$$

となる ($\because$ 上の可換図式の一番右側の縦の写像が同型であることから)。

上の可換図式の一番上にある横の列の完全性により、

$$^{\exists}y \in P \otimes_A (M_1 \cap M_2) \ \text{ s.t. } \ (\mathrm{id} \otimes_A j_1)(y) = x_1$$

となる。したがって、

$$(\mathrm{id} \otimes_A i)(y) = ((\mathrm{id} \otimes_A i_1) \circ (\mathrm{id} \otimes_A j_1))(y) = x$$

を得る。これで、

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_1) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_2) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i)$$

も示された。

P の平坦性により、$\mathrm{id} \otimes_A i,\ \mathrm{id} \otimes_A i_1,\ \mathrm{id} \otimes_A i_2$ はすべて単射であるから、これらの写像によって、それぞれ同一視

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i) = P \otimes_A (M_1 \cap M_2),\ \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_1) = P \otimes_A M_1,\ \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_A i_2) = P \otimes_A M_2$$

を行うと、演習問題にあるような結果を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-64

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
P：右 A-加群　とする。このとき、
P：忠実平坦 $\Longrightarrow$ P：忠実かつ平坦
となることを示せ。

解；

P を忠実平坦な右 A-加群とする。

命題 1-43 により、P は平坦である。

P が忠実であることを示す。

$a \in A$ は $P \cdot a = 0$ を満たしているとする。

A の左イデアル Aa を正則な左 A-加群 ${}_A A$ の部分加群とみなす。このとき、

$$P \otimes_A (Aa) = 0$$

が成り立つ。

∵)

任意に $x \in P$ と任意の $b \in A$ をとる。このとき、

$$x \otimes_A (ba) = x \cdot (ba) \otimes_A 1 = ((x \cdot b) \cdot a) \otimes_A 1 \underset{\uparrow}{=} 0 \otimes_A 1 = 0$$

$x \cdot b \in P$ かつ $P \cdot a = 0$ となる。

故に、$P \otimes_A (Aa) = 0$ が成り立つ。 □

P は忠実平坦であるから、$Aa = 0$ でなければならない (命題 1-43)。特に、$0 = 1 \cdot a = a$ を得る。 (Q.E.D.)

演習 1-65

体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式代数 $\boldsymbol{k}[X]$ を考える。
$\boldsymbol{k}[X]$ の商体 $\boldsymbol{k}(X)$ を右 $\boldsymbol{k}[X]$-加群とみなす。このとき、
$\boldsymbol{k}(X)$ は右 $\boldsymbol{k}[X]$-加群として忠実かつ平坦であるが、忠実平坦ではないことを示せ。

解；

・$\boldsymbol{k}(X)$ が忠実平坦な $\boldsymbol{k}[X]$-加群でないこと：

$0 \neq f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ を任意にとる (例えば、$f(X) = X$ にとる)。このとき、

$$\boldsymbol{k}(X) \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} \big(\boldsymbol{k}[X]/(f(X))\big) = 0$$

が成り立つ。

∵)

$g(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ の自然な射影 $\boldsymbol{k}[X] \longrightarrow \boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ による像を $\overline{g(X)}$ と書く。

任意の $r(X) \in \boldsymbol{k}(X)$ は $r(X) = \frac{r(X)}{f(X)} f(X)$ のように書くことができるので、

$$r(X) \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} \overline{1} = \frac{r(X)}{f(X)} f(X) \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} \overline{1} = \frac{r(X)}{f(X)} \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} f(X)\overline{1} = \frac{r(X)}{f(X)} \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} \overline{f(X)} = 0$$

となる。故に、$\boldsymbol{k}(X) \otimes_{\boldsymbol{k}[X]} \big(\boldsymbol{k}[X]/(f(X))\big) = 0$ が成り立つ。 □

したがって、$\boldsymbol{k}(X)$ は $\boldsymbol{k}[X]$-加群として忠実平坦ではない。

・$\boldsymbol{k}(X)$ が忠実な $\boldsymbol{k}[X]$-加群であること：

$\boldsymbol{k}(X)$ は単位元を含むから、$f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ について、$\boldsymbol{k}(X)f(X) = 0$ ならば、$f(X) = 0$ である。故に、$\boldsymbol{k}(X)$ は $\boldsymbol{k}[X]$-加群として忠実である。

・$\boldsymbol{k}(X)$ が平坦な $\boldsymbol{k}[X]$-加群であること：

$\boldsymbol{k}[X]$ は左主イデアル域であるから、演習 1-61 により、$\boldsymbol{k}(X)$ に捩れがないことを示せばよい。

$f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ が右零因子でないとする。

$f(X) \neq 0$ である。

$r(X) \in \boldsymbol{k}(X)$ が $r(X)f(X) = 0$ であるとすると、$r(X) = 0$ となる ($\because$ $\boldsymbol{k}(X)$ は体)。

故に、$\boldsymbol{k}[X]$-加群 $\boldsymbol{k}(X)$ に捩れがない、したがって、$\boldsymbol{k}(X)$ は $\boldsymbol{k}[X]$-加群として平坦である。

(Q.E.D.)

演習 1-66

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$：右 A-加群の完全系列　とする。次を示せ。

(1) $P,\ R$：平坦 $\implies$ Q：平坦

(2) $P,\ R$：平坦　かつ $P,\ R$ の少なくとも一方は忠実平坦 $\implies$ Q：忠実平坦

解；

(1) $\mathfrak{A}$ を A の左イデアルとする。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
R \otimes_A \mathfrak{A} & \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}} & Q \otimes_A \mathfrak{A} & \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}} & P \otimes_A \mathfrak{A} & \longrightarrow 0 & \text{完全} \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
R & \xrightarrow{\varphi} & Q & \xrightarrow{\psi} & P & \longrightarrow 0 & \text{完全}
\end{array}$$

但し、f, g, h は命題 (ii) のようにして定まる標準的な線形写像である。

さて、$x \in \mathrm{Ker} g$ を任意にとる。

このとき、

$$0 = (\psi \circ g)(x) = (h \circ (\psi \otimes_A \mathrm{id}))(x)$$

となる。R の平坦性により h は単射であるから、$(\psi \otimes_A \mathrm{id})(x) = 0$ となる。よって、

$$x \in \mathrm{Ker}(\psi \otimes_A \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(\varphi \otimes_A \mathrm{id})$$

となるので、

$$x = (\varphi \otimes_A \mathrm{id})(y), \qquad y \in R \otimes_A \mathfrak{A}$$

と書くことができる。

このとき、

$$0 = g(x) = (g \circ (\varphi \otimes_A \mathrm{id}))(y) = (\varphi \circ f)(y)$$

となる。仮定により φ は単射であり、f は P の平坦性により単射であるから、上式から、$y = 0$ を得る。よって、$x = 0$ となり、g の単射性が証明される。

(2) (1) により Q は平坦である。

Q が忠実平坦であることを示すには、左 A-加群 M が $Q \otimes_A M = 0$ を満たすならば $M = 0$ となることを示せばよい。

P は平坦であるから、命題 1-39 により、線形写像の完全系列

$$0 \longrightarrow R \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes_A \mathrm{id}_M} Q \otimes_A M \xrightarrow{\psi \otimes_A \mathrm{id}_M} P \otimes_A M \longrightarrow 0$$

が得られる。$Q \otimes_A M = 0$ であると仮定すると、上の系列が完全であることから、$R \otimes_A M = 0$ かつ $P \otimes_A M = 0$ を得る。

ここで、P が忠実平坦ならば $P \otimes_A M = 0$ から $M = 0$ が得られ、R が忠実平坦ならば $R \otimes_A M = 0$ から $M = 0$ が得られる。いずれにしても $M = 0$ となるので、Q は忠実平坦である。 (Q.E.D.)

注意：(1) の逆は成立しない。すなわち、Q が平坦であっても、$P,\ R$ が同時に平坦であるとは限らない。しかしながら、Q が平坦で、R が平坦ならば、P は自動的に平坦である。

演習 1-67

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

(1) P：平坦な右 A-加群

Q：両側 (A, B)-加群、右 B-加群として平坦

$\Longrightarrow$ $P \otimes_A Q$：右 B-加群として平坦

となることを示せ。

(2) P：忠実平坦な右 A-加群　とする。両側 (A, B)-加群 Q について

Q：右 B-加群として平坦 (resp. 忠実平坦)

$\Longleftrightarrow$ $P \otimes_A Q$：右 B-加群として平坦 (resp. 忠実平坦)

となることを示せ。

解；

(1) $f : M \longrightarrow N$ を単射な左 B-加群準同型とする。

Q は右 B-加群として平坦であるから、$\mathrm{id}_Q \otimes_B f : Q \otimes_B M \longrightarrow Q \otimes_A N$ は単射である。

$Q \otimes_B M,\ Q \otimes_B N$ への A の左作用の定義の仕方から、$\mathrm{id}_Q \otimes_B f$ は単射な左 A-加群準同型となる。右 A-加群 P は平坦であるから、

$$\mathrm{id}_P \otimes_A (\mathrm{id}_Q \otimes_B f) : P \otimes_A (Q \otimes_B M) \longrightarrow P \otimes_A (Q \otimes_A N)$$

は単射である。$X = M, N$ に対して、$\phi_X : (P \otimes_A Q) \otimes_B X \longrightarrow P \otimes_A (Q \otimes_B X)$ を

$$\phi_X((p \otimes_A q) \otimes_B x) = p \otimes_A (q \otimes_B x), \qquad p \in P,\ q \in Q,\ x \in X$$

なる $\boldsymbol{k}$-線形同型写像とすると、図式

$$\begin{array}{ccc}
(P \otimes_A Q) \otimes_B M & \xrightarrow{(\mathrm{id}_P \otimes_A \mathrm{id}_Q) \otimes_B f} & (P \otimes_A Q) \otimes_B N \\
{\scriptstyle \phi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_N} \\
P \otimes_A (Q \otimes_B M) & \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes_A (\mathrm{id}_Q \otimes_B f)} & P \otimes_A (Q \otimes_B N)
\end{array}$$

は可換である (演習 1-13(1))。したがって、$(\mathrm{id}_P \otimes_A \mathrm{id}_Q) \otimes_B f$ は単射である。故に、$P \otimes_A Q$ は右 B-加群として平坦である。

(2) ・平坦性について：(1) により、Q が右 B-加群として平坦であるとき、$P \otimes_A Q$ は右 B-加群として平坦である。

逆に、$P \otimes_A Q$ が右 B-加群として平坦であるとする。

$f : M \longrightarrow N$ を単射な左 B-加群準同型とする。このとき、$P \otimes_A Q$ の平坦性により

$$(\mathrm{id}_P \otimes_A \mathrm{id}_Q) \otimes_B f : (P \otimes_A Q) \otimes_B M \longrightarrow (P \otimes_A Q) \otimes_B N$$

は単射である。よって、

$$\mathrm{id}_P \otimes_A (\mathrm{id}_Q \otimes_B f) : P \otimes_A (Q \otimes_B M) \longrightarrow P \otimes_A (Q \otimes_B N)$$

もまた単射である ((1) の可換図式による)。

P は忠実平坦であるから、$\mathrm{id}_Q \otimes_B f$ は単射である。したがって、Q は平坦である。

・忠実平坦性について：Q が右 B-加群として忠実平坦であると仮定する。

Q は平坦である (演習 1-64 または命題 1-43) から、上で示したことにより、$P \otimes_A Q$ は平坦である。

M を左 B-加群であって、$(P \otimes_A Q) \otimes_B M = 0$ を満たすものとする。

$(P \otimes_A Q) \otimes_B M \cong P \otimes_A (Q \otimes_B M)$ ゆえ、$P \otimes_A (Q \otimes_B M) = 0$ を得る。

P は忠実平坦であるから、$Q \otimes_B M = 0$ となる。今度は Q の忠実平坦性により $M = 0$ を得る。

以上より、$P \otimes_A Q$ は忠実平坦である。

逆に、$P \otimes_A Q$ は忠実平坦であると仮定する。

$P \otimes_A Q$ は平坦である (演習 1-64 または命題 1-43) から、上で示したことにより、Q は平坦である。

左 B-加群 M が $Q \otimes_B M = 0$ を満たしているとする。

$$0 = P \otimes_A (Q \otimes_B M) \cong (P \otimes_A Q) \otimes_B M \qquad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

であるから、$P \otimes_A Q$ の忠実平坦性により、$M = 0$ を得る。以上より、Q は忠実平坦である。

(Q.E.D.)

注意：上の演習問題において、特に、A が B の部分代数であって、$Q = B$ の場合 (但し、A の B への左作用としては B の正則左作用を A に制限したものを採用し、B の B への右作用としては B の正則右作用を採用) を考える。右 B-加群としては $Q = B_B$ となるので、Q は (忠実) 平坦である。よって、

$$P\text{：平坦な右 } A\text{-加群} \implies P \otimes_A B\text{：平坦な右 } B\text{-加群}$$
$$P\text{：忠実平坦な右 } A\text{-加群} \implies P \otimes_A B\text{：忠実平坦な右 } B\text{-加群}$$

が成り立つ。この事実は標語的には「係数環の拡大によって平坦性および忠実平坦性が保たれる」と述べられる。

演習 1-68

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$P(\neq 0)$：有限生成右 A-加群　とする。
A が局所的のとき ($i.e.$ A の極大左イデアルが唯 1 つのみのとき)

$$P：平坦 \iff P：忠実平坦$$

が成り立つことを示せ。

解；

$\mathfrak{m}$ を A の極大左イデアルとする。A は局所的なので $\mathrm{rad}A = \mathfrak{m}$ となる。

したがって、もし、有限生成右 A-加群 P が $P\mathfrak{m} = P$ を満たすならば、系 1-15 により、$P = 0$ でなければならない。

故に、0 でない有限生成右 A-加群 P は $P\mathfrak{m} \neq P$ 満たさなければならない。

よって、0 でない有限生成右 A-加群 P が平坦ならば、P は忠実平坦である。　(Q.E.D.)

演習 1-69

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：左 A-加群　とする。
$\mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$ とおく。$\mathrm{ann}M$ は A の両側イデアルである。(定義 1-10 参照)。次を示せ。
(1) M：忠実 $\iff$ $\mathrm{ann}M = 0$
(2) $M \neq 0$ ならば $A \neq \mathrm{ann}M$ であって、M は左 $A/\mathrm{ann}M$-加群として忠実である。

解；

(1) は加群が忠実であるという定義そのものである。

(2) $\mathrm{ann}M$ はその定義から A の両側イデアルである。$M \neq 0$ であるとすると、$1 \notin \mathrm{ann}M$ であるから、$A \neq \mathrm{ann}M$ であることがわかる。これより、商代数 $A/\mathrm{ann}M$ を考えることができる。このとき、M を次の作用によって左 $A/\mathrm{ann}M$-加群とみなすことができる：

$$\bar{a} \cdot m := a \cdot m \qquad (a \in A,\ m \in M)$$

ここで、$\bar{a}$ は $a \in A$ を自然な射影 $A \longrightarrow A/\mathrm{ann}M$ で写した像を表わす。また、右辺の $a \cdot m$ は、最初に与えられた A の M への左作用を表わす。

このとき、

$$\begin{aligned}
\bar{a} \cdot m = 0 \quad \text{for all} \ \ m \in M \quad &\Longrightarrow \quad a \cdot m = 0 \quad \text{for all} \ \ m \in M \\
&\Longrightarrow \quad a \in \mathrm{ann}M \\
&\Longrightarrow \quad \bar{a} = 0
\end{aligned}$$

となるから、M は左 $A/\mathrm{ann}M$-加群として忠実である。　(Q.E.D.)

§10. 代数・加群に対する基礎体の拡大

V を体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間、$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。このとき、$V^K := K \otimes_{\boldsymbol{k}} V$ は体 K 上のベクトル空間になる。K の V^K への作用は

$$x \cdot (y \otimes v) = (xy) \otimes v \qquad (x, y \in K,\ v \in V)$$

によって与えられる。V が $\boldsymbol{k}$ 上の代数またはその上の加群ならば V^K は自然に K 上の代数またはその上の加群になる。ここでは、加群に対して双対加群をとる操作と基礎体の拡大をとる操作が可換になることを示す。

補題 1-46

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

$V,\ W$：$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間　とする。

V：有限次元　または　$K/\boldsymbol{k}$：有限次拡大

$\Longrightarrow\ \mathrm{Hom}_K(V^K, W^K) \cong (\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V,W))^K$　as K-vector spaces

(proof)

$\varphi : K \otimes \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V^K,\ W^K)$ を

$$\varphi(x \otimes f)(y \otimes v) = xy \otimes f(v), \qquad x, y \in K,\ f \in \mathrm{Hom}_K(V,W),\ v \in V$$

によって定義される $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像とする。φ は K 上の線形写像になる。

さらに、φ は全単射である。これを示す。

i. φ の単射性：

$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とすると、$K \otimes \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V,W)$ の元は $\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda$（有限和）と書き表わすことができる。

今、$\varphi(\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda) = 0$ であるとする。すると、V の任意の元 v について

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda(v) = 0$$

となる。これは、任意の $\lambda \in \Lambda$ について

$$f_\lambda(v) = 0$$

となることに同値であるから、$f_\lambda = 0\ (\lambda \in \Lambda)$ を得る。

故に、$\mathrm{Ker}\varphi = 0$ が示されたので、φ は単射である。

ii. φ の全射性：

(1) V が有限次元の場合：

$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底、$\{v_l\}_{l=1}^n$ を V の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。

$F \in \mathrm{Hom}_K(V^K,\ W^K)$ を任意にとる。

任意の $v \in V$ に対して、

$$F(1 \otimes v) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda(v), \qquad f_\lambda(v) \in W$$

と書くことができる。ここで、右辺の和は実質的に有限和であるから、各 $v \in V$ に対して、$f_\lambda(v) \neq 0$ となる $\lambda \in \Lambda$ は有限個しかないことに注意する。

各 $l = 1, \cdots, n$ に対して、

$$\Lambda(i) := \{\lambda \in \Lambda \mid f_\lambda(v_l) \neq 0\}$$

は有限集合であり、したがって、

$$\Lambda' = \bigcup_{l=1}^{n} \Lambda(i)$$

は Λ の有限部分集合である。任意の $v \in V$ について

$$F(1 \otimes v) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} e_\lambda \otimes f_\lambda(v)$$

が成り立つから、

$$\varphi(\sum_{\lambda \in \Lambda'} e_\lambda \otimes f_\lambda) = F$$

を得る。故に、φ は全射である。

(2) $K/\boldsymbol{k}$ が有限次拡大の場合：

$\{e_i\}_{i=1}^m$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。

$F \in \mathrm{Hom}_K(V^K, W^K)$ を任意にとる。任意の $v \in V$ に対して、

$$F(1 \otimes v) = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes f_i(v), \qquad f_i(v) \in W$$

と書くことができる。このとき、

$$\varphi(\sum_{i=1}^{m} e_i \otimes f_i) = F$$

となるから、φ は全射である。

以上で、φ が全単射であることがわかった。 (Q.E.D.)

系 1-47

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

V：$\boldsymbol{k}$ 上有限次元のベクトル空間

$\Longrightarrow$ $(V^K)^* \cong (V^*)^K$ as K-vector spaces

(proof)

補題 1-46 において、$W = \boldsymbol{k}$ にとることにより、$\boldsymbol{k}$ 上の線形同型

$$(V^*)^K = K \otimes V^* = K \otimes \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, \boldsymbol{k}) \cong \mathrm{Hom}_K(V^K, \boldsymbol{k}^K) \cong \mathrm{Hom}_K(V^K, K) = (V^K)^*$$

を得る。具体的には、この線形同型写像 $\psi : (V^*)^K \longrightarrow (V^K)^*$ は

$$\langle \psi(x \otimes f),\ y \otimes v \rangle = xyf(v) \qquad (x, y \in K,\ f \in V^*,\ v \in V)$$

によって与えられる。ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は V^K と $(V^K)^*$ との双対性を表わす内積である。(Q.E.D.)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。このとき、$A^K = K \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ は体 K 上の代数になる。積は

$$(x \otimes a)(y \otimes b) = xy \otimes ab \qquad (x, y \in K,\ a, b \in A)$$

によって与えられる。また、$\dim_{\boldsymbol{k}} A = \dim_K A^K$ が成り立つ。

次に、V を左 A-加群とする。このとき、$V^K = K \otimes_{\boldsymbol{k}} V$ は左 A^K-加群になる。 A^K の V^K への左作用は、

$$(x \otimes a) \cdot (y \otimes v) = xy \otimes (a \cdot v) \qquad (x, y \in K,\ a \in A,\ v \in V)$$

によって与えられる。同様にして、右 A-加群 V に対しても、右 A^K-加群 $V^K = K \otimes_{\boldsymbol{k}} V$ が定義される。

系 1-48

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大
$V,\ W$：左 A-加群　とする。
V：有限次元　または　$K/\boldsymbol{k}$：有限次拡大
$\quad\Longrightarrow\ \mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K) \cong (\mathrm{Hom}_A(V, W))^K$　as K-vector spaces

(proof)

$\varphi : K \otimes \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V^K,\ W^K)$ を

$$\varphi(x \otimes f)(y \otimes v) = xy \otimes f(v) \qquad (x, y \in K,\ f \in \mathrm{Hom}_K(V, W),\ v \in V)$$

によって定義される $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像とする。φ は K 上の線形同型写像になる (補題 1-46)。φ が $(\mathrm{Hom}_A(V, W))^K$ から $\mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K)$ への線形同型写像を誘導することを示す。

i. $\varphi(K \otimes \mathrm{Hom}_A(V, W)) \subset \mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K)$ であること：

$x \in K$ かつ $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$ に対して、$\varphi(x \otimes f)$ が左 A^K-加群準同型となることを示せばよい。$y, z \in K,\ a \in A,\ v \in V$ を任意として、

$$\begin{aligned}\varphi(x \otimes f)((y \otimes a) \cdot (z \otimes v)) &= \varphi(x \otimes f)(yz \otimes a \cdot v) \\ &= x(yz) \otimes f(a \cdot v) \\ &= y(xz) \otimes a \cdot f(v) \\ &= (y \otimes a) \cdot (xz \otimes f(v)) \\ &= (y \otimes a) \cdot (\varphi(x \otimes f)(z \otimes v))\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\therefore\ \varphi(x \otimes f) \text{ は } A^K \text{ の左作用を保つ。}$$

ii. $\varphi(K \otimes \mathrm{Hom}_A(V, W)) = \mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K)$ であること：

$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とすると、補題 1-46 の証明により、任意の $F \in \mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K)$ に対して、

$$\varphi(\sum_{\lambda \in \lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda) = F$$

となる $\{f_\lambda\}$ が定まる。よって、各 f_λ が左 A-加群準同型であることを示せばよい。

F は左 A^K-加群準同型であるから、任意の $a \in A,\ v \in V$ に対して

$$F((1 \otimes a) \cdot (1 \otimes v)) = (1 \otimes a) \cdot F(1 \otimes v)$$

が成り立つ。これを詳しく書けば、

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda(a\cdot v) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes a\cdot f_\lambda(v)$$

であり、この等式は、各 $\lambda\in\Lambda$ に対して、

$$f_\lambda(a\cdot v) = a\cdot f_\lambda(v)$$

が成り立つことと同値である。故に、f_λ は左 A-加群準同型である。

i. ii. により、補題は証明された。 (Q.E.D.)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。

V を右 A-加群とする。このとき、V の双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V,\boldsymbol{k})$ は A の作用

$$(a\cdot f)(v) = f(v\cdot a) \qquad (A,\ f\in V^*,\ v\in V)$$

に関して左 A-加群になり (演習 1-14)、左 A-加群 U に対しては、U^* は A の作用

$$(f\cdot a)(u) = f(a\cdot u),\ a\in A \qquad (f\in U^*,\ u\in U)$$

により右 A-加群になることを思い出そう (演習 1-14)。

系 1-49

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数, $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

(1) V：有限次元右 A-加群

$\Longrightarrow\ (V^K)^* \cong (V^*)^K$ as left A^K-modules

(2) U：有限次元左 A-加群

$\Longrightarrow\ (U^K)^* \cong (U^*)^K$ as right A^K-modules

(proof)

(1) も (2) も同様に証明できるから、ここでは (1) についてのみ証明しよう。

系 1-47 の証明から、1 つの線形同型写像 $\psi : (V^*)^K \longrightarrow (V^K)^*$ が

$$\langle \psi(x\otimes f),\ y\otimes v\rangle = xyf(v) \qquad (x,y\in K,\ f\in V^*,\ v\in V)$$

によって与えられる。ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は V^K と $(V^K)^*$ との双対性を表わす内積である。

ψ が左 A^K-加群準同型となることを示す。

そのためには、任意の $x,y\in K,\ a\in A,\ f\in V^*$ に対して

$$\psi((x\otimes a)\cdot(y\otimes f)) = (x\otimes a)\cdot\psi(y\otimes f) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。$z\in K,\ v\in V$ を任意にとると、

$$\begin{aligned}\langle \psi((x\otimes a)\cdot(y\otimes f)),\ z\otimes v\rangle &= \langle \psi(xy\otimes(a\cdot f)),\ z\otimes v\rangle \\ &= xyz(a\cdot f)(v) \\ &= xyzf(v\cdot a) \\ &= \langle \psi(y\otimes f),\ zx\otimes(v\cdot a)\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle \psi(y \otimes f),\ (z \otimes v) \cdot (x \otimes a) \rangle$$
$$= \langle (x \otimes a) \cdot \psi(y \otimes f),\ z \otimes v \rangle$$

となる。故に、$(*)$ が示され、ψ は左 A^K-加群の同型を与えることがわかった。　(Q.E.D.)

演習 1-70

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。このとき

$$(\mathrm{rad}A)^K \subset \mathrm{rad}(A^K)$$

が成り立つことを示せ。

解；

$(\mathrm{rad}A)^K = K \otimes_{\boldsymbol{k}} (\mathrm{rad}A)$ は A^K の両側イデアルであって、冪零である (定理 1-17)。したがって、系 1-16 より、

$$(\mathrm{rad}A)^K \subset \mathrm{rad}(A^K)$$

を得る。　(Q.E.D.)

$\mathrm{rad}A = 0$ でも $\mathrm{rad}(A^K) \neq 0$ となることがあり得る。次の演習問題はそのような代数の 1 つの例になっている。

演習 1-71

$\boldsymbol{k}$ を標数 $p > 0$ の体とし、$\boldsymbol{k}$ 上既約な多項式 $f(X) = X^p - a,\ a \in \boldsymbol{k}$ を考える。$f(X)$ の 1 つの根を s とおき、$\boldsymbol{k}$ の拡大体 $K = \boldsymbol{k}(s)$ を考える。このとき、$\mathrm{rad}(K^K) \neq 0$ であることを示せ。

解；

K において $f(X) = (X-s)^p$ が成り立つ。また、K 上の代数として

$$K^K \cong K[X]/(X-s)^p K[X]$$

が成り立つ。実際、この同型写像は以下のようにして与えることができる。

$f(X)$ の既約性により、任意の $g(X) \in K[X]$ は

$$g(X) = g_0(X) + s g_1(X) + s^2 g_2(X) + \cdots + s^{p-1} g_{p-1}(X), \quad g_i(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

のように一意的に書ける。この表示を用いて $\varphi : K[X] \longrightarrow K \otimes_{\boldsymbol{k}} K$ を

$$\varphi(g(X)) = 1 \otimes g_0(s) + s \otimes g_1(s) + s^2 \otimes g_2(s) + \cdots + s^{p-1} \otimes g_{p-1}(s)$$

と定める。φ は全射な代数準同型であり、$\mathrm{Ker}\varphi = (X-s)^p K[X]$ が成り立つ。故に、$K^K \cong K[X]/(X-s)^p K[X]$ である。

$A := K[X]/(X-s)^p K[X]$ とおく。$X - s$ によって生成される A の両側イデアルを N とおく。

$$N \neq 0 \ \text{ かつ } \ N^p = 0$$

である。よって、

$$0 \neq N \subset \mathrm{rad}A$$

を得る。　(Q.E.D.)

演習 1-72

> A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
> $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大
> $\Longrightarrow \quad (A^{\mathrm{op}})^K = (A^K)^{\mathrm{op}}$ as K-algebras
> となることを確かめよ。

解；

$(A^{\mathrm{op}})^K = K \otimes A^{\mathrm{op}}$ であり $(A^K)^{\mathrm{op}} = (K \otimes A)^{\mathrm{op}}$ であるから、K 上のベクトル空間としてはどちらも $K \otimes A$ (K と A のベクトル空間としてのテンソル積の意) に等しい。

代数として $(A^{\mathrm{op}})^K = (A^K)^{\mathrm{op}}$ となることを示すには、両者の積および単位元が一致することを示せばよい。

$x, y \in K,\ a, b \in A$ を任意にとる。このとき、$x \otimes a,\ y \otimes b \in K \otimes A$ の
$(A^{\mathrm{op}})^K = K \otimes A^{\mathrm{op}}$ における積は $(x \otimes a) \cdot (y \otimes b) = xy \otimes (a * b) = xy \otimes ba$ であり、
$(A^K)^{\mathrm{op}} = (K \otimes A)^{\mathrm{op}}$ における積は $(x \otimes a) * (y \otimes b) = (y \otimes b)(x \otimes a) = yx \otimes ba$ である。

K は体なので可換、従って、$xy = yx$ となるから、$x \otimes a,\ y \otimes b$ の $(A^{\mathrm{op}})^K$ における積と $(A^K)^{\mathrm{op}}$ における積とは一致する。

また、代数 $(A^{\mathrm{op}})^K$ の単位元と代数 $(A^K)^{\mathrm{op}}$ の単位元はともに $1 \otimes 1_A$ となり、一致する。

故に、２つの代数 $(A^{\mathrm{op}})^K$ と $(A^K)^{\mathrm{op}}$ は完全に一致する。　(Q.E.D.)

演習 1-73

> $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大
> $\Longrightarrow \quad (\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}))^K \cong \mathrm{M}_n(K)$ as K-algebras
> となることを示せ。

解；

$g : K \otimes \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(K)$ を

$$g(x \otimes \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xc_{11} & \cdots & xc_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ xc_{n1} & \cdots & xc_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x \in K,\ c_{ij} \in \boldsymbol{k}\ (i, j = 1, \cdots, n)$$

によって定義する。g は $\boldsymbol{k}$ 上の代数の同型である (演習 1-4(1) の証明参照)。g は K 上の線形写像でもある。実際、$x, y \in K$ および $C := \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ に対して

$$g(x \cdot (y \otimes C)) = g(xy \otimes C) = \begin{pmatrix} xyc_{11} & \cdots & xyc_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ xyc_{n1} & \cdots & xyc_{nn} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} yc_{11} & \cdots & yc_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ yc_{n1} & \cdots & yc_{nn} \end{pmatrix} = xg(y \otimes C)$$

となるので、g は K 上の線形写像である。故に、g は K 上の代数としての同型である。

(Q.E.D.)

演習 1-74

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。次を示せ。

(1) A：$\boldsymbol{k}$ 上の代数

$\{V_i\}_{i\in I}$：左 A-加群の族

$\Longrightarrow$ $(\bigoplus_{i\in I} V_i)^K \cong \bigoplus_{i\in I} V_i^K$ as left A^K-modules

(2) $\{A_i\}_{i\in I}$：$\boldsymbol{k}$ 上の代数の族、I：有限集合

$\Longrightarrow$ $(\bigoplus_{i\in I} A_i)^K \cong \bigoplus_{i\in I} A_i^K$ as K-algebras

解；

(1) 写像 $\varphi : K \times \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i^K$ を

$$\varphi(\lambda, (v_i)_{i\in I}) = (\lambda \otimes v_i)_{i\in I}, \qquad \lambda \in K,\ (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$$

によって定義する。φ は $\boldsymbol{k}$-双線形写像である。よって、$\boldsymbol{k}$-線形写像 $\bar{\varphi} : K \otimes (\bigoplus_{i\in I} V_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i^K$ が誘導される。$\bar{\varphi}$ は K-線形写像であって、A^K の左作用を保つ。よって、$\bar{\varphi}$ は左 A^K-加群準同型である。

各 $i_0 \in I$ について、写像 $j_{i_0} : V_{i_0} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ を直和 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に附随する標準的な単射とする：すなわち、j_{i_0} を $w \in V_{i_0}$ に対して、

$$j_{i_0}(w) = (v_i)_{i\in I}, \qquad v_i = \begin{cases} w & \text{if } i = i_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を対応させる写像とする。このとき、

$$j_{i_0}^K := \mathrm{id}_K \otimes j_{i_0} : V_{i_0}^K \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} V_i)^K$$

は左 A^K-加群準同型である。直和の普遍性により、

$$^{\exists 1} j^K : \bigoplus_{i\in I} V_i^K \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} V_i)^K \ : A^K\text{-加群準同型 s.t. } {}^{\forall} i \in I,\ \ j^K \circ j_i' = j_i^K$$

となる。但し、$j_i' : V_i^K \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i^K$ は直和 $\bigoplus_{i\in I} V_i^K$ に附随する標準的な単射である。

$\bar{\varphi} \circ j^K = \mathrm{id},\ j^K \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}$ が成り立つので、$\bar{\varphi}$ は左 A^K-加群の同型である。

(2) $I = \{1, \cdots, l\}$ とおいて、(1) の $\bar{\varphi}$ を $V_i = A_i$ $(i \in I)$ の場合に考える：

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi} : K \otimes (A_1 \oplus \cdots \oplus A_l) \longrightarrow A_1^K \oplus \cdots \oplus A_l^K, \\ &\bar{\varphi}(\lambda \otimes (a_1, \cdots, a_l)) = (\lambda \otimes a_1, \cdots, \lambda \otimes a_l), \qquad \lambda \in K,\ (a_1, \cdots, a_l) \in A_1 \oplus \cdots \oplus \in A_l \end{aligned}$$

この $\bar{\varphi}$ が代数の同型になっていることを示す。この写像が K-線形同型写像であることは (1) で確認済みであるから、$\bar{\varphi}$ が積を保つことと単位元を保つことを示せば十分である。

・$\bar{\varphi}$ が単位元を保つこと：$i \in I$ に対して 1_{A_i} を A_i の単位元とする。このとき、$K \otimes (A_1 \oplus \cdots \oplus A_l)$ の単位元は $1 \otimes (1_{A_1}, \cdots, 1_{A_l})$ であり、$A_1^K \oplus \cdots \oplus A_l^K$ の単位元は $(1 \otimes 1_{A_1}, \cdots, 1 \otimes 1_{A_l})$ であるから、$\bar{\varphi}$ は単位元を保っている。

・$\bar{\varphi}$ が積を保つこと：任意の $\lambda, \mu \in K$ と任意の $(a_1, \cdots, a_l),\ (b_1, \cdots, b_l) \in A_1 \oplus \cdots \oplus A_l$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}((\lambda \otimes (a_1, \cdots, a_l)) \cdot (\mu \otimes (b_1, \cdots, b_l))) &= \bar{\varphi}(\lambda\mu \otimes (a_1 b_1, \cdots, a_l b_l)) \\ &= (\lambda\mu \otimes a_1 b_1, \cdots, \lambda\mu \otimes a_l b_l) \\ &= (\lambda \otimes a_1, \cdots, \lambda \otimes a_l) \cdot (\mu \otimes b_1, \cdots, \mu \otimes b_l) \\ &= \bar{\varphi}(\lambda \otimes (a_1, \cdots, a_l)) \cdot \bar{\varphi}(\mu \otimes (b_1, \cdots, b_l))\end{aligned}$$

となる。よって、$\bar{\varphi}$ は積を保つ。 (Q.E.D.)

演習 1-75

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大
V：$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間　とする。
V：有限次元 または $K/\boldsymbol{k}$：有限次拡大
$\Longrightarrow$ $\mathrm{End}_K(V^K) \cong (\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V)^K$ as K-algebras
となることを示せ。

解；

補題 1-46 の証明から、

$$\varphi(x \otimes f)(y \otimes v) = xy \otimes f(v) \qquad (x, y \in K,\ f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V,\ v \in V)$$

によって定義される 写像 $\varphi : K \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(V) \longrightarrow \mathrm{End}_K(V^K)$ は K 上の線形同型写像である。これが、代数準同型でもあることを示せばよい。

φ が単位元を保つことはすぐにわかるから、積を保つことを確かめればよい。

$x, y \in K$、$f, g \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(V)$ に対して、

$$\begin{aligned}\langle \varphi((xy) \otimes (g \circ f)),\ z \otimes v \rangle &= (xy)z \otimes (g \circ f)(v) \\ &= x(yz) \otimes g(f(v)) \\ &= \langle \varphi(x \otimes g),\ yz \otimes f(v) \rangle \\ &= \langle \varphi(x \otimes g) \circ \varphi(y \otimes f),\ z \otimes v \rangle \qquad \text{for } z \in K,\ v \in V\end{aligned}$$

となる。ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は $(V^K)^*$ と V^K との自然なペアリングを表わす。よって、φ は積を保つ。故に、K 上の代数として、

$$\mathrm{End}_K(V^K) \cong (\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V)^K$$

となる。 (Q.E.D.)

演習 1-76

$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。
(1) $V,\ W$：$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 $\Longrightarrow$ $(V \otimes W)^K \cong V^K \otimes_K W^K$ as K-vector spaces
(2) $A,\ B$：$\boldsymbol{k}$ 上の代数 $\Longrightarrow$ $(A \otimes B)^K \cong A^K \otimes_K B^K$ as K-algebras

解；(1) 演習 1-13(1) から、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての次のような同型が得られる。

$$\begin{aligned}V^K \otimes_K W^K &= (K \otimes V) \otimes_K (K \otimes W)\\ &\cong K \otimes (V \otimes_K (K \otimes W))\\ &\cong K \otimes ((V \otimes_K K) \otimes W)\\ &\cong K \otimes (V \otimes W)\\ &= (V \otimes W)^K\end{aligned}$$

その同型写像を $h : (K \otimes V) \otimes_K (K \otimes W) \longrightarrow K \otimes V \otimes W$ とおくと、h は

$$h((x \otimes v) \otimes_K (y \otimes w)) = xy \otimes v \otimes w \quad \text{for } x, y \in K,\ v \in V,\ w \in W$$

を満たす $\boldsymbol{k}$-線形として与えられる (演習 1-13(1) の証明を参照。同型 $V \cong V \otimes_K K$ は $v \longmapsto 1 \otimes_K v,\ v \in V$ によって与えられることに注意)。この形から h は K-線形写像になっていることがわかる。したがって、K 上のベクトル空間として

$$(V \otimes W)^K \cong V^K \otimes_K W^K$$

となることが示された。

(2) $V = A,\ W = B$ として、K 上のベクトル空間としての同型 $h : (K \otimes A) \otimes_K (K \otimes B) \longrightarrow K \otimes A \otimes B$ を考える。これが K 上の代数の同型になっていることを示す。$x_1, x_2, y_1, y_2 \in K, a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$ に対して

$$\begin{aligned}&h(((x_1 \otimes a_1) \otimes_K (y_1 \otimes b_1)) \cdot ((x_2 \otimes a_2) \otimes_K (y_2 \otimes b_2)))\\ =&h((x_1x_2 \otimes a_1a_2) \otimes_K (y_1y_2 \otimes b_1b_2))\\ =&(x_1x_2y_1y_2) \otimes (a_1a_2) \otimes (b_1b_2)\\ =&((x_1y_1) \otimes a_1 \otimes b_1) \cdot ((x_2y_2) \otimes a_2 \otimes b_2)\\ =&h((x_1 \otimes a_1) \otimes_K (y_1 \otimes b_1)) \cdot h((x_2 \otimes a_2) \otimes_K (y_2 \otimes b_2))\end{aligned}$$

となる。また、

$$h((1_K \otimes 1_A) \otimes_K (1_K \otimes 1_B)) = 1_K \otimes 1_A \otimes 1_B$$

となる。故に、h は代数の同型である。 (Q.E.D.)

演習 1-77

体 $\boldsymbol{k}$ に対して、$Vect_{\boldsymbol{k}}$ によって、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間を対象とし、それらの間の $\boldsymbol{k}$-線形写像を射とする圏を表わすことにする。

(1) $K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。

$$\begin{aligned}V : \boldsymbol{k}\ \text{上のベクトル空間} &\longmapsto V^K\\ f : U \longrightarrow V : \boldsymbol{k}\text{-線形写像} &\longmapsto f^K := \mathrm{id}_K \otimes f : U^K \longrightarrow V^K\end{aligned}$$

なる対応規則は、$Vect_{\boldsymbol{k}}$ から $Vect_K$ への完全な共変関手を与えることを示せ。

(2) A を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。${}_A\mathbb{M}$ によって、左 A-加群を対象とし、それらの間の準同型を射とする圏を表わすことにする。(1) の共変関手は ${}_A\mathbb{M}$ から ${}_{A^K}\mathbb{M}$ への完全な共変関手を誘導することを示せ。

解；

(1) テンソル積の普遍性により、

$\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : U \longrightarrow V,\ g : V \longrightarrow W$ に対して $(g \circ f)^K = g^K \circ f^K$

$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 V に対して $(\mathrm{id}_V)^K = \mathrm{id}_{V^K}$

となることがわかるので、与えられた対応規則は共変関手である。この共変関手が完全であることを示す。

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

を $\boldsymbol{k}$-線形写像の完全系列とする。このとき、

$$0 \longrightarrow U^K \xrightarrow{f^K} V^K \xrightarrow{g^K} W^K \longrightarrow 0$$

は K-線形写像の完全系列になることを示す。

(i) f^K が単射であること：

$\{u_i\}_{i\in I}$ を U の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。このとき、U^K の任意の元は $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes u_i$ $(x_i \in K,$ 有限個の $i \in I$ を除いて $x_i = 0)$ と書くことができる。もし、$f^K(\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes u_i) = 0$ であるとすると、

$$0 = f^K(\sum_{i\in I} x_i \otimes u_i) = \sum_{i\in I} x_i \otimes f(u_i)$$

となる。f は仮定により単射なので、$\{f(u_i)\}_{i\in I}$ は V の一次独立系となる。したがって、上式から $x_i = 0\ (i \in I)$ が得られる。よって、f^K は単射である。

(ii) g^K が全射であること：

これは g の全射性からただちにわかる。

(iii) $\mathrm{Ker} g^K = \mathrm{Im} f^K$ であること：

$g \circ f = 0$ なので、$g^K \circ f^K = (g \circ f)^K = 0$ となる。よって、$\mathrm{Ker} g^K \supset \mathrm{Im} f^K$ である。逆向きの包含関係を示す。$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes v_\lambda \in \mathrm{Ker} g^K$ とする。

$$0 = g^K(\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes v_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes g(v_\lambda)$$

であるから、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $g(v_\lambda) = 0$ となる。よって、

$$v_\lambda \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$$

を得る。故に、

$$^\exists u_\lambda \in U \quad \text{s.t.} \quad v_\lambda = f(u_\lambda)$$

となる。したがって、

$$f^K(\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes u_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f(u_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes v_\lambda$$

を得る。こうして、$\mathrm{Ker} g^K \subset \mathrm{Im} f^K$ も示された。

(2) $U,\ V$ を左 A-加群とする。左 A-加群準同型 $f : U \longrightarrow V$ に対して $f^K : U^K \longrightarrow V^K$ が左 A^K-加群準同型となることだけが問題である (残りは (1) から直ちに従う)。これは、演習

1-8 において、$A,\ B$ をそれぞれ $K,\ A$ にとり、$f,\ g$ をそれぞれ $\mathrm{id}_K,\ f$ にとることにより得られる。 (Q.E.D.)

演習 1-78

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

(1) V：$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間、$W \subset V$：部分線形空間

$\Longrightarrow$ K 上のベクトル空間として $W^K \subset V^K$ かつ $(V/W)^K \cong V^K/W^K$

(2) A：$\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群、$W \subset V$：部分加群

$\Longrightarrow$ 左 A-加群として $W^K \subset V^K$ かつ $(V/W)^K \cong V^K/W^K$

解；

(1) $W \subset V$ を部分空間とし、包含写像 $i : W \longrightarrow V$ と自然な射影 $p : V \longrightarrow V/W$ を考える。このとき、$\boldsymbol{k}$-線形写像の完全系列

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が得られる。演習 1-77 により、K-線形写像の系列

$$0 \longrightarrow W^K \xrightarrow{i^K} V^K \xrightarrow{p^K} (V/W)^K \longrightarrow 0$$

は完全である。特に、$i^K : W^K \longrightarrow V^K$ は単射な K-線形写像、$p^K : V^K \longrightarrow (V/W)^K$ は全射な K-線形写像となる。したがって、i^K によって $W^K \subset V^K$ とみなすことができ、p^K に準同型定理を適用して $V^K/W^K \cong (V/W)^K$ を得る。

(2) (1) の議論を左 A-加群の圏の中で適用すればよい。 (Q.E.D.)

演習 1-79

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。

(1) V^K：直既約 $\Longrightarrow$ V：直既約

(2) V^K：既約 $\Longrightarrow$ V：既約

となることを示せ。

解；

(1) 対偶を証明する。

V が直既約でないとすると、$V = V_1 \oplus V_2,\ \ V_i(\neq 0)$：部分加群, $i = 1, 2$ と書ける。このとき、

$$V^K \cong V_1^K \oplus V_2^K \quad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

となる (演習 1-74)。$V_i^K \neq 0\ (i = 1, 2)$ なので、V^K は直既約でない。

(2) 対偶を証明する。

V が既約でないとすると、$0 \neq W \subsetneqq V$ となる部分加群 W が存在する。このとき、左 A^K-加群として $W^K \subset V^K$ とみなせる。$0 \neq W^K \subsetneqq V^K$ となる。実際、$W \neq 0$ より $W^K \neq 0$

である ($\because$ $0 \neq w \in W$ に対して $1_K \otimes w \neq 0$ in W^K)。また、$V/W \neq 0$ なので、同じ理由により

$$V^K/W^K \cong (V/W)^K \neq 0$$

となる (上の式の同型は演習 1-78 による)。したがって、V^K には真の部分加群 W^K が存在するので、V^K は既約でない。 (Q.E.D.)

演習 1-80

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。
ベクトル空間 $A^K = K \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ は K 上の代数とみなせるばかりでなく、K を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみなして A とテンソル積をとった、$\boldsymbol{k}$ 上の代数 $K \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ ともみなすことができる。
部分集合 $I \subset A^K$ について、
I：K 上の代数としての A^K の左 (resp. 右、両側) イデアル
$\iff$ I：$\boldsymbol{k}$ 上の代数としての A^K の左 (resp. 右、両側) イデアル
となることを示せ。

解；

A^K の 2 元 $\xi = \sum_i x_i \otimes a_i,\ \eta = \sum_j y_j \otimes b_j$ に対して、A^K の K 上の代数としての積は

$$\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j \otimes a_i b_j$$

によって与えられる。これは、K と A をテンソルすることにより得られる $\boldsymbol{k}$ 上の代数 $K \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ における積とも一致しているので、

$$(\xi \text{ と } \eta \text{ の } K \text{ 上の代数としての積}) = (\xi \text{ と } \eta \text{ の } \boldsymbol{k} \text{ 上の代数としての積})$$

が成り立つ。

このことに注意すると、

$$\begin{aligned} & I : K \text{ 上の代数としての } A^K \text{ の左イデアル} \\ \iff & \begin{cases} I \neq \emptyset \\ x, y \in I \implies x + y \in I \\ \xi \in A^K,\ x \in I \implies \xi x \in I \end{cases} \\ \iff & I : \boldsymbol{k} \text{ 上の代数としての } A^K \text{ の左イデアル} \end{aligned}$$

を得る (演習 1-1 も参照)。右イデアルや両側イデアルについても同様にして証明される。

(Q.E.D.)

§11. 森田同値

通常、代数 A と B の間に代数としての同型写像が存在するとき、この２つを「同じ」代数とみなす。この場合には、当然のことながら、A と B はそれらを表現のレベルで見てもまったく「同じように」見える。ところが、代数としては同型でない２つの代数が、表現のレベルで見ると区別がつかないような場合がある。ここでは、そのような２つの代数の組を議論の対象にする。

以後、次の記号を用いる。

記号

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 $A,\ B$ に対して、

${}_A\mathbb{M}$:= 左 A-加群を対象とし、それらの間の準同型を射とする圏

$\mathbb{M}_B$:= 右 B-加群を対象とし、それらの間の準同型を射とする圏

${}_A\mathbb{M}_B$:= 両側 (A,B)-加群を対象とし、それらの間の準同型を射とする圏

とおく。また、$M \in {}_A\mathbb{M}$ によって、M が左 A-加群であることを表わす。同様に、$M \in \mathbb{M}_B$、$M \in {}_A\mathbb{M}_B$ によって、それぞれ、M が右 B-加群、両側 (A,B)-加群であることを表わす。

２つの代数 $A,\ B$ が森田同値であることを定義するために、圏の同値について復習しておこう。２つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が**圏同値** (*category equivalence*) であるとは、共変関手 $F:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ と共変関手 $G:\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が存在して、$G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ および $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$ が成り立つことをいう。ここで、$G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ とは、共変関手 $G \circ F$ と $\mathcal{C}$ 上の恒等関手 $1_{\mathcal{C}}$ の間に自然同値 $\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ (*i.e.* φ は各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{C}$ の同型射 $\varphi_X : G(F(X)) \longrightarrow X$ を対応させる規則であって、任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に対して、$\varphi_Y \circ G(F(f)) = f \circ \varphi_X$ を満たすもの) が存在することを意味する。このとき、$\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ と書く。また、F,G を圏同値を与える共変関手の組と呼んだり、F を圏同値を与える共変関手と呼んだりする。$F:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が圏の同値ならば、次の２つが成り立つ (拙著『古典的なテンソル圏入門』p.12 定理 1-1 参照)：

(i) 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して、

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad f \longmapsto F(f)$$

は全単射である。

(ii) 任意の $X' \in \mathcal{D}$ に対して、$F(X) \cong X'$ となる $X \in \mathcal{C}$ が存在する。

すべての対象の組 (X,Y) に対して、X から Y への射全体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ が $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間の構造を持ち、

$$\begin{cases} (g_1+g_2)\circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f \\ g \circ (f_1+f_2) = g\circ f_1 + g \circ f_2 \\ (\alpha g)\circ f = \alpha(g\circ f) = g \circ (\alpha f) \end{cases} \quad (f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ \alpha \in \boldsymbol{k})$$

が満たされるとき、圏 $\mathcal{C}$ は **$\boldsymbol{k}$-線形加法圏** ($\boldsymbol{k}$*-linear additive category*) であると呼ばれる。代数 A に対して、その左 A-加群のなす圏 ${}_A\mathbb{M}$ や右 A-加群のなす圏 $\mathbb{M}_A$ などは $\boldsymbol{k}$-線形加法圏になっている (実は、もっと強く、$\boldsymbol{k}$-線形アーベル圏と呼ばれるものになっている)。２つの $\boldsymbol{k}$-線形加法圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が $\boldsymbol{k}$-線形加法圏として圏同値であるとは、共変関手 $F:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ と共変関手 $G:\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が存在して、次を満たすときをいう：

(i) F と G は圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の圏同値を与える。

(ii) $F,\ G$ は $\boldsymbol{k}$-線形である、すなわち、$\mathcal{C}$ の任意の対象の組 (X,Y) に対して

$$F_{X,Y}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)),\quad f\longmapsto F(f)$$

は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像であり、$\mathcal{D}$ の任意の対象の組 (X',Y') に対して

$$G_{X',Y'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X',Y')\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X'),G(Y')),\quad g\longmapsto G(g)$$

は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像である。

$\boldsymbol{k}$-線形加法圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が $\boldsymbol{k}$-線形加法圏として圏同値であるとき、$\mathcal{C}\approx\mathcal{D}$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories と書くことにする。

定義 1-19

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

A と B が**森田同値** (*Morita-equivalent*) $\Longleftrightarrow$ ${}_A\mathbb{M}\approx{}_B\mathbb{M}$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories

注意：A と B が森田同値 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{M}_A\approx\mathbb{M}_B$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories
となることが、後に証明される (定理 1-53 の証明下の注意 3° 参照)。

例題 1-50

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、任意の自然数 n について、A と $\mathrm{M}_n(A)$ は森田同値である。

(proof)

第 1 段：$e\in A$ を冪等元とし、$B:=eAe$ とおく。自然変換 $\eta: Ae\otimes_B eA\otimes_A - \Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}}$ を任意の $M\in{}_A\mathbb{M}$ に対して、左 A-加群準同型

$$\eta_M: Ae\otimes_B eA\otimes_A M\longrightarrow M,\quad ae\otimes_B ea'\otimes_A m\longmapsto aea'm,\quad a,a'\in A, m\in M$$

を対応させる規則とする。

$$\eta:\ \text{自然同値}\quad\Longleftrightarrow\quad AeA=A$$

となる。

$\because$)

まず、η_M は矛盾なく定義されていて、左 A-加群準同型であることを確認する必要がある。

$\tilde{\eta}_M: Ae\times eA\times M\longrightarrow M$ を $(x,y,m)\longmapsto xym,\ \ x\in Ae,\ y\in eA,\ m\in M$ によって定義する。A の積から誘導される作用に関して、Ae は右 B-加群になり、eA は左 B-加群になることに注意する。これらの作用に関して

$$\begin{cases}\tilde{\eta}_M(xb,y,m)=\tilde{\eta}_M(x,by,m)\\ \tilde{\eta}_M(x,ya,m)=\tilde{\eta}_M(x,y,am)\end{cases}\qquad x\in Ae,\ y\in eA,\ m\in M,\ b\in B,\ a\in A$$

が成り立つ。よって、$\tilde{\eta}_M$ は線形写像 $Ae\otimes_B eA\otimes_A M\longrightarrow M$ を誘導する。この写像が最初に与えられた η に他ならない。また、$Ae\otimes_B eA\otimes_A M$ への A の左作用を

$$a\cdot(x\otimes_B y\otimes_A\otimes m)=(ax)\otimes_B y\otimes_A\otimes m,\quad a\in A,\ x\in Ae,\ y\in eA,\ m\in M$$

によって定義すると、η_M は左 A-加群準同型になっていることもわかる。

「$\Longrightarrow$」の証明：

$M = {}_AA$ の場合を考える。η_M は全射であるから、

$$A = \mathrm{Im}\eta_{{}_AA} \underset{\eta_M \text{ の定義より}}{\overset{\uparrow}{=}} AeA$$

となる。

「$\Longleftarrow$」の証明：

$AeA = A$ より、$1 = \sum_{i=1}^{n} a_iea'_i$ $(a_i, a'_i \in A)$ と表わすことができる。このとき、任意の $m \in M$ は

$$m = 1 \cdot m = \sum_{i=1}^{n} a_iea'_i \cdot m = \sum_{i=1}^{n} \eta_M(a_ie \otimes_B ea'_i \otimes_A m)$$

のようにあらわすことができるので、η_M は全射である。次に、η_M が単射であることを示す。

$\sum_j s_je \otimes_B et_j \otimes_A m_j \in \mathrm{Ker}\eta_M$ とすると、

$$\begin{aligned}
\sum_j s_je \otimes_B et_j \otimes_A m_j &= \sum_{i,j} a_iea'_is_je \otimes_B et_j \otimes_A m_j \\
&= \sum_{i,j} a_ie(ea'_is_je) \otimes_B et_j \otimes_A m_j \\
&= \sum_{i,j} a_ie \otimes_B (ea'_is_je)et_j \otimes_A m_j \\
&= \sum_{i,j} a_ie \otimes_B ea'_i(s_jet_j) \otimes_A m_j \\
&= \sum_{i,j} a_ie \otimes_B ea'_i \otimes_A (s_jet_j)m_j \\
&= \sum_{i} a_ie \otimes_B ea'_i \otimes_A (\sum_j s_jet_jm_j) = 0
\end{aligned}$$

となる。よって、η_M は単射である。 □

第２段：$AeA = A \implies A$ と $B = eAe$ は森田同値

∵)

$F := eA \otimes_A - : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$ と $G := Ae \otimes_B - : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ とによって ${}_A\mathbb{M} \approx {}_B\mathbb{M}$ となることを示す。$AeA = A$ なので第１段の η は自然同値になるが、それは $G \circ F$ から恒等関手 $1_{{}_A\mathbb{M}}$ への自然同値を与える：$\eta : G \circ F \Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}}$ 。また、自然同値 $\varphi : F \circ G \Rightarrow 1_{{}_B\mathbb{M}}$ を各 $N \in {}_B\mathbb{M}$ に対して、以下のような左 B-加群の同型を対応させる規則として定義することができる：

両側 (B, B)-加群として $eA \otimes_A Ae \cong eAe$ である。実際、$ea \otimes_A a'e \longmapsto eaa'e$ $(a, a' \in A)$ によって定義される写像 $f : eA \otimes_A Ae \longrightarrow eAe$ がその同型を与える。そこで、左

B-加群の同型 $\varphi_N : eA \otimes_A Ae \otimes_B N \longrightarrow N$ を合成

$$eA \otimes_A Ae \otimes_B N \xrightarrow{f \otimes_B \mathrm{id}_N} eAe \otimes_B N = B \otimes_B N \cong N$$

として定義する。φ_N は N に関して自然であることがわかる。

F, G は $\boldsymbol{k}$-線形であるから、

$$_A\mathbb{M} \approx {_B\mathbb{M}} \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-linear additive categories}$$

を得る。 □

第３段：$^\forall n \in \mathbb{N},\ A \approx \mathrm{M}_n(A)$

$\because$)

第２段により、冪等元 $e \in \mathrm{M}_n(A)$ であって、$e\mathrm{M}_n(A)e \cong A$ かつ $\mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A) = \mathrm{M}_n(A)$ となるものが存在することを示せばよい。

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。e は $\mathrm{M}_n(A)$ の冪等元である。さらに、

$$e\mathrm{M}_n(A)e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in A \right\} \cong A \quad \text{as algebras}$$

であって、

$$\mathrm{M}_n(A)(e\mathrm{M}_n(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_{ij}, a_i \in A \\ (i, j = 1, \cdots, n) \end{matrix} \right\}$$
$$= \mathrm{M}_n(A)$$

が成り立つ。 □

以上で、示された。 (Q.E.D.)

補題 1-51

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$\boldsymbol{k}$-線形な共変関手 $F : {_A\mathbb{M}} \longrightarrow {_B\mathbb{M}},\ G : {_B\mathbb{M}} \longrightarrow {_A\mathbb{M}}$ によって A と B は森田同値であると仮定する。

$P := G(_BB),\ Q := F(_AA)$ とおく。このとき、

(1) P には右 B-加群の構造が入って、$P \in {_A\mathbb{M}_B}$ となる。

　Q には右 A-加群の構造が入って、$Q \in {_B\mathbb{M}_A}$ となる。

(2) $P \cong \mathrm{Hom}_B(Q, {}_BB)$ as (A,B)-modules, $Q \cong \mathrm{Hom}_A(P, {}_AA)$ as (B,A)-modules
(3) $^\exists e : P \otimes_B Q \longrightarrow A$: 全射な両側 A-加群準同型,
$^\exists e' : Q \otimes_A P \longrightarrow B$: 全射な両側 B-加群準同型 s.t. $^\forall p_1, p_2 \in P$, $^\forall q_1, q_2 \in Q$,
$p_1 \cdot e'(q_1 \otimes_A p_2) = e(p_1 \otimes_B q_1) \cdot p_2$, $e'(q_1 \otimes_A p_1) \cdot q_2 = q_1 \cdot e(p_1 \otimes_B q_2)$

(proof)
(1) P の右 B-加群の定義：
各 $b \in B$ に対して、$\rho_r(b) : B \longrightarrow B$ を b の B への正則な右作用とする。すなわち、

$$\rho_r(b) : x \longmapsto xb, \quad x \in B$$

とする。$\rho_r(b)$ は左 B-加群準同型なので、$G(\rho_r(b)) : P \longrightarrow P$ を考えることができる。写像 $B \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} P$ を $B \ni b \longmapsto G(\rho_r(b)) \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} P$ によって定義する。写像 $\rho_r : B \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} B$, $b \longmapsto \rho_r(b)$ は反代数準同型 (*i.e.* B から $(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} B)^{\mathrm{op}}$ への写像とみたとき、代数準同型) であるから、上の写像 $B \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} P$, $b \longmapsto G(\rho_r(b))$ も反代数準同型になる。したがって、この写像によって P は右 B-加群になる。
・$P \in {}_A\mathbb{M}_B$ であること：
P はその定義によって、$P \in {}_A\mathbb{M}$ である。A のこの左作用と先程定義した B の右作用が可換になることを示せばよい。$a \in A$, $b \in B$, $p \in P$ に対して、

$$\begin{aligned}(a \cdot p) \cdot b &= G(\rho_r(b))(a \cdot p) \\ &= a \cdot G(\rho_r(b))(p) \quad \text{$G(\rho_r(b))$ は左 A-加群準同型} \\ &= a \cdot (p \cdot b)\end{aligned}$$

よって、P は両側 (A,B)-加群である。
同様にして、Q に右 A-加群の構造を定義することができ、$Q \in {}_B\mathbb{M}_A$ となることがわかる。
(2) $Q \cong \mathrm{Hom}_A(P, {}_AA)$ as (B,A)-modules であること：
$\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}}$ を自然同値とする。任意の $M \in {}_A\mathbb{M}$ に対して

$$F(M) \cong \mathrm{Hom}_B({}_BB, F(M)) \xrightarrow{G_{{}_BB, F(M)}} \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M)) \xrightarrow{(\varphi_M)_*} \mathrm{Hom}_A(P, M)$$

は左 B-加群の同型である。但し、$(\varphi_M)_*$ は $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M))$ に対して $\varphi_M \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ を対応させる写像である。
∵)
1 番左の同型や $\mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M))$, $\mathrm{Hom}_A(P, M)$ を左 B-加群とみなす方法については、演習 1-11 を参照。
・$G_{{}_BB, F(M)} : \mathrm{Hom}_B({}_BB, F(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M))$ が左 B-加群の同型であること：G は圏同値を与える $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手であるから、$G_{{}_BB, F(M)} : \mathrm{Hom}_B({}_BB, F(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M))$ は $\boldsymbol{k}$-線形同型写像である。この写像が B の左作用を保つことを示す。
$\alpha \in \mathrm{Hom}_B({}_BB, F(M))$ と $b \in B$ を任意にとる。任意の $b' \in B$ に対して

$$(b \cdot \alpha)(b') = \alpha(bb') = (\alpha \circ \rho_r(b))(b')$$

が成り立つ。一方、任意の $p \in G({}_BB)$ に対して

$$(b \cdot G(\alpha))(p) = G(\alpha)(p \cdot b) = G(\alpha)(G(\rho_r(b))(p)) = G(\alpha \circ \rho_r(b))(p)$$

となる。故に、

$$G(b \cdot \alpha) = b \cdot G(\alpha)$$

となることが示された。

・$(\varphi_M)_* : \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M)$ が左 B-加群の同型であること：

$\varphi_M : GF(M) \longrightarrow M$ は同型であるから、$(\varphi_M)_*$ は $\boldsymbol{k}$-線形同型写像である。$\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{Hom}_A(P, M) \times P \longrightarrow M$ を自然なペアリングとする。このとき、任意の $\beta \in \mathrm{Hom}_A(G({}_BB), GF(M))$ と任意の $b \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle (\varphi_M)_*(b \cdot \alpha),\ p \rangle &= \langle \varphi_M \circ (b \cdot \alpha),\ p \rangle \\
&= \langle \varphi_M,\ (b \cdot \alpha)(p) \rangle \\
&= \langle \varphi_M,\ \alpha(p \cdot b) \rangle \\
&= \langle \varphi_M \circ \alpha,\ p \cdot b \rangle \\
&= \langle b \cdot (\varphi_M \circ \alpha),\ p \rangle
\end{aligned}$$

故に、

$$(\varphi_M)_*(b \cdot \alpha) = b \cdot (\varphi_M \circ \alpha)$$

を得る。 □

M として $M = {}_AA$ を選んだときの上の左 A-加群の同型を ϕ とおく。$\phi : Q = F({}_AA) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, {}_AA)$ が右 A-加群準同型にもなることを示す。

$a \in A$ に対して、$\rho_r(a) : A \longrightarrow A$ によって a の A への右正則作用を表わすことにする。このとき、$Q = F({}_AA)$ への A の右作用は (1) で定めたように

$$q \cdot a = F(\rho_r(a))(q) \qquad (q \in Q,\ a \in A)$$

によって与えられる。したがって、同型 $Q \cong \mathrm{Hom}_B({}_BB, F({}_AA))$ の下で、$q \longleftrightarrow f$ であるとすると、$q \cdot a \longleftrightarrow F(\rho_r(a)) \circ f$ となることがわかる。

$\because$)

$q \in Q$ と $f \in \mathrm{Hom}_B({}_BB, F({}_AA))$ の間の同型対応は $f(1) = q$ という関係により与えられている (演習 1-11) ことを思い出そう。

$$(F(\rho_r(a)) \circ f)(1) = F(\rho_r(a))(f(1)) = F(\rho_r(a))(q) = q \cdot a$$

であるから、その同型対応の下で $q \cdot a$ は $F(\rho_r(a)) \circ f$ に対応している。 □

よって、

$$\phi(q \cdot a) = \varphi_{{}_AA} \circ G(F(\rho_r(a)) \circ f) = \varphi_{{}_AA} \circ GF(\rho_r(a)) \circ G(f)$$

となる。ここで、φ の自然性により、次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} {}_A A & \xrightarrow{\rho_r(a)} & {}_A A \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ GF({}_A A) & \xrightarrow[GF(\rho_r(a))]{} & GF({}_A A) \end{array}$$

よって、

$$\phi(q \cdot a) = \rho_r(a) \circ \varphi_{{}_A A} \circ G(f) = \rho_r(a) \circ \phi(q)$$

を得る。ここで、$\mathrm{Hom}_A(P, {}_A A)$ への A の右作用は

$$(\alpha \cdot a)(p) = \alpha(p)a \qquad\qquad (\alpha \in \mathrm{Hom}_A(P, {}_A A),\ a \in A,\ p \in P)$$

によって与えられている (演習 1-11) ので、

$$\phi(q \cdot a) = \rho_r(a) \circ \phi(q) = \phi(q) \cdot a$$

を得る。こうして、ϕ が右 A-加群準同型になることも示された。

同様にして、自然同値 $\psi : F \circ G \Rightarrow 1_{{}_B\mathbb{M}}$ を用いて、両側 (A, B)-加群の同型

$$\begin{aligned} \eta : P = G({}_B B) &\cong \mathrm{Hom}_A({}_A A, G({}_B B)) \\ &\xrightarrow{F_{{}_A A, G({}_B B)}} \mathrm{Hom}_B(F({}_A A), FG({}_B B)) \xrightarrow{(\psi_{{}_B B})_*} \mathrm{Hom}_B(Q, {}_B B) \end{aligned}$$

が得られる。

(3) $e_P : P \otimes_B \mathrm{Hom}_A(P, {}_A A) \longrightarrow A$ を

$$e_P(p \otimes_B \alpha) = \alpha(p) \qquad\qquad (p \in P,\ \alpha \in \mathrm{Hom}_A(P, {}_A A))$$

によって定義する。e_P は両側 (A, A)-加群準同型である。そこで、合成写像

$$e : P \otimes_B Q \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_B \phi} P \otimes_B \mathrm{Hom}_A(P, {}_A A) \xrightarrow{e_P} A$$

を考える。これは両側 (A, A)-加群準同型である。

同様に、$e_Q : Q \otimes_A \mathrm{Hom}_B(Q, {}_B B) \longrightarrow B$ を

$$e_Q(q \otimes_A \beta) = \beta(q) \qquad\qquad (q \in Q,\ \beta \in \mathrm{Hom}_B(Q, {}_B B))$$

によって定義すると両側 (B, B)-加群準同型となり、したがって、合成写像

$$e' : Q \otimes_A P \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_A \eta} Q \otimes_A \mathrm{Hom}_B(Q, {}_B B) \xrightarrow{e_Q} B$$

は両側 (B, B)-加群準同型となる。

$p_1, p_2 \in P,\ q \in Q$ に対して、$p_1 \cdot e'(q \otimes_A p_2) = e(p_1 \otimes_B q) \cdot p_2$ となることを示す。そのために、自然同値 $\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}}$ と $\psi : F \circ G \Rightarrow 1_{{}_B\mathbb{M}}$ を

$$\begin{cases} \varphi_{G(N)} = G(\psi_N) & \text{for } {}^\forall N \in {}_B\mathbb{M} \\ \psi_{F(M)} = F(\varphi_M) & \text{for } {}^\forall M \in {}_A\mathbb{M} \end{cases}$$

となるように取り直して (演習 1-76)、このような $\varphi,\ \psi$ を用いて (2) の両側 (A, B)-加群の同型 $\eta : P \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(Q, B)$ と両側 (B, A)-加群の同型 $\phi : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, A)$ を定義しなおす。

η の定義で用いた両側 (A,B)-加群の同型 $P \cong \mathrm{Hom}_A(A,P)$ を与える写像を $\mu : P \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,P)$ とおき、ϕ の定義で用いた両側 (B,A)-加群の同型 $Q \cong \mathrm{Hom}_B(B,Q)$ を与える写像を $\lambda : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B,Q)$ とおく：

$$\mu(p) : 1 \longmapsto p, \quad \lambda(q) : 1 \longmapsto q \qquad \text{for } p \in P,\ q \in Q$$

このとき、定義から

$$e'(q \otimes_A p_2) = e_Q(q \otimes_A \eta(p_2)) = (\psi_B \circ F(\mu(p_2)))(q)$$

である。したがって、

$$\rho_r(e'(q \otimes_A p_2)) = \psi_B \circ F(\mu(p_2)) \circ \lambda(q)$$

が成り立つ。

$\because)$

任意の $b \in B$ に対して

$$(\psi_B \circ F(\mu(p_2)) \circ \lambda(q))(b) = b(\psi_B \circ F(\mu(p_2)))(q)$$

となる ($\because$ $\lambda(q)$ は左 B-加群準同型) から、$\psi_B \circ F(\mu(p_2)) \circ \lambda(q)$ は左から $(\psi_B \circ F(\mu(p_2)))(q) = e'(q \otimes_A p_2)$ を掛ける写像になっている。 □

よって、

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot e'(q \otimes_A p_2) &= G(\rho_r(e'(q \otimes_A p_2)))(p_1) \\
&= G(\psi_B \circ F(\mu(p_2)) \circ \lambda(q))(p_1) \\
&= (G(\psi_B) \circ GF(\mu(p_2)) \circ G(\lambda(q)))(p_1) && \text{自然同値 } \varphi,\ \psi \text{ の選び方} \\
&= (\varphi_{G(B)} \circ GF(\mu(p_2)) \circ G(\lambda(q)))(p_1) \\
&= (\mu(p_2) \circ \varphi_A \circ G(\lambda(q)))(p_1) && \varphi \text{ の自然性}
\end{aligned}$$

を得る。$\mu(p_2)$ は左 A-加群準同型であるから、

$$\begin{aligned}
(\mu(p_2) \circ \varphi_A \circ G(\lambda(q)))(p_1) &= \mu(p_2)(\varphi_A \circ G(\lambda(q)))(p_1)) \\
&= (\varphi_A \circ G(\lambda(q)))(p_1) \cdot \mu(p_2)(1) \\
&= (\varphi_A \circ G(\lambda(q)))(p_1) \cdot p_2
\end{aligned}$$

となる。

この最後の式は $e(p_1 \otimes_B q) \cdot p_2$ に一致している。よって、$p_1 \cdot e'(q \otimes_A p_2) = e(p_1 \otimes_B q) \cdot p_2$ となることが証明された。同様にして、$p_1 \cdot e'(q \otimes_A p_2) = e(p_1 \otimes_B q) \cdot p_2$ となることも証明することができる ($A \leftrightarrow B$, $F \leftrightarrow G$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ と入れ替えると $P \leftrightarrow Q$, $\eta \leftrightarrow \phi$, $\lambda \leftrightarrow \mu$, $e \leftrightarrow e'$ と入れ替わることから)。

最後に e, e' の全射性を示す。そために は、$e_P : P \otimes_B \mathrm{Hom}_A(P, {}_AA) \longrightarrow A$ および $e_Q : Q \otimes_A \mathrm{Hom}_B(Q, {}_BB) \longrightarrow B$ が全射であることを示せばよい。どちらの場合も同様に証明でき

るので、e_P が全射であることを示そう。e_P は両側 (A,A)-加群準同型なので、$1 \in A$ が e_P の像に含まれることを示せばよい。

G は $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与えるので、$P = G({}_B B)$ は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元である、すなわち、任意の $M \in {}_A\mathbb{M}$ に対して、ある (添字) 集合 I と全射な左 A-加群準同型 $f : P^{\oplus I} \longrightarrow M$ が存在する ($\because$ ${}_B B$ は ${}_B\mathbb{M}$ の生成元であり、$\boldsymbol{k}$-線形な圏同値は生成元を保つことから従う。演習 1-83(3) 参照)。

よって、正則加群 ${}_A A \in {}_A\mathbb{M}$ に対して、ある (添字) 集合 I と全射な左 A-加群準同型 $f : P^{\oplus I} \longrightarrow {}_A A$ が存在する。よって、

$$1 = f(x) \qquad (x \in P^{\oplus I})$$

と表わすことができる。

$$x = (x_i)_{i \in I} \qquad (x_i \in P,\ i \in I)$$

と書くとき、直和の定義から、$x_i \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個である。そのような i 全体を $i_1, \cdots, i_k$ とおく。このとき、直和 $P^{\oplus I}$ に附随する標準的な単射 $j_i : P \longrightarrow P^{\oplus I}$, $j \in I$ を用いて、

$$1 = f(j_{i_1}(x_{i_1})) + \cdots + f(j_{i_k}(x_{i_k}))$$

と書くことができる。$\alpha_1 := f \circ j_{i_1}, \cdots, \alpha_k := f \circ j_{i_k}$ とおくと、

$$1 = \alpha_1(x_{i_1}) + \cdots + \alpha_k(x_{i_k})$$

と書き直すことができる。故に、

$$e_P(x_{i_1} \otimes_B \alpha_1 + \cdots + x_{i_k} \otimes_B \alpha_k) = 1$$

が得られた。こうして、e_P の全射性が証明された。 (Q.E.D.)

定義 1-20

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$P \in {}_A\mathbb{M}_B,\ Q \in {}_B\mathbb{M}_A$ 　とする。
$e : P \otimes_B Q \longrightarrow A$ および $e' : Q \otimes_A P \longrightarrow B$ を $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像とする。
このとき、以下の条件を満たす組 (A, B, P, Q, e, e') を**森田コンテクスト** (*Morita context*) と呼ぶ。

(i) e は両側 (A,A)-加群準同型である。すなわち、

$$e((a \cdot p) \otimes_B (q \cdot a')) = ae(p \otimes_B q)a' \qquad \text{for } p \in P,\ q \in Q,\ a, a' \in A$$

(ii) e' は両側 (B,B)-加群準同型である。すなわち、

$$e'((b \cdot q) \otimes_A (p \cdot b')) = be'(q \otimes_A p)b' \qquad \text{for } p \in P,\ q \in Q,\ b, b' \in B$$

(iii) $p_1 \cdot e'(q_1 \otimes_A p_2) = e(p_1 \otimes_B q_1) \cdot p_2, \quad e'(q_1 \otimes_A p_1) \cdot q_2 = q_1 \cdot e(p_1 \otimes_B q_2)$
for $p_1, p_2 \in P,\ q_1, q_2 \in Q$

森田コンテクストの典型的な例を２つ述べよう。

例題 1-52

(1) A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群　とする。このとき、

P は $B := (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$ の右作用

$$p \cdot b = b(p) \qquad (b \in (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ p \in P)$$

と最初に与えられている A の左作用によって両側 $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}})$-加群になり、

$P^\vee = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ は $(\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$ の左作用

$$b \cdot \alpha = \alpha \circ b \qquad (b \in (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ \alpha \in P^\vee)$$

と A の右作用

$$(\alpha \cdot a)(p) = \alpha(p)a \qquad (p \in P,\ \alpha \in P^\vee,\ a \in A)$$

によって両側 $((\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, A)$-加群になる。さらに、

$$\begin{cases} e : P \otimes_B P^\vee \longrightarrow A, & e(p \otimes_B \alpha) = \alpha(p) \qquad (p \in P,\ \alpha \in P^\vee) \\ e' : P^\vee \otimes_A P \longrightarrow (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, & e'(\alpha \otimes_A p)(p') = \alpha(p') \cdot p \qquad (p, p' \in P,\ \alpha \in P^\vee) \end{cases}$$

と定めると、組 $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, P, P^\vee, e, e')$ は森田コンテクストである。

(2) B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 B-加群　とする。このとき、

P は $A := \mathrm{End}_B P$ の左作用

$$a \cdot p = a(p) \qquad (a \in \mathrm{End}_B P,\ p \in P)$$

と最初に与えられている B の右作用によって両側 $(\mathrm{End}_B P, B)$-加群になり、

${}^\vee P := \mathrm{Hom}_B(P, B)$ は B の左作用

$$(b \cdot \alpha)(p) = b\alpha(p) \qquad (b \in B,\ \alpha \in {}^\vee P,\ p \in P)$$

と $\mathrm{End}_B P$ の右作用

$$\alpha \cdot a = \alpha \circ a \qquad (a \in \mathrm{End}_B P,\ \alpha \in {}^\vee P,\ p \in P)$$

によって両側 $(B, \mathrm{End}_B P)$-加群になる。さらに、

$$\begin{cases} e : P \otimes_B {}^\vee P \longrightarrow \mathrm{End}_B P, & e(p \otimes_B \alpha)(p') = p \cdot \alpha(p') \qquad (p, p' \in P,\ \alpha \in {}^\vee P) \\ e' : {}^\vee P \otimes_A P \longrightarrow B, & e'(q \otimes_A \alpha) = \alpha(p) \qquad (p \in P,\ \alpha \in {}^\vee P) \end{cases}$$

と定めると、組 $(\mathrm{End}_B P, B, P, {}^\vee P, e, e')$ は森田コンテクストである。

(proof)

(1)・P が両側 $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}})$-加群になること：

$\mathrm{End}_A P$ は P に次のようにして左から作用する。

$$b \cdot p = b(p) \qquad (b \in \mathrm{End}_A P,\ p \in P)$$

よって、$(\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$ は P に次のようにして右から作用する：

$$p \cdot b = b(p) \qquad (b \in (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ p \in P)$$

また、$a \in A,\ b \in (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ p \in P$ に対して、

$$(a \cdot p) \cdot b = b(a \cdot p) = a \cdot b(p) = a \cdot (p \cdot b)$$

となる。よって、P は両側 $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}})$-加群である。

・$P^\vee = \mathrm{Hom}_A(P,A)$ が両側 $((\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, A)$-加群になること：

与えられた作用に関して、$P^\vee$ が左 $(\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$-加群になり、右 A-加群になることはすぐにわかる。さらに、任意の $a \in A,\ b \in (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ \alpha \in P^\vee$ に対して、

$$((b\cdot\alpha)\cdot a)(p) = (b\cdot\alpha)(p)a = \alpha(b(p))a = (\alpha\cdot a)(b(p)) = (b\cdot(\alpha\cdot a))(p) \quad \text{for } {}^\forall p \in P$$

となる。よって、$P^\vee$ は両側 $((\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, A)$-加群になる。

・e が両側 (A,A)-加群準同型であること：

$a, a' \in A,\ p \in P,\ \alpha \in P^\vee$ に対して

$$e((a\cdot p)\otimes_B(\alpha\cdot a')) = (\alpha\cdot a')(a\cdot p) = \alpha(a\cdot p)a' = a\alpha(p)a' = ae(p\otimes_B \alpha)a'$$

となるので、e は両側 (A,A)-加群準同型である。

・e' が両側 (B,B)-加群準同型であること：

$b, b' \in B,\ p \in P,\ \alpha \in P^\vee$ に対して

$$\begin{aligned} e'((b\cdot\alpha)\otimes_A(p\cdot b'))(p') &= (b\cdot\alpha)(p')\cdot(p\cdot b') \\ &= \alpha(b(p'))\cdot b'(p) \\ &= b'(\alpha(b(p'))\cdot p) \\ &= b'(e'(\alpha\otimes_A p)(b(p'))) \\ &= (e'(\alpha\otimes_A p)*b')(b(p')) \\ &= (b*e'(\alpha\otimes_A p)*b')(p') \quad \text{for } p' \in P \end{aligned}$$

となる。ここで、$*$ は、$B = (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$ における積を表わしている。故に、e' は両側 (B,B)-加群準同型である。

・$p\cdot e'(\alpha\otimes_A p') = e(p\otimes_B\alpha)\cdot p'$ for $p, p' \in P,\ \alpha \in P^\vee$ であること：

$$p\cdot e'(\alpha\otimes_A p') = e'(\alpha\otimes_A p')(p) = \alpha(p)\cdot p' = e(p\otimes_B\alpha)\cdot p'$$

より従う。

・$e'(\alpha\otimes_A p)\cdot\alpha' = \alpha\cdot e(p\otimes_B\alpha')$ for $p \in P,\ \alpha, \alpha' \in P^\vee$ であること：

$$\begin{aligned} (e'(\alpha\otimes_A p)\cdot\alpha')(p') &= (\alpha'\circ e'(\alpha\otimes_A p))(p') \\ &= \alpha'(\alpha(p')\cdot p) \\ &= \alpha(p')\cdot\alpha'(p) \\ &= (\alpha\cdot\alpha'(p))(p') \\ &= (\alpha\cdot e(p\otimes_B\alpha'))(p') \quad \text{for } p' \in P \end{aligned}$$

より従う。

以上より、組 $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, P, P^\vee, e, e')$ は森田コンテクストである。

(2)・P が両側 $(\mathrm{End}_B P, B)$-加群になること：

与えられた作用に関して、P が左 $\mathrm{End}_B P$-加群になることは明らかである。さらに、任意の $a \in \mathrm{End}_B P,\ b \in B,\ p \in P$ に対して

$$(a\cdot p)\cdot b = a(p)b = a(p\cdot b) = a\cdot(p\cdot b)$$

となるので、P は両側 $(\mathrm{End}_B P, B)$-加群である。

・${}^\vee P := \mathrm{Hom}_B(P,B)$ が両側 $(B, \mathrm{End}_B P)$-加群になること：

$^\vee P$ が与えられた作用に関して、左 B-加群になり、右 $\mathrm{End}_B P$-加群になることはすぐにわかる。さらに、任意の $a \in \mathrm{End}_B P,\ b \in B,\ \alpha \in {}^\vee P$ に対して

$$((b \cdot \alpha) \cdot a)(p) = (b \cdot \alpha)(a(p)) = b\alpha(a(p)) = b(\alpha \cdot a)(p) = (b \cdot (\alpha \cdot a))(p)$$

が任意の $p \in P$ に対して成り立つ。故に、$^\vee P$ は両側 $(B, \mathrm{End}_B P)$-加群である。

・e が両側 (A, A)-加群準同型であること：

$a, a' \in A,\ p \in P,\ \alpha \in {}^\vee P$ に対して

$$\begin{aligned} e((a \cdot p) \otimes_B (\alpha \cdot a'))(p') &= (a \cdot p) \cdot (\alpha \cdot a')(p') \\ &= a(p) \cdot \alpha(a'(p')) \\ &= a(p \cdot \alpha(a'(p'))) \\ &= a(e(p \otimes_B \alpha)(a'(p')) \\ &= (a \circ e(p \otimes_B \alpha) \circ a')(p') \end{aligned}$$

となるので、e は両側 (A, A)-加群準同型である。

・e' が両側 (B, B)-加群準同型であること：

$b, b' \in B,\ p \in P,\ \alpha \in {}^\vee P$ に対して

$$e'((b \cdot \alpha) \otimes_A (p \cdot b')) = (b \cdot \alpha)(p \cdot b') = b\alpha(p \cdot b') = b\alpha(p)b' = be'(\alpha \otimes_A p)b'$$

となるので、e' は両側 (B, B)-加群準同型である。

・$p \cdot e'(\alpha \otimes_A p') = e(p \otimes_B \alpha) \cdot p'$ for $p, p' \in P,\ \alpha \in {}^\vee P$ であること：

$$p \cdot e'(\alpha \otimes_A p') = p \cdot \alpha(p') = e(p \otimes_B \alpha)(p') = e(p \otimes_B \alpha) \cdot p'$$

より従う。

・$e'(\alpha \otimes_A p) \cdot \alpha' = \alpha \cdot e(p \otimes_B \alpha')$ for $p \in P,\ \alpha, \alpha' \in {}^\vee P$ であること：

$$\begin{aligned} (e'(\alpha \otimes_A p) \cdot \alpha')(p') &= e'(\alpha \otimes_A p)\alpha'(p') \\ &= \alpha(p)\alpha'(p') \\ &= \alpha(p \cdot \alpha'(p')) \\ &= \alpha(e(p \cdot \alpha')(p')) \\ &= (\alpha \circ e(p \cdot \alpha'))(p') \\ &= (\alpha \cdot e(p \cdot \alpha'))(p') \end{aligned}$$

より従う。

以上より、組 $(\mathrm{End}_B P, B, P, {}^\vee P, e, e')$ は森田コンテクストである。 (Q.E.D.)

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数が森田同値ならば補題 1-51 のようにして定まる P, Q, e, e' によって森田コンテクスト (A, B, P, Q, e, e') が定まり、また、e, e' は全射になる。次の定理はこの逆が成立することを主張している。

定理 1-53(森田紀一)

(A,B,P,Q,e,e')：森田コンテクスト

$e,\ e'$ は全射であると仮定する。このとき、以下のことが成り立つ。

(1) $e: P\otimes_B Q \longrightarrow A,\ e': Q\otimes_A P \longrightarrow B$ は両側加群としての同型である。

(2) 共変関手 $P\otimes_B - : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ と $Q\otimes_A - : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$ は2つの圏 ${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ の間の $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える。同様に、共変関手 $-\otimes_A P : \mathbb{M}_A \longrightarrow \mathbb{M}_B$ と $-\otimes_B Q : \mathbb{M}_B \longrightarrow \mathbb{M}_A$ は2つの圏 $\mathbb{M}_A$ と $\mathbb{M}_B$ の間の $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える。

(3) 包含関係による順序集合として

$$\{P \text{ の部分 } A\text{-加群全体}\} \cong \{B \text{ の左イデアル全体}\}$$

となる。この同型の下で、P の部分 (A,B)-加群は B の両側イデアルに対応する。同様に、包含関係による順序集合として

$$\{P \text{ の部分 } B\text{-加群全体}\} \cong \{A \text{ の右イデアル全体}\}$$

となる。この同型の下で、P の部分 (A,B)-加群は A の両側イデアルに対応する。

したがって、A と B の両側イデアルは、包含関係による順序集合として1対1に対応する。

(proof)

(1) e が単射であることを示す。

e および e' は全射であるから、

$$\begin{aligned}
&{}^\exists\{p_i\}_{i=1}^n \subset P,\ \{q_i\}_{i=1}^n \subset Q \ \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n e(p_i \otimes_B q_i) = 1_A,\\
&{}^\exists\{p'_j\}_{j=1}^m \subset P,\ \{q'_j\}_{j=1}^m \subset Q \ \text{ s.t. } \sum_{j=1}^m e'(q'_j \otimes_A p'_j) = 1_B
\end{aligned}$$

となる。$\sum_k \tilde{p}_k \otimes_B \tilde{q}_k \in \operatorname{Ker} e$ を任意にとる。このとき、

$$\begin{aligned}
\sum_k \tilde{p}_k \otimes_B \tilde{q}_k &= \sum_k \tilde{p}_k \otimes_B (\tilde{q}_k \cdot 1_A)\\
&= \sum_k \sum_{i=1}^n \tilde{p}_k \otimes_B (\tilde{q}_k \cdot e(p_i \otimes_B q_i))\\
&= \sum_k \sum_{i=1}^n \tilde{p}_k \otimes_B (e'(\tilde{q}_k \otimes_A p_i) \cdot q_i)\\
&= \sum_k \sum_{i=1}^n (\tilde{p}_k \cdot e'(\tilde{q}_k \otimes_A p_i)) \otimes_B q_i\\
&= \sum_k \sum_{i=1}^n (e(\tilde{p}_k \otimes_B \tilde{q}_k) \cdot p_i) \otimes_B q_i\\
&= \sum_{i=1}^n (e(\sum_k \tilde{p}_k \otimes_B \tilde{q}_k) \cdot p_i) \otimes_B q_i\\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。故に、e は単射である。同様にして、e' も単射であることが示される。

(2) $\mathcal{F}_1 := Q \otimes_A - : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$, $\mathcal{F}_2 := P \otimes_B - : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ とおく。$M \in {}_A\mathbb{M}$ に対して

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1)(M) &= P \otimes_B (Q \otimes_A M) \\
&\cong (P \otimes_B Q) \otimes_A M && \leftarrow \text{ 左 } A\text{-加群として。} A \text{ は } P \text{ に左から作用} \\
&\cong A \otimes_A M && \leftarrow (1) \\
&\cong M && \leftarrow \text{ 左 } A\text{-加群として}
\end{aligned}$$

となる。その左 A-加群としての同型写像を $\sigma(M) : (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1)(M) \longrightarrow M$ とおくと、$\sigma(M)$ は次のような合成写像で与えられる：

$$\begin{array}{ccccccc}
P \otimes_B (Q \otimes_A M) & \longrightarrow & (P \otimes_B Q) \otimes_A M & \xrightarrow{e \otimes_A \mathrm{id}} & A \otimes_A M & \longrightarrow & M \\
\Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
p \otimes_B (q \otimes_A m) & \longmapsto & (p \otimes_B q) \otimes_A m & \longmapsto & e(p \otimes_B q) \otimes_A m & \longmapsto & e(p \otimes_B q) \cdot m
\end{array}$$

したがって、任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_B (Q \otimes_A M) \arrow[r, "\sigma(M)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_P \otimes_B (\mathrm{id} \otimes_A f)"'] & M \arrow[d, "f"] \\
P \otimes_B (Q \otimes_A N) \arrow[r, "\sigma(N)"'] & N
\end{tikzcd}$$

故に、σ は $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ と恒等関手 $1_{{}_A\mathbb{M}}$ の間の自然同値である。

同様に、$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ と恒等関手 $1_{{}_B\mathbb{M}}$ の間の自然同値を構成することができる。こうして、${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ が圏同値であることが示された。$\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$ は $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手であるから、${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ は $\boldsymbol{k}$-線形加法圏として圏同値である。

同様にして、${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ が $- \otimes_B Q$ と $- \otimes_A P$ によって $\boldsymbol{k}$-線形加法圏として圏同値になることを示すことができる。

(3) $r_B : P \otimes_B B \longrightarrow P$ を $r_B(p \otimes_B b) = p \cdot b,\quad p \in P, b \in B$ によって与えられる左 A-加群の同型とする。これと関手 $P \otimes_B - : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ を用いて、写像

$$\mathcal{F} : \{B \text{ の左イデアル全体}\} \longrightarrow \{P \text{ の部分 } A\text{-加群全体}\}$$

を

$$\mathcal{F}(I) = r_B(P \otimes_B I) = P \cdot I, \quad I \text{ は } B \text{ の左イデアル}$$

によって定義する。ここで、

$$P \cdot I = \{\sum_k p_k \cdot b_k \in P \mid p_k \in P,\ b_k \in B\}$$

である。

$\mathcal{F}$ は全単射である。実際、

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{F}' : & \{P \text{ の部分 } A\text{-加群全体}\} & \longrightarrow & \{B \text{ の左イデアル全体}\} \\
& \Cup & & \Cup \\
& M & \longmapsto & e'(Q \otimes_A M)
\end{array}$$

が $\mathcal{F}$ の逆写像を与える。

$\because$)

任意の B の左イデアル I に対して

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}'\circ\mathcal{F})(I) &= e'(Q\otimes_A (P\cdot I)) \\ &= e'(Q\otimes_A P)\cdot I \quad \text{e' は両側 (B,B)-加群の同型} \\ &= B\cdot I \\ &= I\end{aligned}$$

となる。また、P の任意の部分左 A-加群 M に対して

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\circ\mathcal{F}')(M) &= P\cdot e'(Q\otimes_A M) \\ &= e(P\otimes_B Q)\cdot M \quad \text{森田コンテクストの定義 (iii) より} \\ &= A\cdot M \\ &= M\end{aligned}$$

となる。故に、$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は互いに他の逆写像である。 $\square$

$\mathcal{F}:\{B$ の左イデアル全体$\}\longrightarrow\{P$ の部分 A-加群全体$\}$ はまた、その定義から包含関係による順序を保つことがわかる。さらに、この全単射の下で、B の両側イデアルが P の (A,B)-部分加群と対応していることも容易にわかる。

同様にして、$l_A : A\otimes_A P\longrightarrow P,\ l_A(a\otimes_A p)=a\cdot p,\ \ p\in P,\ a\in A$ によって与えられる右 B-加群の同型と関手 $-\otimes_A P:\mathbb{M}_A\longrightarrow\mathbb{M}_B$ によって引き起こされる写像

$$\begin{array}{ccc}\{A \text{ の右イデアル全体}\} & \longrightarrow & \{P \text{ の部分 } B\text{-加群全体}\} \\ \Cup & & \Cup \\ J & \longmapsto & l_A(J\otimes_A P)\end{array}$$

は全単射であって、包含関係による順序を保つことがわかる。さらに、この全単射の下で、A の両側イデアルが P の (A,B)-部分加群と対応していることも容易にわかる。

これで、定理の証明が終わった。 (Q.E.D.)

注意 1°： 次が成り立つ (演習 1-82)。

$$\begin{aligned}P &\cong \mathrm{Hom}_A(Q,A)\cong\mathrm{Hom}_B(Q,B) && \text{as } (A,B)\text{-modules} \\ Q &\cong \mathrm{Hom}_A(P,A)\cong\mathrm{Hom}_B(P,B) && \text{as } (B,A)\text{-modlues}\end{aligned}$$

注意 2°：次の代数としての同型が存在する (演習 1-82)。

$$A\cong(\mathrm{End}_B Q)^{\mathrm{op}}\cong\mathrm{End}_B P,\qquad B\cong(\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}\cong\mathrm{End}_A Q$$

注意 3°：${}_A\mathbb{M}\approx{}_B\mathbb{M}$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories

$\Longleftrightarrow\ \ \mathbb{M}_A\approx\mathbb{M}_B$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories

(proof)

${}_A\mathbb{M}\approx{}_B\mathbb{M}$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories と仮定する。

このとき、補題 1-51 で与えられている $P \in {}_A\mathbb{M}_B,\ Q \in {}_B\mathbb{M}_A$ と写像 $e,\ e'$ に対して、組 (A, B, P, Q, e, e') は森田コンテストである。e, e' は全射であったから、上の定理の仮定を満たす。定理 (2) から

$$\mathbb{M}_A \approx \mathbb{M}_B \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-linear additive categories}$$

を得る。

逆に、$\mathbb{M}_A \approx \mathbb{M}_B$ as $\boldsymbol{k}$-linear additive categories であると仮定する。$\boldsymbol{k}$-線形な加法圏として $\mathbb{M}_A \approx {}_{A^{\mathrm{op}}}\mathbb{M},\ \mathbb{M}_B \approx {}_{B^{\mathrm{op}}}\mathbb{M}$ であるから、前半部分の議論により、

$$\mathbb{M}_{A^{\mathrm{op}}} \approx \mathbb{M}_{B^{\mathrm{op}}} \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-linear additive categories}$$

を得る。$\boldsymbol{k}$-線形な加法圏として $\mathbb{M}_{A^{\mathrm{op}}} \approx {}_A\mathbb{M},\ \mathbb{M}_{B^{\mathrm{op}}} \approx {}_B\mathbb{M}$ であるから、

$${}_A\mathbb{M} \approx {}_B\mathbb{M} \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-linear additive categories}$$

を得る。 □

森田コンテクストにおける $e,\ e'$ はいつ全射になるのだろうか。次に、このような条件が成立するための条件について述べよう。そのために、言葉を定義しておく。

定義 1-21

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群　とする。このとき

(1) P が ${}_A\mathbb{M}$ の**生成元** (*generator*) $\iff {}^\forall X \in {}_A\mathbb{M},\ {}^\exists f : P^{\oplus I} \longrightarrow X$: 全射準同型

(2) P が ${}_A\mathbb{M}$ の**射影的生成元** (*projective generator*)

$\iff P$ は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元かつ左 A-加群として有限生成射影的

同様にして、右 A-加群が $\mathbb{M}_A$ の生成元、射影的生成元であるという概念が定義される。

例題 1-54

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

(1) 左正則加群 ${}_AA$ は ${}_A\mathbb{M}$ の射影的生成元である。

(2) P：左 A-加群　とする。このとき、

Q：${}_A\mathbb{M}$ の生成元、${}^\exists P^{\oplus I} \longrightarrow Q$：全射な左 A-加群準同型 $\implies$ P：${}_A\mathbb{M}$ の生成元

特に、

$$P \text{ のいくつかの直和 } P^{\oplus I} \text{ が } {}_A\mathbb{M} \text{ の生成元} \iff P : {}_A\mathbb{M} \text{ の生成元}$$

(proof)

(1) ${}_AA$ は 1_A によって生成されるから有限生成であり、自由加群であるから射影的である (命題 1-31)。

${}_AA$ が ${}_AA$ の生成元であることを示す。

任意に左 A-加群 N をとり、写像 $g : A^{\oplus N} \longrightarrow N$ を

$$g((a_n)_{n\in N}) = \sum_{n\in N} a_n \cdot n$$

により定義する。g は全射な左 A-加群準同型である (全射であることは $N=\sum_{n\in N}A\cdot n$ と書けることから従う)。よって、${}_AA$ は ${}_AA$ の生成元である。

(2) Q を ${}_A\mathbb{M}$ の生成元とし、全射な左 A-加群準同型 $f:P^{\oplus I}\longrightarrow Q$ が存在すると仮定する。N を任意の左 A-加群とすると、全射な左 A-加群準同型 $g:Q^{\oplus J}\longrightarrow N$ が存在する。

このとき、$h:(P^{\oplus I})^{\oplus J}\longrightarrow N$ を

$$f^{\oplus J}:(P^{\oplus I})^{\oplus J}\longrightarrow Q^{\oplus J}$$

と g との合成によって定義する。$f^{\oplus J}$ および g は全射であるから、h も全射な左 A-加群準同型となる。故に、P は ${}_AA$ の生成元である。

後半部分を示す。

P のいくつかの直和 $P^{\oplus I}$ が ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるとすると、上の議論で $Q=P^{\oplus I}$ の場合を考えて、P が ${}_AA$ の生成元であることがわかる。逆に、P が ${}_AA$ の生成元であるならば、任意の $N\in{}_A\mathbb{M}$ に対して、全射準同型 $f:P^{\oplus J}\longrightarrow N$ が存在する。全射準同型 $\pi:P^{\oplus I}\longrightarrow P$ をとると、$\pi^{\oplus J}\circ f:(P^{\oplus I})^{\oplus J}\longrightarrow N$ は全射準同型である。故に、$P^{\oplus I}$ も ${}_A\mathbb{M}$ の生成元である。 (Q.E.D.)

命題 1-55

(1) A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群 とする。

このとき、次の 4 つは同値である。

(i) P は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元である。

(ii) $\sum_{f\in\mathrm{Hom}_A(P,{}_AA)}f(P)=A$ である。

(iii) A は P のいくつかの直和の直和因子である。

(iv) 例題 1-52(1) の両側 (A,A)-加群準同型

$$e:P\otimes_B P^\vee\longrightarrow A,\quad e(p\otimes_B\alpha)=\alpha(p),\qquad p\in P,\ \alpha\in P^\vee=\mathrm{Hom}_A(P,A)$$

は全射である。但し、$B=(\mathrm{End}_AP)^{\mathrm{op}}$ である。

(2) B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 B-加群 とする。

このとき、次の 4 つは同値である。

(i) P は $\mathbb{M}_B$ の生成元である。

(ii) $\sum_{f\in\mathrm{Hom}_B(P,B_B)}f(P)=B$ である。

(iii) B は P のいくつかの直和の直和因子である。

(iv) 例題 1-52(2) の両側 (B,B)-加群準同型

$$e':{}^\vee P\otimes_A P\longrightarrow B,\quad e'(\beta\otimes_A p)=\beta(p),\qquad p\in P,\ \beta\in{}^\vee P=\mathrm{Hom}_B(P,B)$$

は全射である。但し、$A=\mathrm{End}_BP$ である。

(proof)

(1) (i) $\Longrightarrow$ (ii)：

$P^\vee := \mathrm{Hom}_A(P, A)$ とおき、$I := \sum_{f \in P^\vee} f(P)$ とおく。

I は A の左イデアルであるから、$I = A$ となることを示すには $1 \in I$ を示せばよい (補題 1-51 の最後の e_P の全射性の証明を参照)。

P は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるから、ある (添字) 集合 I と全射な左 A-加群準同型 $f : P^{\oplus I} \longrightarrow {}_AA$ が存在する。よって、$1 = f(x),\ x \in P^{\oplus I}$ と表わすことができる。$x = (x_i)_{i \in I},\ x_i \in P$ と書くとき、直和の定義から、$x_i \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個である。そのような i 全体を $i_1, \cdots, i_k$ とおく。このとき、直和 $P^{\oplus I}$ に附随する標準的な単射 $j_i : P \longrightarrow P^{\oplus I},\ j \in I$ を用いて、

$$1 = f(j_{i_1}(x_{i_1})) + \cdots + f(j_{i_k}(x_{i_k}))$$

と書くことができる。$\alpha_1 := f \circ j_{i_1}, \cdots, \alpha_k := f \circ j_{i_k}$ とおくと、$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in P^\vee$ であり、上式の右辺は

$$1 = \alpha_1(x_{i_1}) + \cdots + \alpha_k(x_{i_k})$$

と書き直すことができる。故に、

$$1 \in \sum_{f \in P^\vee} f(P) = I$$

であることが示された。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

各 $f \in P^\vee$ に対して、$P_f := P$ とおき、P の "$P^\vee$ 個" の直和

$$M := \bigoplus_{f \in P^\vee} P_f$$

を考える。このとき、A は M の直和因子である。これを示す。

写像 $g : M \longrightarrow A$ を $g|_{P_f} = f \quad ({}^\forall f \in P^\vee)$ となるような左 A-加群準同型とする。仮定 (ii) により、g は全射である。

左正則加群 ${}_AA$ は射影的 (命題 1-31 の証明の下注意参照) であるから、g は分解する (命題 1-31)。すなわち、

$${}^\exists i : A \longrightarrow M : \text{左 } A\text{-加群準同型} \ \text{ s.t. } \ g \circ i = \mathrm{id}_A$$

となる。したがって、$M = i(A) \oplus \mathrm{Ker} g$ となる (補題 1-32 の証明参照) ので、A は M の直和因子である。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

仮定により、全射な左 A-加群準同型 $f : P^{\oplus I} \longrightarrow A$ が存在する。

A は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元である (例題 1-54) から、例題 1-52(2) により、P も ${}_A\mathbb{M}$ の生成元である。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv)：

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{\alpha \in P^\vee} \alpha(P) = A \\
&\Longleftrightarrow \quad {}^\forall a \in A,\ {}^\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in P^\vee,\ {}^\exists p_1, \cdots, p_k \in P \ \text{ s.t. } \ a = \alpha_1(p_1) + \cdots + \alpha_k(p_k) \\
&\Longleftrightarrow \quad e \text{ は全射}
\end{aligned}
$$

となる。故に、(1) は示された。(2) も同様にして示される。 (Q.E.D.)

命題 1-56

(1) A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群 とする。

このとき、次の 3 つは同値である。

(i) P は有限生成射影的である。

(ii) ${}^\exists\{p_i\}_{i=1}^n \subset P,\ {}^\exists\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{Hom}_A(P, A)$ s.t. ${}^\forall p \in P,\ p = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \cdot p_i$

(iii) 例題 1-52(1) の両側 (B, B)-加群準同型 $e' : P^\vee \otimes_A P \longrightarrow B$

$$e'(\alpha \otimes_A p)(p') = \alpha(p') \cdot p \qquad (p, p' \in P,\ \alpha \in P^\vee = \mathrm{Hom}_A(P, A))$$

は全射である。但し、$B = (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}$ である。

(2) B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 B-加群 とする。

このとき、次の 3 つは同値である。

(i) P は有限生成射影的である。

(ii) ${}^\exists\{p_i\}_{i=1}^n \subset P,\ {}^\exists\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{Hom}_B(P, B)$ s.t. ${}^\forall p \in P,\ p = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \beta_i(p)$

(iii) 例題 1-52(2) の両側 (A, A)-加群準同型 $e : P \otimes_A {}^\vee P \longrightarrow A$

$$e(p \otimes_B \beta)(p') = p \cdot \beta(p') \qquad (p, p' \in P,\ \beta \in {}^\vee P = \mathrm{Hom}_B(P, B))$$

は全射である。但し、$A = \mathrm{End}_B P$ である。

(proof)

(1) (i) $\Longrightarrow$ (ii)

P を有限生成射影的な左 A-加群とする。P は有限生成であるから、

$$ {}^\exists\{p_i\}_{i=1}^n \subset P \ \text{ s.t. } \ P = \sum_{i=1}^n A p_i $$

となる。今、$\{X_i\}_{i=1}^n$ を A 上の基とする自由左 A-加群 $F := \bigoplus_{i=1}^n A X_i$ を考える。

$\varphi : F \longrightarrow P$ を $\varphi(X_i) = p_i,\ \ i = 1, \cdots, n$ を満たす全射な左 A-加群準同型とする。

P は射影的なので、この全射は分解する。よって、

$$ s : P \longrightarrow F \ \ \text{:左 } A\text{-加群準同型 s.t. } \ \varphi \circ s = \mathrm{id}_P $$

となる (補題 1-30)。任意の $p \in P$ に対して、$s(p) \in F$ は

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) X_i \qquad (a_i(p) \in A,\ i = 1, \cdots, n)$$

のように一意的に表わされる。このとき、各 $i = 1, \cdots, n$ に対して

$$\alpha_i : P \longrightarrow A, \quad p \longmapsto \alpha_i(p)$$

は左 A-加群準同型であり、任意の $p \in P$ に対して、

$$p = \varphi(s(p)) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p)\varphi(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) x_i$$

となる。故に、(ii) が成り立つ。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\{p_i\}_{i=1}^n \subset P$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{Hom}_A(P, A)$ を (ii) の条件を満たす部分集合とする。

自由左 A-加群 $F := \bigoplus_{i=1}^{n} AX_i$ を考える。$\varphi : F \longrightarrow P$ を $\varphi(X_i) = p_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たす左 A-加群準同型とする。仮定により、これは全射である。写像 $s : P \longrightarrow F$ を

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) X_i, \qquad p \in P$$

によって定義する。α_i $(i = 1, \cdots, n)$ は左 A-加群準同型であるから、s も左 A-加群準同型である。さらに、$\varphi \circ s = \mathrm{id}_P$ となる。実際、

$$(\varphi \circ s)(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p)\varphi(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) x_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{仮定 (ii) より}}}{=} p, \quad {}^{\forall} p \in P$$

となる。

よって、P は F の直和因子である (補題 1-30 の証明参照)。故に、P は射影的である (命題 1-31)。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

e' は両側 (B, B)-加群準同型であるから、e' の像は B の両側イデアルである。したがって、

$$e' : \text{全射} \iff B \text{ の単位元 } 1_B \text{ が } e' \text{ の像に属する}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} & B \text{ の単位元 } 1_B \text{ が } e' \text{ の像に属する} \\ \iff & {}^{\exists}\{p_i\}_{i=1}^n,\ {}^{\exists}\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset P^{\vee} \ \text{ s.t. } \ 1_B = e'(\alpha_1 \otimes_A p_1 + \cdots + \alpha_n \otimes_A p_n) \\ \iff & {}^{\exists}\{p_i\}_{i=1}^n,\ {}^{\exists}\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset P^{\vee} \ \text{ s.t. } \ {}^{\forall} p \in P, \ \ p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) p_i \\ \iff & \text{(ii)} \end{aligned}$$

であるから、(ii) と (iii) の同値性が示された。 (Q.E.D.)

命題 1-55 と命題 1-56 により、例題 1-52(1) の森田コンテクスト $(A, (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}}, P, P^{\vee}, e, e')$ について

$$e, e' \text{ が全射} \iff P \text{ が } {}_A\mathbb{M} \text{ における射影的生成元}$$

が成り立ち、例題 1-52(2) の森田コンテクスト について $(\mathrm{End}_B P, B, P, {}^{\vee}P, e, e')$ について

$$e, e' \text{ が全射} \iff P \text{ が } \mathbb{M}_B \text{ における射影的生成元}$$

が成り立つ。したがって、次の結果を得る。

系 1-57

(A, B, P, Q, e, e')：森田コンテクスト　とする。このとき、

$$e, e' \text{ が全射} \implies P \text{ は } {}_A\mathbb{M} \text{ および } \mathbb{M}_B \text{ における射影的生成元}$$

$$Q \text{ は } \mathbb{M}_A \text{ および } {}_B\mathbb{M} \text{ における射影的生成元}$$

(proof)

上で説明したように、

$$e,\ e' \text{ が全射} \implies P \text{ は } {}_A\mathbb{M} \text{ および } \mathbb{M}_B \text{ における射影的生成元} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。(A, B, P, Q, e, e') が森田コンテクストならば、(B, A, Q, P, e', e) も森田コンテクストであるから、

$$e,\ e' \text{ が全射} \implies e',\ e \text{ が全射} \underset{(*)}{\implies} Q \text{ は } \mathbb{M}_A \text{ および } {}_B\mathbb{M} \text{ における射影的生成元}$$

となる。 (Q.E.D.)

２つの代数が森田同値であるかどうかを判定するための 1 つの基準を与えよう。

定理 1-58

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。次の 3 つは同値である。

① A と B は森田同値である。

② ${}^{\exists}P \in \mathbb{M}_A$：射影的生成元　s.t.　$B \cong \mathrm{End}_A P$　as algebras

③ ${}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}e \in \mathrm{M}_n(A)$: 冪等元　s.t.　$\mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A) = \mathrm{M}_n(A)$ かつ $B \cong e\mathrm{M}_n(A)e$　as algebras

定理の証明のために、補題を 1 つ準備する。

補題 1-59

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：右 A-加群　とする。

(1) P：有限生成射影的, $P \neq 0$

$$\iff {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}e \in \mathrm{M}_n(A):\ \text{冪等元 s.t. } P \cong e \cdot (A_A)^{\oplus n} \text{ as right } A\text{-modules}$$

(2) $T := \displaystyle\sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A)} f(P)$ とおく。(1) の状況の下で、

(i) $e = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とおくと、T は $\{a_{ij} \mid i, j = 1, \cdots, n\}$ によって生成される A の両側イデアルである。

(ii) $\mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A) = \mathrm{M}_n(T)$ が成立する。

(proof)

(1)「$\Longrightarrow$ 」の証明：

P は有限生成射影的なので、P は有限個の正則な右 A-加群の直和の直和因子に同型である：

$$^{\exists}n \in \mathbb{N},\ ^{\exists}p' : \text{ 右 } A\text{-加群 s.t. } (A_A)^{\oplus n} \cong P \oplus P' \quad \text{as right } A\text{-modules}$$

この同型を通して、$P, P' \subset (A_A)^{\oplus n}$ とみなす。

$e : (A_A)^{\oplus n} \longrightarrow (A_A)^{\oplus n}$ を $e|_P = \mathrm{id}_P,\quad e|_{P'} = 0$ を満たす右 A-加群準同型とする。$e^2 = e$ であり、$P \neq 0$ であることから、$e \neq 0$ となる。よって、e は冪等元である。また、$P = \mathrm{Im}e = e \cdot (A_A)^{\oplus n}$ となる。

「$\Longleftarrow$」の証明：

e は冪等元であるから、

$$(A_A)^{\oplus n} = \mathrm{Im}e \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id} - e) \quad \text{as right } A\text{-modules}$$

が成立する。仮定により、$\mathrm{Im}e \cong P$ であるから、P は有限生成射影的である。また、$e \neq 0$ であるから $P \neq 0$ である。

(2) まず、$T := \displaystyle\sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A)} f(P)$ は、無条件に、A の両側イデアルであることに注意する。

$\because$)

任意の $t \in T$ は

$$t = \sum_{i=1}^{k} f_i(p_i) \qquad (f_i \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A),\ p_i \in P,\ i = 1, \cdots, k)$$

のように書くことができる。したがって、任意の $a \in A$ に対して

$$\begin{cases} at = \sum_{i=1}^{k} af_i(p_i) = \sum_{i=1}^{k} (af_i)(p_i) \\ ta = \sum_{i=1}^{k} f_i(p_i)a = \sum_{i=1}^{k} f_i(p_i a) \end{cases}$$

が成り立つ。故に、T は A の両側イデアルである。 $\square$

以下、右 A-加群 $P \neq 0$ は有限生成射影的であるとする。

(i) $P = e \cdot (A_A)^{\oplus n}$ (e は $\mathrm{M}_n(A)$ の冪等元) であるとしてよい。

$$(A_A)^{\oplus n} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle|\ x_1, \cdots x_n \in A \right\}$$

とみなすと $(A_A)^{\oplus n}$ は

$$\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \boldsymbol{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって生成されるから、e の列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots, \boldsymbol{a}_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

は $P = e \cdot (A_A)^{\oplus n}$ を生成する：$P = \boldsymbol{a}_1 A + \boldsymbol{a}_2 A + \cdots + \boldsymbol{a}_n A$ 。

よって、任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A)$ に対して、

$$f(P) = f(\boldsymbol{a}_1)A + f(\boldsymbol{a}_2)A + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)A$$

が成立する。$e^2 = e$ であるから、

$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_1 a_{1j} + \boldsymbol{a}_2 a_{2j} + \cdots + \boldsymbol{a}_n a_{nj} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

となる。したがって、

$$f(\boldsymbol{a}_j) = f(\boldsymbol{a}_1)a_{1j} + f(\boldsymbol{a}_2)a_{2j} + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)a_{nj} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

となる。故に、任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A)$ に対して、

$$f(P) = \sum_{i,j=1}^{n} f(\boldsymbol{a}_i)a_{ij}A \subset \sum_{i,j=1}^{n} Aa_{ij}A$$

が成り立つ。故に、

$$T = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(P, A_A)} f(P) \subset \sum_{i,j=1}^{n} Aa_{ij}A$$

を得る。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

T は A の両側イデアルであるから、任意の $i, j = 1, \cdots, n$ に対して $a_{ij} \in T$ となることを示せばよい。

$f_i : P \longrightarrow A_A$ を $f_i(\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j) = x_i$ によって定義される右 A-加群準同型とする。このとき、$f_i(\boldsymbol{a}_j) = a_{ij}$ が成立する。故に、

$$a_{ij} \in f_i(P) \subset T$$

を得る。こうして、(i) は証明された。

(ii) $X, Y \in \mathrm{M}_n(A)$ を任意にとり、$X = (x_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$, $Y = (y_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とおく。このとき、

$$XeY = (\sum_{i,j=1}^{n} x_{ki}a_{ij}y_{jl})_{k,l=1,\cdots,n} \in \mathrm{M}_n(T)$$

となる。よって、$\mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A) \subset \mathrm{M}_n(T)$ を得る。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

$\{E_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ を行列単位 (すなわち、E_{ij} は (i,j)-成分のみ 1 であって、その他の成分は 0 である行列) とする。$\mathrm{M}_n(T) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{M}_n(Aa_{ij}A)$ なので、任意の $i, j = 1, \cdots, n$ に対して $\mathrm{M}_n(Aa_{ij}A) \subset \mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A)$ となることを示せばよい。

i, j を固定する。

$$a_{ij}E_{kl} = E_{ki}eE_{jl} \qquad (k, l = 1, \cdots, n)$$

であるから、任意の $x, y \in A$ と任意の $k, l = 1, \cdots, n$ に対して

$$(xa_{ij}y)E_{kl} = xa_{ij}E_{kl}y = (xE_{ki})e(E_{jl}y) = (xE_{ki})e(yE_{jl}) \in \mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A)$$

となる。故に、

$$\mathrm{M}_n(Aa_{ij}A) \subset \mathrm{M}_n(A)e\mathrm{M}_n(A)$$

であることが示された。 (Q.E.D.)

注意：補題 (2) の T は右 A-加群 P の**トレースイデアル** (*trace ideal*) と呼ばれる。上の証明から、任意の右 A-加群 P に対して、P のトレースイデアルは常に両側イデアルである。

(proof of Theorem 1-58)
① $\Longrightarrow$ ② の証明：
　補題 1-51 のように $P,\ Q,\ e,\ e'$ を定義すると、組 (A, B, P, Q, e, e') は森田コンテクストであって、e, e' は全射である。したがって、森田の定理 (定理 1-53) の仮定が満たされる。その証明の下の注意 2° から、

$$B \cong \mathrm{End}_A Q \qquad \text{as algebras}$$

となることがわかる。$Q \in \mathbb{M}_A$ はまた、系 1-57 により、射影的生成元である。
② $\Longrightarrow$ ③ の証明：
　P は有限生成射影的であるから、有限個の右正則加群の直和の直和因子である：

$$^\exists n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ (A_A)^{\oplus n} = P \oplus P' \ \text{ for some submodule } P'$$

ところで、

$$\mathrm{End}_A((A_A)^{\oplus n}) \cong \mathrm{M}_n(A) \qquad \text{as algebras}$$

であるから、$R := \mathrm{End}_A((A_A)^{\oplus n})$ とおいて、

$$ReR = R \ \text{ かつ } \ \mathrm{End}_A P \cong eRe$$

となる冪等元 $e \in R$ が存在することを示せばよい。
　$(A_A)^{\oplus n} = \underbrace{A_A \oplus \cdots \oplus A_A}_{n\text{ 個}}$ から P への射影を考えることにより、

$$^\exists e : (A_A)^{\oplus n} \longrightarrow (A_A)^{\oplus n} : \text{ 右 } A\text{-加群準同型 } \ \text{s.t.} \ \ e|_P = \mathrm{id}_P, \ \ e|_{P'} = 0$$

がわかる。$P \neq 0$ である ($\because$ $B \cong \mathrm{End}_A P$ であるので、もし、$P = 0$ であったすると、$B = 0$ となってしまい、矛盾が生じる) から e は冪等元である。
　また、P は射影的生成元なので、補題 1-59(の証明) と命題 1-55(2) により、$ReR = R$ が成り立つ。
　さて、写像 $\lambda : \mathrm{End}_A P \longrightarrow \mathrm{End}_A((A_A)^{\oplus n})$ を各 $f \in \mathrm{End}_A P$ に対して

$$\lambda(f) : (A_A)^{\oplus n} \longrightarrow (A_A)^{\oplus n}, \quad \lambda(f)|_P = f, \ \ \lambda|_{P'} = 0$$

を対応させる写像とする。λ は代数の同型である。
　$\because$)
　　λ は単射な代数準同型であることは直ちにわかる。
　　λ の像が $e\mathrm{End}_A((A_A)^{\oplus n})e$ に一致ことを示す。
　　任意の右 A-加群準同型 $g : (A_A)^{\oplus n} \longrightarrow (A_A)^{\oplus n}$ に対して

$$g = e \circ g \circ e + e \circ g \circ (\mathrm{id} - e) + (\mathrm{id} - e) \circ g \circ e + (\mathrm{id} - e) \circ g \circ (\mathrm{id} - e)$$
が成立する。$\mathrm{Im}(\mathrm{id} - e) = P'$ であるから、
$$g(P) \subset P \iff g = e \circ g \circ e$$
が成り立つ。
$$\mathrm{Im}\lambda = \{g : (A_A)^{\oplus n} \longrightarrow (A_A)^{\oplus n} : \text{右 } A\text{-加群準同型} \mid g(P) \subset P\}$$
$$\mathrm{Im}\lambda = e\mathrm{End}_A((A_A)^{\oplus n})e$$
となることが示された。 $\square$

こうして、② $\Longrightarrow$ ③ が証明された。
③ $\Longrightarrow$ ① の証明：
例題 1-50 の証明の中で、この主張に相当する事実がすでに示されている。 (Q.E.D.)

注意：この定理から、A と B が森田同値のとき、
$$A\text{：有限次元} \iff B\text{：有限次元}$$
であることがわかる。

演習 1-81

共変関手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ によって圏 $\mathcal{C}$ と圏 $\mathcal{D}$ は圏同値であると仮定する。このとき、次を示せ。
$$^{\exists}\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{\mathcal{C}} : \text{自然同値},\ ^{\exists}\psi : F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{D}} : \text{自然同値}$$
$$\text{s.t. } {}^{\forall}Y \in \mathcal{D},\ \varphi_{G(Y)} = G(\psi_Y),$$
$${}^{\forall}X \in \mathcal{C},\ \psi_{F(X)} = F(\varphi_X)$$

解；
共変関手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ の組は圏同値を与えているので、
$$^{\exists}\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{\mathcal{C}} : \text{ 自然同値},\ ^{\exists}\psi : F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{D}} : \text{ 自然同値}$$
となる。任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して、
$$\tilde{\varphi}_X := \varphi_X \circ G(\psi_{F(X)}) \circ GF(\varphi_X^{-1})$$
と定める。$\tilde{\varphi}$ は自然同値である。
$\because$)
$\mathcal{C}$ における射 $f : X_1 \longrightarrow X_2$ に対して次の図式は可換になる。
$$\begin{tikzcd}
GF(X_1) \arrow[rr, "GF(f)"] & & GF(X_2) \\
 & (1) & \\
GF(GF(X_1)) \arrow[u, "GF(\varphi_{X_1})"] \arrow[rr, "GF(GF(f))"] \arrow[d, equal] & & GF(GF(X_2)) \arrow[u, "GF(\varphi_{X_2})"'] \arrow[d, equal] \\
G(FG(F(X_1))) \arrow[dd, "G(\psi_{F(X_1)})"'] & & G(FG(F(X_2))) \arrow[dd, "G(\psi_{F(X_2)})"] \\
 & (2) & \\
G(F(X_1)) \arrow[rr, "G(F(f))"] \arrow[d, "\varphi_{X_1}"'] & (3) & G(F(X_2)) \arrow[d, "\varphi_{X_2}"] \\
X_1 \arrow[rr, "f"] & & X_2
\end{tikzcd}$$

> ここで、(1) は φ の自然性と GF の関手性により、(2) は ψ の自然性と G の関手性により、(3) は φ の自然性により、それぞれ可換になる。 □

この $\tilde{\varphi}$ は任意の $Y \in \mathcal{D}$ に対して

$$\tilde{\varphi}_{G(Y)} = G(\psi_Y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす。これを示す。

$$\varphi_{G(Y)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFG(Y), G(Y)) \overset{G}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y)$$

なので、

$$^{\exists}g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \ \text{ s.t. } \ \varphi_{G(Y)} = G(g)$$

となる。このとき、ψ の自然性から次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd}
FGFG(Y) \arrow[r, "\psi_{FG(Y)}"] \arrow[d, "FG(g)"'] & FG(Y) \arrow[d, "g"] \\
FG(Y) \arrow[r, "\psi_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

これに G を適用して、

$$G(\psi_Y) = G(g) \circ G(\psi_{FG(Y)}) \circ GFG(g^{-1}) = \varphi_{G(Y)} \circ G(\psi_{FG(Y)}) \circ GF(\varphi^{-1}_{G(Y)}) = \tilde{\varphi}_{G(Y)}$$

を得る。

次に、任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して、$\psi_{F(X)} = F(\tilde{\varphi}_X)$ が成り立つことを示す。

$(*)$ において $Y = F(X)$ の場合を考えると、

$$G(\psi_{F(X)}) = \tilde{\varphi}_{GF(X)}$$

となる。これに F を適用して

$$FG(\psi_{F(X)}) = F(\tilde{\varphi}_{GF(X)}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を得る。$f := \psi_{F(X)} : FG(F(X)) \longrightarrow F(X)$, $X_1 := FG(F(X))$, $X_2 := F(X)$ とおくと、ψ の自然性により次の図式は可換になる。

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \\
FG(X_1) \arrow[u, "\psi_{X_1}"] \arrow[r, "FG(f)"] & FG(X_2) \arrow[u, "\psi_{X_2}"']
\end{tikzcd}$$

よって、

$$FG(\psi_{F(X)}) = FG(f) = \psi_{X_1} = \psi_{FGF(X)}$$

を得る。ここで、$h := F(\tilde{\varphi}_X) : F(GF(X)) \longrightarrow F(X)$ とおくと、再び ψ の自然性により次の図式は可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
FG(X_1) \arrow[r, "\psi_{X_1}"] \arrow[d, "FG(h)"'] & FG(X_2) \arrow[d, "h"] \\
FG(X_2) \arrow[r, "\psi_{X_2}"] & X_2
\end{tikzcd}
$$

よって、

$$\psi FGF(X) = \psi_{X_1} = h^{-1} \circ \psi_{X_2} \circ FG(h) = F(\tilde{\varphi}_X^{-1}) \circ \psi_{F(X)} \circ FGF(\tilde{\varphi}_X)$$

を得る。$(**)$ と合わせて、

$$
\begin{aligned}
\psi_{F(X)} &= F(\tilde{\varphi}_X) \circ F(\tilde{\varphi}_{GF(X)}) \circ FGF(\tilde{\varphi}_X^{-1}) \\
&= F(\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi}_{GF(X)} \circ GF(\tilde{\varphi}_X^{-1}))
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$k := \tilde{\varphi}_X : GF(X) \longrightarrow X$, $Y := GF(X)$ とおくと、$\tilde{\varphi}$ の自然性から次の可換図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "k"] & X \\
GF(Y) \arrow[u, "\tilde{\varphi}_Y"] \arrow[r, "GF(k)"] & GF(X) \arrow[u, "\tilde{\varphi}_X"']
\end{tikzcd}
$$

故に、

$$\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi}_{GF(X)} \circ GF(\tilde{\varphi}_X^{-1}) = k \circ \tilde{\varphi}_Y \circ GF(k^{-1}) = \tilde{\varphi}_X$$

を得る。こうして、

$$\psi_{F(X)} = F(\tilde{\varphi}_X)$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

演習 1-82

(A, B, P, Q, e, e')：森田コンテクスト

e, e' は全射であると仮定する。このとき、次を示せ。

(1) $P \cong \mathrm{Hom}_A(Q, A) \cong \mathrm{Hom}_B(Q, B)$ as (A, B)-modules

$Q \cong \mathrm{Hom}_A(P, A) \cong \mathrm{Hom}_B(P, B)$ as (B, A)-modules

但し、${}^{\vee}Q := \mathrm{Hom}_A(Q, A)$, $Q^{\vee} := \mathrm{Hom}_B(Q, B)$ に次のようにして A の左作用と B の右作用を定めて、両側 (A, B)-加群とみなしている (演習 1-10)：

$$
\begin{aligned}
&(a \cdot \alpha)(q) = a\alpha(q), \quad (\alpha \cdot b)(q) = \alpha(b \cdot q), \qquad a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in {}^{\vee}Q,\ q \in Q \\
&(a \cdot \beta)(q) = \beta(q \cdot a), \quad (\beta \cdot b)(q) = \beta(q)b, \qquad a \in A,\ b \in B,\ \beta \in Q^{\vee},\ q \in Q
\end{aligned}
$$

また、$P^{\vee} := \mathrm{Hom}_A(P, A)$, ${}^{\vee}P := \mathrm{Hom}_B(P, B)$ に次のようにして B の左作用と A の右作用を定めて、両側 (B, A)-加群とみなしている (演習 1-10)：

$$
\begin{aligned}
&(b \cdot \alpha)(p) = \alpha(p \cdot b), \quad (\alpha \cdot a)(p) = \alpha(p)a, \qquad a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in P^{\vee},\ p \in P \\
&(b \cdot \beta)(p) = b\beta(p), \quad (\beta \cdot a)(p) = \beta(a \cdot p), \qquad a \in A,\ b \in B,\ \beta \in {}^{\vee}P,\ p \in P
\end{aligned}
$$

(2) 代数として

$$A \cong (\mathrm{End}_B Q)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B P, \qquad B \cong (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A Q$$

である。

解；

(1) ・両側 (B, A)-加群として $Q \cong P^\vee$ であること：

$\varphi : Q \longrightarrow P^\vee = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ を

$$\varphi(q)(p) = e(p \otimes_B q) \qquad (p \in P,\ q \in Q)$$

によって定義する。φ は両側 (B, A)-加群準同型である。

∵)

$b \in B,\ q \in Q$ に対し、

$$\begin{aligned}(b \cdot \varphi(q))(p) &= \varphi(q)(p \cdot b) \qquad \leftarrow\ P^\vee \text{ への } B \text{ の左作用の定義より}\\ &= e((p \cdot b) \otimes_B q)\\ &= e(p \otimes_B (b \cdot q))\\ &= \varphi(b \cdot q)(p) \qquad \text{for } p \in P\end{aligned}$$

∴ φ は左 B-加群準同型である。

次に、$a \in A,\ q \in Q$ に対し、

$$\begin{aligned}(\varphi(q) \cdot a)(p) &= \varphi(q)(p)a \qquad \leftarrow\ P^\vee \text{ への } A \text{ の右作用の定義より}\\ &= e(p \otimes_B q)a\\ &= e(p \otimes_B (q \cdot a))\\ &= \varphi(q \cdot a)(p) \qquad \text{for } p \in P\end{aligned}$$

∴ φ は右 A-加群準同型である。 □

φ は単射である。

∵)

$\varphi(q) = 0$ とすると、任意の $p \in P$ に対して、$\varphi(q)(p) = 0$ となる。よって、

$$^\forall p \in P, \quad e(p \otimes_B q) = 0$$

となる。このとき、

$$q = 1_B \cdot q = \sum_{j=1}^{m} e'(q'_j \otimes_A p_j) \cdot q = \sum_{j=1}^{m} q'_j \cdot e(p'_j \otimes_B q) = 0$$

となるから、φ は単射である。 □

φ は全射である。

∵)

任意に $\alpha \in P^\vee$ をとる。このとき、$\varphi(\sum_{j=1}^{m} q'_j \cdot \alpha(p'_j)) = \alpha$ が成り立つ。実際、任意の $p \in P$ に対して

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_{j=1}^{m} q'_j \cdot \alpha(p'_j))(p) &= \sum_{j=1}^{m} (\varphi(q'_j) \cdot \alpha(p'_j))(p) && \leftarrow \varphi \text{ は右 } A\text{-加群準同型} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \varphi(q'_j)(p)\alpha(p'_j) && \leftarrow P^\vee \text{ への } A \text{ の右作用の定義より} \\
&= \alpha(\sum_{j=1}^{m} \varphi(q'_j)(p) \cdot p'_j) && \leftarrow \alpha \text{ は左 } A\text{-加群準同型} \\
&= \alpha(\sum_{j=1}^{m} e(p \otimes_B q'_j) \cdot p'_j) \\
&= \alpha(\sum_{j=1}^{m} p \cdot e'(q'_j \otimes_A p'_j)) \\
&= \alpha(p \cdot 1_B) \\
&= \alpha(p)
\end{aligned}$$

となる。よって、φ は全射である。 □

以上より、φ は両側 (B, A)-加群の同型である。

・両側 (B, A)-加群として $Q \cong {}^\vee P$ であること：

$\psi : Q \longrightarrow {}^\vee P$ を

$$\psi(q)(p) = e'(q \otimes_A p) \qquad (p \in P,\ q \in Q)$$

により定義する。ψ は両側 (B, A)-加群準同型である。

∵)

$b \in B,\ q \in Q$ に対して、

$$\begin{aligned}
(b \cdot \psi(q))(p) &= b\psi(q)(p) && \leftarrow {}^\vee P \text{ への } B \text{ の左作用の定義より} \\
&= be'(q \otimes_A p) \\
&= e'((b \cdot q) \otimes_A p) \\
&= \psi(b \cdot q)(p)
\end{aligned}$$

となる。よって、ψ は左 B-加群準同型である。

次に、$a \in A,\ q \in Q$ に対して、

$$\begin{aligned}
(\psi(q) \cdot a)(p) &= \psi(q)(a \cdot p) && \leftarrow {}^\vee P \text{ への } A \text{ の右作用の定義より} \\
&= e'(q \otimes_A (a \cdot p)) \\
&= e'((q \cdot a) \otimes_A p) \\
&= \psi(q \cdot a)(p)
\end{aligned}$$

となる。よって、ψ は右 A-加群準同型である。 □

ψ は単射である。

∵)

$\psi(q)=0$ とすると、任意の $p\in P$ に対して $e'(q\otimes_A p)=0$ となる。このとき、

$$q=q\cdot 1_A=\sum_{i=1}^{n} q\cdot e(p_i\otimes_B q_i)=\sum_{i=1}^{n} e'(q\otimes_A p_i)\cdot q_i=0$$

となるから、ψ は単射である。 □

ψ は全射である。

∵)

任意に $\beta\in {}^{\vee}P$ をとる。このとき、$\beta=\psi(\sum_{i=1}^{n}\beta(p_i)\cdot q_i)$ となることを示す。任意の $p\in P$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi(\sum_{i=1}^{n}\beta(p_i)\cdot q_i)(p) &= \sum_{i=1}^{n}(\beta(p_i)\cdot\psi(q_i))(p) &&\leftarrow\ \psi\ \text{は左}\ B\text{-加群準同型}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\beta(p_i)\psi(q_i)(p) &&\leftarrow\ {}^{\vee}P\ \text{への}\ B\ \text{の左作用の定義より}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\beta(p_i)e'(q_i\otimes_A p)\\
&= \beta(\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot e'(q_i\otimes_A p)) &&\leftarrow\ \beta\ \text{は右}\ B\text{-加群準同型}\\
&= \beta(\sum_{i=1}^{n}e(p_i\otimes_B q_i)\cdot p)\\
&= \beta(1_A\cdot p)\\
&= \beta(p)
\end{aligned}$$

となる。よって、ψ は全射である。 □

以上により、ψ は両側 (B,A)-加群の同型である。

定理における仮定の対称性から

$$\begin{aligned}
\varphi' &: P\longrightarrow Q^{\vee}, \quad \varphi'(p)(q)=e'(q\otimes_A p)\\
\psi' &: P\longrightarrow {}^{\vee}Q, \quad \psi'(p)(q)=e(p\otimes_A q)
\end{aligned}\qquad (p\in P,\ q\in Q)$$

はそれぞれ両側 (A,B)-加群の同型になっていることがわかる。

(2) ・$A\cong \mathrm{End}_B P$ as algebras であること：

写像 $\Phi : A\longrightarrow \mathrm{End}_B P$ を $\Phi(a)(p)=a\cdot p\ \ (a\in A,\ p\in P)$ によって定義する。

確かに、$\Phi(a)\in\mathrm{End}_B P$ となっていて、Φ は代数準同型である。

Φ は単射である。

∵)

$\Phi(a)=0$ とすると、任意の $p\in P$ に対して、$a\cdot p=0$ となる。このとき、

$$a=a\cdot 1_A=\sum_{i=1}^{n} a\cdot e(p_i\otimes_B q_i)=\sum_{i=1}^{n} e((a\cdot p_i)\otimes_B q_i)=0$$

を得る。故に、Φ は単射である。 □

Φ は全射である。実際、任意の $f \in \mathrm{End}_B P$ に対して、$f = \Phi(\sum_{i=1}^{n} e(f(p_i) \otimes_B q_i))$ となる。

$\because$)

任意の $p \in P$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e(f(p_i) \otimes_B q_i) \cdot p &= \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot e'(q_i \otimes_A p) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot e'(q_i \otimes_A p)) \qquad f \text{ は右 } B\text{-加群準同型} \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} e(p_i \otimes_B q_i) \cdot p) \\
&= f(1_A \cdot p) \\
&= f(p)
\end{aligned}$$

となるので、Φ は全射である。 $\square$

以上により、代数として、$A \cong \mathrm{End}_B P$ となることが示された。

・$A \cong (\mathrm{End}_B Q)^{\mathrm{op}}$ as algebras であること：

写像 $\Psi : A \longrightarrow \mathrm{End}_B Q$ を $\Psi(a)(q) = q \cdot a$ $(a \in A,\ q \in Q)$ によって定義する。

確かに、$\Psi(a) \in \mathrm{End}_B Q$ となっていて、Ψ は反代数準同型である。よって、$\Psi : A \longrightarrow (\mathrm{End}_B Q)^{\mathrm{op}}$ は代数準同型である。

Ψ は単射である。

$\because$)

$\Psi(a) = 0$ とすると、任意の $q \in Q$ に対して、$q \cdot a = 0$ となる。これより、

$$a = 1_A \cdot a = \sum_{i=1}^{n} e(p_i \otimes_B q_i) a = \sum_{i=1}^{n} e(p_i \otimes_B (q_i \cdot a)) = 0$$

となるので、Ψ は単射である。 $\square$

Ψ は全射である。実際、任意の $f \in \mathrm{End}_B Q$ に対して、$f = \Psi(\sum_{i=1}^{n} e(p_i \otimes_B f(q_i)))$ となる。

$\because$)

任意の $q \in Q$ に対して、

$$\begin{aligned}
q \cdot \sum_{i=1}^{n} e(p_i \otimes_B f(q_i)) &= \sum_{i=1}^{n} q \cdot e(p_i \otimes_B f(q_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e'(q \otimes_A p_i) \cdot f(q_i) \qquad f \text{ は左 } B\text{-加群準同型} \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} e'(q \otimes_A p_i) \cdot q_i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} q \cdot e(p_i \otimes_B q_i))
\end{aligned}$$

$$= f(q \cdot 1_A)$$
$$= f(q)$$
となるので、Ψ は全射である。 $\square$

以上により、代数として、$A \cong (\mathrm{End}_B Q)^{\mathrm{op}}$ となることが示された。

仮定の対称性から

写像 $\Phi' : B \longrightarrow \mathrm{End}_A Q,\ \ \Phi'(b)(q) = b \cdot q \quad (b \in B,\ q \in Q)$

写像 $\Psi' : B \longrightarrow (\mathrm{End}_A P)^{\mathrm{op}},\ \ \Phi'(b)(p) = p \cdot b \quad (b \in B,\ p \in P)$

はいずれも代数の同型であることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 1-83

$A,\ B$: 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$F : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$: $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手　とする。

このとき、左 A-加群準同型の系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

が完全であるための必要十分条件は、左 B-加群準同型の系列

$$0 \longrightarrow F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M_3) \longrightarrow 0$$

が完全になることである。これを示せ。

したがって、$f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ に対して

f : 単射 $\iff$ $F(f)$: 単射

f : 全射 $\iff$ $F(f)$: 全射

が成り立つ。

解；

$f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ と $Z \in {}_A\mathbb{M}$ に対して、

$$\begin{cases} f_* : \mathrm{Hom}_A(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Z, Y), & \alpha \longmapsto f \circ \alpha \\ f^* : \mathrm{Hom}_A(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, Z), & \alpha \longmapsto \alpha \circ f \end{cases}$$

と定める。このとき、

f : 単射 $\iff$ ${}^\forall Z \in {}_A\mathbb{M},\ f_* : \mathrm{Hom}_A(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Z, Y)$: 単射

f : 全射 $\iff$ ${}^\forall Z \in {}_A\mathbb{M},\ f^* : \mathrm{Hom}_A(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, Z)$: 単射

が成り立つ。

$\because$)

まず、前者の同値について示す。

f は単射であると仮定する。$Z \in {}_A\mathbb{M}$ を任意に取る。$f_* : \mathrm{Hom}_A(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Z, Y)$ は $\boldsymbol{k}$-線形なので、これが単射であることを示すには、$\alpha \in \mathrm{Hom}_A(Z, X)$ が $f_*(\alpha) = 0$ を満たすならば、$\alpha = 0$ となることを示せばよい。

$f_*(\alpha)=0$ とすると、$f\circ\alpha=0$ となる。よって、$\mathrm{Im}\alpha\subset\mathrm{Ker}f=0$ を得る。これは $\mathrm{Im}\alpha=0$ となることに同値である。よって、$\alpha=0$ が示された。

逆に、任意の $Z\in{}_A\mathbb{M}$ に対して $f_*:\mathrm{Hom}_A(Z,X)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(Z,Y)$ が単射であると仮定する。$x\in X$ が $f(x)=0$ を満たしていると仮定する。このとき、包含写像 $i:Ax\hookrightarrow X$ に対して $f_*(i)=f\circ i=0$ となる。仮定により、$i=0$ を得る。これは $Ax=0$ となることを意味する。よって、$x=0$ が得られ、f は単射であることが示された。

次に、後者の同値を示す。

f は全射であると仮定する。$Z\in{}_A\mathbb{M}$ を任意に取る。$\alpha\in\mathrm{Hom}_A(Y,Z)$ が $f^*(\alpha)=\alpha\circ f=0$ を満たしていると仮定する。f は全射なので、任意の $y\in Y$ は $y=f(x),\ x\in X$ と表わすことができる。このとき、$\alpha(y)=\alpha(f(x))=0$ となる。よって、$\alpha=0$ となる。故に、$f^*:\mathrm{Hom}_A(Y,Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(X,Z)$ は単射である。

逆に、任意の $Z\in{}_A\mathbb{M}$ に対して $f^*:\mathrm{Hom}_A(Y,Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(X,Z)$ が単射であると仮定する。自然な射影 $q:Y\longrightarrow Y/\mathrm{Im}f$ を考える。このとき、$f^*(q)=q\circ f=0$ となる。仮定により、$q=0$ となる。これは $Y\subset\mathrm{Im}f$ となることを意味する。よって、$Y=\mathrm{Im}f$ が得られて、f は全射である。 $\square$

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3\longrightarrow 0$$

が完全であると仮定する。

. $F(f)$ が単射であること：

任意の $Z'\in{}_B\mathbb{M}$ に対して、$F(f)_*:\mathrm{Hom}_B(Z',F(M_1))\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(Z',F(M_2))$ が単射になることを示せばよい。F は $\boldsymbol{k}$-線形な圏の同値を与える共変関手であるから、$Z'\cong F(Z)$ となる $Z\in{}_A\mathbb{M}$ が存在する。このとき、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(Z,M_1) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_A(Z,M_2)\\
{\scriptstyle F_{Z,M_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{Z,M_2}}\\
\mathrm{Hom}_B(F(Z),F(M_1)) & \xrightarrow{F(f)_*} & \mathrm{Hom}_B(F(Z),F(M_2))
\end{array}$$

$f_*:\mathrm{Hom}_A(Z,M_1)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(Z,M_2)$ は単射なので、$F(f)_*:\mathrm{Hom}_B(F(Z),F(M_1))\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(F(Z),F(M_2))$ も単射である。よって、$F(f)_*:\mathrm{Hom}_B(Z',F(M_1))\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(Z',F(M_2))$ も単射である。

. $F(g)$ が全射であること：

任意の $Z'\in{}_B\mathbb{M}$ に対して、$F(f)^*:\mathrm{Hom}_B(F(M_3),Z')\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(F(M_2),Z')$ が単射になることを示せばよい。先程と同様に $Z'\cong F(Z)$ となる $Z\in{}_A\mathbb{M}$ をとると、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(M_3,Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_A(M_2,Z)\\
{\scriptstyle F_{M_1,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{M_2,Z}}\\
\mathrm{Hom}_B(F(M_3),F(Z)) & \xrightarrow{F(f)^*} & \mathrm{Hom}_B(F(M_2),F(Z))
\end{array}$$

$f^* : \mathrm{Hom}_A(M_3, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, Z)$ は単射なので、$F(f)^* : \mathrm{Hom}_B(F(M_3), F(Z)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(M_2), F(Z))$ も単射である。したがって、また、$F(f)^* : \mathrm{Hom}_B(F(M_3), Z') \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(M_2), Z')$ も単射である。

. $\mathrm{Ker}F(g) = \mathrm{Im}F(f)$ であること：

$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(0) = 0$ である ($\because$ $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手は零射を零射に写す。拙著『古典的なテンソル圏入門』p.118 補題 7-8 参照) から、$\mathrm{Im}F(f) \subset \mathrm{Ker}F(g)$ が成り立つ。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

F は $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手であるから、

$$^{\exists}G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M} : \boldsymbol{k}\text{-線形な圏の同値を与える共変関手}$$
$$^{\exists}\varphi : G \circ F \Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}} : \text{自然同値}, \quad ^{\exists}\psi : F \circ G \Rightarrow 1_{{}_B\mathbb{M}} : \text{自然同値}$$

となる。

$i : \mathrm{Ker}F(g) \longrightarrow F(M_2)$ を包含写像とする。$F(g) \circ i = 0$ より、

$$g \circ \varphi_{M_2} \circ G(i) = 0$$

を得る (次の図式を参照)。

$$\begin{tikzcd}
G(\mathrm{Ker}F(g)) \arrow[r, "G(i)"] & GF(M_2) \arrow[r, "GF(g)"] \arrow[d, "\varphi_{M_2}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GF(M_3) \arrow[d, "\varphi_{M_3}"] \\
 & M_2 \arrow[r, "g"] & M_3
\end{tikzcd}$$

故に、

$$\mathrm{Im}(\varphi_{M_2} \circ G(i)) \subset \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$$

となる。f は単射なので、

$$\gamma : G(\mathrm{Ker}F(g)) \xrightarrow{\varphi_{M_2} \circ G(i)} \mathrm{Im}(\varphi_{M_2} \circ G(i)) \subset \mathrm{Im}f \xrightarrow{f^{-1}} M_1$$

と定めることにより、

$$\varphi_{M_2} \circ G(i) = f \circ \gamma$$

と左 A-加群準同型の合成に分解できることがわかる。これより、次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}F(g) \arrow[rrr, "i"] & & & F(M_2) \\
FG(\mathrm{Ker}F(g)) \arrow[u, "\psi"] \arrow[rr, "FG(i)"] \arrow[ddd, "F(\gamma)"'] & & FG(F(M_2)) \arrow[ur, "\psi_{F(M_2)}"] \arrow[dl, "F(\varphi_{M_2})"'] & \\
 & F(M_2) & & \\
F(M_1) \arrow[ur, "F(f)"] & & FG(F(M_1)) \arrow[ll, "F(\varphi_{M_1})"'] \arrow[uu, "FGF(f)"] \arrow[r, "\psi_{F(M_1)}"] & F(M_1) \arrow[uuu, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

よって、$\mathrm{Ker}F(g) = \mathrm{Im}i \subset \mathrm{Im}F(f)$ となる。以上により、F は ${}_A\mathbb{M}$ における完全系列を ${}_B\mathbb{M}$ における完全系列に写すことが示された。

逆に、$0 \longrightarrow F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M_3) \longrightarrow 0$ が完全であるとする。$G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ に関して今の議論を適用して、

$$0 \longrightarrow GF(M_1) \xrightarrow{GF(f)} GF(M_2) \xrightarrow{GF(g)} GF(M_3) \longrightarrow 0$$

は完全系列であることがわかる。次の図式の可換性から、$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ もまた完全であることがわかる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & GF(M_1) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(M_2) & \xrightarrow{GF(g)} & GF(M_3) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{M_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{M_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{M_3}} & & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(Q.E.D.)

演習 1-84

> $A,\ B$: 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
> $F : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$: $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手
> $V \in {}_A\mathbb{M}$ とする。このとき、次が成り立つことを示せ。
> (1) $V \in {}_A\mathbb{M}$: 射影的 $\iff$ $F(V) \in {}_B\mathbb{M}$: 射影的
> (2) $V \in {}_A\mathbb{M}$: 単射的 $\iff$ $F(V) \in {}_B\mathbb{M}$: 単射的
> (3) $V \in {}_A\mathbb{M}$: 生成元 $\iff$ $F(V) \in {}_B\mathbb{M}$: 生成元

解；

「$\Longrightarrow$」のみ示せば十分である。

$\because$)

F は $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手であるから、

$$^{\exists}G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M} : \boldsymbol{k}\text{-線形な共変関手} \quad \text{s.t.} \quad F \circ G \cong 1_{{}_B\mathbb{M}},\ G \circ F \cong 1_{{}_A\mathbb{M}}$$

となる。このとき、$V \cong G(F(V))$ となる。したがって、もし「$\Longrightarrow$」が証明されたとすると、$F(V)$ が射影的 (resp. 単射的、生成元、余生成元) ならば、$V \cong G(F(V))$ もそうであることがわかる。 □

(1) $V \in {}_A\mathbb{M}$ は射影的であると仮定する。

$F(V) \in {}_B\mathbb{M}$ が射影的であることを示す。そのために、次の図式のような左 B-加群準同型 f g を任意にとる：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(V) & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \ : \text{完全}
\end{array}$$

仮定により、左 B-加群として $M \cong F(X)$, $N \cong F(Y)$ となる X, $Y \in {}_A\mathbb{M}$ が存在する。$\alpha : M \longrightarrow F(X)$, $\beta : N \longrightarrow F(Y)$ を左 B-加群としての同型とすると、$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}_B(F(X), F(Y))$ は、ある $\xi \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ によって $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = F(\xi)$ と表わされる。同様に、$\beta \circ g \in \mathrm{Hom}_B(F(V), F(Y))$ は、ある $\eta \in \mathrm{Hom}_A(V, Y)$ によって $\beta \circ g = F(\eta)$ と表わされる。f は仮定により全射なので、$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = F(\xi)$ も全射であり、したがって、ξ も全射である (演習 1-83)。V は射影的であるから、

$$
{}^{\exists}\tau \in \mathrm{Hom}_A(V, X) \quad \text{s.t.} \quad
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dl, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] \\
X \arrow[r, "\xi"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\text{：完全}
$$

となる。これより、$F(\xi) \circ F(\tau) = F(\eta)$ が成り立つので、$h := \alpha^{-1} \circ F(\tau)$ とおくと、次の図式が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
& F(V) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\text{：完全}
$$

故に、$F(V)$ は射影的な左 B-加群である。

(2) $V \in {}_A\mathbb{M}$ は単射的であると仮定する。

$F(V) \in {}_B\mathbb{M}$ が単射的であることを示す。そのために、次の図式のような左 B-加群準同型 f g を任意にとる：

$$
\begin{tikzcd}
& & F(V) \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "g"] & N
\end{tikzcd}
\text{：完全}
$$

仮定により、左 B-加群として $M \cong F(X)$, $N \cong F(Y)$ となる X, $Y \in {}_A\mathbb{M}$ が存在する。$\alpha : M \longrightarrow F(X)$, $\beta : N \longrightarrow F(Y)$ を左 B-加群としての同型とすると、$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Hom}_B(F(X), F(Y))$ は、ある $\xi \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ によって $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = F(\xi)$ と表わされる。同様に、$g \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_B(F(X), F(V))$ は、ある $\eta \in \mathrm{Hom}_A(X, V)$ によって $g \circ \alpha = F(\eta)$ と表わされる。f は仮定により単射なので、$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = F(\xi)$ も単射であり、したがって、ξ も単射である (演習 1-83)。V は単射的であるから、

$$
{}^{\exists}\tau \in \mathrm{Hom}_A(Y, V) \quad \text{s.t.} \quad
\begin{tikzcd}
& & V \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & Y \arrow[u, "\tau"']
\end{tikzcd}
\text{：完全}
$$

となる。これより、$F(\tau)\circ F(\xi)=F(\eta)$ が成り立つので、$h:=F(\tau)\circ\beta$ とおくと、次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} & & F(V) \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"] \end{tikzcd} \quad : \text{完全}$$

故に、$F(V)$ は単射的な左 B-加群である。

(3) V は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるとする。

$F(V)$ は ${}_B\mathbb{M}$ の生成元になることを示す。

$M\in{}_B\mathbb{M}$ を任意にとる。$M\cong F(X)$ となる $X\in{}_A\mathbb{M}$ が存在する。

V は ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるから、

$$^\exists f:V^{\oplus I}\longrightarrow X:\text{全射な左 }A\text{-加群準同型}$$

となる。$\boldsymbol{k}$-線形な共変関手 F は直和を保つ (拙著『古典的なテンソル圏入門』p.118 補題 7-8 参照) から、全射な左 B-加群準同型

$$F(V)^{\oplus I}\cong F(V^{\oplus I})\xrightarrow{F(f)}F(X)\cong M$$

が得られる。故に、$F(V)$ は ${}_B\mathbb{M}$ の生成元である。　(Q.E.D.)

演習 1-85

> $A,\ B$: 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
> $F:{}_A\mathbb{M}\longrightarrow{}_B\mathbb{M}$: $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手
> $M\in{}_A\mathbb{M}$ とする。次を示せ。
> (1) $M\in{}_A\mathbb{M}$: 既約 $\iff$ $F(M)\in{}_B\mathbb{M}$: 既約
> (2) $M\in{}_A\mathbb{M}$: 有限生成 $\iff$ $F(M)\in{}_B\mathbb{M}$: 有限生成
> (3) $M\in{}_A\mathbb{M}$: 直既約 $\iff$ $F(M)\in{}_B\mathbb{M}$: 直既約

解；

上の演習問題の証明で述べたのと同じ理由で、「$\Longrightarrow$」についてのみ証明すれば十分である。

(1) V を既約な左 A-加群とする。$F(V)$ の部分加群 $N\in{}_B\mathbb{M}$ を任意にとる。$i:N\longrightarrow F(M)$ を包含写像とする。$G:{}_B\mathbb{M}\longrightarrow{}_A\mathbb{M}$ を $F\circ G\cong 1_{{}_B\mathbb{M}},\ G\circ F\cong 1_{{}_A\mathbb{M}}$ をみたす $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手とする。$G(i):G(N)\longrightarrow G(F(M))\cong M$ は単射な左 A-加群準同型である (演習 1-83)。M の既約性により、$G(i)$ は同型写像かまたは $G(N)\cong 0$ となる。もし、$G(i)$ が同型写像ならば、$i:N\longrightarrow F(M)$ も同型写像になる。i は包含写像であるから、このことは $N=F(M)$ となることを意味する。もし、$G(N)\cong 0$ ならば、F の加法性から $N\cong F(G(N))\cong F(0)\cong 0$ となる (拙著『古典的なテンソル圏入門』p.118 補題 7-8 参照)。こうして、$F(M)$ の既約性が証明された。

(2) まず、左正則加群 ${}_AA$ に対して、$F({}_AA)$ が有限生成な左 B-加群になることを示す。

任意の加群は自由加群の商として得られるから、全射な左 B-加群準同型 $\varphi : \bigoplus_{i\in I} B_i \longrightarrow F({}_AA)$ が存在する。但し、各 B_i は左正則加群 ${}_BB$ と同型な左 B-加群である。よって、全射な左 A-加群準同型

$$f : \bigoplus_{i\in I} G(B_i) \cong G(\bigoplus_{i\in I} B_i) \xrightarrow{G(\varphi)} G(F({}_AA)) \cong {}_AA$$

が得られる ($\because$ $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手は直和を保つ)。$1 \in {}_AA$ に対して、$f(x) = 1$ となる $x \in \bigoplus_{i\in I} G(B_i)$ が存在する。$x = (x_i)_{i\in I},\ x_i \in B_i,\ i \in I$ と書くとき、$x_i \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個なので、それを $i_1, \cdots, i_n$ とおく。このとき、f を $\bigoplus_{j=1}^{n} G(B_{i_j})$ へ制限して得られる写像 $\bar{f} : \bigoplus_{j=1}^{n} G(B_{i_j}) \longrightarrow {}_AA$ は全射である。こうして、全射な左 B-加群準同型

$$\bigoplus_{j=1}^{n} B_{i_j} \cong \bigoplus_{j=1}^{n} F(G(B_{i_j})) \cong F(\bigoplus_{j=1}^{n} G(B_{i_j})) \xrightarrow{F(\bar{f})} F({}_AA)$$

が得られたので、$F({}_AA)$ は有限生成である。

次に、M が有限生成な左 A-加群であるとする。有限階数の自由加群 $V \in {}_A\mathbb{M}$ と全射な左 A-加群準同型 $f : V \longrightarrow M$ が存在する。$V \cong \underbrace{{}_AA \oplus \cdots \oplus {}_AA}_{n\text{ 個}}$ ならば、$F(V) \cong \underbrace{F({}_AA) \oplus \cdots \oplus F({}_AA)}_{n\text{ 個}}$ である ($\because$ $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手は直和を保つ) から、上述の結果より、$F(V)$ は有限生成な左 B-加群である。一方、f の全射性から $F(f) : F(V) \longrightarrow F(M)$ も全射である (演習 1-63)。したがって、$F(M)$ も有限生成な左 B-加群である。

(3) M を直既約な左 A-加群とする。$F(M) = N_1 \oplus N_2$ と左 B-加群の直和に書けたとする。このとき、

$$M \cong G(F(M)) \cong G(N_1) \oplus G(N_2) \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。M は直既約であるから、$G(N_1) \cong M,\ G(N_2) \cong 0$ または $G(N_1) \cong 0,\ G(N_2) \cong M$ となる。$G(N_1) \cong M,\ G(N_2) \cong 0$ ならば $N_1 \cong F(G(N_1)) \cong F(M),\ N_2 \cong F(G(N_2)) \cong F(0) \cong 0$ であり ($\because$ $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手は直和と零対象を保つ。拙著『古典的なテンソル圏入門』p.118 補題 7-8 参照)、$G(N_1) \cong 0,\ G(N_2) \cong M$ ならば $N_1 \cong 0,\ N_2 \cong F(M)$ となる。よって、$F(M)$ も直既約である。 (Q.E.D.)

演習 1-86

(1) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
${}_A\mathbb{M}$ 上の恒等関手 $1_{{}_A\mathbb{M}}$ から $1_{{}_A\mathbb{M}}$ への自然変換全体は $\boldsymbol{k}$ 上の代数になり、それは A の中心 $Z(A)$ と同型であることを示せ。
(2) $A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

$$A \text{ と } B \text{ が森田同値} \implies Z(A) \cong Z(B) \quad \text{as algebras}$$

となることを示せ。

解；

(1) ${}_A\mathbb{M}$ 上の恒等関手 $1_{{}_A\mathbb{M}}$ から $1_{{}_A\mathbb{M}}$ への自然変換の全体を $\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ とおく。$\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ の元は、左 A-加群からなる集合

$$\varphi = \{\varphi_M : M \longrightarrow M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}}$$

であって、任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle \varphi_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

を可換にするものからなる。

2つの自然変換 $\varphi = \{\varphi_M : M \longrightarrow M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}}$, $\psi = \{\psi_M : M \longrightarrow M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}}$ と $\lambda \in \boldsymbol{k}$ に対して

$$\begin{cases} \varphi + \psi = \{\varphi_M + \psi_M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}} \\ \lambda\varphi = \{\lambda\varphi_M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}} \end{cases}$$

と定義することにより $\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ は $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間になる。さらに、

$$\varphi\psi := \{\varphi_M \circ \psi_M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}}$$

と定義することにより、$\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ は $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。単位元は $\mathrm{id} = \{\mathrm{id}_M\}_{M \in {}_A\mathbb{M}}$ で与えられる。写像 $\Phi : \mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}}) \longrightarrow Z(A)$ を

$$\Phi(\varphi) = \varphi_{{}_A A}(1)$$

によって定義する。Φ が代数の同型を与える。

$\because$)

・$\varphi_{{}_A A}(1) \in Z(A)$ であること：

$a := \varphi_{{}_A A}(1)$ とおく。任意の $b \in A$ に対して、$f : A \longrightarrow A,\ x \longmapsto xb$ は ${}_A A$ 上の左 A-加群準同型になる。φ の自然性から

$$\varphi_{{}_A A} \circ f = f \circ \varphi_{{}_A A}$$

となる。単位元 1 の行先を比較して $ba = ab$ を得る。$b \in A$ は任意にとっていたから $a \in Z(A)$ であることが示された。

・Φ が $\boldsymbol{k}$-線形写像であることはすぐにわかる。

・Φ が積を保つこと：

$$\Phi(\varphi\psi) = (\varphi_{{}_A A} \circ \psi_{{}_A A})(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi_{{}_A A}\ \text{左 } A\text{-加群準同型}}}{=} \psi_{{}_A A}(1)\varphi_{{}_A A}(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \psi_{{}_A A}(1) \in Z(A)}}{=} \varphi_{{}_A A}(1)\psi_{{}_A A}(1) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$$

・Φ は単位元を保つことはすぐにわかる。

以上から、Φ が代数準同型であることがわかった。

・Φ が単射であること：

$\Phi(\varphi) = 0$ であるとする。$\varphi_{{}_A A}(1) = 0$ である。$M \in {}_A\mathbb{M}$ を任意にとる。$\varphi_M = 0$ となることを示す。任意の $m \in M$ に対して $f : {}_A A \longrightarrow M,\ a \longmapsto a \cdot m$ は左 A-加群準

同型である。よって、φ の自然性により

$$0=(f\circ\varphi_{{}_AA})(1)=(\varphi_M\circ f)(1)=\varphi_M(m)$$

を得る。故に、$\varphi_M=0$ となり、$\mathrm{Ker}\Phi=0$ が示されたので、Φ は単射である。

・Φ が全射であること：

$a\in Z(A)$ を任意にとる。任意の $M\in{}_A\mathbb{M}$ に対して $\varphi_M:M\longrightarrow M$ を

$$\varphi(m)=a\cdot m \qquad (m\in M)$$

によって定義する。$a\in Z(A)$ であることから、この写像は左 A-加群準同型になる。$\varphi:=\{\varphi_M\}_{M\in{}_A\mathbb{M}}$ とおくとこれは自然変換であって、$\Phi(\varphi)=a$ を満たすことがわかる。故に、Φ は全射である。 □

(2) (1) により、代数として $\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})\cong\mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})$ となることを示せばよい。

演習 1-81 により、

$^\exists F:{}_A\mathbb{M}\longrightarrow{}_B\mathbb{M},\ G:{}_B\mathbb{M}\longrightarrow{}_A\mathbb{M}$：共変関手

$^\exists\xi:G\circ F\Rightarrow 1_{{}_A\mathbb{M}},\ \eta:F\circ G\Rightarrow 1_{{}_B\mathbb{M}}$：自然同値

$$\text{s.t.}\quad {}^\forall N\in{}_B\mathbb{M},\ \xi_{G(N)}=G(\eta_N),$$
$$\quad {}^\forall M\in{}_A\mathbb{M},\ \eta_{F(M)}=F(\xi_M)$$

となる。$\varGamma:\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})\longrightarrow\mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}}),\ \Omega:\mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})\longrightarrow\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ をそれぞれ $\varphi\in\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}}),\ \psi\in\mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})$ に対して次の図式を可換にする自然変換 $\varGamma(\varphi)\in\mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})$, $\Omega(\psi)\in\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ を対応させる写像とする。

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varGamma(\varphi)_N} & N \\ {\scriptstyle\eta_N}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\eta_N} \\ FG(N) & \xrightarrow[F(\varphi_{G(N)})]{} & FG(N) \end{array}\ \text{for } N\in{}_B\mathbb{M},\quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Omega(\psi)_M} & M \\ {\scriptstyle\xi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\xi_M} \\ GF(M) & \xrightarrow[G(\psi_{F(M)})]{} & GF(M) \end{array}\ \text{for } M\in{}_A\mathbb{M}$$

$\varGamma,\ \Omega$ は代数準同型である。

$\varGamma,\ \Omega$ が互いに逆写像になっていることを示す。

$\Omega\circ\varGamma=\mathrm{id}$ となることを示す。

任意に $\varphi\in\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}})$ をとり、$\psi=\varGamma(\varphi),\ N:=F(M)$ とおく。このとき、$\varGamma,\ \Omega$ の定義から次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Omega(\psi)_M} & M \\ {\scriptstyle\xi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\xi_M} \\ GF(M) & \xrightarrow{G(\psi_{F(M)})} & GF(M) \\ {\scriptstyle G(\eta_N)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle G(\eta_N)} \\ GFG(N) & \xrightarrow[GF(\varphi_{G(N)})]{} & GFG(N) \end{array}$$

一方、$f := \varphi_{G(N)} : G(N) \longrightarrow G(N)$ とおくと、ξ, φ の自然性から次の図式を得る：

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\varphi_M} & M \\
{\scriptstyle \xi_M}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \xi_M} \\
GF(M) & & GF(M) \\
\| & \xrightarrow[f]{\varphi_{GF(M)}} & \| \\
G(N) & & G(N) \\
{\scriptstyle \xi_{G(N)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \xi_{G(N)}} \\
GFG(N) & \xrightarrow[GF(f)]{} & GFG(N)
\end{array}$$

ξ, η の選び方から、$\xi_{G(N)} = G(\eta_N)$ となるので、上の２つの図式における縦の写像は同じ写像である。よって、$\Omega(\psi)_M = \varphi_M$ となることが示された。このことは、$(\Omega \circ \mathit{\Gamma})(\varphi) = \varphi$ となることを意味する。同様にして、任意の $\psi \in \mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})$ に対して $(\mathit{\Gamma} \circ \Omega)(\psi) = \psi$ となることを示すことができる。よって、$\mathit{\Gamma}$, Ω は互いに他の逆写像である。

以上から、代数として、$\mathrm{End}(1_{{}_A\mathbb{M}}) \cong \mathrm{End}(1_{{}_B\mathbb{M}})$ となることが示された。このことと (1) から、$Z(A) \cong Z(B)$ を得る。 (Q.E.D.)

注意：この演習問題の結果から、中心が同型でない代数同士は森田同値でないことがわかる。

演習 1-87

A, B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、包含関係による順序集合としての同型
$f : \{A$ の左 (resp. 右、両側) イデアル全体$\} \longrightarrow \{B$ の左 (resp. 右、両側) イデアル全体$\}$
が存在すると仮定する。このとき、
(1) I, J：A の左 (resp. 右、両側) イデアル $\Longrightarrow$ $f(I+J) = f(I) + f(J)$
(2) I, J：A の左 (resp. 右、両側) イデアル $\Longrightarrow$ $f(I \cap J) = f(I) \cap f(J)$
が成り立つことを示せ。さらに、
(3) A の左 (resp. 右、両側) イデアル $I_1, \cdots, I_n$ が A の中で直和ならば、$f(I_1), \cdots, f(I_n)$ も B の中で直和であって、

$$f(I_1 \oplus \cdots \oplus I_n) = f(I_1) \oplus \cdots \oplus f(I_n)$$

が成り立つことを示せ。

解；

(1) $I \subset I + J$ および $J \subset I + J$ より $f(I) \subset f(I+J)$ および $f(J) \subset f(I+J)$ が成り立つ。故に、

$$f(I) + f(J) \subset f(I+J)$$

を得る。同様のことを f^{-1} と $f(I)$, $f(J)$ に対して行って、

$$I + J = f^{-1}(f(I)) + f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(f(I) + f(J))$$

を得る。両辺に f を作用させると、

$$f(I+J) \subset f(I) + f(J)$$

を得る。よって、$f(I+J)=f(I)+F(J)$ であることが示された。

(2) $I\cap J\subset I$ および $I\cap J\subset J$ より、$f(I\cap J)\subset f(I)$ および $f(I\cap J)\subset f(J)$ が成り立つ。故に、

$$f(I\cap J)\subset f(I)\cap f(J)$$

が成り立つ。同様のことを f^{-1} と $f(I),\ f(J)$ に対して行って、

$$f^{-1}(f(I)\cap f(J))\subset f^{-1}(f(I))\cap f^{-1}(f(J))=I\cap J$$

を得る。両辺に f を作用させると、

$$f(I)\cap f(J)\subset f(I\cap J)$$

を得る。よって、$f(I\cap J)=f(I)\cap f(J)$ が示された。

(3) 前半部分が示されれば、あとは (1) を用いて後半部分が示される。

$I_1,\cdots,I_n$ を A の中で直和になっているような n 個の左イデアルとする。このとき、

$$\begin{aligned}
f(I_i)\cap(\sum_{i\neq j}f(I_j)) &= f(I_i)\cap f(\sum_{i\neq j}I_j) && \leftarrow\ (1)\\
&= f(I_i\cap(\sum_{i\neq j}I_j)) && \leftarrow\ (2)\\
&= f(\{0\}) && \\
&= \{0\} && f\ \text{は順序を保つ}
\end{aligned}$$

が成り立つ。故に、$f(I_1),\cdots,f(I_n)$ は B の中で直和である。 (Q.E.D.)

演習 1-88

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

P：左 A-加群　とする。次を示せ。

P が ${}_A\mathbb{M}$ の生成元 $\Longrightarrow$ ${}^\forall N,N'$: 左 A-加群, ${}^\forall g_1,g_2\in\mathrm{Hom}_A(N,N'),\ g_1\neq g_2$ に対して

$${}^\exists f\in\mathrm{Hom}_A(P,N)\ \text{ s.t. }\ g_1\circ f\neq g_2\circ f$$

同様のことは右 A-加群についても成り立つ。

解；

P が ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるとする。

すると、

$${}^\forall n\in N,\ {}^\exists f_1,\cdots,f_k\in\mathrm{Hom}_A(P,N)\ \text{ s.t. }\ n=\sum_{i=1}^k f_i(p_i)\ \text{ for some }\ p_i\in P\ (i=1,\cdots,k)$$

となる。

$g_1,\ g_2:N\longrightarrow N'$ を左 A-加群準同型とする。

もし、任意の $f\in\mathrm{Hom}_A(P,N)$ に対して、$g_1\circ f=g_2\circ f$ であったとすると、

$$g_1(n)=\sum_{i=1}^k g_1(f_i(p_i))=\sum_{i=1}^k g_2(f_i(p_i))=g_2(n)$$

となる。これは、$g_1 = g_2$ であることを意味する。対偶をとって、

$$g_1 \neq g_2 \implies {}^{\exists} f \in \mathrm{Hom}_A(P, N) \ \text{ s.t. } \ g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$$

を得る。 (Q.E.D.)

§12. 稠密性定理

M を左 A-加群とすると、その左作用全体 A_M は $D := \mathrm{End}_A M$ と可換な M 上の線形変換全体のなす代数 $\mathrm{End}_D M$ の部分代数になる。稠密性定理 (Density Theorem) とは、M が既約ならば、A_M が $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密になるという事実をさす。但し、ここでの稠密性は、M に離散位相を与えたときのコンパクト開位相に関するものである。ここでは、Jacobson によるオリジナルな方法で稠密性定理を証明する。最後に、稠密性定理と森田の定理 (定理 1-53) の重要な応用を 1 つ述べる。

定義 1-22

M：体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間

$A,\ R \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$：部分代数　とする。

A が R の中で**稠密** (*dense*)

$\iff$ (i) $A \subset R$

(ii) ${}^{\forall}\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M$：有限集合, ${}^{\forall} r \in R$,

$${}^{\exists} a \in A \ \text{ s.t. } \ a(x_i) = r(x_i) \ \ (i = 1, \cdots, n)$$

注意：稠密という言葉は位相幾何学に由来している。M を空でない集合とし、M から M への写像全体 $\mathrm{Map}(M, M)$ を考える。$\mathrm{Map}(M, M)$ の元 f は $\{f(x)\}_{x \in M}$ という M の M 個の直積 $M^{\Pi M}$ の元と同一視される。今、M に離散位相を入れて、直積空間 $M^{\Pi M}$ を考える (例えば、竹之内脩・著『トポロジー』廣川書店 p.183–184 参照)。位相の入れ方から、$f \in \mathrm{Map}(M, M)$ における開基は

$$U(f, \{x_1, \cdots, x_n\}) := \{g \in \mathrm{Map}(M, M) \mid g(x_i) = f(x_i),\ i = 1, \cdots, n\}$$

但し、$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M,\ n \in \mathbb{N}$、という形の部分集合全体からなる。$M$ が $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間のときには、部分代数 $A,\ R \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ に $\mathrm{Map}(M, M)$ の部分空間としての位相を導入することができる。$A \subset R$ のとき、

A が R において位相空間として稠密 $\iff$ A が R において稠密な代数

が成り立つ。

定理 1-60(稠密性定理)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群

$D := \mathrm{End}_A M$　とおく。D は M に自然に左から作用している。

$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ を A の M への左作用に対応する表現とする。このとき、

M：既約 $\implies$ $\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密

注意：稠密性定理は、M が既約な左 A-加群の任意個の直和 (すなわち、M が完全可約) であっても成立する (演習 2-11)。

ここでは、Jacobson によるオリジナルな証明を与える。そのために、補題を 1 つ用意する。

補題 1-61

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：既約な左 A-加群　とする。このとき、
(1) $D := \mathrm{End}_A M$ は斜体である。
(2) $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ を A の M への左作用に対応する表現とすると、$\rho(A) \subset \mathrm{End}_D M$ となり、次が成り立つ：

$$\rho(A) \text{ が } \mathrm{End}_D M \text{ の中で稠密}$$
$$\iff {}^\forall k \in \mathbb{N},\ {}^\forall \{x_i\}_{i=1}^k \subset M：D \text{ 上一次独立、} {}^\forall \{y_i\}_{i=1}^k \subset M：\text{部分集合}$$
$$\text{s.t.}\ \ a \cdot x_i = y_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$$

(proof)
(1) は Schur の補題 (命題 1-13) による。
(2) まず、$D = \mathrm{End}_A M$ は M に自然に左から作用していて、$\rho(A) \subset \mathrm{End}_D M$ となっていることに注意しよう。
「$\Longrightarrow$」の証明：$\{x_i\}_{i=1}^k$ を D 上一次独立な M のベクトルとすると、これを含む M の D 上の基底 $\{x_i\}_{i=1}^k \cup \{x'_j\}_{j \in J}$ が存在する。任意に $y_1, \cdots, y_k \in M$ をとると、次のような D 上の線形写像 $f : M \longrightarrow M$ が唯一つ存在することがわかる。

$$f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_k) = y_k,\ f(x'_j) = 0 \ \ (j \in J)$$

この $f \in \mathrm{End}_D M$ と $\{x_i\}_{i=1}^k$ に仮定を適用すれば、

$${}^\exists a \in A \ \ \text{s.t.}\ \ a \cdot x_i = f(x_i) = y_i \ \ (i = 1, \cdots, k)$$

となることがわかる。
「$\Longleftarrow$」の証明：任意に $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M$ と $f \in \mathrm{End}_D M$ をとる。
　もし、$x_1 = \cdots = x_n = 0$ ならば、$a = 0$ とおくことにより、$f(x_i) = a \cdot x_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$ は満たされる。よって、$\{0\} \subsetneqq \{x_1, \cdots, x_n\}$ の場合に証明されればよい。
　$\{x_1, \cdots, x_n\}$ の部分集合であって、D 上一次独立なもののうち (集合の包含関係に関して) 極大なものを考える。必要ならば、番号を付け替えることにより、極大なものは $\{x_1, \cdots, x_k\} \ \ (k \leq n)$ であるとしてよい。このとき、任意の $x \in \{x_{k+1}, \cdots, x_n\}$ は $x = d_1 x_1 + \cdots + d_k x_k \ \ (d_1, \cdots, d_k \in D)$ のように書き表わすことができる。仮定により、

$${}^\exists a \in A \ \ \text{s.t.}\ \ a \cdot x_1 = f(x_1), \cdots, a \cdot x_k = f(x_k)$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} a\cdot x &= a\cdot(d_1x_1+\cdots+d_kx_k) \\ &= ad_1x_1+\cdots+ad_kx_k \\ &= d_1ax_1+\cdots+d_kax_k \\ &= d_1f(x_1)+\cdots+d_kf(x_k) \\ &= f(d_1x_1+\cdots+d_kx_k) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる。故に、任意の $i=1,\cdots,n$ に対して $a\cdot x_i=f(x_i)$ が満たされることがわかった。

(Q.E.D.)

(proof of Theorem 1-60)

補題 1-61 により、任意の自然数 k について、

『k 個の元からなる任意の D 上 1 次独立なベクトル $\{x_i\}_{i=1}^k\subset M$ と k 個の元からなるベクトル $\{y_i\}_{i=1}^k\subset M$ に対して、

$$^\exists a\in A \ \ \text{s.t.} \ \ a\cdot x_i=y_i \ \ (i=1,\cdots,k)$$

となる』ことを示せばよい。

自然数 k に関する数学的帰納法で上の『 』を示す。

. $k=1$ のとき：

$x_1\neq 0\ \in M$ と $y_1\in M$ を任意にとる。

Ax_1 は M の部分加群であって、0 ではない。M は既約であるから、$Ax_1=M$ となる。特に、$ax_1=y_1$ となる $a\in A$ が存在する。

. $k=2$ のとき：

$\{x_1,x_2\}\subset M$ は D 上一次独立であるとし、$\{y_1,y_2\}\subset M$ は任意の部分集合とする。まず、最初に、

$$^\exists a_2\in A \ \ \text{s.t.} \ \ a_2x_1=0, \ \ a_2x_2\neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となることを示す。①のような $a_2\in A$ が存在しなかったと仮定する。すると、写像 $f: Ax_1\longrightarrow Ax_2,\ ax_1\longmapsto ax_2$ が矛盾なく定義される。

$\because$)

> $a,b\in A$ に対して $ax_1=bx_1$ であるとする。このとき、$(a-b)x_1=0$ となる。仮定により、$a-b$ も①を満たさないから、$(a-b)x_2=0$ でなければならない。故に、$ax_2=bx_2$ を得る。よって、$Ax_1\longrightarrow Ax_2,\ ax_1\longmapsto ax_2$ は矛盾なく定義されている。
> □

$x_1\neq 0,\ x_2\neq 0$ より、$Ax_1=M=Ax_2$ となる (M の既約性)。よって、写像 $f: Ax_1\longrightarrow Ax_2,\ ax_1\longmapsto ax_2$ は M から M への左 A-加群準同型である。したがって、$f\in \mathrm{End}_A M=D$ であり、$f(x_1)=x_2$ が満たされる。$f\neq 0$ であるから、

$$^\exists\delta\in D \ \ \text{s.t.} \ \ \delta\circ f=\mathrm{id}_M$$

となる ($\because$ D は斜体)。特に、$\delta x_2 = x_1$ を得る。これは、x_1, x_2 が D 上一次独立であることに反する。こうして、背理法を用いて、①が示された。

　同様にして、

$$^{\exists}a_1 \in A \text{ s.t. } a_1x_1 \neq 0,\ a_1x_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。$k = 1$ の場合により、

$$^{\exists}b_1, b_2 \in A \text{ s.t. } b_1a_1x_1 = y_1,\ b_2a_2x_2 = y_2$$

となる。そこで、

$$a = b_1a_1 + b_2a_2$$

とおくと、

$$ax_1 = y_1, \quad ax_2 = y_2$$

となることがわかる。故に、$k = 2$ のときにも『k 個の元からなる任意の……』が成り立つことが示された。

. $k > 2$ とし、$m \leq k - 1$ なる任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して『k 個の元からなる任意の……』が成り立っていると仮定する。

　もし、任意の $i = 1, \cdots, k$ に対して

$$^{\exists}a_i \in A \text{ s.t. } a_ix_j = 0\ (j \neq i), \quad a_ix_i \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となるならば、$b_i \in A$ を $b_ia_ix_i = y_i$ を満たすものとして、$a = b_1a_1 + \cdots + b_ka_k$ とおくことによって、

$$ax_1 = y_1, \cdots, ax_k = y_k$$

が満たされることがわかる。よって、帰納法を完成させるためには、③が成り立つことを示せばよい。

　以下、$i = k$ の場合に③が成り立つこと示す (条件の対称性から他の i についても③が成り立つことがわかる)。

　まず、帰納法の仮定から、

$$^{\exists}b \in A \text{ s.t. } bx_1 = \cdots = bx_{k-2}, \quad bx_k = 0$$

となる。このような $b \in A$ 全体からなる A の部分集合を B とおく。

<u>Case1</u>　$bx_{k-1} = 0$ の場合

　$a_k = b$ とおけば、これが求めるものである。

<u>Case2</u>　bx_{k-1} と bx_k が D 上一次独立の場合

　$k = 2$ の場合から、

$$^{\exists}b' \in A \text{ s.t. } b'bx_{k-1} = 0, \quad b'bx_k \neq 0$$

となる。$a_k = b'b$ とおけば、これが求めるものである。

<u>Case3</u>　bx_{k-1} と bx_k が D 上一次従属かつ $bx_{k-1} \neq 0$ の場合

$$bx_{k-1} = \beta bx_k, \quad \beta \in D, \quad \beta \neq 0$$

とおく。このとき、$x_{k-1}-\beta x_k \neq 0$ かつ帰納法の仮定により

$$^{\exists}d \in A \ \text{ s.t. } \ dx_1 = \cdots = dx_{k-2} = 0, \ \ d(x_{k-1}-\beta x_k) \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる。

<u>SubCase3-1</u>　$dx_k = 0$ の場合

この場合、$dx_{k-1} \neq 0$ であり、したがって、

$$^{\exists}u \in A \ \text{ s.t. } \ udx_{k-1} = bx_{k-1}$$

となる。すると、$a_k = b - ud$ とおけば、

$$a_k x_1 = \cdots = a_k x_{k-2} = 0, \ \ a_k x_{k-1} = bx_{k-1} - udx_{k-1} = 0, \ \ a_k x_k = bx_k - udx_k = bx_k \neq 0$$

となるので、これが求めるものである。

<u>SubCase3-2</u>　$dx_k \neq 0$ の場合

$d \in B$ となる。もし、$dx_{k-1} = 0$ ならば Case1 の場合に帰着され、dx_{k-1} と dx_k が D 上一次独立ならばと Case2 の場合に帰着される。そこで、

$$dx_{k-1} = \delta dx_k, \quad \delta(\neq 0) \in D$$

と仮定する。④によって、$\delta \neq \beta$ であることに注意する。$dx_{k-1} \neq 0$ なので、

$$^{\exists}v \in A \ \text{ s.t. } \ vdx_{k-1} = bx_{k-1}$$

となる。このとき、

$$vdx_k = vd\delta^{-1}x_{k-1} = \delta^{-1}vdx_{k-1} = \delta^{-1}bx_{k-1} = \delta^{-1}\beta bx_k$$

$$\uparrow\!\!\!- \ \delta \in D = \mathrm{End}_A M, \ v, d \in A$$

$$\therefore \ (vd - \delta^{-1}\beta b)v_k = 0$$

$a_k = b - vd$ とおく。これが求めるものであることを示す。

$$a_k x_1 = \cdots = a_k x_{k-2} = 0, \ \ a_k x_{k-1} = bx_{k-1} - vdx_{k-1} = 0, \ \ a_k x_k = (b - vd)x_k$$

である。もし、$a_k x_k = 0$ ならば、

$$bx_k = vdx_k = \delta^{-1}\beta bx_k$$

であり、このことから、$(1-\delta^{-1}\beta)bx_k = 0$ を得る。ところが、$bx_k \neq 0$ かつ $1-\delta^{-1}\beta \neq 0$ であるから、$(1-\delta^{-1}\beta)bx_k = 0$ とはなり得ない。したがって、$a_k x_k \neq 0$ でなければならない。以上により、$i = k$ の場合に③は証明された。

これで数学的帰納法が完成したので、定理の証明は終わった。　(Q.E.D.)

系 1-62(Jacobson)

A：体 $\boldsymbol{k}$ の左 Artin 代数

M：既約な左 A-加群

$\Longrightarrow$　$D := \mathrm{End}_A M$ は斜体であり、M は D 上有限次元の左ベクトル空間である。

(proof)

$D := \mathrm{End}_A M$ が斜体になることは、Schur の補題による。

M への A の左作用に対応する表現を $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ とおく。稠密性定理 (定理 1-60) により、$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密である。

M が D 上有限次元でなかったと仮定する。すると、M の元の無限列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ が存在して、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_1, \cdots, x_k$ は D 上一次独立となる。このとき、

$$I_k := \{a \in A \mid ax_1 = \cdots = ax_k = 0\}$$

は A の左イデアルである。さらに、$I_k \supsetneqq I_{k+1}$ となる。実際、$\rho(A) \subset \mathrm{End}_D M$ が稠密であることから、

$$^\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ ax_1 = \cdots = ax_k = 0, \ ax_{k+1} \neq 0$$

となるので、$I_k \supsetneqq I_{k+1}$ である。ここに、A の真に減少する左イデアルの列 $I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq I_3 \supsetneqq \cdots\cdots$ が得られた。これは、A が左 Artin 代数であることに反する。 (Q.E.D.)

次の命題は応用上、極めて重要である。上で述べた稠密性定理 (定理 1-60) と森田の定理 (定理 1-53) を用いて証明される。

命題 1-63

$A, \ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：既約な左 A-加群、N：既約な左 B-加群 とし、

$D := (\mathrm{End}_A M)^{\mathrm{op}}, \ E := (\mathrm{End}_B N)^{\mathrm{op}}$ とおく。

例題 1-52(1) の方法により、M を両側 (A, D)-加群、N を両側 (B, E)-加群とみなす。

M が D 上有限次元であって、N が E 上有限次元ならば、自然な方法で両側 $(A \otimes B, D \otimes E)$-加群とみなした $M \otimes N$ について、次が成り立つ。

(1) $M \otimes N$ は右 $D \otimes E$-加群として自由であり、その階数は有限である。

(2) $M \otimes N$ は $\mathbb{M}_{D \otimes E}$ の射影的生成元である。

(3) $\rho : A \otimes B \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(M \otimes N)$ を $A \otimes B$ の $M \otimes N$ への左作用が定める写像とするとき、

$$\mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N) = \mathrm{Im}\rho$$

が成り立つ。

(4) 包含関係に関する順序集合として

$$\{M \otimes N \text{ の部分左 } A \otimes B\text{-加群全体}\} \cong \{D \otimes E \text{ の左イデアル全体}\}$$

となる。

(proof)

(1) $D = (\mathrm{End}_A M)^{\mathrm{op}}$ は可除である ($\because$ M の既約性による) から、任意の右 D-加群は自由である。仮定により M は右 D-加群として有限次元なので、

$$^\exists r \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ M \cong D^{\oplus r} \ \text{ as right } D\text{-modules}$$

を得る。同様に、

$$ {}^{\exists}s \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ N \cong E^{\oplus s} \ \text{ as right } E\text{-modules} $$

を得る。したがって、

$$ M \otimes N \cong D^{\oplus r} \otimes E^{\oplus s} \cong (D \otimes E)^{\oplus (rs)} \ \text{ as right } D \otimes E\text{-modules} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*) $$

を得る。よって、$M \otimes N$ は右 $D \otimes E$-加群として自由であり、その階数は有限である ($i.e.$ 有限個の元からなる基をもつ)。

(2) (1) により、$M \otimes N$ は右 $D \otimes E$-加群として有限生成射影的である。また、同じく (1) により、$M \otimes N$ は $\mathbb{M}_{D \otimes E}$ の生成元である (例題 1-54)。よって、$M \otimes N$ は $\mathbb{M}_{D \otimes E}$ の射影的生成元である。

(3) $\mathrm{Im}\rho \subset \mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N)$ となることは $D,\ E$ の定義からただちに従う。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。$f \in \mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N)$ を任意にとる。

$\{m_i\}_{i=1}^{r}$ を M の D 上の基底、$\{n_j\}_{j=1}^{s}$ を N の E 上の基底とする。このとき、$\{m_i \otimes n_j\}_{\substack{i=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,s}}$ は $M \otimes N$ の $D \otimes E$ 上の基底になる。この基底を用いて、各 i, j に対して

$$ f(m_i \otimes n_j) = \sum_{k,l} m_k d_{ki} \otimes n_l e_{lj} \qquad (d_{ki} \in D,\ e_{lj} \in E) $$

と書く。M は既約な左 A-加群であるから、M への左 A-作用全体は $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密である (定理 1-60)。したがって、D 上一次独立な M の部分集合 $\{m_1, \cdots, m_r\}$ と M の部分集合 $\{0, \cdots, \underset{\uparrow\, i\text{ 番目}}{m_k d_{ki}}, \cdots 0\}$ に対して、

$$ {}^{\exists}a_{ki} \in A \ \text{ s.t. } \ a_{ki} m_{i'} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ i' \neq i \\ m_k d_{ki} & \text{if } \ i' = i \end{cases} $$

となる。同様に、各 j, l に対して

$$ {}^{\exists}b_{lj} \in B \ \text{ s.t. } \ b_{lj} n_{j'} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ j' \neq j \\ n_l d_{lj} & \text{if } \ j' = j \end{cases} $$

となる。さて、

$$ c := \sum_{i,k=1}^{r} \sum_{j,l=1}^{s} a_{ki} \otimes b_{lj} \quad \in A \otimes B $$

とおく。このとき、

$$ \rho(c)(m_i \otimes n_j) = f(m_i \otimes n_j) \qquad (i = 1, \cdots, r,\ j = 1, \cdots, s) $$

となるから、$\rho(c) = f$ が成り立つ。故に、逆向きの包含関係 $\mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N) \subset \mathrm{Im}\rho$ も示された。

(4) 右 $D \otimes E$-加群 $M \otimes N$ に対して、例題 1-52(2) のように定義される森田コンテクスト $(\mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N), D \otimes E, M \otimes N, \mathrm{Hom}_{D \otimes E}(P, D \otimes E), e, e')$ を考えると、(2) により、e, e' は全射になる (命題 1-55、命題 1-56)。したがって、森田の定理 (定理 1-53) から、包含関係に関する順序集合として

$$ \{ M \otimes N \text{ の部分左 } \mathrm{End}_{D \otimes E}(M \otimes N)\text{-加群全体} \} \cong \{ D \otimes E \text{ の左イデアル全体} \} $$

となる。(3) により、$\mathrm{End}_{D\otimes E}(M\otimes N)=\mathrm{Im}\rho$ であるから、

$$\{M\otimes N \text{ の部分左 } A\otimes B\text{-加群全体}\}\cong\{D\otimes E \text{ の左イデアル全体}\}$$

を得る。これで、命題は証明された。 (Q.E.D.)

注意 1°：上の命題中の、M が D 上有限次元、N が E 上有限次元であるという仮定は、次のいずれかの場合には自動的に満たされる ((ii) に関しては系 1-62 を参照)：

(i) $\dim_{\boldsymbol{k}} M<\infty$ かつ $\dim_{\boldsymbol{k}} N<\infty$ の場合
(ii) A が左 Artin 代数の場合

注意 2°：上の命題において、$B=N=\boldsymbol{k}$ の場合を考えることにより、左 Artin 代数 A と既約な左 A-加群 M に対して、その左作用全体 A_M は $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}M$ において再中心化性を持つことがわかる (再中心化性については、定理 2-11 の下の注意を参照)。すなわち、$D:=\mathrm{End}_A M$ とおくと、$\mathrm{End}_D M=A_M$ が成り立つ。

演習 1-89

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
次は同値であることを示せ。

(i) 忠実かつ既約な左 A-加群が存在する。
(ii) $^\exists D$：$\boldsymbol{k}$ 上の可除代数、$^\exists V$：左 D-加群　s.t.　A は $\mathrm{End}_D V$ の稠密な部分代数に同型

この条件を満たす代数 A は**原始的** (*primitive*) であると呼ばれる。

解；
(i) $\Longrightarrow$ (ii)

V を忠実かつ既約な左 A-加群とし、$\rho: A\longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を V への A の左作用に対応する表現とする。

このとき、稠密性定理 (定理 1-60) から、$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D V$ において稠密である。また、V は忠実な左 A-加群であるから、ρ は単射である。よって、代数として $A\cong\rho(A)$ となる。よって、(ii) が成り立つ。
(ii) $\Longrightarrow$ (i)

D および V を (ii) の条件を満たす可除代数および左 D-加群とする。$\rho: A\longrightarrow \mathrm{End}_D V$ を単射な代数準同型とし、$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D V$ において稠密であるとする。V は ρ によって左 A-加群の構造を持ち、ρ の単射性から V は左 A-加群として忠実である。左 A-加群 V は既約であることを示す。

$W\neq 0$ を左 A-加群 V の部分加群とする。$0\neq w\in W$ を 1 つとり、固定する。D は可除 (斜体) であるから、V の w を含む D 上の基底 $\mathfrak{B}=\{v_i\}_{i\in I}$ が存在する。$w=v_{i_o}$ $(i_o\in I)$ であるとする。このとき、各 $i\in I$ に対して $f_i: V\longrightarrow V$ を

$$f_i(v_j)=\begin{cases} v_i & \text{if} \quad j=i_o \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となるような D-線形写像とする。$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D V$ において稠密であるから、

$$^{\exists}a \in A \ \ \text{s.t.} \ \ \rho(a)(v_{i_o}) = f_i(v_{i_o})$$

となる。故に、

$$v_i = f_i(v_{i_o}) = \rho(a)(v_{i_o}) = a \cdot v_{i_o} = a \cdot w \ \in W$$

となる。これは $W = V$ となることを意味する。故に、V は左 A-加群として既約である。

(Q.E.D.)

演習 1-90 (Burnside)

A：代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：有限次元左 A-加群、$M \neq 0$ とする。このとき、

$$M：既約 \iff A_M = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$$

となることを示せ。但し、$A_M = \{M$ への A の左作用全体$\}$ である。

解；

「$\Longrightarrow$」の証明：

$D = \mathrm{End}_A M$ とおく。
M が既約ならば、稠密性定理 (定理 1-60) により、A_M は $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密である。
$\dim M < \infty$ なので、M は D 上有限生成である。したがって、

$$A_M = \mathrm{End}_D M$$

となる。

$\because$)

$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を M の D 上の生成元とする。$f \in \mathrm{End}_D M$ を任意にとる。A_M は $\mathrm{End}_D M$ において稠密であるから

$$^{\exists}a \in A \ \ \text{s.t.} \ \ a \cdot x_i = f(x_i) \ \ \text{for all } i = 1, \cdots, n$$

となる。任意の $x \in M$ は $x = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n$ $(d_1, \cdots, d_n \in D)$ と書くことができるから、

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot (d_1x_1 + \cdots + d_nx_n) \\ &= a \cdot (d_1x_1) + \cdots + a \cdot (d_nx_n) \\ &= d_1(a \cdot x_1) + \cdots + d_n(a \cdot x_n) \\ &= d_1(f(x_1)) + \cdots + d_n(f(x_n)) \\ &= f(d_1x_1) + \cdots + f(d_nx_n) \\ &= f(d_1x_1 + \cdots + d_nx_n) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

を得る。故に、f は a の M への左作用に一致する。 □

$D = \mathrm{End}_A M$ は代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数である (Schur の補題) から、

$$D = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$$

となる (演習 1-5)。したがって、

$$A_M = \mathrm{End}_D M = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$$

を得る。

「$\Longleftarrow$」の証明：

M は左 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$-加群として既約である。

$\because$)

$N\ (\neq 0)$ を M の左 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$-加群としての部分加群とする。

$0 \neq x \in N$ を 1 つとる。このとき、x を含む M の $\boldsymbol{k}$ 上の基底 $\{x_i\}_{i=1}^n$ が存在する。$x_1 = x$ であるとする。

$y \in M$ を任意にとる。このとき、$f(x) = y$ かつ $f(x_i) = 0\ (i = 2, \cdots, n)$ となる $\boldsymbol{k}$-上の線形写像 $f : M \longrightarrow M$ が定まる。このことは、$y \in (\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M)x$ となることを意味する。よって、

$$M \subset (\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M)x \subset N$$

を得る。こうして、$N = M$ となることがわかったので、M は左 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$-加群として既約である。 $\square$

仮定により、$A_M = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ であるから、M は左 A-加群として既約である。 (Q.E.D.)

第２章　半単純代数

§1. 代数・加群の半単純性

いくつかの既約な部分加群の直和として表わされる加群は完全可約である、あるいは、半単純であると呼ばれる。任意の左 A-加群が完全可約であるような代数は半単純であると呼ばれる。この節では、加群および代数の半単純性に関する同値な条件について述べる。

定義 2-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群　とする。

V : **完全可約** (*completely reducible*)

$\iff$ V はいくつかの (無限個でもよい) 既約な部分加群の直和

補題 2-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。

(1) 次の 3 つは同値である。

(i) M は完全可約である。

(ii) M はいくつかの (無限個でもよい) 既約な部分加群の和である。

(iii) M の任意の部分加群は M の直和因子である。

(2) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$,　各 M_i は既約な部分 A-加群

$\implies$ M の任意の部分 A-加群 N について　$N = \bigoplus_{j \in J} N_j$

但し、$J \subset I$ であり、各 N_j は M_j と同型な N の部分 A-加群

したがって、M が完全可約ならば、その任意の部分加群も完全可約である。

(proof)

「(i) $\implies$ (ii)」は明らかに成り立つ。

「(ii) $\implies$ (iii)」を示す。

$M = \sum_{i \in I} M_i$,　M_i ：既約 とし、N を M の部分 A-加群とする。

I の部分集合 J に対し、M_J を

$$M_J = \sum_{j \in J} M_j$$

によって定義する。但し、$J = \emptyset$ の場合には $M_\emptyset = 0$ と約束する。

$$\mathcal{I} = \{J \subset I \mid N \cap M_J = 0\}$$

とおく。

$\emptyset \in \mathcal{I}$ ゆえ、$\mathcal{I} \neq \emptyset$ である。

$\mathcal{I}$ を集合の包含関係により順序集合とみなす。$\mathcal{I}$ には極大元が存在する。

$\because$)

$\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ を任意の空でない鎖とする。

$$L = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} J$$

とおく。L は $\mathcal{I}$ における $\mathcal{L}$ の上界であることを示す。そのためには、$L \in \mathcal{I}$ すなわち、$N \cap M_L = 0$ を示せばよい。

$x \in N \cap M_L$ とする。$x = \sum_{i \in L} x_i$ (但し、$x_i \in M_i$, 有限個の $i \in L$ を除いて $x_i = 0$) と書く。$x_i \neq 0$ となる各 $i \in L$ に対して、$i \in J$ となる $J \in \mathcal{L}$ を 1 つとり、これを J_i とおく。$\mathcal{L}$ は鎖であるから、$\{J_i \mid x_i \neq 0,\ i \in L\}$ の中に最大元が存在する。それを J_o とおくと、$x_i \neq 0$, $i \in L$ ならば、$i \in J_o$ となる。故に、$x \in M_{J_o}$ となる。$J_o \in \mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ ゆえ、$N \cap M_{J_o} = 0$ 。よって、$x = 0$ を得る。こうして、$N \cap M_L = 0$ が示された。

$\mathcal{I}$ 内の任意の鎖が上界を持つことがわかったので、Zorn の補題により、$\mathcal{I}$ には極大元が存在する。 □

J を $\mathcal{I}$ の極大元とする。このとき、

$$M = N \oplus M_J \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示す。

$J \in \mathcal{I}$ なので、$N \cap M_J = 0$ は満たされている。よって、$(*)$ が成り立つことを示すには、

$$M = N + M_J \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となることを示せばよい。

$i \in I - J$ をとる。J の極大性により、$J \cup \{i\} \notin \mathcal{I}$ ゆえ、$N \cap (M_J + M_i) \neq 0$ となる。故に、$(N + M_J) \cap M_i \neq 0$ 。この左辺は M_i の部分加群であり、M_i は既約であるから $(N + M_J) \cap M_i = M_i$ でなければならない。よって、

$$M_i \subset N + M_J$$

を得る。したがって、

$$M = M_J + \sum_{i \notin J} M_i \subset N + M_J$$

$$\therefore\ N + M_J = M$$

を得る。これで、「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」が証明された。

次に、「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」を示す。

N を M の部分 A-加群とする。仮定から、N の任意の部分加群は N の直和因子となる。

$\because$)

P を N の部分加群とする。

P は M の部分加群でもあるから、$M = P \oplus Q$ となる M の部分加群 Q が存在する。このとき、$Q' = N \cap Q$ は N の部分加群である。

・$P \cap Q' \subset P \cap Q = 0$ より $P \cap Q' = 0$ を得る。

・$N = P + Q'$ である。実際、$x \in N$ ならば、$x = p + q$ $(p \in P,\ q \in Q)$ と書くことができる。$q = x - p \in N$ より $q \in Q \cap N = Q'$ を得る。

上の２つから、$N = P \oplus Q'$ を得る。 □

$$\mathcal{M} = \{M \text{ の既約な部分 } A\text{-加群全体}\}$$

とおく。$M \neq 0$ ならば、$\mathcal{M} \neq \emptyset$ となることが以下のようにしてわかる。

$0 \neq x \in M$ を１つ固定する。M の部分 A-加群であって、x を含まないもの全体 $\mathcal{S}$ を考える。$\{0\} \in \mathcal{S}$ であるから、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。$\mathcal{S}$ は集合の包含関係に関して順序集合になる。

$\mathcal{S}$ には極大元が存在する。

∵)

$\mathcal{S}$ の空でない任意の鎖 $\mathfrak{C}$ をとる。M における和空間

$$M' = \sum_{N \in \mathfrak{C}} N$$

を考える。$M' \in \mathcal{S}$ となること、すなわち、$x \notin M'$ となることを示す。

$x \in M'$ であると仮定する。

$$x = \sum_{N \in \mathfrak{C}} x_N \qquad (x_N \in N,\ \text{有限個の } N \in \mathfrak{C} \text{ を除いて } x_N = 0)$$

と書き表わす。$x_N \neq 0$ となる $N \in \mathfrak{C}$ は有限個であり、$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、$x_N \neq 0$ となる $N \in \mathfrak{C}$ の中に最大のものが存在する。これを N' とおくと、$x_N \neq 0$ であるような任意の $N \in \mathfrak{C}$ に対して $x_N \in N'$ となり、したがって、$x \in N'$ となる。一方、$N' \in \mathcal{S}$ であるから、$x \in N'$ である。ここに矛盾が生じた。よって、$x \notin M'$ を得る。

よって、$\mathcal{S}$ 内の任意の鎖は $\mathcal{S}$ 内に極大元を持つことがわかった。Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ には極大元が存在する。 □

N を $\mathcal{S}$ の極大元とする。

$M = N \oplus N'$ となる部分 A-加群 N' をとる。$x \notin N$ ゆえ、$N' \neq 0$ である。この N' は既約である。

∵)

N' が既約でないと仮定すると、N' の部分加群 N'_1 であって、$N'_1 \neq \{0\}$ かつ $N'_1 \neq N'$ を満たすものが存在する。N'_1 は N' の直和因子になるから、$N' = N'_1 \oplus N'_2$ となる部分加群 N'_2 が存在する。$N'_1 \neq N'$ なので $N'_2 \neq \{0\}$ である。

$N + N'_1 \supsetneqq N,\quad N + N'_2 \supsetneqq N$ より、N の極大性から、$x \in N + N'_1$ かつ $x \in N + N'_2$ となる。したがって、

$$x \in (N + N'_1) \cap (N + N'_2) \subset N$$

が得られるが、これは $N \in \mathcal{S}$ であることに反する。 故に、N' は既約である。 □

こうして、$\mathcal{M} \neq \emptyset$ であることがわかった。

次に、

$$\mathcal{N} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \mid \mathcal{A} \text{ の元は } M \text{ の中で直和}\}$$

とおく。$\mathcal{N}$ を集合の包含関係により順序集合とみると、$\mathcal{N}$ には極大元が存在する。

$\because$)

$\mathcal{M} \neq \emptyset$ ゆえ $\mathcal{N} \neq \emptyset$ である。$\mathcal{N}$ の空でない任意の鎖 $\mathfrak{C}$ が $\mathcal{N}$ 内に上界を持つことを示せばよい。

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{C}} \mathcal{A}$$

とおく。$\mathcal{B} \in \mathcal{N}$ となること、すなわち、$\mathcal{B}$ の元は M の中で直和になることを示す。

$\mathcal{B} = \{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおく。$x_\lambda \in N_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ を有限個の λ を除いて $x_\lambda = 0$ であるもので、

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = 0 \qquad \text{in} \quad M$$

を満たすものとする。$x_\lambda \neq 0$ となる各 $\lambda \in \Lambda$ について、$N_\lambda \in \mathcal{A}$ となる $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$ を 1 つとる。これを $\mathcal{A}_\lambda$ とおく。$x_\lambda \neq 0$ となる λ は有限個で、$\mathfrak{C}$ は鎖なので、$x_\lambda \neq 0$ となる λ の中で、$\mathcal{A}_\lambda$ が最大となるものが存在する。これを $\mathcal{A}$ とおくと、$x_\lambda \neq 0$ となるすべての $\lambda \in \Lambda$ について $N_\lambda \in \mathcal{A}$ となる。$\mathcal{A} \in \mathcal{N}$ ゆえ、$\{N_\lambda \mid x_\lambda \neq 0,\ \lambda \in \Lambda\}$ は M の中で直和である。故に、$x_\lambda = 0$ $({}^\forall \lambda \in \Lambda)$ が示された。

こうして、$\mathcal{B} \in \mathcal{N}$ となることがわかり、$\mathcal{B}$ が $\mathfrak{C}$ の $\mathcal{N}$ 内における上界になることがわかった。Zorn の補題により、$\mathcal{N}$ には極大元が存在する。 □

$\mathcal{A} = \{M_j\}_{j \in J}$ を $\mathcal{N}$ の極大元とする。

$$M' := \sum_{j \in J} M_j$$

とおくと、M' は $\{M_j\}_{j \in J}$ の直和である。$M = M'$ となることを証明すればよい。

$M \neq M'$ であると仮定する。

$M = M' \oplus N$ となる M の部分加群 $N \neq 0$ が存在する。

$\mathcal{M} \neq \emptyset$ を示したのと同じ方法で、N の既約な部分加群 N' が存在する。このとき、M' と N' は M の中で直和であり、$\mathcal{A} \subsetneqq \{M_j \mid j \in J\} \cup \{N'\}$ が成り立つ。これは、$\mathcal{A}$ の $\mathcal{N}$ における極大性に反する。これで、$M = \bigoplus_{j \in J} M_j$ となることがわかり、「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」の証明が終わった。

最後に (2) を示す。「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」の証明から、以下のことがわかる。

$M = \bigoplus_{i \in I} M_i,\ \ M_i$：既約 とし、$N$ を M の部分 A-加群とする。このとき、ある $J \subset I$ が存在して

$$M = N \oplus M_J$$

となる。

さて、$M = N \oplus M_J = (\bigoplus_{i \notin J} M_i) \oplus M_J$ より、

$$N \cong M/M_J \cong \bigoplus_{i \notin J} M_i$$

がわかる。同型 $\bigoplus_{i \notin J} M_i \longrightarrow N$ による各 M_i $(i \notin J)$ の像を N_i とおくと、$N = \bigoplus_{i \notin J} N_i$ と書け、$N_i \cong M_i$ $(i \notin J)$ であることがわかる。よって、(2) が証明された。 (Q.E.D.)

注意：A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

M：完全可約な左 A-加群、$N \subset M$：部分 A-加群 $\Longrightarrow$ $N,\ M/N$：完全可約

が成り立つ。

(proof)

部分 A-加群 N が完全可約になることは上の補題で示されている。

M は完全可約なので、$M = N \oplus N'$ となる M の部分 A-加群 N' が存在する。

このとき、左 A-加群として $M/N \cong N'$ が成り立つ。N' は完全可約な左 A-加群の部分加群として完全可約である (上の補題による) から、それに同型な M/N も完全可約である。 □

上の補題から、次の重要な命題が得られる。

命題 2-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

次の 5 つは同値である。

(i) 任意の左 A-加群は完全可約である。

(ii) 任意の有限生成左 A-加群は射影的である。

(iii) 任意の有限生成左 A-加群は完全可約である。

(iv) 左正則加群 ${}_AA$ は完全可約である。

(v) A は有限個の極小左イデアルの直和である。

上記のいずれかの条件を満たす代数 A は**半単純** (*semi-simple*) であると呼ばれる。

注意：半単純性を定義するのに、上では、左 A-加群を用いているが、これを右 A-加群に置き換えることができる (*i.e.* 半単純性は左と右を区別する必要がない)。これは、

$$A\text{：半単純} \iff A^{\mathrm{op}}\text{：半単純}$$

が成り立つことからわかる。この事実は半単純代数の構造定理を用いて、§3 の演習問題で証明される。

(proof of Proposition 2-2)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

M を勝手な有限生成左 A-加群とし、M は左 A-加群として r 個の元によって生成されているとする。このとき、F を階数 r の自由加群とすると、全射な左 A-加群準同型 $\varphi : F \longrightarrow M$ が存在する。F は完全可約であるから、

$${}^{\exists}P : F \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad F = \mathrm{Ker}\varphi \oplus P$$

となる。したがって、準同型定理により、

$$P \cong F/\mathrm{Ker}\varphi \cong M$$

を得る。

$$\therefore\ F \cong \mathrm{Ker}\varphi \oplus M$$

M が自由 A-加群の部分群に同型なことが示されたから、M は射影的である。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

M を有限生成左 A-加群とする。N を M の部分加群とする。完全系列

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0$$

が得られる。但し、i は包含写像、p は自然な射影を表わす。

M/N は有限生成左 A-加群であるから、仮定により、M/N は射影的である。

補題 1-30、命題 1-31 より、

$$M = N \oplus N' \qquad \text{但し、} N' \text{ は } M/N \text{ と同型な左 } A\text{-加群}$$

となることがわかる。したがって、M は完全可約である。

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)：

$A = A \cdot 1$ であるから、左正則加群 ${}_AA$ は A 上有限生成である。したがって、左正則加群は完全可約である。

(iv) $\Longrightarrow$ (v)：

左正則加群は完全可約であるから、

$$^{\exists}\ \{I_i\}_{i \in I}\ :\ A \text{ の極小左イデアルの族 s.t. } A = \bigoplus_{i \in I} I_i$$

となる。

$$1 = e_{i_1} + \cdots + e_{i_n} \qquad (i_1, \cdots, i_n \in I,\ e_{i_1} \neq 0, \cdots, e_{i_n} \neq 0)$$

と書く。このとき、

$$A = A \cdot 1 = Ae_{i_1} + \cdots + Ae_{i_n}$$

となる。各 Ae_{i_j} は I_{i_j} に含まれる A の 0 でない左イデアルになるから、I_{i_j} の極小性により、$Ae_{i_j} = I_{i_j}$ となる。よって、

$$A = I_{i_1} \oplus \cdots \oplus I_{i_n}$$

を得る。

(v) $\Longrightarrow$ (i)：

M を左 A-加群とする。

$$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n \qquad (I_i\ :\ A \text{ の極小左イデアル},\ i = 1, \cdots, n)$$

とする。このとき、

$$M = AM = \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^{n} I_i m$$

となる。補題 2-1 により、各 $I_i m$ が 0 または既約になることを示せばよい。

$\varphi : I_i \longrightarrow I_i m$ を $\varphi(a) = a \cdot m,\ a \in I_i$ により定める。

φ は左 A-加群準同型である。$I_i m \neq 0$ であるとする。

このとき、$\mathrm{Ker}\varphi \neq I_i$ である。$\mathrm{Ker}\varphi$ は I_i に含まれる A の左イデアルであるから、I_i の極小性により、$\mathrm{Ker}\varphi = 0$ を得る。よって、φ は単射である。φ が全射であることは明らかであるから、左 A-加群として、$I_i \cong I_i m$ であることがわかる。したがって、$I_i m$ は既約である。 (Q.E.D.)

例題 2-3(**Maschke の定理**)

G：有限群

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の体、または、標数が $p > 0$ であって $|G|$ が標数 p で割り切れない体

$\Longrightarrow\ \boldsymbol{k}[G]$：半単純

(proof)

V を任意の左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群とし、W をその部分加群とする。

$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間として、

$$V = W \oplus W'$$

と直和分解する。

$\theta : V \longrightarrow W$ を上の直和分解 (直積分解) に附随する自然な射影とし、$\psi : V \longrightarrow V$ を

$$\psi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \theta(g^{-1} \cdot v) \qquad (v \in V)$$

によって定義する。ψ は左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群準同型である。

$\because$)

$^\forall v \in V$ と $^\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\theta(g^{-1}hv) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} hk\theta(k^{-1}v) \\ &= h \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} k\theta(k^{-1}v) \\ &= h \cdot \psi(v) \quad \square\end{aligned}$$

さらに、

$$\psi|_W = \mathrm{id}_W, \quad W \cap \mathrm{Ker}\psi = \{0\}, \quad V = W + \mathrm{Ker}\psi$$

が成り立つ。

$\because$)

1°. $\psi|_W = \mathrm{id}_W$ であること：
　$v \in W$ を任意にとる。W は V の部分加群であるから、$g \in G$ に対して $g \cdot v \in W$ である。このとき、

$$\theta(g^{-1}v) = g^{-1}v \quad \text{すなわち} \quad g \cdot \theta(g^{-1}v) = v$$

となる。これは $\psi(v) = v$ となることを意味する。
2°. $W \cap \mathrm{Ker}\psi = \{0\}$ であること：
　$v \in W \cap \mathrm{Ker}\psi$ とする。
　$v \in W$ なので、1° により $\psi(v) = v$ であるが、$v \in \mathrm{Ker}\phi$ でもあるので、$\psi(v) = 0$ を得る。故に、$v = 0$ である。
3°. $V = W + \mathrm{Ker}\psi$ であること：
　$v \in V$ を任意にとる。このとき、$v = \psi(v) + (v - \psi(v))$ と書くことができる。
　$\psi(v) \in W,\ v - \psi(v) \in \mathrm{Ker}\psi$ なので、$v \in W + \mathrm{Ker}\psi$ である。故に、$V \subset W + \mathrm{Ker}\psi$ が示された。逆向きの包含関係は明らかに成り立つので、$V = W + \mathrm{Ker}\psi$ を得る。 □

　こうして、左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群として $V = W \oplus \ker\psi$ となることが示された。 (Q.E.D.)

注意 1°： 1 から n までの数字の集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上の全単射全体のなす群 (積は写像の合成で定義) は n 次対称群と呼ばれる、最も基本的な有限群である。これをこのノートでは S_n という記号で表わす。$|S_n| = n!$ が成り立つ。$\boldsymbol{k}$ が例題の条件を満たす代数閉体のとき、$\boldsymbol{k}[S_n]$ の既約表現の同値類は箱の数が n 個の Young 図形と呼ばれる「図形」と 1 対 1 に対応していることが知られている。また、既約表現を具体的に構成する方法がいくつも知られている。これらについては、ここで述べる余裕がないので、例えば、拙著『Young 図形と対称群の既約表現』を参照されたい。

注意 2°：Maschke の定理の逆も正しい (演習 2-9)。

　左 Artin 代数に対しては、根基を使って半単純性を特徴づけることができる。

定理 2-4
A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数 とする。このとき、

$$A \ : \ \text{半単純} \iff \mathrm{rad}A = 0$$

注意 1°：多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X]$ は $\mathrm{rad}A = 0$ であるが、半単純でない。
(proof)
　A には極小左イデアルが存在しない (§.1 参照) ので、命題 2-2 から A は半単純でない。
　$0 \neq a \in \mathrm{rad}A$ とすると、補題 1-14 より、$1 - Xa$ は A において (左) 逆元をもたなければならない。ところが、$A = \boldsymbol{k}[X]$ の可逆元は $\boldsymbol{k} - \{0\}$ の元に限るから $1 - Xa$ は A において逆元を持ち得ない。よって、$\mathrm{rad}A = 0$ である。 □

注意 2°：半単純ならば左 Artin 代数である (演習 2-5)。注意 1° で述べた事実は、多項式代数が左 Artin 代数でないこと (例題 1-6(2)) に由来している。

注意 3°：この定理によって、代数の半単純性についての新しい定義が与えられる。すなわち、$\mathrm{rad}A = 0$ となる代数を半単純と呼ぶことにするのである。しかし、この流儀による半単純性の定義は、左 Artin 代数でないと、我々の採用した定義 (= 通常の定義) と一致しないので、無用の混乱を招きやすい。そこで、$\mathrm{rad}A = 0$ となる代数を **J-半単純**と呼んで、通常の定義と区別することもある (T.Y.Lam・著『Exercises in classical ring theory』p.35、p.57 参照。J-半単純の“J”は Jacobson の頭文字を採用している)。

定理 2-4 を証明するために、次の命題を用いる。

命題 2-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
I：A の左イデアル　とする。このとき、

$$I \ : \ 冪零でない \iff {}^{\exists}e(\neq 0) \in I \ \ \text{s.t.} \ \ e^2 = e$$

となる。

(proof)

十分性は明らかなので、必要性を示す。

$\mathcal{I} = \{J : A$ の左イデアル $\mid J \subset I,\ J$ は冪零でない $\}$ とおく。

$I \in \mathcal{I}$ であるから、$\mathcal{I} \neq \emptyset$ である。A は左 Artin 代数であるから、$\mathcal{I}$ には極小元が存在する。$J \in \mathcal{I}$ を極小元とする。J は冪零でないので、J^2 も冪零でない。よって、$J^2 \in \mathcal{I}$ となる。$J^2 \subset J$ であるから、J の極小性により、$J^2 = J$ である。

次に、$\mathcal{S} = \{L : A$ の左イデアル $\mid JL \neq 0,\ L \subset J\}$ とおく。

$J \in \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。A は左 Artin 代数であるから、$\mathcal{S}$ には極小元が存在する。L を $\mathcal{S}$ の極小元とする。

すると、$JL \neq 0$ より、

$${}^{\exists}x \in L \ \ \text{s.t.} \ \ Jx \neq 0$$

となる。L は A の左イデアルなので、$Jx \subset L \subset J$ であり、また、$J(Jx) = J^2x = Jx \neq 0$ である。したがって、$Jx \in \mathcal{S}$ であることがわかる。L の極小性により、$L = Jx$ を得る。よって、

$${}^{\exists}a \in J \ \ \text{s.t.} \ \ x = ax$$

となる。これより、

$$x = ax = a^2x = \cdots\cdots$$

を得る。よって、J は冪零でない元 a を含み、$(a^2 - a)x = 0$ を満たすことがわかった。

$$N := \{u \in J \mid ux = 0\} \subset J$$

とおく。N は A の左イデアルである。また、$a \notin N$ であるから、$N \subsetneqq J$ である。J は $\mathcal{I}$ における極小元であったから、N は冪零でなければならない。

$$n_1 := a^2 - a \in N$$

とおく。

$n_1 = 0$ ならば、$a^2 = a$ となり、$a \in J \subset I$ は冪等元になっていることがわかる。

$n_1 \neq 0$ のときを考える。この場合には、

$$a_1 = a + n_1 - 2an_1 \in J$$

とおく。a_1, a, n_1 は互いに可換である。よって、a_1 が冪零元ならば、$a = a_1 - n_1 + 2an_1$ も冪零元でなければならない。したがって、a_1 は冪零元でないことがわかる。

$$\begin{aligned}
a_1^2 - a_1 &= (a + n_1 - 2an_1)^2 - (a + n_1 - 2an_1) \\
&= a^2 + n_1^2 + 4a^2n_1^2 + 2an_1 - 4an_1^2 - 4a^2n_1 - (a + n_1 - 2an_1) \\
&= (a^2 - a) + n_1^2 + 4n_1^2(a^2 - a) + 4n_1(a - a^2) - n_1 \\
&= n_1 + n_1^2 + 4n_1^3 - 4n_1^2 - n_1 \\
&= 4n_1^3 - 3n_1^2
\end{aligned}$$

となるので、$n_2 = a_1^2 - a_1$ は冪零元である。さらに、n_2 は n_1^2 を因子に持つ。

$n_2 = 0$ ならば $a_1^2 = a_1$ となる。$a_1 \neq 0$($\because$ a_1 は冪零元でないから) なので $a_1 \in J \subset I$ が求めるものになる。

$n_2 \neq 0$ の場合には、上と同様の操作を繰り返して、

$$^{\exists}a_2 \in J \ :\ \text{冪零元でない} \quad \text{s.t.} \quad n_3 := a_2^2 - a_2 \text{ は冪零元}, \ \underbrace{n_3 \text{ は } n_2^2 \text{ を因子に持つ}}_{\text{i.e. } n_1^4 \text{ を因子に持つ}}$$

が成り立つ。このようにして、$a_1, a_2, \cdots\cdots$ と作っていくと、n_1 は冪零元であるから、ある $i \in \mathbb{N}$ について $a_i^2 - a_i = 0$ が満たされることになる。a_i は冪零元でないので、$a_i \neq 0$ である。よって、a_i が求めるものである。 (Q.E.D.)

注意：この命題から、左 Artin 代数の左イデアル I が冪零でないならば、I は冪零でない元を含むことがわかる。

(proof of Theorem 2-4)

i. 必要性：補題 1-18 より、

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{M\ :\ \text{既約左}\ A\text{-加群}} \mathrm{ann}M$$

となる。ここで、$\mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$ である。

A は半単純であるから、A は有限個の極小な左イデアルの直和である。A の極小左イデアルは左正則加群 ${}_AA$ の既約な部分加群とみなせるから、

$$(\mathrm{rad}A)A = 0$$

が得られる。$1 \in A$ なので $\mathrm{rad}A = 0$ を得る。

ii. 十分性：A は左 Artin 代数なので、左正則加群 ${}_AA$ は有限個の直既約加群の直和として表わされる (補題 1-8)。したがって、左正則加群 ${}_AA$ の各直既約な部分加群が A の極小な左イデアルになることを示せばよい。

一般に $\mathrm{rad}A$ は任意の冪零な左イデアルを含む (補題 1-18) が、$\mathrm{rad}A = 0$ なので、A には 0 以外に冪零な左イデアルは存在しない。したがって、A の零でない左イデアルは冪等元を持つ (命題 2-5)。

A の極小左イデアル L の冪等元 e をとる。$Ae \subset L$ である。$e^2 = e \neq 0$ より $Ae \neq 0$ であり、Ae は A の左イデアルである。L の極小性により、$L = Ae$ でなければならない。これより、A の任意の極小左イデアル L は冪等元 e によって生成されることがわかる。さらに、

$$Le = Ae \cdot e = Ae = L$$

となることから、

$$L' \ : \ A\text{ の左イデアル},\ L \subset L' \implies L' = L \oplus L'(1-e) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることがわかる。

∵)

$L = Ae \supset L'e \supset Le = L$ より、$L'e = L$ がわかる。よって、

$$L' = L' \cdot 1 = L'e + L'(1-e) = L + L'(1-e)$$

となる。また、$L'e \cap L'(1-e) \ni x$ とすると、

$$x = ae = b(1-e),\ a, b \in L'$$

と書くことができる。故に、$b = (a+b)e$ であり、したがって、

$$be = (a+b)e^2 = (a+b)e$$

を得る。

$$\therefore\ x = ae = 0$$

である。 □

$(*)$ から

$$L' : {}_AA\text{ の直既約な部分加群},\ L \subset L' : A\text{ の極小な左イデアル} \implies L' = L \quad \cdots\cdots (**)$$

となることがわかる。さて、${}_AA$ の直既約な部分加群 L' は 0 ではないから、A の左 Artin 性により、L' に含まれる A の極小な左イデアル L は常に存在する。この事実と $(**)$ から

$$L' : {}_AA\text{ の直既約な部分加群} \implies L \ : \ A\text{ の極小な左イデアル}$$

が得られる。これより、A は有限個の極小左イデアルの直和になることがわかり、A の半単純性が証明された。 (Q.E.D.)

系 2-6

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数

$\implies A/\mathrm{rad}A$: 半単純な左 Artin 代数

(proof)

§1-1 より $A/\mathrm{rad}A$ は左 Artin 代数である。

∵)

$A/\mathrm{rad}A$ の左イデアルの任意の列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ を考える。$\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ を自然な射影とすると、$\pi^{-1}(I_1) \supset \pi^{-1}(I_2) \supset \pi^{-1}(I_3) \supset \cdots$ は A の左イデアルの列となる。A は左 Artin 代数であるから、

$$^\exists k \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \pi^{-1}(I_k) = \pi^{-1}(I_{k+1}) = \pi^{-1}(I_{k+2}) = \cdots$$

となる。故に、$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$ を得る。これより、$A/\mathrm{rad}A$ は左 Artin 代数である。 □

また、A の任意の極大左イデアルは $\mathrm{rad}A$ を含むから、演習 1-45 において $J = \mathrm{rad}A$ の場合を考えて

$$\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}A) = (\bigcap_{\substack{I\ :\ A\text{ の極大}\\ \text{左イデアル}}} I)/\mathrm{rad}A = \mathrm{rad}A/\mathrm{rad}A = 0$$

を得る。

故に、定理 2-4 により $A/\mathrm{rad}A$ は半単純である。 (Q.E.D.)

注意 1°：この系において、A が左 Artin 代数という仮定をはずすことはできない。例えば、$A = \boldsymbol{k}[X]$ のとき $\mathrm{rad}A = \{0\}$ なので、$A/\mathrm{rad}A \cong A$ である。しかし、$\boldsymbol{k}[X]$ は半単純でないから、$A/\mathrm{rad}A$ も半単純でない (定理 2-4 の下の注意参照)。

注意 2°：上では $A/\mathrm{rad}A$ が左 Artin 代数であることも証明したが、半単純ならば、自動的に、左 Artin 代数である (演習 2-5)。

注意 3°：$A/\mathrm{rad}A$ が左 Artin 代数となるとき、代数 A は**半局所的** (*semilocal*) であると呼ばれる。この言葉を用いれば、上の結果は「左 Artin 代数は半局所的である」と言い換えることができる。半局所的代数に関しては次のことが基本的である。

・代数 A の極大左イデアルが有限個しかないならば、A は半局所的である。
・「A：半局所的 $\iff$ $A/\mathrm{rad}A$：半単純」が成り立つ (演習 1-45、定理 2-4)。
・A が半局所的ならば、A は "left stable range 1" という性質を持つ。ここで、代数 A が性質 "**left stable range 1**" を持つとは、

$$Aa + Ab = A \implies {}^\exists e \in A \ \text{ s.t. } \ a + eb \text{ は } A \text{ の可逆元}$$

となるときをいう。この概念は代数的 K 理論において重要な役割を果たす (T.Y.Lam・著『Exercises in classical ring theory』p.222 参照)。

この系を用いて、定理 2-4 を含む次のような結果が得られる。

系 2-7

A ：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
M：左 A-加群 とする。このとき、

$$M：\text{完全可約} \iff (\mathrm{rad}A)M = 0$$

が成り立つ。

(proof)
i. 必要性：

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{M\,:\,\text{既約左 }A\text{-加群}} \mathrm{ann}M, \qquad \mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$$

であるから、M が完全可約ならば、$(\mathrm{rad}A)M = 0$ が成り立つ。
ii. 十分性：
M が $(\mathrm{rad}A)M = 0$ を満たしているならば、M を自然な射影 $\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ を通して左 $A/\mathrm{rad}A$-加群とみなすことができる。系 2-6 により $A/\mathrm{rad}A$ は半単純であるから、M はいくつかの (無限個かもしれない) 既約な左 $A/\mathrm{rad}A$-加群の直和である。
N を既約な左 $A/\mathrm{rad}A$-加群とする。これを π を経て左 A-加群とみなしたものは既約となる。
∵)
$0 \neq N'$ を N の部分 A-加群とする。
N は左 $A/\mathrm{rad}A$-加群であるから、$(\mathrm{rad}A)N = 0$ となる。したがって、$(\mathrm{rad}A)N' = 0$ となる。
これより、N' は左 $A/\mathrm{rad}A$-加群とみなすことができ、N の部分 $A/\mathrm{rad}A$-加群となる。
左 $A/\mathrm{rad}A$-加群としては N は既約であったから、$N' = N$ でなければならない。故に、N は左 A-加群としても既約である。 □

よって、M はいくつかの (無限個かもしれない) 既約な左 A-加群の直和となるので、左 A-加群として完全可約である。 (Q.E.D.)

演習 2-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数
M：既約な左 A-加群
$\Longrightarrow\ {}^{\exists}I : A$ の極小な左イデアル s.t. $M \cong I$ as left A-modules
これを示せ。

解；
演習 1-36 により、

M：既約 $\Longleftrightarrow\ {}^{\exists}I : A$ の極大な左イデアル s.t. $M \cong A/I$ as left A-modules

が成り立つ。A は半単純であるから、左正則加群 ${}_AA$ は完全可約である。よって、

$${}^{\exists}J : A \text{ の左イデアル s.t. } A = I \oplus J$$

となる。これより、左 A-加群として、$A/I \cong J$ となることがわかる。証明を完成させるには、左イデアル J が極小なことを示せばよい。
$\mathfrak{a}$ を $0 \subset \mathfrak{a} \subset J$ を満たす A の左イデアルとする。
J は左 A-加群として完全可約であるから、

$${}^{\exists}\mathfrak{b} : J \text{ の部分加群 s.t. } J = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$$

となる。J の部分加群は A の左イデアルであるから、$\mathfrak{b}$ は A の左イデアルであり、左イデアルの直和分解 $A = I \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ を得る。ところが、I は極大な左イデアルであるから、このような分解が成り立つならば、$\mathfrak{a} = \{0\}$ または $\mathfrak{b} = \{0\}$ でなければならない。

$\because$)

もし、$\mathfrak{a} \neq \{0\}$ ならば、$I \oplus \mathfrak{a}$ は I を真に含む A の左イデアルになる。I の極大性により、$I \oplus \mathfrak{a} = A$ でなければならない。この等式と $A = I \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ から、$\mathfrak{b} = \{0\}$ が得られる。 □

$\mathfrak{b} = \{0\}$ となることは $\mathfrak{a} = J$ となるととに同値であるから、$0 \subset \mathfrak{a} \subset J$ を満たす A の左イデアル $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a} = \{0\}$ または $\mathfrak{a} = J$ に限ることが示された。このことは、J が A の左イデアルとして極小なことを意味する。こうして、

$$M\text{：既約} \iff {}^{\exists}J \ :\ A \text{ の極小な左イデアル} \ \text{ s.t. } \ M \cong J \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

演習 2-2

A と B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。次を示せ。

$$A,\ B\ :\ \text{半単純} \iff A \oplus B\ :\ \text{半単純}$$

注意：フロベニウス代数のとき (補題 1-23) とは違い、「$A,\ B\ :\ \text{半単純} \implies A \otimes B\ :\ \text{半単純}$」は成立しない。実際、$A$ が $\boldsymbol{k}$ の拡大体 K であっても B が半単純だからといって $K \otimes B$ が半単純になるとは限らない (演習 1-71、定理 2-4)。

演習 2-2 の解；

i. 必要性：

$A,\ B$ が半単純ならば、命題 2-2 により、

$$A = I_1 + \cdots + I_n \qquad (I_i\text{：}A \text{ の極小左イデアル})$$

$$B = J_1 + \cdots + J_m \qquad (J_j\text{：}B \text{ の極小左イデアル})$$

と書くことができる。このとき、

$$A \oplus B = \sum_{i=1}^{n}(I_i \times 0) + \sum_{j=1}^{m}(0 \times J_j)$$

と書ける。$I_i \times 0$ および $0 \times J_j$ は $A \oplus B$ の極小な左イデアルであるから、$A \oplus B$ は半単純である。

ii. 十分性：

命題 2-2 により、

$$A \oplus B = L_1 + \cdots + L_n \qquad (L_i\text{：}A \oplus B \text{ の極小左イデアル})$$

と書くことができる。$p : A \oplus B \longrightarrow A$ を A-成分への射影とする。p は全射な代数準同型である。

p の全射性から各 $p(L_i)$ は A の左イデアルであり、

$$A = p(L_1) + \cdots + p(L_n)$$

と書くことができる。よって、$p(L_i) \neq 0$ ならば $p(L_i)$ は A の極小な左イデアルになることを示せばよい。

まず、各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、$p(L_i) \times 0 \subset L_i$ であることに注意する。

$\because$)

> $a \in p(L_i)$ とすると、$(a, b) \in L_i$ となる $b \in B$ が存在する。
> L_i は左イデアルであるから、$(a, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) \in L_i$ となる。
> 故に、$p(L_i) \times 0 \subset L_i$ である。 $\square$

$p(L_i) \times 0$ は $A \oplus B$ の左イデアルであるから、L_i の極小性により、

$$p(L_i) \neq 0 \implies p(L_i) \times 0 = L_i$$

となる。こうして、A は極小左イデアルの直和で表わされたから、A は半単純である。

同様にして、B も半単純になりことがわかる。 (Q.E.D.)

演習 2-3

> A : 体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
> $K/\boldsymbol{k}$: 体の拡大 とする。次を示せ。
> $$A^K : \text{ 半単純 } \implies A \ : \text{ 半単純}$$

解；

$\dim_K(A^K) = \dim_{\boldsymbol{k}} A < \infty$ なので、A^K が半単純であると仮定すると $\mathrm{rad}(A^K) = 0$ となる (定理 2-4)。$(\mathrm{rad}A)^K \subset \mathrm{rad}(A^K)$ である (演習 1-70) から、$(\mathrm{rad}A)^K = 0$ を得る。

$$(\mathrm{rad}A)^K = 0 \iff \mathrm{rad}A = 0$$

であるから、A は半単純である。 (Q.E.D.)

注意：一般に、上の逆は正しくない (演習 1-71 参照)。

演習 2-4

> A : 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
> $K/\boldsymbol{k}$: 体の拡大 とする。
> 次の２つは同値であることを示せ。
> (i) A^K : K 上の代数として半単純
> (ii) A^K : $\boldsymbol{k}$ 上の代数として半単純（ *i.e.* $\boldsymbol{k}$ 上の２つの代数 $K,\ A$ のテンソル積として半単純)

解；

(i) $\implies$ (ii) の証明：

A^K が K 上の代数として半単純であるとすると、命題 2-2 により、

$$A^K = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$$

と書くことができる。但し、各 I_j $(j = 1, \cdots, r)$ は A^K を K 上の代数とみたときの極小左イデアルである。

K 上の代数としての A^K の左イデアルは、$\boldsymbol{k}$ 上の代数としての A^K の左イデアルに他ならない (演習 1-1) から、A^K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として極小左イデアルの有限個の直和に表わされることになる。

再び、命題 2-2 により、A^K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として半単純である。

「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」の証明も同様に行うことができる。 (Q.E.D.)

演習 2-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

A：半単純 $\Longrightarrow$ A：左 Artin 代数

となることを示せ。

解；

A の左イデアルの降鎖列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ が実質上、有限で止まることを示せばよい。まず、${}_AA$ の完全可約性から

$$^{\exists}I'_1 : A \text{ の左イデアル} \ \ \text{s.t.} \ \ A = I'_1 \oplus I_1$$

となる。${}_AA$ は完全可約ゆえ、その部分加群 I_1 も完全可約である (補題 2-1)。したがって、

$$^{\exists}I'_2 : I_1 \text{ の部分加群} \ (i.e. \ I_1 \text{ に含まれる } A \text{ の左イデアル}) \ \ \text{s.t.} \ \ I_1 = I'_2 \oplus I_2$$

となる。以下同様にして、A の左イデアルの列 $\{I'_i\}_{i=1}^{\infty}$ であって、

$$A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} I'_1 \ \ \text{かつ} \ \ I_n = I'_{n+1} \oplus I_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

但し、$I_0 = A$、となるものが存在する。ところが、$1 \in A$ を上の直和分解に応じて

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \qquad\qquad (x'_i \in I'_i, \ i = 1, 2, \cdots)$$

とかくと、$x'_i \neq 0$ となる $i \in \mathbb{N}$ は有限個であるあるから、このような i のうち最大のものを n とおくと、$1 \in \bigoplus_{i=1}^{n} I'_i$ ゆえ

$$A \subset A \cdot 1 \subset \bigoplus_{i=1}^{n} I'_i$$

となることがわかる。故に、$A = \bigoplus_{i=1}^{n} I'_i$ であり、したがってまた、$I'_{n+1} = I'_{n+2} = \cdots = 0$ を得る。これは $I_n = I_{n+1} = \cdots\cdots$ となることを意味する。こうして、A が左 Artin 代数であることがわかった。 (Q.E.D.)

演習 2-6

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数　とする。このとき、

任意の左 A-加群は単射的かつ射影的

となることを示せ。

解；

　V を左 A-加群とする。

・V が単射的であること：

　$f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。

　$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ が全射になることを示せばよい。

　任意に $p \in \mathrm{Hom}_A(M, V)$ をとる。A は半単純であるから、

$$^{\exists}N' \subset N：\text{部分 } A\text{-加群 s.t. } N = f(M) \oplus N'$$

となる。このとき、合成写像

$$q : N \xrightarrow{f(M)\ \text{成分への射影}} f(M) \xrightarrow{f^{-1}} M \xrightarrow{\ p\ } V$$

を考えることができる。$q \in \mathrm{Hom}_A(N, V)$ であって、$q \circ f = p$ を満たしている。よって、f^* は全射である。故に、V は単射的である。

・V が射影的であること：

　A は半単純なので、

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \qquad (V_i：\text{既約},\ \ i \in I)$$

と書くことができる。半単純代数の既約な左 A-加群は極小左イデアルに同型である (演習 2-1) から、

$$^{\forall}i \in I,\ ^{\exists}J_i：A \text{ の極小左イデアル s.t. } V_i \cong J_i \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。A は半単純なので、各 $i \in I$ に対して $A = J_i \oplus J_i'$ となる左イデアル J_i' が存在する。よって、各 V_i は左正則加群の直和因子に同型となり、射影的である (命題 1-31)。射影加群の直和は射影加群である (演習 1-56) から、$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ は射影的である。　(Q.E.D.)

注意 1°：この演習問題の結果から、特に、半単純代数 A の左正則加群 ${}_AA$ は単射的であることがわかる。このことは A が有限次元の場合には「有限次元半単純代数はフロベニウス代数である (定理 2-23)」「フロベニウス代数の左正則加群は単射的 (*i.e.* 準フロベニウス代数) である (定理 3-46)」という 2 つの結果をつなぎ合わせても得られる。

注意 2°：射影加群は平坦であった (系 1-38) から、代数 A が半単純のとき、任意の左 A-加群は平坦である。また、A が半単純のとき、A^{op} も半単純である (命題 2-2 の下の注意参照) ことを使うと、任意の右 A-加群も平坦であることがわかる。

演習 2-7

(1) 半単純代数の商代数は半単純である。これを示せ。

(2) 半単純代数の部分代数は半単純になるとは限らない。このような代数の例を述べよ。

解；

(1) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数とし、$J \subsetneqq A$ を両側イデアルとする。$\bar{A} := A/J$ が半単純になることを示す。

A は半単純代数なので、左正則加群 ${}_AA$ は完全可約である。したがって、その商加群はまた完全可約である (補題 2-1 の証明の下の注意参照)。すなわち、

$${}_AA/J = \bigoplus_{i \in I} V_i \qquad\qquad (\text{各 } V_i \text{ は } \bar{A} \text{ の既約な部分 } A\text{-加群})$$

となる。

各 V_i が左正則加群 ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ の既約な部分加群になることを示せば、$\bar{A}$ の半単純性が示されたことになる。

$a \in A$ が属する $\bar{A} = A/J$ における同値類を $\bar{a}$ によって書き表わすことにする。

$x \in J$ と $v_i = \bar{a_i} \in V_i$ に対して、$x \cdot v_i = \overline{xa_i} \underset{\substack{\uparrow \\ (xa_i \in J)}}{=} 0$ となる。

よって、各 V_i は ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ の部分 $\bar{A}$-加群になっている。

さらに、$0 \neq W \subset V_i$ を部分 $\bar{A}$-加群とすると、W は V_i の左 A-加群としての部分加群であるから、既約性により、$W = V_i$ となる。故に、各 V_i は ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ の既約な部分 $\bar{A}$-加群である。これで、左正則加群 ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ が既約な部分 $\bar{A}$-加群の直和として表わされることがわかったので、$\bar{A}$ は半単純であることが示された。

(2) $A = \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ とし、その部分代数

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k} \right\}$$

を考える。$\mathrm{rad}(\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})) = 0$ なので、A は半単純である。しかしながら、

$$\mathrm{rad}B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \boldsymbol{k} \right\} \neq 0$$

である (演習 1-43) から、B は半単純ではない。 (Q.E.D.)

演習 2-8

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数

B：A の部分代数　とする。

A：可換 $\Longrightarrow$ 　B：半単純

となることを示せ。

解；

A が有限次元なので、B も有限次元である。したがって、B は左 Artin 代数である。B が半単純であることを示すには $\mathrm{rad}B = 0$ を示せばよい。

$\mathrm{rad}B$ によって生成される A の両側イデアル $A(\mathrm{rad}B)A$ を考える。

A の可換性により、任意の自然数 n に対して

$$(A(\mathrm{rad}B)A)^n \subset A(\mathrm{rad}B)^nA \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。

$\because$)

> 　$A(\mathrm{rad}B)A$ は aba' $(a, a' \in A,\ b \in \mathrm{rad}B)$ の形をした元の有限和からなるから、$(A(\mathrm{rad}B)A)^n$ は $(a_1b_1a'_1)(a_2b_2a'_2)\cdots(a_nb_na'_n)$ の形をした元の有限和からなる。今、
>
> $$(a_1b_1a'_1)(a_2b_2a'_2)\cdots(a_nb_na'_n) = (a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)(a'_1a'_2\cdots a'_n) \in A(\mathrm{rad}B)^nA$$
>
> であるから、$(A(\mathrm{rad}B)A)^n \subset A(\mathrm{rad}B)^nA$ となっていることがわかる。 □

　B は左 Artin 代数なので、rad$B$ は冪零である (定理 1-17)。よって、$(\mathrm{rad}B)^n = 0$ となる n が存在する。このとき、$(*)$ によって、$(A(\mathrm{rad}B)A)^n = 0$ となる。故に、$A(\mathrm{rad}B)A$ は A の冪零な両側イデアルである。rad$A$ は最大冪零イデアルである (定理 1-17) から、

$$A(\mathrm{rad}B)A \subset \mathrm{rad}A$$

を得る。ところが、A は半単純なので、$\mathrm{rad}A = 0$ である。故に、$A(\mathrm{rad}B)A = 0$、すなわち、$\mathrm{rad}B = 0$ を得る。こうして、B が半単純になることが示された。 (Q.E.D.)

演習 2-9

$\boldsymbol{k}$ を体、G を有限群とし、群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ を考える。
$\Lambda := \sum_{g \in G} g \ \in A$ とおく。
(1) $I := \boldsymbol{k}\Lambda$ は A の両側イデアルであることを示せ。
(2) $\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ であって、G の位数 $|G|$ が p で割り切れるならば、$\Lambda^2 = 0$ となることを示せ。
(3) $\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ であって、G の位数 $|G|$ が p で割り切れるならば、$\boldsymbol{k}[G]$ は半単純でないことを示せ。

解；
(1) $x = \sum_{g \in G} a_g g \in \boldsymbol{k}[G]$ $(a_g \in \boldsymbol{k})$ を任意にとる。
　任意の $g \in G$ について、$g\Lambda = \Lambda = \Lambda g$ であるから、

$$x\Lambda = (\sum_{g \in G} a_g)\Lambda = \Lambda x$$

となることがわかる。故に、$I := \boldsymbol{k}\Lambda$ は A の両側イデアルである。
(2) $\Lambda^2 = (\sum_{g \in G} 1)\Lambda = |G|\Lambda$ となるので、もし、$\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ で、G を位数が p で割り切れるならば、$\Lambda^2 = 0$ となる。
(3) $\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ であって、G の位数 $|G|$ が p で割り切れるとき、(1) と (2) により、Λ によって生成される両側イデアル I は冪零である。rad$(\boldsymbol{k}[G])$ は冪零イデアルの中で最大であった (定理 1-17) から、

$$0 \neq I \subset \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G])$$

を得る。このことは、$\boldsymbol{k}[G]$ が半単純でないことを意味する (定理 2-4)。 (Q.E.D.)

演習 2-10

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
A と B が森田同値のとき、

$$A：\text{半単純} \iff B：\text{半単純}$$

が成り立つことを示せ。

解；

A は半単純であると仮定する。

W を任意の左 B-加群とする。W が完全可約なことを示せばよい。

$F : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$ と $G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ を $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与えるような $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手の組とする。このとき、$G(W)$ は左 A-加群となるから、

$$G(W) = \bigoplus_{i\in I} V_i \qquad (V_i：\text{既約な左 } A\text{-加群})$$

と表すことができる。F は $\boldsymbol{k}$-線形なので直和を保つから

$$W \cong F(G(W)) \cong \bigoplus_{i\in I} F(V_i) \ \ \text{as left } B\text{-modules}$$

となる。ここで、各 $F(V_i)$ は既約であるから (演習 1-85(1))、W は完全可約である。

これで証明が終わった。 (Q.E.D.)

演習 2-11

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：完全可約な左 A-加群
$D := \mathrm{End}_A M$、$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$：$A$ の M への左作用に対応する表現　とする。このとき、$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D M$ の中で稠密である。これを次の順番で示せ。

① 任意の $f \in \mathrm{End}_D M$ と任意の $x \in M$ に対して、$f(x) = a \cdot x$ となる $a \in A$ が存在する。

② $n \in \mathbb{N}$ とし、$D_n := \mathrm{End}_A(M^{\oplus n})$ とおく。$f \in \mathrm{End}_D M$ に対して、$f^{(n)} \in \mathrm{End}_{D_n}(M^{\oplus n})$ を

$$f^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = (f(x_1), \cdots, f(x_n)), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in M^{\oplus n}$$

によって定義することができる。この状況に①を適用することにより、任意の $f \in \mathrm{End}_D M$ と任意の $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M$ に対して、$f(x_i) = a \cdot x_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$ となる $a \in A$ が存在する。

解；

① M は完全可約なので、$M = Ax \oplus M'$ となる M の部分左 A-加群 M' が存在する。$p : M \longrightarrow M$ をこの直和分解に関する Ax-成分への射影とする。このとき、$f \in \mathrm{End}_D M$ に対して、

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ p\ \text{の定義}}}{=} f(p(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \in \mathrm{End}_D M}}{=} p(f(x)) \in \mathrm{Im}\,p = Ax$$

となる。故に、

$$^{\exists}a \in A \ \text{ s.t. } \ f(x) = a \cdot x$$

となることが示された。

② $n \in \mathbb{N}$ とし、$D_n := \mathrm{End}_A(M^{\oplus n})$ とおく。ここでは、直和 $M^{\oplus n}$ を

$$M^{\oplus n} = \{(m_1, \cdots, m_n) \mid m_1, \cdots, m_n \in M\}$$

として実現しておく。このとき、$f \in \mathrm{End}_D M$ に対して、$f^{(n)} \in \mathrm{End}_{D_n}(M^{\oplus n})$ を

$$f^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = (f(x_1), \cdots, f(x_n)), \qquad (x_1, \cdots, x_n) \in M^{\oplus n}$$

によって定義することができる。

$\because$)

$f^{(n)} \in \mathrm{End}_{D_n}(M^{\oplus n})$ となることを確かめておく必要がある。$\varphi \in D_n$ に対して、$\varphi_{ij} : M \longrightarrow M$ を合成写像

$$M \xrightarrow{k_i} M^{\oplus n} \xrightarrow{\varphi} M^{\oplus n} \xrightarrow{p_j} M$$

によって定義する。ここで

$$\begin{cases} k_i(x) = (0, \cdots, 0, \overset{\substack{i\text{ 番目} \\ \downarrow}}{x}, 0, \cdots, 0), & x \in M \\ p_j(x_1, \cdots, x_n) = x_j, & (x_1, \cdots, x_n) \in M^{\oplus n} \end{cases}$$

である。$\varphi_{ij} \in \mathrm{End}_A M \ \ (i, j = 1, \cdots, n)$ であり、

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1}(x_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{in}(x_i))$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
(f^{(n)} \circ \varphi)(x_1, \cdots, x_n) &= f^{(n)}(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1}(x_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{in}(x_i)) \\
&= (f(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1}(x_i)), \cdots, f(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{in}(x_i))) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_{i1}(x_i)), \cdots, \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_{in}(x_i))) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1}(f(x_i)), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \varphi_{in}(f(x_i))) \qquad f \in \mathrm{End}_D M \\
&= \varphi(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \\
&= (\varphi \circ f^{(n)})(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

を得る。 □

さて、$f \in \mathrm{End}_D M$ と $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M$ を任意にとる。このとき、$M^{\oplus n}$, $f^{(n)}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ について①を適用して

$$^{\exists}a \in A \ \text{ s.t. } \ f^{(n)}(x) = a \cdot x$$

を得る。ここで、

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = (f(x_1), \cdots, f(x_n)) \\ a \cdot x = (a \cdot x_1, \cdots, a \cdot x_n) \end{cases}$$

であるから、任意の $i = 1, \cdots, n$ について、$f(x_i) = a \cdot x_i \quad (i = 1, \cdots, n)$ が成立する。よって、$\rho(A)$ は $\mathrm{End}_D M$ において稠密である。 (Q.E.D.)

注意：この演習問題の結果から次を得る。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：完全可約な左 A-加群　とする。

$D := \mathrm{End}_A M,\ \ A_M := \{A$ の M への左作用全体 $\}$ とおく。

M：D 上有限生成

$\Longrightarrow \quad A_M = \mathrm{End}_D M$

(proof)

a の M への左作用 $\rho(a) : M \longrightarrow M,\ x \longrightarrow a \cdot x$ は左 D-加群準同型なので $A_M \subset \mathrm{End}_D M$ である。逆向きの包含関係も成立することを示す。

M の D 上の生成元を $\{x_1, \cdots, x_n\}$ とする。上の演習問題から A_M は $\mathrm{End}_D M$ において稠密である。したがって、

$${}^{\exists} f \in \mathrm{End}_D M \ \ \text{s.t.}\ \ a \cdot x_i = f(x_i) \ \ (i = 1, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。a の M への左作用 $\rho(a) : M \longrightarrow M$ および $f : M \longrightarrow M$ はどちらも D-加群準同型であるから、$(*)$ により $\rho(a) = f$ を得る。故に、$\mathrm{End}_D M = A_M$ が示された。 □

演習 2-12

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：完全可約な左 A-加群　とする。

$D := \mathrm{End}_A M,\ \ A_M := \{A$ の M への左作用全体 $\}$ とおく。

M：D 上有限生成

$\Longrightarrow \quad A_M$：半単純代数

が成り立つことを示せ。

解；

$\{x_i\}_{i=1}^n$ を M の D 上の生成元とする。

写像 $f : A_M \longrightarrow M^{\oplus n}$ を

$$f(a_M) = (a \cdot x_1, \cdots, a \cdot x_n), \qquad a \in A$$

によって定義する。但し、$a_M : M \longrightarrow M$ は $a \in A$ の M への左作用 $m \longmapsto a \cdot m$ を表わす。

f は矛盾なく定義されていて、左 A_M-加群準同型であることがわかる。

$\because$)

$a \cdot x_i =_M (x_i),\ i = 1, \cdots, n$ なので、f は矛盾なく定義されている。

次に、A_M を左正則 A_M-加群とみなし、M を左 A_M-加群とみなしたとき、f は左 A_M-加群準同型となることを示す。

任意の $a, b \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} f(a_M b_M) &= f((ab)_M) \\ &= (ab \cdot x_1, \cdots, ab \cdot x_n) \\ &= (a \cdot (b \cdot x_1), \cdots, a \cdot (b \cdot x_n)) \\ &= (a_M \cdot (b \cdot x_1), \cdots, a_M \cdot (b \cdot x_n)) \\ &= a_M \cdot (b \cdot x_1, \cdots, b \cdot x_n) \\ &= a_M \cdot f(b_M) \end{aligned}$$

となる。故に、f は左 A_M-加群準同型である。 $\square$

f は単射である。

$\because$)

$f(a_M) = 0$ であるような $a \in A$ を任意にとる。

$a \cdot x_i = 0,\ i = 1, \cdots, n$ となる。

$x \in M$ を任意にとると、$\{x_i\}_{i=1}^n$ は D 上の生成元であるから、

$$x = d_1(x_1) + \cdots + d_n(x_n), \qquad d_1, \cdots, d_n \in D$$

のように書くことができる。このとき、

$$a \cdot x = a \cdot (d_1(x_1) + \cdots + d_n(x_n)) = d_1(a \cdot x_1) + \cdots + d_n(a \cdot x_n) = d_1(0) + \cdots + d_n(0) = 0$$

が成り立つ。よって、$a_M = 0 : M \longrightarrow M$ である。したがって、$\mathrm{Ker} f = \{0\}$ がわかり、f は単射であることが示された。 $\square$

故に、左正則 A_M-加群 A_M は $M^{\oplus n}$ の部分左 A_M-加群とみなされる。

ところで、M が左 A-加群として完全可約ならば、左 A_M-加群としても完全可約である。

したがって、$M^{\oplus n}$ は左 A_M-加群として完全可約であり ($\because$ 完全可約加群の直和は完全可約であるから)、その部分加群として左正則 A_M-加群は完全可約である (補題 2-1(2) 参照)。

こうして、A_M が代数として半単純であることが示された (命題 2-2 参照)。 (Q.E.D.)

演習 2-13

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：完全可約な左 A-加群 とする。このとき、

$$M：\text{Artin 加群} \iff M：\text{Noether 加群}$$

が成り立つことを示せ。

解；

M を完全可約な左 A-加群とすると、

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \qquad (M_i：\text{既約な左 } A\text{-加群},\ i \in I)$$

となる。M が Artin 加群または Noether 加群ならば、I は有限集合でなければならない。

$\because$)

もし、I が無限集合であったとすると、

$$^{\exists}\{i_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I \quad \text{s.t.} \quad i_n \neq i_m \quad \text{for } n \neq m$$

となる。このとき、M の部分加群からなる真に減少する降鎖列

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_{i_n} \underset{\neq}{\supsetneq} \bigoplus_{n=2}^{\infty} M_{i_n} \underset{\neq}{\supsetneq} \bigoplus_{n=3}^{\infty} M_{i_n} \underset{\neq}{\supsetneq} \cdots\cdots$$

および M の部分加群からなる真に増大する昇鎖列

$$M_{i_1} \underset{\neq}{\subsetneq} M_{i_1} \oplus M_{i_2} \underset{\neq}{\subsetneq} M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus M_{i_3} \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots\cdots$$

が得られる。したがって、もし、M は Artin 加群でも Noether 加群でもない。対偶をとれば、示したかった主張が得られる。 $\square$

したがって、M は有限個の既約な左 A-加群の直和である。

逆に、左 A-加群 M が有限個の既約な左 A-加群の直和であるとする。

既約な左 A-加群は Artin 加群かつ Noether 加群である ($\because$ 既約な左 A-加群には、部分加群が $\{0\}$ と M しか存在しないから) ことと、有限個の Artin 加群 (resp. Noether 加群) の直和はまた Artin 加群 (resp.Noether 加群) である (補題 1-9 の注意参照) ことから、M は Artin 加群かつ Noether 加群であることがわかる。

よって、次が得られた。

$$\begin{aligned} M : \text{Artin 加群} &\iff M \text{ は有限個の既約な左 } A\text{-加群の直和} \\ &\iff M : \text{Noether 加群} \end{aligned}$$

これで証明が終わった。 (Q.E.D.)

演習 2-14 (Hopkins の定理)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

$$A : \text{左 Artin 的} \implies A : \text{左 Noether 的}$$

が成り立つことを示せ。

解；

左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}A \xrightarrow{\text{包含写像}} A \xrightarrow{\text{自然な射影}} A/\mathrm{rad}A \longrightarrow 0$$

を考える。A が左 Noether 的であることを示すには、$R := \mathrm{rad}A$ と $A/\mathrm{rad}A$ がともに左 A-加群として、Noether 加群になることを示せばよい (補題 1-9)。

・R が Noether 加群であること：

A は左 Artin 代数なので、

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad R \supset R^2 \supset \cdots \supset R^n = 0$$

となる。各 R^k $(k=1,\cdots,n)$ は Artin 加群 ${}_AA$ の部分加群として Artin 加群である (補題 1-9)。Artin 加群の商加群は Artin 加群である (補題 1-9) から、R^k/R^{k+1} $(k=1,\cdots,n-1)$ は左 A-加群として Artin 加群である。

$\bar{A}=A/R$ とおく。各 R^k/R^{k+1} は左 $\bar{A}$-加群とみなすことができる。

∵)

$\bar{A}=A/R$ の R^k/R^{k+1} への左作用を

$$[a]\cdot[x]:=[ax],\quad a\in A,\ x\in R^k$$

によって矛盾なく定義することができる。実際、

$$\begin{aligned}[a]=[a'] \text{ かつ } [x]=[x'] &\implies a-a'\in R \text{ かつ } x-x'\in R^{k+1}\\ &\implies ax-a'x'=(a-a')x+a'(x-x')\in R^{k+1}\\ &\implies [ax]=[a'x']\end{aligned}$$

となるので、作用は矛盾なく定義されている。これが左作用の条件を満たすことは、その定義の仕方からすぐにわかる。 □

ところが、代数 $\bar{A}$ は半単純である (系 2-6) から、各 R^k/R^{k+1} は左 $\bar{A}$-加群として完全可約である (補題 2-1)。したがってまた、各 R^k/R^{k+1} は左 A-加群として完全可約である。

よって、演習 2-13 により、各 R^k/R^{k+1} は左 A-加群として Noether 加群である。

左 A-加群の完全系列

$$0\longrightarrow R^{k+1}\xrightarrow{\text{包含写像}}R^k\xrightarrow{\text{自然な射影}}R^k/R^{k+1}\longrightarrow 0$$

に帰納法を用いて、$R^n,R^{n-1},\cdots,R^2,R$ が Noether 加群であることがわかる。

∵)

$R^n=0$ は明らかに Noether 加群である。

$1\leq k<n$ とし、R^{k+1} は左 A-加群として Noether 加群であると仮定する。すでに示したように、R^k/R^{k+1} は左 A-加群として Noether 加群であるから、補題 1-9 により、R^k も Noether 加群である。 □

・A/R が Noether 加群であること：

$\bar{A}=A/R$ は半単純代数であるから、その正則左 $\bar{A}$-加群は完全可約である (補題 2-1)。したがって、A/R は左 A-加群としても完全可約である。A/R は Artin 加群 ${}_AA$ の商加群として Artin 加群であるから、演習 2-13 によって、A/R は左 A-加群として Noether 加群でもある。

以上により、左 Artin 代数は左 Noether 代数にもなっていることが示された。 (Q.E.D.)

注意：上の証明から、A が左 Artin 代数ならば左 Noether 代数となるばかりでなく、rad$A$ は冪零であって、$A/\mathrm{rad}A$ は左 Artin 代数となることがわかる。実は、これらによって左 Artin

代数の特徴づけが与えられる。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に対して

$$A：左 \text{ Artin } 代数 \iff \begin{cases} ①A：左 \text{ Noether } 代数 \\ ②\mathrm{rad}A：冪零 \\ ③A/\mathrm{rad}A：左 \text{ Artin } 代数 \ (\ i.e.\ A：半局所的) \end{cases}$$

が成り立つ。

(proof)

「$\Longrightarrow$」は、上の演習問題の証明の中で示されている。「$\Longleftarrow$」を証明する。証明は上の演習問題の証明を書き直すことによってなされる。

左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}A \xrightarrow{包含写像} A \xrightarrow{自然な射影} A/\mathrm{rad}A \longrightarrow 0$$

を考える。$A/\mathrm{rad}A$ は仮定により左 Artin 的なので、A が左 Artin 的であることを示すには、$R := \mathrm{rad}A$ が左 A-加群として、Artin 加群になることを示せばよい (補題 1-9)。

仮定②により、

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ R \supset R^2 \supset \cdots \supset R^n = 0$$

となる。各 R^k $(k = 1, \cdots, n)$ は Noether 加群 ${}_AA$ の部分加群として Noether 加群である (補題 1-9)。Noether 加群の商加群は Noether 加群である (補題 1-9) から、R^k/R^{k+1} $(k = 1, \cdots, n-1)$ は左 A-加群として Noether 加群である。

$\bar{A} = A/R$ とおく。各 R^k/R^{k+1} は左 $\bar{A}$-加群とみなすことができる。

ところが、代数 $\bar{A}$ は半単純である (系 2-6) から、各 R^k/R^{k+1} は左 $\bar{A}$-加群として完全可約である (補題 2-1)。したがってまた、各 R^k/R^{k+1} は左 A-加群として完全可約である。

よって、演習 2-13 により、各 R^k/R^{k+1} は左 A-加群として Artin 加群である。

左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow R^{k+1} \xrightarrow{包含写像} R^k \xrightarrow{自然な射影} R^k/R^{k+1} \longrightarrow 0$$

に帰納法を用いて、$R^n, R^{n-1}, \cdots, R^2, R$ が Artin 加群であることがわかる。

以上により、「$\Longleftarrow$」が示された。 □

演習 2-15

体 $\boldsymbol{k}$ 上の多項式代数 $A = \boldsymbol{k}[X]$ を考える。
$0 \neq f(X) \in A$ と $n > 1$ をとり $\bar{A} = A/(f(X)^n)$ とおく。
$\bar{A}$ は半単純でないことを示せ。

解；

$p : A \longrightarrow \bar{A}$ を自然な射影とし、A のイデアル $I = (f(x))$ の p による像 $p(I)$ を考える。これは商代数 $\bar{A}$ の 0 でないイデアルである。

さらに、$p(I)^n = 0$ であるから $p(I)$ は冪零である。よって、

$$0 \neq p(I) \subset \mathrm{rad}(\bar{A})$$

を得る (補題 1-18)。$\bar{A}$ は有限次元代数であるから、定理 2-4 により、$\bar{A}$ は半単純でない。

(Q.E.D.)

§2. 半単純代数の構造定理

半単純代数は、その左正則加群を既約加群の直和に分解して、それらの中で同型なもの同士を集めることにより、極小な両側イデアルの有限個の直和に分解することができる (Wedderburn の定理の半単純代数に関する構造定理の主要部分)。このことから、半単純代数の既約加群の同型類は有限個しかないことも示される。また、基礎体 $\boldsymbol{k}$ が代数閉体のときには、半単純代数 A の既約な左 A-加群 M への左作用全体は、M 上の $\boldsymbol{k}$-線形変換全体のなす代数と一致する (再中心化定理)。この事実は、表現論において基本的な「Schur の補題」を用いて証明される。ここでは、半単純代数の構造に関する基本定理—Wedderburn の定理と再中心化定理—を証明する。

定義 2-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：既約な左 A-加群
V：完全可約な左 A-加群　とする。

$M(V) :=$ (M に同型な V の部分加群全体にわたる和)

を V の M-**斉次成分** (*M-homogeneous part*) と呼ぶ。V が M に同型な部分加群を持たないときは、$M(V) = 0$ と解釈する。

定理 2-8(Wedderburn)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数　とする。
既約な左 A-加群 M に対して、$M(A)$ を左正則加群 ${}_AA$ の M-斉次成分とする。
このとき、以下のことが成り立つ。
(1) $M,\ N$ が既約な左 A-加群であって、$M \not\cong N$ ならば、$M(A) \cdot N = 0$ となる。
(2) 任意の既約な左 A-加群 M に対して、$M(A)$ は A の極小両側イデアルである。
(3) 既約な左 A-加群の同型類の個数は有限個である。$M_1, \cdots, M_n$ をその完全代表系とすると、

$$A = M_1(A) \oplus \cdots \oplus M_n(A)$$

が成り立つ。
(4) 任意の既約な左 A-加群 M に対して、$M(A)$ は A の積に関して代数になり、写像 $M(A) \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M,\ a \longmapsto a_M$ は単射な代数準同型である。但し、$a_M : M \longrightarrow M$ は a の M への左作用である。

注意：上の定理から、半単純代数 A は (3) より

$$A = M_1(A) \oplus \cdots \oplus M_n(A)$$

のように極小両側イデアルの直和に分解されるが、(4) により、各 $M_i(A)$ は (単位元を持つ) 代数になるので、これは代数としての直和分解でもある。この直和分解を半単純代数 A の **Wedderburn 分解** (*Wedderburn decomposition*) といい、各 $M_i(A)$ を A の **Wedderburn**

成分という。ここで、$M_i(A)$ と A は単位元を共有しないので、$n=1$ の場合を除き $M_i(A)$ は A の部分代数ではないことに注意する (第 1 章第 1 節参照)。

Wedderburn の定理を示すために、補題を準備する。

補題 2-9

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：既約な左 A-加群
V：左 A-加群　とする。
このとき、V を左 $\mathrm{End}_A V$-加群とみなすと、$M(V)$ は V の部分左 $\mathrm{End}_A V$-加群になる。
特に、$V={}_AA$ のときを考えることにより、$M(A)$ は A の両側イデアルであることがわかる。

(proof)
任意の $f\in\mathrm{End}_A V$ に対して、$f(M(V))\subset M(V)$ となることを示せばよい。そのためには、$W\subset V$ を M と同型な V の部分左 A-加群とするとき、$f(W)\subset M(V)$ となることを示せばよい。

左 A-加群準同型 $f|_W : W\longrightarrow V$ を考える。

$\mathrm{Ker}(f|_W)$ は既約な左 A-加群 W の部分加群であるから、$\mathrm{Ker}(f|_W)=0$ または $\mathrm{Ker}(f|_W)=W$ となる。

後者の場合には、$f(W)=0$ となり、$f(W)\subset M(V)$ を得る。

前者の場合、$f|_W : W\longrightarrow V$ は単射になる。したがって、$f(W)\cong W$、すなわち、$f(W)$ は M $(\cong W)$ と同型な V の部分加群である。故に、$f(W)\subset M(V)$ を得る。

次に、$M(A)$ が A の両側イデアルであることを示す。

定義により、$M(A)$ は左正則加群 ${}_AA$ の部分加群であるから、$M(A)$ は A の左イデアルである。

$M(A)$ が A の右イデアルでもあることを示す。任意の $x\in A$ に対して、$M(A)\cdot x\subset M(A)$ となることを示せばよい。

写像 $f_x : A\longrightarrow A$ を $f_x(a)=ax,\ a\in A$ により定義する。このとき、$f_x\in\mathrm{End}_A({}_AA)$ となる。

前半部分から、$M(A)\cdot x=f_x(M(A))\subset M(A)$ を得る。

よって、$M(A)$ は A の右イデアルである。　(Q.E.D.)

補題 2-10

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：既約な左 A-加群
$V=\bigoplus_{i\in I} W_i,\ \ W_i\ (i\in I)$：既約な左 A-加群　とする。
このとき、次が成り立つ：
(1) $M(V)=\sum_{W_i\cong M} W_i$

(2) $\dim M < \infty,\ \dim V < \infty$ ならば、M に同型な W_i の個数 $n_M(V)$ は V の既約部分加群への分解の仕方によらない。

(proof)

(1) $M(V)$ の定義から $\sum_{W_i \cong M} W_i \subset M(V)$ であることはすぐにわかる。

逆向きの包含関係を示す。

$W \subset V$ を $W \cong M$ であるような部分 A-加群とする。$W \subset \sum_{W_i \cong M} W_i$ となることを示せばよい。

$\pi_j : V \longrightarrow W_j\ (j \in I)$ を与えられた直和分解に附随する射影とする。

$\pi_j(W) \neq 0$ ならば $\pi_j(W) = W_j$ かつ $W \cong W_j$ となる。

$\because$)

$\pi_j(W)$ は W_j の部分 A-加群であるから、W_j の既約性により、$\pi_j(W) \neq 0$ ならば $\pi_j(W) = W_j$ となる。

$\pi_j|_W : W \longrightarrow W_j$ は全射な左 A-加群準同型である。

W の既約性により、$\mathrm{Ker}(\pi_j|_W) = 0$ または $\mathrm{Ker}(\pi_j|_W) = W$ であるが、もし、後者であったとすると、$W_j = \pi_j(W) = \mathrm{Im}(\pi_j|_W) = 0$ となり、矛盾が生じる。したがって、$\mathrm{Ker}(\pi_j|_W) = 0$ であり、$\pi_j|_W : W \longrightarrow W_j$ は単射でもあることがわかる。

故に、$\pi_j|_W$ により、$W \cong W_j$ となる。 $\square$

よって、各 $j \in I$ に対して、$\pi_j(W) \subset \sum_{W_i \cong M} W_i$ となる。 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$

さて、任意に $w \in W$ をとると、$w = \sum_{j \in I} \pi_j(w)$ とかくことができる (注：有限個の $j \in I$ を除いて $\pi_j(w) = 0$ となるから、この和は実質的には有限和である)。

したがって、$W \subset \sum_{j \in I} \pi_j(W)$ となる。

これと $(*)$ により、$W \subset \sum_{W_i \cong M} W_i$ が得られる。

故に、$M(V) = \sum_{W_i \cong M} W_i$ が示された。

(2) $\dim V < \infty$ より、I は有限集合であり、したがって、数 $n_M(V)$ が定まることに注意する。

(1) により、$\dim M(V) = n_M(V) \cdot \dim M$ が成り立つ。この等式から、$n_M(V)$ は V と M のみによって定まり、V の既約部分加群への分解の仕方によらないことがわかる。(Q.E.D.)

注意： 上の補題の (1) により、完全可約な左 A-加群は、相異なる既約左 A-加群 M にわたる、M-斉次成分の直和に分解されることがわかる。特に、M と N が既約な左 A-加群で、$M \not\cong N$ ならば、$M(V) \cap N(V) = 0$ であることがわかる。

(proof of Theorem 2-8)

(1) $M,\ N$ を既約な左 A-加群であって、$M \not\cong N$ を満たすものとする。補題 2-10 の証明のあとの注意により、$M(A) \cap N(A) = 0$ である。

$M(A)$ と $N(A)$ は両側イデアルである (補題 2-9) から、$M(A)N(A) \subset M(A) \cap N(A) = 0$、すなわち、$M(A)N(A) = 0$ となる。

A は半単純であるから、演習 2-1 により、$N \cong I$ となる ${}_AA$ の部分加群 I が存在する。このとき、$M(A) \cdot I \subset M(A)N(A) = 0$、すなわち、$M(A) \cdot I = 0$ となる。

左 A-加群として $I \cong N$ であるから、$M(A) \cdot N = 0$ を得る。

(2) 演習 2-1 より、

$$\mathcal{S} := \{J : {}_AA \text{ の部分加群} \mid J \cong M \quad \text{as left } A\text{-modules}\} \neq \emptyset$$

であるから、$M(A) \neq 0$ である。また、補題 2-9 により、$M(A)$ は A の両側イデアルである。$M(A)$ が極小であることを示すには、$I \subsetneqq M(A)$ が A の両側イデアルならば $I = 0$ となることを示せばよい。

そのためには、$I \cdot M = 0$ となることを示せばよい。

$\because$)

> $a \in I$ が $a \cdot M = 0$ を満たしているとする。
>
> $a \in M(A)$ なので、N を M と同型でない既約な左 A-加群とすると、(1) により $a \cdot N = 0$ となる。したがって、任意の既約な左 A-加群 V について、$a \cdot V = 0$ となる。
>
> 一方、A は半単純であるから、${}_AA$ は既約な左 A-加群の直和として表される。
>
> よって、$a \cdot {}_AA = 0$ を得る。故に、$a = a \cdot 1 = 0$ となる。
>
> したがって、$I \cdot M = 0$ ならば、$I = 0$ であることがわかった。 □

$M(A)$ の定義により、

$$M(A) = \sum_{J \in \mathcal{S}} J$$

となる。したがって、

$$\exists J \in \mathcal{S} \ \text{ s.t. } \ J \not\subset I$$

となる。さて、$I \cap J$ は J の部分加群であるが、$J \cong M$ の既約性から、$I \cap J = 0$ または $I \cap J = J$ を得る。J の選び方から後者はあり得ないので、$I \cap J = 0$ を得る。故に、

$IJ \subset I \cap J = 0$、すなわち、$I \cdot M \cong I \cdot J = 0$ を得る。

$\hookleftarrow$ (J は左 A-加群より、$IJ \subset J$ / I は A の両側イデアルより、$IJ \subset I$)

(3) $\mathcal{M}(A) :=$ (既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系) とおく。

命題 2-2(vi) から

$$\exists M_1, \cdots, M_n \in \mathcal{M}(A) \ \text{ s.t. } \ {}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i(A)$$

となる。$\mathcal{M}(A) = \{M_1, \cdots, M_n\}$ となることを示す。

もし、$\mathcal{M}(A) \supsetneqq \{M_1, \cdots, M_n\}$ であったとすると、

$$\exists M : \text{既約左 } A\text{-加群} \ \text{ s.t. } \ M \ncong M_i \ \text{ for } \forall i = 1, \cdots, n$$

となる。$1 \in A$ を 直和分解 ${}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i(A)$ に応じて

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad\qquad (e_i \in M_i(A), \ i = 1, \cdots, n)$$

と書く。このとき、

$$M(A)=1\cdot M(A)=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot M(A)\underset{\uparrow}{=}0$$

$$\left(\begin{array}{l} M_i(A)\cdot M=0\ \ \text{by (1)}\\ M(A)=\displaystyle\sum_{\substack{W:{}_AA\text{ の部分加群}\\ W\cong M}}W \end{array}\right)$$

を得る。これは、(2) に反する。よって、$\mathcal{M}(A)=\{M_1,\cdots,M_n\}$ となることことが示された。

(4) $\{M_1,\cdots,M_n\}$ を既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系とおくと、(3) により、

$$_AA=\bigoplus_{i=1}^{n}M_i(A)$$

が成り立つ。各 $M_i(A)$ には単位元が存在する。実際、A の単位元 1 を

$$1=\sum_{i=1}^{n}e_i \qquad\qquad (e_i\in M_i(A),\ i=1,\cdots,n)$$

と書き表わすとき、e_i が代数としての $M_i(A)$ の単位元である (演習 1-2)。任意の既約な左 A-加群 M は、$M_1,\cdots,M_n$ のいずれかに同型であるから、$M(A)$ にも単位元が存在する。

与えられた写像 $M(A)\longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}M,\ a\longmapsto a_M$ が単射な代数準同型であることを示す。この写像を ρ とおく。

i. ρ の単射性：$a\in M(A)$ が $a_M=0$ を満たしているとする。

すると、$a\cdot M=0$ となる。この事実と (1) により、すべての既約な左 A-加群 N に対して、$a\cdot N=0$ であることがわかる。

A は半単純なので、任意の左 A-加群は既約な左 A-加群の直和として書き表わされる (命題 2-2)。

したがって、任意の左 A-加群 V に対して、$a\cdot V=0$ となる。

特に、$V={}_AA$ の場合を考えて、$a=a\cdot 1\in a\cdot {}_AA=0$、すなわち、$a=0$ を得る。故に、ρ は単射である。

ii. ρ が代数準同型であること：ρ が積を保つことは明らかであろう。ρ が単位元を保つことを示す。

$M\cong M_i$ であるとすると、$M(A)=M_i(A)$ である (補題 2-10)。よって、その単位元 e_i に関して

$$e_i\cdot m=\underset{\uparrow}{\sum_{j=1}^{n}}e_j\cdot m=1\cdot m=m \qquad \text{for all}\ \ m\in M$$

(1) により、$j\neq i$ なるに対しては $e_j\cdot m=0$

となる。故に、$\rho(e_i)=\mathrm{id}_M$ が示された。 (Q.E.D.)

定理 2-11(**再中心化定理 Double Centlizer Theorem**)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数

M：既約な左 A-加群　とする。

$D:=\mathrm{End}_AM$ とおくと、M は自然に左 D-加群とみなされる。

このとき、代数 $\mathrm{End}_D M$ は A の M への左作用全体と一致する：

$$\mathrm{End}_D M = A_M$$

が成り立つ。但し、

$$A_M := \{a_M \mid a \in A\} \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M,\ \ a_M : M \longrightarrow M \text{ は } a \in A \text{ の } M \text{ への左作用}$$

である。

注意 1°：$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ の部分集合 S に対して、

$$S' := \{f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M \mid f \circ s = s \circ f \ \ \text{for all } s \in S\}$$

とおく。以前導入した記号で書くと、$S' = Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M}(S)$ である。S' を S の $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ における**交換団** (*commtant*) と呼ぶ。

$$S'' := \{f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M \mid f \circ g = g \circ f \ \ \text{for all } g \in S'\}$$

とおく。S'' を S の $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ における**再交換団** (*double commtant*) と呼ぶ。定理の状況においては

$$\mathrm{End}_A M = A'_M,\ \ \mathrm{End}_D M = A''_M$$

となる。一般に、代数 A の左 A-加群 M に対して、

$$A_M \subset A''_M$$

が成立する。すなわち、A の M への左作用全体 A_M は、その再交換団 A''_M に含まれる。再中心化定理は、代数 A が半単純であって、左 A-加群 M が既約ならば、A_M の再交換団 A''_M は A_M に一致する (注：この事実を A_M は**再中心化性を持つ**と言い表わす) ということを主張している。

注意 2°：$\rho : M(A) \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$ を定理 2-8(4) の単射な代数準同型とするとき、$\mathrm{Im}\rho = A_M$ が成り立つ。したがって、代数として、$\mathrm{End}_D M \cong M(A)$ となる。
(proof)
$a \in A$ を任意にとる。$\mathcal{M}(A)$ を同型に関する既約な左 A-加群の完全代表系とすると、A の半単純性により、$A = \bigoplus_{N \in \mathcal{M}(A)} N(A)$ と書くことができる。この直和分解に応じて、

$$a = \sum_{N \in \mathcal{M}(A)} a(N), \qquad a(N) \in N(A)$$

と書く。このとき、定理 2-8(1) により、

$N \in \mathcal{M}(A)$ が $N \ncong M$ ならば、$a(N)$ の M への左作用は 0-写像

となる。したがって、

$$a_M = (a(M) \text{ の } M \text{ への左作用}) = \rho(a(M))$$

が得られ、$\mathrm{Im}\rho = A_M$ が示された。 □

注意 3°：代数 $D = \mathrm{End}_A M$ は、Schur の補題から、可除であることがわかる。さらに、、基礎体 $\boldsymbol{k}$ が代数閉体であって M が有限次元であれば、$D = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ が成り立つ。

(proof of Theorem 2-11)

A が半単純でなくても、M が完全可約な左 A-加群であって、M が $D := \mathrm{End}_A M$ 上有限生成ならば、A_M は再中心化性を持つ (演習 2-11 の下の注意参照)。半単純代数の単純加群 M は D 上有限生成なので (系 1-62 と演習 2-5 参照)、再中心化定理はこの事実から直ちに従うが、ここでは直接的な証明を与えよう。

M が ${}_AA$ の部分加群の場合に証明すれば十分である。

$\because$)

$\varphi : M \longrightarrow N$ を左 A-加群の同型とする。このとき、$\tilde{\varphi} : \mathrm{End}_D M \longrightarrow \mathrm{End}_{D'} N$ を

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

と定める。ここで、$D' = \mathrm{End}_A N$ とおいた。

$\tilde{\varphi}$ は代数準同型である。

また、任意の $a \in A$ に対して $\tilde{\varphi}(a_M) = a_N$ であるから、代数の同型 $\tilde{\varphi}|_{A_M} : A_M \longrightarrow A_N$ が誘導される。よって、

$$\mathrm{End}_{D'} N = A_N \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{End}_D M = A_M$$

となる。任意の既約な左 A-加群は、左正則加群 ${}_AA$ の部分加群に同型である (演習 2-1) から、${}_AA$ の既約な部分加群について定理が示されればよい。 $\square$

以下、$M \subset {}_AA$ と仮定する。

i. $A_M \subset \mathrm{End}_D M$ であること：

任意に $a \in A$ をとる。

$$a_M \circ f = f \circ a_M \ \text{ for all } f \in \mathrm{End}_A(M) = D$$

であるから、

$$a_M \in \mathrm{End}_D M = \{g \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M \mid g \circ f = f \circ g \ \text{ for all } f \in D\}$$

となる。

ii. $A_M \supset \mathrm{End}_D M$ であること：

$g \in \mathrm{End}_D M$ とする。$g : M \longrightarrow M$ は

$$g(am) = g(a)m \qquad \text{for all} \ \ a \in A,\ m \in M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす。

$\because$)

M は ${}_AA$ の部分加群であるから、$a \in A,\ m \in M$ に対して、$am \in M$ となる。したがって、各 $m \in M$ に対して、写像 $\alpha_m : M \longrightarrow M$ を $\alpha_m(a) = am,\ a \in M$ によって定義することができる。

$\alpha_m \in \mathrm{End}_A M = D$ であることがすぐにわかるから、$g \in \mathrm{End}_D M$ により、$\alpha_m \circ g = g \circ \alpha_m$ が得られる。よって、$a, m \in M$ ならば、

$$g(am) = g(\alpha_m(a)) = \alpha_m(g(a)) = g(a)m$$

$|$ が成り立つ。 □

今、$0 \neq n \in M$ を 1 つ固定すると、イデアル $M(A)$ の極小性から、$AnA = M(A)$ が成り立つ。

したがって、代数 $M(A)$ の単位元 e は $e = \sum_i a_i n b_i \ \ (a_i, b_i \in A)$ のように表わすことができる。

このとき、任意の $m \in M$ は

$$m = em = (\sum_i a_i n b_i)m = \sum_i (a_i n)(b_i m)$$

と表わされるが、$a_i n,\ b_i m \in M$ であるから、

$$\begin{aligned} g(m) &= g(\sum_i (a_i n)(b_i m)) \\ &= \sum_i g(a_i n) \cdot b_i m \\ &= (\sum_i g(a_i n) b_i)m \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$u := \sum_i g(a_i n) b_i$$

とおくと、

$$g = u_M \in A_M$$

となることがわかる。故に、$\mathrm{End}_D M \subset A_M$ となることが示された。 (Q.E.D.)

再中心化定理と Schur の補題から次を得る。

系 2-12

A：代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数　とする。

(1) M：既約な有限次元左 A-加群　とする。

このとき、次が成り立つ。

(a) $A_M = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$

(b) $\mathrm{dim} A_M = \mathrm{dim} M(A) = (\mathrm{dim} M)^2$

(c) $n_M({}_A A) = \mathrm{dim} M$

(2) $\mathcal{M}(A)$ を既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系、$Z(A)$ を代数 A の中心とする。

A が有限次元のとき、次が成り立つ。

(a) $\mathrm{dim} A = \sum_{M \in \mathcal{M}(A)} (\mathrm{dim} M)^2$

(b) $\sharp \mathcal{M}(A) = \mathrm{dim} Z(A)$

(proof)

(1) (a) 定理 2-11 から、$A_M = \mathrm{End}_D M$ となる。但し、$D = \mathrm{End}_A M$ とおいた。命題 1-13(2) から、$D = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$ であるから、

$$A_M = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}\cdot \mathrm{id}_M}(M) = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M$$

が成り立つ。

(b) $\dim M = d$ とおくと、代数として $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M \cong \mathrm{M}_d(\boldsymbol{k})$ である。但し、$\mathrm{M}_d(\boldsymbol{k})$ は d 次正方行列のなす代数である。(a) により、

$$\dim A_M = \dim(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} M) = d^2 = (\dim M)^2$$

となる。定理 2-11 の下の注意から代数として $A_M \cong M(A)$ であるから、$\dim A_M = \dim M(A)$ でもある。

(c) $M(A)$ は $n_M({}_AA)$ 個の M の直和に同型である。よって、

$$d^2 = \dim M(A) = n_M({}_AA)\dim M = n_M({}_AA)d$$

$$\therefore\ d = n_M({}_AA)$$

となる。

(2) (a) $A = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(A)} M(A)$ ゆえ、

$$\dim A = \sum_{M\in\mathcal{M}(A)} \dim M(A) = \underbrace{\sum_{M\in\mathcal{M}(A)}}_{\text{(1) (b)}} (\dim M)^2$$

を得る。

(b) (1)(a) から、

$$Z(A_M) = Z(\mathrm{End}_K M) = \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{id}_M$$

を得る ($\mathrm{End}_K M \cong \mathrm{M}_d(\boldsymbol{k})$ であり、行列代数 $\mathrm{M}_d(\boldsymbol{k})$ の中心は単位行列のスカラー倍よりなることから)。よって、

$$\dim Z(M(A)) \underset{\text{定理 2-11 の下の注意参照}}{=} \dim Z(A_M) = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を得る。また、

$$Z(A) = \bigoplus_{M\in\mathcal{M}(A)} Z(M(A)) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

$\because$)

i. $Z(A) \subset \bigoplus_{M\in\mathcal{M}(A)} Z(M(A))$ であること：

$a \in Z(A)$ とする。

$$a = \sum_{M\in\mathcal{M}(A)} a(M), \qquad a(M) \in M(A)$$

と書く。

定理 2-8(1) より、任意の $u \in M(A)$ に対して

$$u \cdot a(M) = u \cdot a = a \cdot u = a(M) \cdot u$$

が成り立つ。故に、$a(M) \in Z(M(A))$ であり、$Z(A) \subset \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(A)} Z(M(A))$ が示された。

ii. $Z(A) \supset \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(A)} Z(M(A))$ であること：

各 $M \in \mathcal{M}(A)$ に対して、$Z(M(A)) \subset Z(A)$ となることを示せばよい。

任意に $a \in Z(M(A))$ をとる。また、任意に $b \in A$ をとり、

$$b = \sum_{M \in \mathcal{M}(A)} b(M), \qquad b(M) \in M(A)$$

と書き表わす。

このとき、定理 2-8(1) から

$$a \cdot b = a \cdot b(M) = b(M) \cdot a = b \cdot a$$

となるので、$a \in Z(A)$ となる。

①②から、$\sharp\mathcal{M}(A) = \dim Z(A)$ を得る。 (Q.E.D.)

例題 2-13

$\boldsymbol{k}$：標数 0、または、標数 $p(\neq 2, 3)$ の代数閉体 とする。

3 次対称群 S_3 の群代数 $\boldsymbol{k}[S_3]$ の既約表現は次の 3 つの表現のうちのただ 1 つに同値である。

$\rho_1 : \boldsymbol{k}[S_3] \longrightarrow \boldsymbol{k},\ \ \sigma \longmapsto 1\ \ \text{for } {}^\forall\sigma \in S_3$

$\rho_2 : \boldsymbol{k}[S_3] \longrightarrow \boldsymbol{k},\ \ \sigma \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\ \ \text{for } {}^\forall\sigma \in S_3$

$\rho_3 : \boldsymbol{k}[S_3] \longrightarrow \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}),\ \ \rho_3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ \rho_3((2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(proof)

まず、体 $\boldsymbol{k}$ に関する条件から、群代数 $\boldsymbol{k}[S_3]$ は半単純であることに注意する (Maschke の定理による)。

ρ_1, ρ_2, ρ_3 が $\boldsymbol{k}[S_3]$ の既約表現を与えることはすぐにわかる。

$\dim Z(\boldsymbol{k}[S_3]) = 3$ である。

$\because$)

$x = \sum_{\sigma \in S_3} a_\sigma \sigma \in \boldsymbol{k}[S_3],\ \ (a_\sigma \in \boldsymbol{k})$ に対して

$$\begin{aligned} x \in Z(\boldsymbol{k}[S_3]) &\Longleftrightarrow {}^\forall\tau \in S_3,\ \ \tau x = x\tau \\ &\Longleftrightarrow {}^\forall\sigma, \tau \in S_3,\ \ a_\sigma = a_{\tau\sigma\tau^{-1}} \end{aligned}$$

であるから、

$$x = a1 + b((12) + (13) + (23)) + c((123) + (132)), \quad a, b, c \in \boldsymbol{k}$$

と表せる。1, (12)+(13)+(23), (123)+(132) は $\boldsymbol{k}$ 上一次独立であるから $\dim Z(\boldsymbol{k}[S_3]) = 3$ である。 □

系 2-12 により、$\boldsymbol{k}[S_3]$ の既約表現の同値類の個数は 3 である。
よって、S_3 の群代数 $\boldsymbol{k}[S_3]$ の既約表現は ρ_1, ρ_2, ρ_3 のいずれかに同値である。 (Q.E.D.)

最後に、半単純代数については「Schur の補題の逆」が成り立つことを示しておこう。

命題 2-14
$\boldsymbol{k}$：代数閉体
A：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数
V：有限次元左 A-加群　とする。このとき、

$$V\text{：既約} \iff \mathrm{End}_A V \cong \boldsymbol{k} \quad \text{as algebras}$$

(proof)
必要性は Schur の補題 (命題 1-13(2)) そのものである。十分性を示す。
A は半単純であるから、$\{V_i\}_{i=1}^n$ を A の既約な左 A-加群の完全代表系とすると、

$$V \cong V_1^{\oplus m_1} \oplus V_2^{\oplus m_2} \oplus \cdots \oplus V_n^{\oplus m_n} \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる (注：V は有限次元なので、$m_i \neq 0$ なる i については V_i は有限次元である。また、$m_i = 0$ のとき、$V_i^{\oplus m_i} = \{0\}$ と解釈する)。故に、

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_A V &\cong \mathrm{Hom}_A(V_1^{\oplus m_1}, V) \oplus \mathrm{Hom}_A(V_2^{\oplus m_2}, V) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(V_n^{\oplus m_n}, V) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(V_1, V)^{\oplus m_1} \oplus \mathrm{Hom}_A(V_2, V)^{\oplus m_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(V_n, V)^{\oplus m_n}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \dim \mathrm{End}_A V = \sum_{i=1}^n m_i \dim \mathrm{Hom}_A(V_i, V)$$

を得る。ここで、Schur の補題により

$$\mathrm{Hom}_A(V_i, V_j) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ \boldsymbol{k} & \text{if } i = j \end{cases}$$

であるから、

$$\mathrm{Hom}_A(V_i, V) \cong \mathrm{Hom}_A(V_i, V_i^{\oplus m_i}) \cong \mathrm{Hom}_A(V_i, V_i)^{\oplus mi} \cong \boldsymbol{k}^{\oplus m_i}$$

を得る。

$$\therefore \quad \dim \mathrm{Hom}_A(V_i, V) = m_i$$

$$\therefore \quad \dim \mathrm{End}_A V = \sum_{i=1}^n m_i^2$$

であることがわかる。ところが、仮定により $\dim \mathrm{End}_A V = 1$ であるから、等式 $1 = \sum\limits_{i=1}^n m_i^2$ が得られる。各 m_i は 0 以上の整数であるから、

$$^\exists i \in \{1, \cdots, n\} \;\; \text{s.t.} \;\; m_i = 1, \quad m_j = 0 \;\; (j \neq i)$$

でなければならない。故に、$V \cong V_i$ となり、V の既約性が示された。 (Q.E.D.)

演習 2-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
M：完全可約な左 A-加群　とする。

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \quad かつ \quad M = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$$

但し、$M_i\ (i = 1, \cdots, n)$ および $N_j\ (j = 1, \cdots, s)$ は既約な左 A-加群

$\Longrightarrow\ r = s$ かつ ${}^{\exists}\sigma \in \mathfrak{S}_r$ s.t. $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ for all $i \in \{1, \cdots, r\}$

となることを示せ。

解；

r に関する帰納法で示す。

. $r = 1$ の場合

このとき、M は既約であるから、$s = 1$ でなければならず、$M_1 = N_1$ を得る。

. $r > 1$ の場合

$\mu_i : M \longrightarrow M_i\ (i = 1, \cdots, r)$ を与えられた直和分解 (直積分解) $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ に附随する標準的な射影とし、

$\nu_j : M \longrightarrow N_j\ (j = 1, \cdots, s)$ を与えられた直和分解 (直積分解) $M = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$ に附随する標準的な射影とする。このとき、

$${}^{\exists}j \in \{1, \cdots, s\} \text{ s.t. } \mu_1|_{N_j} \circ \nu_j|_{M_1} \neq 0$$

となる。

$\because$)

もし、任意の j に対して、$\mu_1|_{N_j} \circ \nu_j|_{M_1} = 0$ であったとする。

任意の $x \in M$ に対して、$x = \sum_{j=1}^{s} \nu_j(x)$ であるから、任意の $x \in M_1$ に対して、

$$x = \mu_1 \circ (\sum_{j=1}^{s} \nu_j)(x) = \sum_{j=1}^{s} (\mu_1|_{N_j} \circ \nu_j)(x) = 0$$

となる。これは $M_1 \neq 0$ であることに反する。　□

一般性を失うことなく、$j = 1$ と仮定して差し支えない。

このとき、M_1 は既約なので、Schur の補題 (命題 1-13) から、

$$\varphi := \mu_1|_{N_1} \circ \nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$$

は左 A-加群の同型である。よって、$\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow N_1$ は単射である。これより、$0 \neq \nu_1(M_1) \subset N_1$ となるので、N_1 の既約性により、$\nu_1(M_1) = N_1$ を得る。したがって、$\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow N_1$ は同型であり、その結果、$\mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$ は左 A-加群の同型であることがわかる。これより、

$$M = N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r \quad (内部直和) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。

$\because$)

まず、$N_1 + M_2 + \cdots + M_r \subset M$ が直和であることを示す。

$$n_1 + m_2 + \cdots + m_r = 0 \qquad\qquad (n_1 \in N_1,\ m_2 \in M_2, \cdots, m_r \in M_r)$$

とする。

$\mu_1(m_i) = 0 \ \ (i = 2, \cdots, r)$ であるから、

$$\mu_1(n_1) = \mu_1(n_1 + m_2 + \cdots + m_r) = \mu_1(0) = 0$$

を得る。$\mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$ は同型写像であるから、$n_1 = 0$ を得る。したがって、$m_2 + \cdots + m_r = 0$ が得られる。$M_2, \cdots, M_r$ は M の中で直和になっているから、$m_2 = \cdots = m_r = 0$ を得る。故に、$N_1, M_2, \cdots, M_r$ は M の中で直和である。

次に、$N_1 + M_2 + \cdots + M_r = M$ となることを示す。これを示すには、$M_1 \subset N_1 + M_2 + \cdots + M_r$ となることを示せばよい。

$\mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$ は同型写像であるから、M_1 の任意の元は $\mu_1(x),\ x \in N_1$ と書き表わすことができる。このとき、

$$\mu_1(x) = x - \mu_2(x) - \cdots - \mu_r(x) \ \in N_1 + M_2 + \cdots + M_r$$

となる。故に、$M_1 \subset N_1 + M_2 + \cdots + M_r$ が示された。

以上より、$M = N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$ となることが示された。 □

これより、

$$M_2 \oplus \cdots \oplus M_r \underset{\uparrow}{\cong} M/N_1 \underset{\uparrow}{\cong} N_2 \oplus \cdots \oplus N_s \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。 $\qquad (*) \qquad M = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$

この２つの直和分解に対して、帰納法の仮定を用いると、$r-1 = s-1$ かつ適当な番号の付け替えののちに、左 A-加群として $M_i \cong N_i \ (i = 2, \cdots, r)$ となることがわかる。これで、帰納法が完成した。 (Q.E.D.)

注意 1°：命題 1-13 により、既約な左 A-加群 V の自己準同型代数 $\mathrm{End}_A V$ は可除である (したがって、局所的である) ので、この演習問題の結果は次章で述べる Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理の特別な場合である (定理 3-6 の注意 4° 参照)。

注意 2°：一般に、上の演習問題における「$M_i \cong N_{\sigma(i)}$」の同型 $\cong$ を等号 $=$ に変えることはできない。しかしながら、A が半単純であって、M が両側正則加群 ${}_A A_A$ の場合にはこれが可能である。すなわち、次が成り立つ：

A：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数 とする。

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i, \qquad A = \bigoplus_{j=1}^{s} B_j$$

を A の極小両側イデアルへの２つの分解とする。このとき、$r = s$ であって、任意の $i \in \{1, \cdots, r\}$ に対して $A_i = B_{\sigma(i)}$ となる $\sigma(i) \in \{1, \cdots, r\}$ が存在する。

(proof)

i を固定する。

A_i は A の両側イデアルなので、$A_iA = A_i$ が成り立つ。よって、

$$A_i = A_iA = \bigoplus_{j=1}^{s} A_iB_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。ここで、各 A_iB_j は A_i に含まれる A の両側イデアルであるから、A_i の極小性により、$A_iB_j = 0$ または $A_iB_j = A_i$ が成り立つ。$(*)$ によってすべての j ついて、$A_iB_j = 0$ となることはないので、ある $j \in \{1, \cdots, s\}$ について $A_iB_j = A_i$ でなければならない。$0 \neq A_iB_j$ はまた B_j に含まれる A の両側イデアルでもあるから、B_j の極小性により、$A_iB_j = B_j$ を得る。故に、$A_i = B_j$ となることがわかった。この j を $\sigma(i)$ と書くことにする。

$\sigma : \{1, \cdots, r\} \longrightarrow \{1, \cdots, s\}$ は全単射である。

$\because$)

・σ の単射性：

$\sigma(i_1) = \sigma(i_2),\ i_1, i_2 \in \{1, \cdots, r\}$ であるとすると、

$$A_{i_1} = B_{\sigma(i_1)} = B_{\sigma(i_2)} = A_{i_2}$$

となるので、$i_1 = i_2$ を得る。よって、σ は単射である。

・σ の全射性：

最初に述べたやり方と同じ方法により、任意の $j \in \{1, \cdots, s\}$ に対して、$A_i = B_j$ となる $i \in \{1, \cdots, r\}$ を見つけることができる。

一方、この i に対して、$A_i = B_{\sigma(i)}$ となる $\sigma(i) \in \{, 1 \cdots, s\}$ が存在する。このとき、$B_j = B_{\sigma(i)}$ を得る。故に、$j = \sigma(i)$ である。 $\square$

よって、$r = s$ であり、$\{A_1, \cdots, A_r\} = \{B_1, \cdots, B_r\}$ が成り立つ。 $\square$

演習 2-17

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の代数閉体　とする。

有限群 G が次の 2 つの場合に $\boldsymbol{k}[G]$ の既約加群を同値なものを除いてすべて求めよ。

(1) $D_{2m} = \langle s, t \mid s^m = 1,\ t^2 = 1,\ t^{-1}st = s^{-1} \rangle$ $(m \geq 3)$：位数 $2m$ の二面体群

(2) $Q_{4n} = \langle s, t \mid s^{2n} = 1,\ t^2 = s^n,\ t^{-1}st = s^{-1} \rangle$ $(n \geq 2)$：位数 $4n$ の一般四元数群

注意：$|D_{2m}| = 2m,\ |Q_{4n}| = 4n$ であることは証明を要するが、このノートではこれを認めた上で議論する。証明は、例えば、近藤武・著『群論』p.30—p.33 を参照。

演習 2-17 の解；

(1) D_{2m} の共役類は、m が偶数のときには

$$\{1\},\ \{s, s^{m-1}\},\ \{s^2, s^{m-2}\}, \cdots, \{s^{\frac{m}{2}}\},\ \{t, s^2t, s^4t, \cdots, s^{m-2}t\}, \{st, s^3t, \cdots, s^{m-1}t\}$$

であるから、$\dim Z(\boldsymbol{k}[D_{2m}]) = \dfrac{m}{2} + 3$ である (例題 2-13 の証明参照)。m が奇数のときには

$$\{1\},\ \{s, s^{m-1}\},\ \{s^2, s^{m-2}\}, \cdots, \{s^{\frac{m-1}{2}}, s^{\frac{m+1}{2}}\},\ \{t, st, s^2t, s^3t, \cdots, s^{m-1}t\}$$

であるから、$\dim Z(\boldsymbol{k}[D_{2m}]) = \dfrac{m-1}{2} + 2$ である。よって、m が偶数のときには、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の既約な表現の同型類は全部で $(\dfrac{m}{2}+3)$ 個あり、m が奇数のときには全部で $(\dfrac{m-1}{2}+2)$ 個ある。

$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 1 次元表現を求める。$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 1 次元表現は代数準同型 $\rho : \boldsymbol{k}[D_{2m}] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ のことに他ならない。$\rho(t)^2 = 1$ より、

$$\rho(t) = \pm 1$$

とおくことができる。$\rho(t)^{-1}\rho(s)\rho(t) = \rho(s)^{-1}$ より、

$$\rho(s) = \rho(s)^{-1} \qquad i.e. \;\; \rho(s)^2 = 1$$

となる。よって、

$$\rho(s) = \pm 1$$

であるが、$\rho(s)^m = 1$ でなければならないので、

$$\begin{cases} m : \text{偶数} \implies \rho(s) = \pm 1 \\ m : \text{奇数} \implies \rho(s) = 1 \end{cases}$$

を得る。故に、m が偶数のとき、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 1 次元表現の個数は 4 つであり、それらは

$$\chi_{ij} \;(i,j=0,1): \quad \chi_{ij}(s) = (-1)^i,\; \chi_{ij}(t) = (-1)^j$$

によって与えられる。m が奇数のとき、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 1 次元表現の個数は 2 つであり、それらは

$$\chi_j \;(j=0,1): \quad \chi_j(s) = 1,\; \chi_j(t) = (-1)^j$$

によって与えられる。

次に、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 2 次元既約表現を求める。$\rho : \boldsymbol{k}[D_{2m}] \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を 2 次元既約表現とする。$\boldsymbol{k}$ は標数 0 の代数閉体なので $\rho(s)^m = \mathrm{id}_V$ から $\rho(s)$ は対角化可能であって、

$${}^{\exists}\{e_1, e_2\} : V \text{ の基底 } \;\text{s.t.}\;\; \rho(s)e_1 = \zeta^a e_1, \quad \rho(s)e_2 = \zeta^b e_2$$

但し、ζ は 1 の原始 m 乗根、$a, b = 0, 1, \cdots, m-1$ となる。さて、$st = ts^{-1}$ から

$$\rho(s)(\rho(t)e_1) = \rho(t)(\rho(s)^{-1}e_1) = \zeta^{-a}\rho(t)e_1$$

である。t の可逆性により $\rho(t)$ は線形同型であるから、$\rho(t)e_1$ は $\rho(s)$ の固有ベクトルであって、ζ^{-a} は $\rho(s)$ の固有値であることがわかる。同様にして、$\rho(t)e_2$ は $\rho(s)$ の固有ベクトルであって、ζ^{-b} は $\rho(s)$ の固有値であることがわかる。

もし、$\zeta^a = \zeta^{-a}$ かつ $\zeta^b = \zeta^{-b}$ ならば、$\boldsymbol{k}e_1,\ \boldsymbol{k}e_2$ はそれぞれ V の部分 $\boldsymbol{k}[D_{2m}]$-加群になる。これは ρ が既約であることに反する。したがって、$\zeta^{-a} = \zeta^b$ または $\zeta^{-b} = \zeta^a$ でなければならない。

$\zeta^{-a} = \zeta^b$ ならば $\rho(t)e_1$ は $\rho(s)$ の固有値 ζ^b に属する固有ベクトルであるが、ρ の既約性によって、$\rho(t)e_1$ は e_1 スカラー倍ではない。よって、V の基底 $\{e_1,\ \rho(t)e_1\}$ が得られる。$\rho(t)^2 e_1 = e_1$ であるから、基底 $\{e_1,\ \rho(t)e_1\}$ に関して $\rho(s),\ \rho(t)$ を行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^{-a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。同様に、$\zeta^{-b} = \zeta^a$ ならば基底 $\{e_2,\ \rho(t)e_2\}$ に関して $\rho(s),\ \rho(t)$ を行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \zeta^b & 0 \\ 0 & \zeta^{-b} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。こうして、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の 2 次元既約表現は次式で定まる代数準同型 $\rho_a : \boldsymbol{k}[D_{2m}] \longrightarrow \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ に同値である。

$$\rho_a(s) = \begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^{-a} \end{pmatrix}, \quad \rho_a(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、$a = 0, 1, \cdots, m-1$ に対して ρ_a と ρ_{m-a} は同値な表現であるが、

$$\begin{cases} m：偶数 \implies \rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{\frac{m}{2}} \\ m：奇数 \implies \rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{\frac{m-1}{2}} \end{cases}$$

は互いに同値でない表現であることがわかる。

$\because$)

もし、ρ_a と ρ_b が同値であったとすると、$\mathrm{Tr}\rho_a(s) = \mathrm{Tr}\rho_b(s)$ である。

$\mathrm{Tr}\rho_a(s) = \zeta^a + \zeta^{-a}$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\rho_a(s) = \mathrm{Tr}\rho_b(s) &\iff \zeta^a + \zeta^{-a} = \zeta^b + \zeta^{-b} \\ &\iff \zeta^{a+b} + \zeta^{b-a} - \zeta^{2b} - 1 = 0 \\ &\iff (\zeta^a - \zeta^b)(\zeta^b - \zeta^{-a}) = 0 \\ &\iff \zeta^b = \zeta^{\pm a} \end{aligned}$$

よって、$a, b = 0, 1, \cdots, m-1$ のとき ρ_a と ρ_b が同値ならば $b = a$ または $b = m - a$ である。対偶をとれば、示したかった結果が得られる。 □

さらに、ρ_0 は既約でない。実際、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{k}(e_1 + e_2)$ は ρ_0-不変な部分空間になるからである。同じ理由で m が偶数のとき $\rho_{\frac{m}{2}}$ は既約でない。しかしながら、

$$\begin{cases} m：偶数 \implies \rho_1, \cdots, \rho_{\frac{m-2}{2}} \\ m：奇数 \implies \rho_1, \cdots, \rho_{\frac{m-1}{2}} \end{cases}$$

はすべて既約である。

$\because$)

$W \subset \boldsymbol{k}^2 =: V$ を ρ_a-不変な部分空間とする。$\dim W = 1$ であったと仮定し、$w = \alpha e_1 + \beta e_2,\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{k}$ を W の 0 でない元とする。このとき、W が ρ_a-不変であることから

$$\rho_a(s)(w) = cw, \quad c \in \boldsymbol{k}$$

と書ける。上式を成分で書いて

$$\begin{cases} \alpha(\zeta^a - c) = 0 \\ \beta(\zeta^{-a} - c) = 0 \end{cases}$$

を得る。ここで、

$$\zeta^a \neq \zeta^{-a} \quad \text{for} \begin{cases} a = 1, 2, \cdots, \frac{m-2}{2}, \ (m : \text{even}) \\ a = 1, 2, \cdots, \frac{m-1}{2}, \ (m : \text{odd}) \end{cases}$$

であるから、$\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ ということはあり得ない。

$w \neq 0$ ゆえ、$\alpha \neq 0$ ならば $\beta \neq 0$ であり、$\beta = 0$ ならば $\alpha \neq 0$ であるから、$e_2 \in W$ または $e_1 \in W$ であることがわかる。$\rho_a(t)(e_1) = e_2, \ \rho_a(t)(e_2) = e_1$ なので、いずれにしても $e_1, e_2 \in W$ を得る。このことは $W = V$ となることを意味し、$\dim W = 1$ であることに矛盾する。

故に、a が当該条件を満たしている場合、ρ_a は既約である。 □

以上により、互いに同値でない既約表現

$$\begin{cases} m : \text{偶数} \implies \{\chi_{00}, \chi_{01}, \chi_{10}, \chi_{11}, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{\frac{m-2}{2}}\} \\ m : \text{奇数} \implies \{\chi_0, \chi_1, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{\frac{m-1}{2}}\} \end{cases}$$

が得られた。最初に調べたように、$\boldsymbol{k}[D_{2m}]$ の既約な表現の同型類の個数は、m が偶数のとき $\dfrac{m}{2} + 3$ であり、m が奇数のとき $\dfrac{m-1}{2} + 2$ であるから、上記の既約表現と同値でない既約表現はないことがわかる。

(2) Q_{4n} の共役類は、

$$\{1\}, \ \{s, s^{2n-1}\}, \cdots, \ \{s^{n-1}, s^{n+1}\}, \ \{s^n\}, \ \{t, s^2t, s^4t, \cdots, s^{2n-2}t\}, \ \{st, s^3t, \cdots, s^{2n-1}t\}$$

の $n+3$ 個である。したがって、$\dim Z(\boldsymbol{k}[Q_{4n}]) = n + 3$ とわかる。したがって、$\boldsymbol{k}[Q_{4n}]$ の互いに同型でない既約表現の個数は $n+3$ であることがわかる。

$\boldsymbol{k}[Q_{4n}]$ の 1 次元表現を求める。$\chi : \boldsymbol{k}[Q_{4n}] \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を代数準同型とすると、$\chi(t)^{-1}\chi(s)\chi(t) = \chi(s)^{-1}$ より $\chi(s)^2 = 1$ でなければならない。したがって、

$$\chi(s) = \pm 1$$

である。このとき、$\chi(t)^2 = \chi(s)^n = (\pm 1)^n$ となる。したがって、$\sqrt{-1} \in \boldsymbol{k}$ を 1 の原始 4 乗根として、

$$\begin{cases} n \text{ が奇数} \implies \chi(t) = \pm\sqrt{-1} \\ n \text{ が偶数} \implies \chi(t) = \pm 1 \end{cases}$$

となる。故に、$\boldsymbol{k}[Q_{4n}]$ の 1 次元表現は 4 つあり、それらは

$$\chi_{ij} \ (i, j = 0, 1) : \quad \chi_{ij}(s) = (-1)^s, \ \chi_{ij}(t) = (-1)^j(\sqrt{-1})^n$$

によって与えられる。

次に、$\boldsymbol{k}[Q_{4n}]$ の 2 次元既約表現を求める。$\rho : \boldsymbol{k}[Q_{4n}] \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を 2 次元既約表現とする。(1) と同様にして、

$$^\exists\{e_1, e_2\} : V \text{ の基底} \ \text{ s.t. } \ \rho(s)e_1 = \zeta^a e_1, \ \rho(s)e_2 = \zeta^{-a} e_2$$

但し、ζ は 1 の原始 $2n$ 乗根、$a = 0, 1, \cdots, n-1$ となることがわかる。このとき、

$$\rho(t)(\rho(t)e_1) = \rho(s)^n e_1 = \zeta^{na} e_1 = (-1)^a e_1$$

であるから、基底 $\{e_1, \rho(t)e_1\}$ に関して $\rho(s),\ \rho(t)$ を行列表示すれば

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^{-a} \end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。したがって、$\boldsymbol{k}[Q_{4n}]$ の 2 次元既約表現は次式で定義される代数準同型 $\rho_a : \boldsymbol{k}[Q_{4n}] \longrightarrow \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k}),\ a = 0, 1, \cdots, n-1$ に同値である：

$$\rho_a(s) = \begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^{-a} \end{pmatrix}, \quad \rho_a(t) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) と同様に考えて、ρ_0 は既約ではなく、$\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ は互いに同値でないことがわかる。こうして、互いに同値でない既約表現

$$\{\chi_{00},\ \chi_{01},\ \chi_{10},\ \chi_{11},\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots, \rho_{n-1}\}$$

が得られた。その個数は $n+3$ であるから、これらは (同値を法として考えたときの) 既約表現のすべてである。 (Q.E.D.)

演習 2-18

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数
M：既約な左 A-加群　とする。
$D := \mathrm{End}_A M$ とおくとき、
(1) $Z(\mathrm{End}_D M) = Z(D)$ が成り立つことを示せ。
(2) 代数として $Z(M(A)) \cong Z(D)$ となることを示せ。ここで、$M(A)$ は左正則加群 ${}_AA$ の M-斉次成分である。

解；

(1)・$Z(D) \subset Z(\mathrm{End}_D M)$ となること：

$f \in Z(D)$ を任意にとる。$f \in \mathrm{End}_D M$ である。任意に $g \in \mathrm{End}_D M$ をとると、二重中心定理により、g は A のある元 a の左作用 $a_M : M \longrightarrow M,\ m \longmapsto a \cdot m$ に一致する。$f \in D = \mathrm{End}_A M$ であるから、

$$f \circ g = f \circ a_M = a_M \circ f = g \circ g$$

を得る。故に、$f \in Z(\mathrm{End}_D M)$ となることが示された。

・$Z(\mathrm{End}_D M) \subset Z(D)$ となること：

$f \in Z(\mathrm{End}_D M)$ を任意にとる。まず、$f \in D = \mathrm{End}_A M$ であることを示す。そのためには、任意の $a \in A$ に対して、$a_M \circ f = f \circ a_M$ となることを示せばよい。

$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ を Wedderburn 分解とする。また、$A_1 = M(A)$ であるとする。

$a \in A$ を Wedderburn 分解に応じて、$a = a_1 + \cdots + a_n$ $(a_i \in A_i,\ i = 1, \cdots, n)$ と書く。このとき、

$$a_M = (a_1)_M + \cdots + (a_n)_M : M \longrightarrow M$$

が成り立つ。Wedderburn の定理 (定理 2-8(1)) により、$i = 2, \cdots, n$ に対して $(a_i)_M = 0$ であるから、

$$f \circ a_M = f \circ (a_1)_M = \underbrace{(a_1)_M \circ f}_{f \in Z(\mathrm{End}_D M)} = a_M \circ f$$

を得る。

故に、$f \in D$ が示された。さて、$f \in Z(\mathrm{End}_D M)$ ならば $f \in \mathrm{End}_D M$ なので、任意に $g \in D$ に対して、$f \circ g = g \circ f$ を満たす。よって、$f \in Z(\mathrm{End}_D M)$ ならば $f \in Z(D)$ である。
(2) Wedderburn の定理 (定理 2-8(4)) と再中心化定理 (定理 2-11) から、

$$M(A) \cong \mathrm{End}_D M \qquad \text{as algebras}$$

が成り立つ (定理 2-11 の下の注意参照)。一方、(1) により、

$$Z(\mathrm{End}_D M) = Z(D)$$

である。この２つをつなげて、

$$Z(M(A)) \cong Z(\mathrm{End}_D M) = Z(D) \qquad \text{as algebras}$$

が得られる。 (Q.E.D.)

演習 2-19

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A の有限次元表現 $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ に対して、次のようにして定まる線形写像 $\chi : A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を ρ に対する**指標** (*character*) と呼ぶ：

$$\chi(a) = \mathrm{Tr}\rho(a), \qquad a \in A$$

ここで、$\mathrm{Tr}\rho(a)$ は線形変換 $\rho(a) : V \longrightarrow V$ のトレースを表わす。
今、A を代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数とし、$M_1, \cdots, M_n$ をその既約な左 A-加群の完全代表系とする。このとき、Wedderburn の定理から

$$A = M_1(A) \oplus \cdots \oplus M_n(A)$$

という代数としての直和分解が得られる。この直和分解に応じて A の単位元 1 を

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \qquad e_i \in M_i(A),\ i = 1, \cdots, n$$

と書き表わす。このとき、次が成り立つことを示せ。
(1) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、e_i は代数 $M_i(A)$ の単位元である。
(2) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、M_i に対応する既約表現の指標を χ_i とおくとき、

$$\chi_j(e_i) = \delta_{ij} \dim M_j, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

が成り立つ。

解；
(1) これは、演習 1-2(2) で証明済みである。
(2) $A_i := M_i(A),\ i = 1, \cdots, n$ とおく。このとき、

$$A_i \cong \underbrace{M_i \oplus \cdots \oplus M_i}_{\dim M_i \text{ 個}} \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる (補題 2-10(1)、系 2-12(1)(b))。
$e_1, \cdots, e_n$ は A の直交する冪等元 (演習 1-2(1) 参照) であるから、$i \neq j$ のとき、$e_i A_j = 0$ となる。したがって、e_i の M_i への左作用も“0”である。故に、$i \neq j$ ならば $\chi_j(e_i) = 0$ となる。

次に、e_i の A_i への左作用 $\rho(e_i) : A_i \longrightarrow A_i,\ \ x \longmapsto e_i x$ を考える。A_i は M_i を $\dim M_i$ 個だけ直和したものに同型であったから、

$$\mathrm{Tr}\rho(e_i) = (\dim M_i)\chi_i(e_i)$$

であることがわかる。しかるに、e_i は A_i における単位元であるから、$\rho(e_i)$ は恒等写像であり、したがって、

$$\mathrm{Tr}\rho(e_i) = \dim A_i = (\dim M_i)^2$$

が成立する。故に、$\chi_i(e_i) = \dim M_i$ が示された。 (Q.E.D.)

演習 2-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
M：右 A-加群　とする。このとき、

$$M\text{：完全可約} \iff M(\mathrm{rad}A) = 0$$

が成り立つことを示せ。

解；
「$\Longrightarrow$」の証明：
$\mathrm{rad}A = \mathrm{rad}(A^{\mathrm{op}})$ である (演習 1-48) から、

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{M:\text{既約右 } A\text{-加群}} \mathrm{ann}M, \qquad \mathrm{ann}M = \{a \in A \mid Ma = 0\}$$

が成り立つ。したがって、完全可約な右 A-加群 M に対して、$M(\mathrm{rad}A) = 0$ となる。
「$\Longleftarrow$」の証明：
右 A-加群 M が $M(\mathrm{rad}A) = 0$ を満たしているとする。このとき、M を自然な射影 $\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ を通じて右 $A/\mathrm{rad}A$-加群とみなすことができる。系 2-6 により $A/\mathrm{rad}A$ は半単純であるから、M はいくつかの既約な右 $A/\mathrm{rad}A$-加群の直和になる。任意の右 $A/\mathrm{rad}A$-加群 N は、π を経由して右 A-加群とみなせるが、N が右 $A/\mathrm{rad}A$-加群として既約ならば、右 A-加群としても既約になる (系 2-7 の証明参照)。よって、M はいくつかの既約な右 A-加群の直和になるので、右 A-加群として完全可約である。 (Q.E.D.)

演習 2-21

V：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間
$T \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$　とする。
$\boldsymbol{k}[T]$ を T によって生成される $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ の部分代数とする。
(1) $\boldsymbol{k}[T]$ はフロベニウス代数であることを示せ。
(2) $\boldsymbol{k}[T]$ が半単純 $\iff$ V は左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群として完全可約 (半単純)　となることを示せ。
さらに、T が三角化可能（$=$ T のすべての固有値が $\boldsymbol{k}$ 内に属する）ならば、
　　$\boldsymbol{k}[T]$ が半単純 $\iff$ T は対角化可能
が成り立つことを示せ。

解；

(1) $A=\boldsymbol{k}[T]$ とおく。左 A-加群として ${}_AA\cong(A_A)^*$ が成り立つことを示す。$T:V\longrightarrow V$ の最小多項式を $m_T(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n,\ (a_i\in\boldsymbol{k},\ i=1,\cdots,n)$ とおく。

$\boldsymbol{k}[T]$ は $\{1,T,T^2,\cdots,T^{n-1}\}$ を $\boldsymbol{k}$ 上の基底にもつ。

この基底に関する T の ${}_AA$ への左作用の行列表示は

$$C:=\begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & \text{O} & -a_{n-1} \\ & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \text{O} & & 1 & 0 & -a_2 \\ & & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

となる。一方、T の A_A への右作用も上と同じ行列によって与えられるので、$(A_A)^*$ への T の左作用を $\{1,T,T^2,\cdots,T^{n-1}\}$ の双対基底に関して行列表示したものは、C の転置行列 ${}^tC$ になる。

$\because$)

$\{1,T,T^2,\cdots,T^{n-1}\}$ の双対基底を $\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\}$ とおく：$t_i(T^j)=\delta_{ij},\ i,j=0,1,\cdots,n-1$ 。このとき、各 $i=0,1,\cdots,n-1$ に対して

$$\begin{cases}(T\cdot t_i)(T^j)=t_i(T^jT)=t_i(T^{j+1})=\delta_{i,j+1}\quad(0\le j\le n-2),\\ (T\cdot t_i)(T^{n-1})=t_i(T^n)=-a_1t_i(T^{n-1})-\cdots-a_{n-1}t_i(T^1)-a_nt_i(1)=-a_{n-i}\end{cases}$$

となるので、

$$\begin{cases}T\cdot t_0=-a_nt_{n-1}\\ T\cdot t_1=t_0-a_{n-1}t_{n-1}\\ T\cdot t_2=t_1-a_{n-2}t_{n-1}\\ \qquad\vdots\\ T\cdot t_{n-1}=t_{n-2}-a_1t_{n-1}\end{cases}$$

を得る。 □

よって、左正則加群 ${}_AA$ に対応する A の (行列) 表現は $\rho_1:A\longrightarrow\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}),\ T\longmapsto C$ によって与えられ、右正則加群の双対加群 $(A_A)^*$ に対応する A の (行列) 表現は $\rho_2:A\longrightarrow\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}),\ T\longmapsto{}^tC$ によって与えられる。この 2 つの表現が同値であることを示すには、C と ${}^tC$ が相似なことを示せばよい。

今、P を次のような行列とする。

$$P := \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_1 & -1 \\ -a_{n-2} & & & & -1 & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ -a_1 & -1 & & & \text{O} & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}$$

このとき、P は正則であって、$P^{-1}CP = {}^tC$ が成り立つ。こうして、左 A-加群として ${}_AA \cong (A_A)^*$ となることがわかったので、$A = \boldsymbol{k}[T]$ はフロベニウス代数である。

(2) 「$\boldsymbol{k}[T]$ が半単純 $\Longrightarrow$ V は左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群として完全可約 (半単純)」は、半単純の定義から明らかに成り立つ。逆向きの矢印が成り立つことを示す。

系 2-7 により、$(\mathrm{rad}\boldsymbol{k}[T])V = 0$ が成り立つ。ところが、$\boldsymbol{k}[T] \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ であるから、$(\mathrm{rad}\boldsymbol{k}[T])V = 0$ は $\mathrm{rad}\boldsymbol{k}[T] = 0$ に同値である。したがって、$\boldsymbol{k}[T]$ は半単純である (定理 2-4)。

後半部分を示す。V は左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群として完全可約であると仮定する。このとき、

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \qquad (\text{各 } V_i \text{ は } V \text{ の既約な部分加群})$$

と書き表わされる。$T(V_i) \subset V_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるが、T は三角化可能であり、V_i は既約であるから、$T|_{V_i} : V_i \longrightarrow V_i$ は恒等写像の定数倍になる (Schur の補題の証明参照)。よって、$0 \neq v_i \in V_i$ を任意にとると、$\boldsymbol{k}v_i \subset V_i$ は V_i の 0 でない部分左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群となる。V_i の既約性により、$V_i = \boldsymbol{k}v_i$ でなければならない。こうして、V は 1 次元の部分左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群の直和になることがわかった。このことは、T が対角化可能なことを意味する。実際、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は V の $\boldsymbol{k}$ 上の基底であり、$T(v_i) = \alpha_i v_i,\ \alpha_i \in \boldsymbol{k}$ とおくと、基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に関して T は対角行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \text{O} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

として表わされる。

逆に、T が対角化可能ならば、V は 1 次元の部分左 $\boldsymbol{k}[T]$-加群の直和になるから、既約な部分加群の直和として表わされる。よって、V は半単純である。 (Q.E.D.)

§3. 左 Artin 的単純代数の構造

両側イデアルが 0 と自分自身の 2 つのみしかない代数は、代数の中でも最も「単純」で「基本的」といってよいであろう。このような代数は単純であると呼ばれる。単純代数が左 Artin 代数であるならば、それはある可除代数 D を成分とする全行列代数 $\mathrm{M}_n(D)$ と同型になる。したがって、基礎体 $\boldsymbol{k}$ が代数閉体ならば、有限次元で左 Artin 的単純代数は全行列代数 $\mathrm{M}_d(\boldsymbol{k})$ に同型になる。この節の前半部分では、これらの事実を含む、左 Artin 的単純代数

の持つ性質について調べる。後半部分では、再び半単純代数の構造に感心を向ける。半単純代数は斜体上の行列代数の有限個の直和であるという Wedderburn の構造定理について述べる。最後に応用として、有限次元半単純代数はフロベニウス代数になること (Eilenberg-中山の定理) を示す。

定義 2-3

A ：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

A が**単純** (*simple*) であるとは、A の両側イデアルが 0 と A 自身の 2 つのみであるときをいう。

注意 1°：A が可換のとき、

$$A : \text{単純} \iff A : \text{体}$$

が成り立つ。この意味で、単純代数という概念は、体という概念の 1 つの一般化としてとらえることができる。

注意 2°：$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、$f : A \longrightarrow B$：代数準同型とする。このとき、

$$A：\text{単純} \implies f：\text{単射}$$

が成り立つ。

(proof)

Ker$f$ は A の両側イデアルあるから、A が単純ならば、Ker$f = \{0\}$ または Ker$f = A$ となる。しかるに、$f(1) = 1 \neq 0$ であるから、Ker$f \neq A$ である。よって、Ker$f = \{0\}$ すなわち、f は単射である。 □

例題 2-15

(1) 全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ は単純である (演習 1-4(3))。

(2) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数は単純である (演習 1-6)。

(3) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の n 変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n]$ を考える。$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n])$ の中で、次の元によって生成される部分代数を $W_n(\boldsymbol{k})$ と書き、n 次**ワイル代数** (*Weyl algebra*) と呼ぶ：

$$\begin{cases} x_i : \boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow \boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n], & f \longmapsto X_i f \\ \partial_i : \boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow \boldsymbol{k}[X_1, \cdots, X_n], & f \longmapsto \partial_i(f) \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

但し、∂_i は任意の単項式 $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$　$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq 0)$ に対して

$$\partial_i(X_1^{\alpha_1} \cdots X_i^{\alpha_i} \cdots X_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} \alpha_i\ X_1^{\alpha_1} \cdots X_i^{\alpha_i - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} & \text{if}\ \ \alpha_i \geq 1 \\ 0 & \text{if}\ \ \alpha_i = 0 \end{cases}$$

となるような線形写像である。

$\boldsymbol{k}$ の標数が 0 のとき、ワイル代数 $W_n(\boldsymbol{k})$ は単純である (演習 2-22)。

注意：(1)(2) の代数は左 Atrin 代数であるが、$\boldsymbol{k}$ の標数が 0 のとき、(3) の代数は左 Artin 代数ではない (演習 2-22 の下の注意参照)。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 D が可除であるとは、

$$0 \neq {}^{\forall} a \in A,\ {}^{\exists} b \in A \ \ \text{s.t.}\ \ ab = ba = 1$$

となるときをいうのであった。

定理 2-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。次の 3 つの条件は同値である。

(i) A は左 Artin 的かつ単純である。

(ii) A はある可除代数 D 上の全行列代数 $\mathrm{M}_n(D)$ に同型である。

(iii) A は互いに同型な極小左イデアルの有限個の直和である。

注意：この定理から、次のことが直ちにわかる。

$$A : \text{左 Artin 的かつ単純} \iff A : \text{右 Artin 的かつ単純}$$

(proof)

A が左 Artin 的かつ単純であるとすると、上の定理により、ある可除代数 D と自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して、代数として $A \cong \mathrm{M}_n(D)$ となる。

$\mathrm{M}_n(D)$ は右 Artin 的代数でもある (例題 1-6(2) の証明の「右」版を考えよ) から、A もそうである。

逆に、A が右 Artin 的かつ単純であるとする。このとき、A^{op} は左 Artin 的かつ単純である。したがって、今示したことから、A^{op} は右 Artin かつ単純である。したがってまた、A は左 Artin 的かつ単純である。 □

上の定理の「(iii) $\Longrightarrow$ (ii)」の証明は次の補題が本質的である。

補題 2-17

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：左 A-加群　とする。

$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$,　$M_i \cong M_j$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ であると仮定する。

$D := \mathrm{End}_A(M_1)$ とおく。このとき、

$$\mathrm{End}_A M \cong \mathrm{M}_n(D) \quad \text{as algebras}$$

となる。

(proof)

各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、左 A-加群の同型 $\theta_i : M_1 \longrightarrow M_i$ を 1 つずつ選ぶ。但し、$\theta_1 = \mathrm{id}_{M_1}$ とする。

同型写像 $\mathrm{End}_A M \longrightarrow \mathrm{M}_n(D)$ を作るため、任意に $f \in \mathrm{End}_A M$ をとる。

各 $i, j = 1, \cdots, n$ に対して、写像 $f_{ij} : M_1 \longrightarrow M_1$ を次のように定義する：

$x_1 \in M_1$ を任意にとる。このとき、$f(\theta_j(x_1)) \in M = \theta_1(M_1) \oplus \theta_2(M_1) \oplus \cdots \oplus \theta_n(M_1)$ であるから、

$$^{\exists 1} f_{ij}(x_1) \in M_1 \ (i = 1, \cdots, n) \ \text{ s.t. } \ f(\theta_j(x_1)) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(f_{ij}(x_1))$$

となる。各 $x_1 \in M_1$ に $f_{ij}(x_1) \in M_1$ を対応させる写像として $f_{ij} : M_1 \longrightarrow M_1$ が定義される。

$$f_{ij} \in \mathrm{End}_A(M_1) = D$$

となる。

$\because$)

$a \in A,\ x_1 \in M_1$ に対して、

$$f(\theta_j(a \cdot x_1)) = a \cdot f(\theta_j(x_1)) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

であるから、各 $i, j = 1, \cdots, n$ に対して

$$\theta_i(f_{ij}(a \cdot x_1)) = a \cdot \theta_i(f_{ij}(x_1))$$

を得る。θ_i は同型であるから

$$f_{ij}(a \cdot x_1) = a \cdot f_{ij}(x_1)$$

を得る。 □

写像 $\varphi : \mathrm{End}_A M \longrightarrow \mathrm{M}_n(D)$ を

$$\varphi(f) = (f_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \qquad (f \in \mathrm{End}_A M)$$

によって定義する。

i. φ は代数準同型である。

$\because$)

$$(g \circ f)(\theta_j(x_1)) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i((g \circ f)_{ij}(x_1))$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} g(f(\theta_j(x_1))) &= g(\sum_{k=1}^{n} \theta_k(f_{kj}(x_1))) \\ &= \sum_{k=1}^{n} g(\theta_k(f_{kj}(x_1))) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \theta_i(g_{ik}(f_{kj}(x_1))) \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore\ (g \circ f)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \circ f_{kj}$$

を得る。 □

ii. φ は単射である。

$\varphi(f)=0$ とすると、任意の $i,j=1,\cdots,n$ に対して、$f_{ij}=0$ となる。したがって、$x_j\in M_j$ とするとき、

$$f(x_j)=f(\theta_j(\theta_j^{-1}(x_j)))=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(f_{ij}(\theta_j^{-1}(x_j)))=0$$

となる。これは、$f|_{M_j}=0$ となることを意味する。$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$ であることと f が和を保つことから $f=0$ を得る。故に、φ は単射である。

iii. φ は全射である。

任意に $(f_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}\in \mathrm{M}_n(D)$ をとる。各 $x_j\in M_j$ に対して、

$$y_j=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(f_{ij}(\theta_i^{-1}(x_j)))\quad\in M$$

とおく。写像 $f:M\longrightarrow M$ を各 $x=x_1+\cdots+x_n\ \in M,\ x_j\in M_j\ (j=1,\cdots,n)$ に対して

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}y_j$$

を対応させる写像として定義する。

f は左 A-加群準同型であり、$\varphi(f)=(f_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ となっていることがわかる。(Q.E.D.)

(proof of Theorem 2-16)

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明：

A が

$$A=I_1\oplus\cdots\oplus I_n$$

のように互いに同型な極小左イデアル $I_1,\cdots,I_n$ の直和に書けたとする。

補題 2-17 から、$D:=\mathrm{End}_A(I_1)$ とおくと、

$$\mathrm{End}_A({}_AA)\cong \mathrm{M}_n(D)$$

となる。極小左イデアル I_1 は左正則加群 ${}_AA$ の既約な部分加群であるから、補題 2-12(2) によって、D は可除代数である。

写像 $\mathrm{End}_A({}_AA)\longrightarrow A,\ f\longmapsto f(1)$ は反代数同型写像であるから、A は代数 $\mathrm{End}_A({}_AA)^{\mathrm{op}}\cong \mathrm{M}_n(D)^{\mathrm{op}}$ と同型になる。

$$\mathrm{M}_n(D)^{\mathrm{op}}\cong \mathrm{M}_n(D^{\mathrm{op}})\qquad\text{as algebras}$$

であるから、

$$A\cong \mathrm{M}_n(D^{\mathrm{op}})\qquad\text{as algebras}$$

を得る。D^{op} は可除であるから、「(iii) $\Longrightarrow$ (ii)」が証明された。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明：

D を体 $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数とする。例題 1-6(2) により、全行列代数 $\mathrm{M}_n(D)$ は左 Artin 代数であることはわかっている。$\mathrm{M}_n(D)$ が単純代数になることを示す。

$E_{ij}\in \mathrm{M}_n(D)$ を (i,j)-成分が 1 で、残りの成分は 0 であるような行列を表わすことにする。$\mathrm{M}_n(D)$ の任意の元は一意的に $\sum\limits_{i,j=1}^{n}d_{ij}E_{ij},\ d_{ij}\in D$ と表わすことができる。

I を $\mathrm{M}_n(D)$ の 0 でない両側イデアルとする。

$$0 \neq \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}E_{ij} \in \mathrm{M}_n(D)$$

とし、$d_{pq} \neq 0$ であるとする。このとき、任意の $k, l = 1, \cdots, n$ に対して

$$I \ni E_{kp}(\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}E_{ij})E_{ql} = d_{pq}E_{kl}$$

となることが

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{if} \quad j = k \\ 0 & \text{if} \quad j \neq k \end{cases}$$

を用いることによりわかる。よって、

$$I \ni \sum_{k=1}^{n} d_{pq}E_{kk} = d_{pq} \cdot I_n \qquad (\text{但し、} I_n \text{ は単位行列})$$

がわかる。D は可除であるから、$d_{pq}(\neq 0)$ は D 内に逆元を持つ。故に、$1 \in I$ が得られた。これは、$I = \mathrm{M}_n(D)$ となることを意味する。

(i) $\Longrightarrow$ (iii) の証明：

A は左 Artin 代数なので、極小左イデアル I が存在する。

$I^\vee := \mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ とおく。

$$T := \sum_{\alpha \in I^\vee} \alpha(I) \subset A$$

は A の両側イデアルである。

$\because)$

> この結果は T が I のトレースイデアルと呼ばれるものであることから従う (補題 1-59 の下の注意参照) が、ここで再証明しておこう。
>
> i. T が左イデアルであること：$x \in I,\ \alpha \in I^\vee$ および $a \in A$ に対して、
>
> $$a\alpha(x) = \alpha(ax)$$
>
> と書けて、$ax \in I$ となることからわかる。
>
> ii. T が右イデアルであること：$x \in I,\ \alpha \in I^\vee$ および $a \in A$ に対して、
>
> $$\alpha(x)a = \beta(x), \qquad \text{但し、} \beta : I \longrightarrow A,\ x \longmapsto \alpha(x)a$$
>
> と書けて、$\beta \in I^\vee$ となることからわかる。 $\square$

包含写像 $I \hookrightarrow A$ は $I^\vee$ の元であるから、

$$I \subset T$$

である。故に、$T \neq 0$ であることがわかる。A の単純性より、$T = A$ を得る。したがって、A の単位元 1 は

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(a_i) \qquad\qquad (a_i \in I,\ \alpha_i \in I^\vee,\ i = 1, \cdots, m)$$

と表わされる。これを用いて、写像 $\varphi : \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{m\text{ 個}} \longrightarrow A$ を

$$\varphi(b_1, \cdots, b_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(b_i) \qquad (b_i \in I,\ i = 1, \cdots, m)$$

によって定義することができる。

φ は全射な左 A-加群準同型である。

$\because$)

φ が左 A-加群準同型であることはすぐにわかる。また、任意の $a \in A$ に対して、

$$a = a \cdot 1 = a \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(a_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(aa_i)$$

となるから、φ は全射である。 $\square$

準同型定理により

$$_AA \cong (I \oplus \cdots \oplus I)/\mathrm{Ker}\varphi \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。I は $_AA$ の既約な部分加群であるから、$M := I \oplus \cdots \oplus I$ は完全可約な左 A-加群である。したがって、その部分加群 $\mathrm{Ker}\varphi$ は M の直和因子であり、$M/\mathrm{Ker}\varphi$ はまた M のある部分加群と同型になる (補題 2-1(1) 参照)。したがって、$M/\mathrm{Ker}\varphi$ は I の有限個 (m 個以下) の直和に同型である (補題 2-1(2) 参照)。

これで、証明が終わった。 (Q.E.D.)

系 2-18

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元単純代数　とする。

$\boldsymbol{k}$：代数閉体 $\Longrightarrow$ A は全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ に同型である。

(proof)

定理 2-16 より、

$$^{\exists}D\text{：代数閉体 } \boldsymbol{k} \text{ 上の可除代数},\ \ ^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ A \cong \mathrm{M}_n(D)$$

となる。代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数は $\boldsymbol{k}$ と同型である (演習 1-5) から、$D \cong \boldsymbol{k}$ となり、したがって、

$$A \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \quad \text{as algebras}$$

を得る。 (Q.E.D.)

定理 2-19

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 的単純代数　とする。このとき、

(1) 既約な左 A-加群（特に、A の極小左イデアル）は、すべて互いに同型である。

(2) $A \cong \mathrm{M}_n(D)$ となる自然数 n は唯一であり、$\boldsymbol{k}$ 上の可除代数 D は同型を除いて一意的である。

(2) の条件を満たす可除代数 D を A **に属する可除代数**と呼ぶ。

(proof)

(1) 既約な左 A-加群は、ある極大左イデアル $J \subset A$ に対して、A/J に同型である (演習 1-36)。

A は単純であるから、I を A の極小左イデアルとすると、定理 2-16 より、

$$A \cong I \oplus \cdots \oplus I \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。I は ${}_AA$ の部分加群としては既約であるから、J は I のいくつかの直和と同型であり (補題 2-1)、したがって、A/J も I のいくつかの直和と同型である。

しかし、A/J は既約であるから、左 A-加群として、$A/J \cong I$ でなければならない。

(2) 存在については証明済み (定理 2-16) なので、一意性を示す。まず、D が同型を除いて一意的なことを示す。

E_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$ を $\mathrm{M}_n(D)$ の行列単位とする。このとき、$j = 1, \cdots, n$ として

$$I_j = DE_{1j} + \cdots + DE_{nj} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; d_{1j}, d_{2j}, \cdots, d_{nj} \in D \right\}$$

とおくと、これは $\mathrm{M}_n(D)$ の極小左イデアルであって、

$$\mathrm{M}_n(D) = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$$

が成り立つ。

$B = \mathrm{M}_n(D)$ とおく。このとき、$D^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B(I_1)$ が成り立つ。

$\because)$

$d \in D$ に対して、$\varphi_d : I_1 \longrightarrow I_1$ を $\varphi_d(\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d_1 d & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ によって定義する。φ_d は左 B-加群準同型である。

そこで、写像 $D \longrightarrow \mathrm{End}_B(I_1),\ d \longmapsto \varphi_d$ を考える。この写像は単射な反代数準同型である。

この写像は全射でもある。これを示す。任意に $\varphi \in \mathrm{End}_B(I_1)$ をとる。

$$\varphi(E_{i1}) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} E_{j1} \qquad (d_{ij} \in D)$$

とおく。このとき、任意の $p, q = 1, \cdots, n$ に対して、

$$\varphi(E_{pq} E_{i1}) = E_{pq} \varphi(E_{i1})$$

でなければならないから、

$$\delta_{qi} \sum_{j=1}^{n} d_{pj} E_{j1} = d_{iq} E_{p1}, \qquad \text{すなわち} \qquad \delta_{qi} d_{pj} = \delta_{pj} d_{iq} \quad (i, j, p, q = 1, \cdots, n)$$

を得る。この最後の式で $p=j,\ q=i$ の場合を考えると $d_{pp}=d_{qq}$ が得られ、$p\neq j,\ q=i$ の場合を考えると $d_{pj}=0$ が得られる。$d=d_{11}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\varphi(\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}) &= \varphi(\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} E_{11}) \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \varphi(E_{11}) \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 d & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_n d & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。よって、$\varphi=\varphi_d$ であることがいえた。 □

$f:B\longrightarrow A$ を代数準同型とすると、$f(I_1)$ は A の極小左イデアルであり、$\mathrm{End}_B(I_1)\cong\mathrm{End}_A(f(I_1))$ が成り立つ。

故に、$A\cong \mathrm{M}_n(D)$ ならば、

$$^{\exists}I : A \text{ の極小左イデアル} \quad \text{s.t.}\quad D^{\mathrm{op}}\cong \mathrm{End}_A I \qquad \text{as algebras}$$

となることがわかった。(1) により、A の極小左イデアルは互いに同型であるから、D が同型を除いて一意であることが証明された。

次に、$n\in\mathbb{N}$ の一意性を示す。$\mathrm{M}_n(D)$ は n 個の極小左イデアル $I_1,\cdots,I_n$ の直和であるから、代数として $A\cong\mathrm{M}_n(D)$ ならば、A も n 個の極小左イデアルの直和になる。よって、I を A の極小左イデアルとすれば、(1) より、

$${}_AA\cong \underbrace{I\oplus\cdots\oplus I}_{n\text{ 個}} \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。このとき、

$$\mathrm{Hom}_A(I,{}_AA)\cong\mathrm{Hom}_A(I,I^{\oplus n})\cong\mathrm{Hom}_A(I,I)^{\oplus n}=(\mathrm{End}_A I)^{\oplus n} \quad \text{as vector spaces}$$

である。この同型写像は $\varphi:{}_AA\longrightarrow I^{\oplus n}$ を左 A-加群の同型とし、$p_i:I^{\oplus n}\longrightarrow I,\ i=1,\cdots,n$ を直和 $I^{\oplus n}$ を直積とみなしたときに附随する標準的な射影とするとき、

$$f\in\mathrm{Hom}_A(I,{}_AA)\longmapsto (p_i\circ\varphi\circ f)_{i=1,\cdots,n}\in(\mathrm{End}_A I)^{\oplus n}$$

によって与えられる。この線形同型写像 $\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA) \longrightarrow (\mathrm{End}_A I)^{\oplus n},\ f \longmapsto (p_i \circ \varphi \circ f)_{i=1,\cdots,n}$ は、右 $\mathrm{End}_A I$-加群としての同型でもある。

∵)

$\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ への $\mathrm{End}_A I$ の右作用を

$$f \cdot d := f \circ d \qquad\qquad f \in \mathrm{Hom}_A(I, {}_AA),\ d \in \mathrm{End}_A I$$

のように、写像の合成で定義する。$\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ はこの作用に関して右 $\mathrm{End}_A I$-加群になる。また、$(\mathrm{End}_A I)^{\oplus n}$ への $\mathrm{End}_A I$ の右作用を

$$(f_i)_{i=1,\cdots,n} \cdot d := (f_i \circ d)_{i=1,\cdots,n} \qquad\qquad (f_i)_{i=1,\cdots,n} \in (\mathrm{End}_A I)^{\oplus n},\ d \in \mathrm{End}_A I$$

のように、写像の合成で定義する。$(\mathrm{End}_A I)^{\oplus n}$ はこの作用に関して右 $\mathrm{End}_A I$-加群になる。これらの作用を線形同型写像 $\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA) \longrightarrow (\mathrm{End}_A I)^{\oplus n},\ f \longmapsto (p_i \circ \varphi \circ f)_{i=1,\cdots,n}$ は確かに保っているので、これは右 $\mathrm{End}_A I$-加群としての同型でもある。 □

今得られた結果をまとめると、

$$A \cong \mathrm{M}_n(D) \implies \mathrm{Hom}_A(I, {}_AA) \cong (\mathrm{End}_A I)^{\oplus n} \quad \text{as right } \mathrm{End}_A I\text{-modules}$$

となる。ところで、I は左 A-加群として見ると、既約であるから、$\mathrm{End}_A I$ は可除代数である (補題 2-12(2))。よって、右 $\mathrm{End}_A I$-加群 $\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ は可除代数 $\mathrm{End}_A I$ 上の右ベクトル空間であり、右 $\mathrm{End}_A I$-加群として $\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA) \cong (\mathrm{End}_A I)^{\oplus n}$ となることから、$\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ の $\mathrm{End}_A I$ 上の右ベクトル空間としての次元は n である。つまり、

$A \cong \mathrm{M}_n(D) \implies n = (\mathrm{Hom}_A(I, {}_AA)$ を $\mathrm{End}_A I$ 上の右ベクトル空間としてみたときの次元)

となる。故に、n も一意的である。 (Q.E.D.)

注意 1°：上の定理から、$D_1,\ D_2$ が体 $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数のとき、

$$\mathrm{M}_m(D_1) \cong \mathrm{M}_n(D_2) \quad \text{as algebras} \implies m = n \text{ かつ } D_1 \cong D_2 \quad \text{as algebras}$$

が成り立つことがわかる。しかしながら、一般に、$\boldsymbol{k}$ 上の代数 $A_1,\ A_2$ に対して

$$\mathrm{M}_m(A_1) \cong \mathrm{M}_n(A_2) \quad \text{as algebras} \implies m = n \text{ かつ } A_1 \cong A_2 \quad \text{as algebras}$$

は成立しない。例えば、$m \neq n$ とし、$A_1 = \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}),\ A_2 = \mathrm{M}_m(\boldsymbol{k})$ の場合を考えると、$\dim A_1 = n^2 \neq m^2 = \dim A_2$ なので、$A_1 \ncong A_2$ であるが、$\mathrm{M}_m(A_1) \cong \mathrm{M}_{nm}(\boldsymbol{k}) \cong \mathrm{M}_n(A_2)$ が成立する。なお、

$$\mathrm{M}_n(A_1) \cong \mathrm{M}_n(A_2) \quad \text{as algebras} \implies A_1 \cong A_2 \quad \text{as algebras}$$

は多くの場合に正しい (T.Y.Lam・著『Exercises in classical ring theory』p.24–p.25 参照)。

注意 2°：D が左 Artin 的単純代数 A に属する可除代数のとき、

$$Z(A) \cong Z(D) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras}$$

が成り立つ。

(proof)

仮定により、

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ A \cong \mathrm{M}_n(D) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras}$$

となる。これらの中心をとることにより、

$$Z(A) \cong Z(\mathrm{M}_n(D)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-4(3)}}}{\cong} Z(D) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras}$$

を得る。 □

ここからは、再び半単純代数の構造について調べる。次は本質的には定理 2-8 ですでに証明されている。

定理 2-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

$$A\text{：半単純} \iff A \text{ は左 Artin 的単純代数の有限個の直和に同型}$$

が成り立つ。

(proof)

「$\Longrightarrow$」の証明：

$A = M_1(A) \oplus \cdots \oplus M_n(A)$ を Wedderburn 分解とする。

各 $M_i(A)$ が単純な代数であることを証明する。

まず、定理 2-8 により、$M_i(A)$ は A の極小な両側イデアルであることに注意する。

I を $M_i(A)$ の両側イデアルとする。I が A の両側イデアルとなることが示されれば、$M_i(A)$ の極小性により、$I = 0$ または $I = \mathrm{M}_i(A)$ となる、すなわち、$M_i(A)$ が単純であることがわかる。そこで、I が A の両側イデアルとなることを示す。

$a \in I$ を任意にとる。

$$a = a_1 + \cdots + a_n \qquad (a_j \in M_j(A),\ j = 1, \cdots, n)$$

と書くことができる。

$aI \subset a_1 I + \cdots + a_n I$ であるが、

$$a_j I \subset M_i(A) M_j(A) \subset M_i(A) \cap M_j(A), \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であるので、$j \neq i$ ならば $a_j I = 0$ となる。したがって、

$$aI \subset a_i I \subset I$$

$\hookleftarrow$ I は $M_i(A)$ の両側イデアル

を得る。同様にして、$Ia \subset I$ も得られる。よって、$M_i(A)$ は単純な代数である。

半単純代数は左 Artin 代数である (演習 2-5) から、${}_AA$ は左 Artin 加群である。左 Artin 加群の任意の直和因子も左 Artin 加群となる (演習 1-49 の下の注意) から、各 $M_i(A)$ は左 A-加群として Artin 加群になる。$M_i(A)$ の左イデアルは A の左イデアルでもある (注：両側イデアルのときの上の証明と同様に示すことができる) から、$M_i(A)$ の左正則加群は左 Artin 加群である。よって、$M_i(A)$ は左 Artin 代数である。

「$\Longleftarrow$」の証明：

左 Artin 的単純代数が半単純なことを証明すればよい (演習 2-2)。

これは、命題 2-2 と定理 2-16 より直ちに得られる。 (Q.E.D.)

系 2-21(Wedderburn の構造定理)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

A：半単純 $\iff$ ${}^{\exists}n_1, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$, ${}^{\exists}D_1, \cdots, D_m$: $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数

$$\text{s.t.}\quad A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(D_m) \quad \text{as algebras}$$

が成り立つ。

(proof)

定理 2-20 と定理 2-16 による。 (Q.E.D.)

系 2-22

代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A について

A：半単純 $\iff$ $A \cong \mathrm{M}_{n_1}(\boldsymbol{k}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(\boldsymbol{k})$ for some $n_1, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$ as algebras

(proof)

定理 2-20 と系 2-18 による。 (Q.E.D.)

定理 2-20 の応用をもう 1 つ述べよう。

定理 2-23(Eilenberg-中山)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数

$\Longrightarrow$ A：フロベニウス代数

(proof)

半単純代数は左 Artin 的単純代数の有限個の直和に分解されるので、有限次元の左 Artin 的単純代数がフロベニウス代数になることを示せばよい (補題 1-23(1))。

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元左 Artin 的単純代数とすると、A は $\boldsymbol{k}$ 上のある可除代数 D 上の全行列代数 $M_n(D)$ と同型になる (定理 2-16)。

有限次元可除代数はフロベニウス代数である (例題 1-28(2)) から、$M_n(D)$ はフロベニウス代数である (命題 1-29)。

したがって、それと同型な A もフロベニウス代数である。 (Q.E.D.)

注意 1°：この定理の逆は、もちろん、成立しない (演習 2-21)。

注意 2°：上では、有限次元半単純代数がフロベニウス代数になることを示したが、実は、もう少し強いことが言える。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上で定義された有限次元半単純代数は対称代数になるのである (対称代数については演習 1-55 を参照)。この事実は第 4 章で証明される (演習 4-17 参照)。

演習 2-22

$\boldsymbol{k}$ を標数 0 の体とする。

(1) $W_n(\boldsymbol{k})$ の元 p は

$$p = \sum_{\substack{\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq 0 \\ \beta_1, \cdots, \beta_n \geq 0}} c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n} \qquad (c_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n} \in \boldsymbol{k})$$

の形の有限和に一意的に書くことができることを示せ。

(2) n 次ワイル代数 $W_n(\boldsymbol{k})$ は単純であることを示せ。

解；

(1) 次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} \partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij}\mathrm{id} \\ x_i x_j = x_j x_i \\ \partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \end{cases} \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

この関係式を繰り返し使うことにより、任意の $p \in W_n(\boldsymbol{k})$ を (1) のような形の式の有限和に書くことができる。一意性を示す。そのためには、$p \in W_n(\boldsymbol{k})$ を

$$p = \sum_{\beta_1, \cdots, \beta_n \geq 0} p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n) \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}, \qquad p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]$$

のように書くとき、$p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n)$ が一意的に定まることを示せばよい (ここで、$\boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]$ は $x_1, \cdots, x_n$ で生成される $W_n(\boldsymbol{k})$ の部分代数を表わした)。これを $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i$ に関する帰納法で示す。m を 0 以上の整数として

$$\mathcal{B}_m := \{(\beta_1, \cdots, \beta_n) \mid \beta_i \geq 0,\ m = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\}$$

とおく。

. $m = 0$ のとき：$\mathcal{B}_0 = \{(0, \cdots, 0)\}$ である。

$$(\partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n})(1) = \begin{cases} 1 & \text{if } \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なので、

$$p_{0, \cdots, 0}(x_1, \cdots, x_n) = p(1)$$

である。よって、$\mathcal{B}_0$ の元 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ について $p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n)$ が一意的に定まる。

.$m > 0$ とし、$\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \mathcal{B}_k$ の任意の元 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ について $p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n)$ が一意的に定まっていると仮定する。このとき、

$$q := p - \sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \mathcal{B}_k} p_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}(x_1, \cdots, x_n) \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$

は一意的に定まる。

$q = \sum\limits_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} \mathcal{B}_k} p_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}(x_1, \cdots, x_n) \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ であり、任意の $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対して

$$\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}(X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i,\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \cdots, \beta_n) \\ \beta_1! \cdots \beta_n! & \text{if } (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \end{cases}$$

であるから、$(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathcal{B}_m$ に対して

$$q(X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}) = \beta_1! \cdots \beta_n! p_{\beta_1, \cdots, \beta_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

となることがわかる。$\boldsymbol{k}$ の標数は 0 であるから、

$$p_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{q(X_1^{\beta_1}\cdots X_n^{\beta_n})}{\beta_1!\cdots\beta_n!}$$

となる。故に、$\mathcal{B}_m$ の元 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ についても $p_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(x_1,\cdots,x_n)$ は一意的に定まっている。数学的帰納法により、$p_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(X_1,\cdots,X_n)$ がすべての $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ に対して一意的に定まることが示された。

(2) $0\neq p\in W_n(\boldsymbol{k})$ を (1) のように表わすとき、

$$\begin{aligned}\deg_{x_i}(p) :=&\max\{\alpha_i \mid c_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n}\neq 0,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0,\ \beta_1,\cdots,\beta_n\geq 0\}\\ \deg_{\partial_i}(p) :=&\max\{\beta_i \mid c_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n}\neq 0,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0,\ \beta_1,\cdots,\beta_n\geq 0\}\end{aligned}$$

と定める。また、$p,q\in W_n(\boldsymbol{k})$ に対して

$$[p,q]:=pq-qp$$

と定める。

I を $W_n(\boldsymbol{k})$ の 0 でない両側イデアルとする。$0\neq p\in I$ をとる。このとき、次が成り立つ。

$$◎\ \deg_{x_i}(p)\geq 1 \implies \begin{cases}①0\neq[\partial_i,p]\in I\\ ②\deg_{x_i}([\partial_i,p])=\deg_{x_i}(p)-1,\ \ \deg_{x_j}([\partial_i,p])\leq\deg_{x_j}(p)\ \ (j\neq i)\\ ③\deg_{\partial_j}([\partial_i,p])\leq\deg_{\partial_j}(p)\ \ (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

∵)

$F\in W_n(\boldsymbol{k})$ とする。このとき、任意の $f\in\boldsymbol{k}[X_1,\cdots,X_n]$ に対して

$$\begin{aligned}&(\partial_i x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}F)(f)\\ =&\partial_i(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}F(f))\\ =&\begin{cases}\alpha_i X_1^{\alpha_1}\cdots X_i^{\alpha_i-1}\cdots X_n^{\alpha_n}F(f)+X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}\partial_iF(f) & \text{if}\ \ \alpha_i\geq 1\\ X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}\partial_iF(f) & \text{if}\ \ \alpha_i=0\end{cases}\end{aligned}$$

となるから、

$$\partial_i x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}F=\begin{cases}\alpha_i x_1^{\alpha_1}\cdots x_i^{\alpha_i-1}\cdots x_n^{\alpha_n}F+x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_iF & \text{if}\ \ \alpha_i\geq 1\\ x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_iF & \text{if}\ \ \alpha_i=0\end{cases}$$

となる。したがって、

$$[\partial_i,\ x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}]=\begin{cases}\alpha_i x_1^{\alpha_1}\cdots x_i^{\alpha_i-1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n} & \text{if}\ \ \alpha_i\geq 1\\ 0 & \text{if}\ \ \alpha_i=0\end{cases}$$

を得る。

$$[\partial_i,\ p]=\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0\\ \beta_1,\cdots,\beta_n\geq 0}}c_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n}[\partial_i,\ x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}]$$

であるから、$[\partial_i,\ p]\neq 0$ であり、②③が成立することがわかる (注：$\deg_{x_j}(p)$ を与える $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta n$ の組において、$\alpha_i=0$ である場合には、$[\partial_i,\ p]$ によってその項が消えてしまうので、$\deg_{x_j}([\partial_i,p])<\deg_{x_j}(p)$ となる)。I は両側イデアルなので、$[\partial i,\ p]=\partial_ip-p\partial_i\in I$ となる。よって、①も成立する。 □

したがって、p に $[\partial_1,-]$ を高々 $\deg_{x_1}(p)$ 回施し、……、$[\partial_n,-]$ を高々 $\deg_{x_n}(p)$ 回施すことにより、

$$0\neq {}^{\exists}q\in I\ \text{ s.t. }\ \deg_{x_i}(p)=0\ \ (i=1,\cdots,n)$$

がわかる。この q について次が成り立つ：

$$◎\ \deg_{\partial_i}(q)\geq 1\implies\begin{cases}①0\neq[q,x_i]\in I\\ ②\deg_{x_j}([q,x_i])=0\ \ (j=1,\cdots,n)\\ ③\deg_{\partial_i}([q,x_i])=\deg_{\partial_i}(q)-1,\ \ \deg_{\partial_j}([q,x_i])\leq\deg_{\partial_j}(q)\ \ (j\neq i)\end{cases}$$

$\because$)

任意の $f\in\boldsymbol{k}[X_1,\cdots,X_n]$ に対して

$$\begin{aligned}&[\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n},\ x_i](f)\\ =&(\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}x_i)f-(x_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n})f\\ =&\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}(X_if)-X_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}(f)\\ =&\begin{cases}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_i^{\beta_i-1}\cdots\partial_n^{\beta_n}(f)+X_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_i^{\beta_i-1}\cdots\partial_n^{\beta_n}\partial_i(f)-X_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}(f) & \text{if }\ \beta_i\geq 1\\ X_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}f-x_i\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}f & \text{if }\ \beta_i=0\end{cases}\\ =&\begin{cases}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_i^{\beta_i-1}\cdots\partial_n^{\beta_n}f & \text{if }\ \beta_i\geq 1\\ 0 & \text{if }\ \beta_i=0\end{cases}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$[\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n},\ x_i]=\begin{cases}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_i^{\beta_i-1}\cdots\partial_n^{\beta_n} & \text{if }\ \beta_i\geq 1\\ 0 & \text{if }\ \beta_i=0\end{cases}$$

となる。$0\neq q\in I$ を $q=\sum_{\beta_1,\cdots,\beta_n\geq 0}c_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n}$ と書くとき、

$$[q,\ x_i]=\sum_{\beta_1,\cdots,\beta_n\geq 0}c_{\beta_1,\cdots,\beta_n}[\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_n^{\beta_n},\ x_i]$$

となるから、$[q,\ x_i]\neq 0$ であって、②③が成立する。I は両側イデアルなので、$[q,\ x_i]=qx_i-x_iq\in I$ となる。よって、①も成立する。 □

したがって、q に $[-,x_1]$ を高々 $\deg_{\partial_1}(q)$ 回施し、……、$[-,x_n]$ を高々 $\deg_{\partial_n}(q)$ 回施すことにより、

$$0\neq {}^{\exists}r\in I\ \text{ s.t. }\ \deg_{x_i}(p)=0,\ \deg_{\partial_i}(p)=0\ \ (i=1,\cdots,n)$$

がわかる。これは $r=c\mathrm{id}\ \ (c\in\boldsymbol{k}-\{0\})$ と書けることを意味する。よって、$\mathrm{id}\in I$ となり、$I=W_n(\boldsymbol{k})$ が示された。 (Q.E.D.)

注意：(1) により、$W_n(\boldsymbol{k})$ の左イデアルの降鎖列 $W_n(\boldsymbol{k})\supsetneqq W_n(\boldsymbol{k})x_1\supsetneqq W_n(\boldsymbol{k})x_1^2\supsetneqq\cdots\cdots$ が得られる。よって、$W_n(\boldsymbol{k})$ は左 Artin 代数でなはい。

演習 2-23

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、次を示せ。

(1) A：単純 $\Longleftrightarrow$ A^{op}：単純

(2) A：半単純 $\Longleftrightarrow$ A^{op}：半単純

解；

(1) $I \subset A$ について、

$$I : A \text{ の両側イデアル} \iff I : A^{\mathrm{op}} \text{ の両側イデアル}$$

が成り立つ。したがって、A の両側イデアルが $\{0\}$ と自分自身しかないならば、A^{op} もそうである。これで、(1) が示された。

(2) A が半単純ならば、定理 2-20 により、

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i : \text{左 Artin 的単純 } (i = 1, \cdots, n)$$

となる。このとき、

$$A^{\mathrm{op}} = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{op}}$$

となる。(1) により各 A_i^{op} は単純であるから、A_i^{op} は右 Artin 的単純代数である。ところが、単純代数が右 Artin であることと左 Artin 的であることは同値である (定理 2-16 の下の注意参照) から、A^{op} は左 Artin 的単純代数の有限個の直和で書けたことになる。再び、定理 2-20 により、A^{op} は半単純である。 (Q.E.D.)

注意：代数として $\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{op}}$ であった (演習 1-11(2)) から、上の結果より

$$A\text{：半単純} \iff \mathrm{End}_A({}_AA)\text{：半単純}$$

が成り立つ。

演習 2-24

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。このとき、

$$A\text{：単純} \iff {}_AA_A \text{ は左 } A^e\text{-加群として既約}$$

となることを示せ。

解；

$I \subset A$ について

$$I\text{：}A \text{ の両側イデアル} \iff I \text{ は } A \text{ を 左 } A^e\text{-加群として見たときの部分加群}$$

が成り立つ。これより、

$$A\text{：単純} \iff {}_AA_A \text{ は左 } A^e\text{-加群として既約}$$

となる。 (Q.E.D.)

演習 2-25

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とし、
$\rho_l : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ を $\rho_l(a)(b) = ab, \quad a, b \in A,$
$\rho_r : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ を $\rho_r(a)(b) = ba, \quad a, b \in A$ と定める。
(1) $A_l := \mathrm{Im}\rho_l,\ A_r := \mathrm{Im}\rho_r$ とおくと、これらは $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ の部分代数であることを示せ。
(2) A のすべての左作用と可換な元 $f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(A)$ は A の右作用である、すなわち、

$$A_r = Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A}(A_l)$$

となることを示せ。
(3) 次を示せ。

$$A\text{：単純} \quad \Longrightarrow \quad A_l \cong A, \quad A_r \cong A^{\mathrm{op}} \quad \text{as algebras}$$

(4) A の両側正則加群 ${}_AA_A$ を自然に左 A^e-加群とみなす (第 1 節参照)。このとき、

$$A\text{：単純} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{End}_{A^e}({}_AA_A) \cong Z(A) \quad \text{as algebras}$$

となることを示せ。

解；

(1) $\rho_l,\ \rho_r$ がそれぞれ代数準同型、反代数準同型であることはすぐに確かめられる。よって、その像 $A_l := \mathrm{Im}\rho_l,\ A_r := \mathrm{Im}\rho_r$ は $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ の部分代数になる。

(2) $A_r \subset Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A}(A_l)$ であることは明らかであろう。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。任意に $f \in Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A}(A_l)$ をとる。任意の $a \in A$ に対して、

$$\rho_l(a) \circ f = f \circ \rho_l(a)$$

となる。これは、任意の $a, b \in A$ に対して

$$af(b) = f(ab)$$

となることと同値である。特に、

$$af(1) = f(a) \qquad \text{for } {}^\forall a \in A$$

となる。これは、

$$f = \rho_r(f(1))$$

となることを意味する。故に、$Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A}(A_l) \subset A_r$ も示された。

(3) $\rho_l,\ \rho_r$ はそれぞれ代数準同型、反代数準同型なので、$\mathrm{Ker}\rho_i,\ \mathrm{Ker}\rho_r$ は A の両側イデアルである。$\mathrm{Ker}\rho_i,\ \mathrm{Ker}\rho_r$ に A の単位元は含まれないから、$\mathrm{Ker}\rho_i,\ \mathrm{Ker}\rho_r \neq A$ である。したがって、A の単純性により、$\mathrm{Ker}\rho_i,\ \mathrm{Ker}\rho_r = \{0\}$ でなければならない。よって、ρ_l, ρ_r は単射であり、その結果として、

$$A_l \cong A, \quad A_r \cong A^{\mathrm{op}} \quad \text{as algebras}$$

が成立する。

(4) (3) より、代数として $Z(A) \cong \rho_l(Z(A))$ となる。ここで、$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$ に対して

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{End}_{A^e}({}_A A_A) &\underset{(*)}{\iff} f(x) = xf(1) = f(1)x \ \text{ for } {}^\forall x \in A \\ &\iff \begin{cases} f = \rho_l(f(1)) \\ f(1) \in Z(A) \end{cases} \\ &\iff f \in \rho_l(Z(A)) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$\because$)

(∗) の証明：「$\Longrightarrow$」はすぐにわかるから、「$\Longleftarrow$」を示す。

$f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$ が任意の $x \in A$ に対して $f(x) = xf(1) = f(1)x$ を満たしていると仮定する。このとき、任意の $a,\ b,\ x \in A$ に対して、

$$f(axb) = axbf(1) = axf(1)b = (af(x))b = af(x)b$$

が成り立つ。故に、任意の $\alpha \in A^e,\ x \in A$ に対して、$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ が成り立つ。故に、f は左 A^e-加群準同型である。 □

したがって、代数として $Z(A) \cong \mathrm{End}_{A^e}({}_A A_A)$ となることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 2-26

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の可換な左 Artin 代数　のとき

$$A：\text{半単純} \iff A \text{ の冪零元は } 0 \text{ のみ}$$

が成り立つことを示せ。

解；

「$\Longleftarrow$」の証明：

A は左 Artin 代数であるから、$\mathrm{rad}A$ は A の冪零イデアルである。

したがって、$x \in \mathrm{rad}A$ を任意にとると、$x^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。

よって、x は冪零元である。仮定により、$x = 0$ を得る。故に、$\mathrm{rad}A = 0$ が示されたので、A は半単純である。

「$\Longrightarrow$」の証明：

A が半単純であるとする。

$$A = \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_k}(D_k)$$

となる自然数 $n_1, \cdots, n_k$ と $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数 $D_1, \cdots, D_k$ が存在する。

A は可換であるから、$n_1 = \cdots = n_k = 1$ でなければならない。また、各 D_i は可換でなければならない。すなわち、

$$A = K_1 \oplus \cdots \oplus K_k \qquad (K_i：\boldsymbol{k} \text{ の拡大体},\ i = 1, \cdots, k)$$

となる。今、$a \in A$ が冪零であるとする。$a^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。

$a = (x_1, \cdots, x_k),\ x_i \in K_i\ (i = 1, \cdots, k)$ と表わすと、$0 = a^n = (x_1^n, \cdots, x_k^n)$ となる。故

に、$x_1 = \cdots = x_k = 0$ となり、$a = 0$ が導かれる。よって、A の冪零元は 0 のみである。

(Q.E.D.)

演習 2-27

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。次を示せ。

(1) A：半単純 $\Longrightarrow$ $Z(A)$：半単純

(2) A：可換な半単純代数 $\Longleftrightarrow$ A は $\boldsymbol{k}$ の拡大体の有限個の直和に同型

解；

(1) Wedderbrun の構造定理 (系 2-21) から、

$$A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(D_m) \qquad \text{as algebras}$$

となる自然数 $n_1, \cdots, n_m$ と $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数 $D_1, \cdots, D_m$ が存在する。このとき、演習 1-4(3) と演習 1-7 より

$$\begin{aligned} Z(A) &\cong Z(\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(D_m)) \\ &\cong Z(\mathrm{M}_{n_1}(D_1)) \oplus \cdots \oplus Z(\mathrm{M}_{n_m}(D_m)) \\ &\cong Z(D_1) \oplus \cdots \oplus Z(D_m) \end{aligned}$$

を得る。各 $Z(D_i)$ $(i = 1, \cdots, m)$ は $\boldsymbol{k}$ 上の拡大体であり、したがって、$\boldsymbol{k}$ 上の可除代数であるから、再び Wedderbrun の構造定理 (系 2-21) によって $Z(A)$ は半単純である。

(2)「$\Longrightarrow$」の証明：

A を可換な半単純代数とする。A は半単純であるから Wedderbrun の構造定理 (系 2-21) により

$$A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(D_m) \qquad \text{as algebras}$$

となる自然数 $n_1, \cdots, n_m$ と $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数 $D_1, \cdots, D_m$ が存在する。

A は可換であるから、すべての $i = 1, \cdots, m$ に対して $n_i = 1$ でなければならない。このとき、

$$A \cong D_1 \oplus \cdots \oplus D_m \qquad \text{as algebras}$$

となるが、再び A の可換性から各 D_i $(i = 1, \cdots, m)$ は可換でなければならない。こうして、A は $\boldsymbol{k}$ の拡大体の有限個の直和に代数として同型になることが示された。

「$\Longleftarrow$」の証明：

A が $\boldsymbol{k}$ の拡大体の有限個の直和に代数として同型であると仮定する。$\boldsymbol{k}$ の拡大体は可換である ($\because$ 体は可換) から、それらの有限個の直和も可換になる。よって、それと同型な A も可換になる。また、$\boldsymbol{k}$ の拡大体は $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数であるから、Wedderbrun の構造定理 (系 2-21) から、それらの有限個の直和は半単純になる。よって、それと同型な A も半単純になる。

(Q.E.D.)

演習 2-28

A, B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数　とする。このとき、

$$A \otimes B：\text{半単純} \Longleftrightarrow Z(A) \otimes Z(B)：\text{半単純}$$

が成り立つことを示せ。

解；

$A,\ B$ が単純代数の場合に示せば十分である。

$\because$)

Wedderburn の定理により、$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n,\ B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ のように極小な両側イデアルの直和に分解することができる。このとき、

$$A \otimes B \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} A_i \otimes B_j \qquad \text{as algebras}$$

となる。また、$Z(A) = Z(A_1) \oplus \cdots \oplus Z(A_n),\ Z(B) = Z(B_1) \oplus \cdots \oplus Z(B_m)$ となるから、

$$Z(A) \otimes Z(B) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} Z(A_i) \otimes Z(B_j) \qquad \text{as algebras}$$

となる。極小両側イデアルは代数として単純であるから、単純な場合に主張が示されていたとすると、各 $i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ に対して

$$A_i \otimes B_j : \text{半単純} \iff Z(A_i) \otimes Z(B_j) : \text{半単純}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} A \otimes B : \text{半単純} &\iff A_i \otimes B_j : \text{半単純} \ \ ({}^\forall i = 1, \cdots, n, {}^\forall j = 1, \cdots, m) \quad \leftarrow \text{演習 2-2} \\ &\iff Z(A_i) \otimes Z(B_j) : \text{半単純} \ \ ({}^\forall i = 1, \cdots, n, {}^\forall j = 1, \cdots, m) \\ &\iff Z(A) \otimes Z(B) : \text{半単純} \quad \leftarrow \text{演習 2-2} \end{aligned}$$

を得る。 □

$A,\ B$ を単純代数とすると、${}_A A_A,\ {}_B B_B$ はそれぞれ、左 A^e-加群、左 B^e-加群として既約である (演習 2-24)。このとき、

$$\begin{aligned} D &:= (\mathrm{End}_{A^e}({}_A A_A))^{\mathrm{op}} \cong Z(A)^{\mathrm{op}} = Z(A) \quad \text{as algebras} \\ E &:= (\mathrm{End}_{B^e}({}_B B_B))^{\mathrm{op}} \cong Z(B)^{\mathrm{op}} = Z(B) \quad \text{as algebras} \end{aligned}$$

が成り立つ (演習 2-25(4) 参照)。$A,\ B$ は有限次元なので、$A^e,\ B^e$ は左 Artin 代数である。したがって、命題 1-63 の仮定が満たされるので、包含関係による順序集合として、

$$\{ {}_A A_A \otimes {}_B B_B \text{ の左 } A^e \otimes B^e\text{-部分加群全体} \} \cong \{ D \otimes E \text{ の左イデアル全体} \}$$

となる。したがって、包含関係による順序集合として

$$\begin{aligned} \{ A \otimes B \text{ の両側イデアル全体} \} &\cong \{ {}_A A_A \otimes {}_B B_B \text{ 左 } A^e \otimes B^e\text{-部分加群全体} \} \\ &\cong \{ D \otimes E \text{ の左イデアル全体} \} \\ &\cong \{ Z(A) \otimes Z(B) \text{ の左イデアル全体} \} \\ &= \{ Z(A) \otimes Z(B) \text{ の両側イデアル全体} \} \end{aligned}$$

が成立する。これより、

$$\{ A \otimes B \text{ の極小両側イデアル全体} \} \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{ Z(A) \otimes Z(B) \text{ の極小両側イデアル全体} \}$$

を得る。このことと Wedderburn の定理から

$$\begin{aligned}
A\otimes B：\text{半単純} \iff\ & {}^{\exists}\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n：A\otimes B\ \text{の極小両側イデアル} & \leftarrow \text{Wedderburn の定理}\\
& \quad \text{s.t. } A\otimes B=\mathfrak{a}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{a}_n & \leftarrow \text{演習 1-87(3)}\\
\iff\ & {}^{\exists}\mathfrak{a}'_1,\cdots,\mathfrak{a}'_n：Z(A)\otimes Z(B)\ \text{の極小両側イデアル} &\\
& \quad \text{s.t. } Z(A)\otimes Z(B)=\mathfrak{a}'_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{a}'_n & \leftarrow \text{Wedderburn の定理}\\
\iff\ & Z(A)\otimes Z(B)：\text{半単純} &
\end{aligned}$$

を得る。 (Q.E.D.)

注意 1°：$B=\boldsymbol{k}$ にとることにより、有限次元代数 A に対して

$$A：\text{半単純} \iff Z(A)：\text{半単純}$$

が成り立つことがわかる。

注意 2°：必要性の方は $A,\ B$ が有限次元でなくても成り立つ (演習 2-27(1)、演習 1-7)。

演習 2-29

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数
$B\cong \mathrm{M}_{n_1}(\boldsymbol{k})\oplus\cdots\oplus\mathrm{M}_{n_r}(\boldsymbol{k})$ as algebras
$\Longrightarrow\ A\otimes B$：半単純
となることを示せ。

解；

$$\begin{aligned}
Z(A)\otimes Z(B) &\cong Z(A)\otimes(Z(\mathrm{M}_{n_1}(\boldsymbol{k}))\oplus\cdots\oplus Z(\mathrm{M}_{n_r}(\boldsymbol{k})))\\
&\cong (Z(A)\otimes Z(\mathrm{M}_{n_1}(\boldsymbol{k})))\oplus\cdots\oplus(Z(A)\otimes Z(\mathrm{M}_{n_r}(\boldsymbol{k})))\\
&\cong \underbrace{(Z(A)\otimes\boldsymbol{k})\oplus\cdots\oplus(Z(A)\otimes\boldsymbol{k})}_{r\ \text{個}}\\
&\cong \underbrace{Z(A)\oplus\cdots\oplus Z(A)}_{r\ \text{個}}
\end{aligned}$$

となる。ここで、A は半単純であるから、$Z(A)$ は半単純であり (演習 2-28)、したがって、それらの有限個の直和として書けている $Z(A)\otimes Z(B)$ も半単純である (演習 2-2)。故に、$A\otimes B$ は半単純である (演習 2-28)。 (Q.E.D.)

注意 1°：基礎体が代数閉体ならば、それ上の有限次元半単純代数は有限個の全行列代数の直和である (系 2-22) から、問題の仮定が満たされる。

注意 2°：一般に、$A,\ B$ が半単純であっても $A\otimes B$ が半単純であるとは限らない (演習 1-71 参照)。この演習の結果は、A が分離的 (定義は第 4 章参照) で、B が半単純ならば、$A\otimes B$ は半単純であるという結果の特別な場合である。

演習 2-30

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元単純代数
M：既約な左 A-加群　とする。
$D:=\mathrm{End}_A M$ とおく。このとき、

$$(\dim_{\boldsymbol{k}} M)^2 = (\dim_{\boldsymbol{k}} D)(\dim_{\boldsymbol{k}} A)$$

が成り立つことを示せ。

解；

A は単純代数であるから、互いに同型な極小左イデアルの直和 (定理 2-16) であり、また、A の既約な左 A-加群は互いに同型である (定理 2-19(1))。さらに、A は有限次元であるから、任意の既約な左 A-加群は有限次元である。よって、左 A-加群として

$$_AA \cong \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{\text{有限個 } (= s \text{ 個とおく})}$$

となる。故に、

$$\dim A = s \dim M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。一方、

$$A^{\mathrm{op}} \underset{\text{演習 1-4(3)}}{\cong} \mathrm{End}_A A \underset{\text{補題 2-17}}{\cong} \mathrm{M}_s(D) \qquad \text{as algebras}$$

であるから、

$$\dim A = s \dim D \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。①②から

$$\dim M = s \dim D$$

が得られ、したがってまた

$$(\dim M)^2 = s^2(\dim D)(\dim D) = (\dim A)(\dim D)$$

が得られる。 (Q.E.D.)

演習 2-31

V：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間

$B := \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ とおき、A を B の単純な部分代数とする。このとき、次を示せ。

(1) $Z_B(A)$ は B の単純な部分代数である。

(2) $(\dim_{\boldsymbol{k}} A)(\dim_{\boldsymbol{k}} Z_B(A)) = \dim_{\boldsymbol{k}} B$ が成り立つ。

解；

(1) まず、$Z_B(A) = \mathrm{End}_A V$ であることに注意しよう。

A は単純であるから半単純である (定理 2-16、命題 2-2(iv))。したがって、V を左 A-加群とみると、これは有限個の互いに同型な既約加群の直和になる (命題 2-2(i)、定理 2-19(1))。そこで、M を既約な左 A-加群とし、

$$V \cong \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{r \text{ 個}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とおく。このとき、$D := \mathrm{End}_A M$ とおくと

$$\mathrm{End}_A V \cong \mathrm{M}_r(D) \qquad \text{as algebras}$$

となる (補題 2-17)。$\mathrm{M}_r(D)$ は単純である (定理 2-16) から、$\mathrm{End}_A V = Z_B(A)$ も単純である。

(2) (1) の証明より、$Z_B(A) \cong \mathrm{M}_r(D)$ であるから、

$$\dim Z_B(A) = r^2 \dim D$$

が成り立つ (演習 1-4(1))。$(*)$ により、

$$\dim V = r \dim M$$

であるから、演習 2-30 を用いて

$$\dim B = (\dim V)^2 = r^2(\dim M)^2 = r^2(\dim D)(\dim A) = \dim Z_B(A) \dim A$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 2-32

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数とする。
$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ を A の Wedderburn 分解とする。各 A_i を左正則加群 ${}_AA$ の部分加群とみなすとき、$\mathrm{End}_A(A_i)$ の中心は $\boldsymbol{k}$ を含む体になることを示せ。

解；

A_i は単純な左 Artin 代数である (定理 2-20 の証明参照) から、A_i は互いに同型な極小左イデアルの有限個の直和に分解される (定理 2-16)：

$$A_i = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k, \qquad (I_j\text{：}A_i \text{ の極小左イデアル},\ j = 1, \cdots, k,\ I_1 \cong \cdots \cong I_k)$$

A_i は A の両側イデアルであるから、各 I_j は A の極小左イデアル (すなわち、既約な左 A-加群) になる。$D_i = \mathrm{End}_A(I_1)$ とおくと、

$$\mathrm{End}_A(A_i) \cong \mathrm{M}_k(D_i) \qquad \text{as algebras}$$

が成り立つ (補題 2-17) ので、演習 1-4(2) により、

$$Z(\mathrm{End}_A(A_i)) \cong Z(\mathrm{M}_k(D_i)) \cong Z(D_i) \qquad \text{as algebras}$$

が成り立つ。Schur の補題 (命題 1-13) により、D_i は可除代数であるから、$Z(D_i)$ は体である。
こうして、$Z(\mathrm{End}_A(A_i))$ は体になっていることが示された。
$\boldsymbol{k} = \{\lambda \mathrm{id}_{A_i} \mid \lambda \in \boldsymbol{k}\}$ と同一視すれば、$Z(\mathrm{End}_A(A_i))$ は $\boldsymbol{k}$ を部分体として含んでいることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 2-33

代数 A において、その中心 $Z(A)$ の冪等元を A の**中心的冪等元** (*central idempotent*) と呼ぶ。さらに、これが $Z(A)$ の原始冪等元であるとき、**中心的原始冪等元**と呼ぶ。
A を代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数とし、Wedderburn 分解

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \qquad (\text{各 } A_i \text{ は極小な両側イデアル})$$

を考える (定理 2-8 下の注意参照)。この直和分解に応じて A の単位元 1 を

$$1 = e_1 + \cdots + e_n \qquad (e_i \in A_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

と書き表わす。このとき、次が成り立つことを示せ。

(1) $\{e_i\}_{i=1}^n$ は A の中心的原始冪等元の全体である。
(2) A の中心的原始冪等元全体は $Z(A)$ の基底をなす。

解；

(1) まず、各 $i=1,\cdots,n$ に対して $e_i \in Z(A)$ となることを示す。任意の $a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} ae_1+\cdots+ae_n &= a(e_1+\cdots+e_n) \\ &= a1 \\ &= a \\ &= 1a \\ &= (e_1+\cdots+e_n)a \\ &= e_1a+\cdots+e_na \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、各 A_i は A の両側イデアルであるから、$ae_i,\ e_ia \in A_i$ を得る。よって、$(*)$ から、$ae_i = e_ia\ (i=1,\cdots,n)$ を得る。故に、$e_i \in Z(A)$ であることが示された。

次に、$\{e_i\}_{i=1}^n$ が $Z(A)$ の原始冪等元であることを示す。

$$1 = e_1+\cdots+e_n \qquad (e_i \in A_i,\ i=1,\cdots,n)$$

であるから、$e_1,\cdots,e_n$ は互いに直交する冪等元である (演習 1-2(1))。e_i が $Z(A)$ において原始的であることを示す。上で示したように、$e_i \in Z(A)\cap A_i = Z(A_i)$ である。ところが、$\boldsymbol{k}$ は代数閉体なので、$\dim Z(A_i)=1$ である。

$\because$)

A_i は代数閉体 $\boldsymbol{k}$ 上の単純な代数なので、代数として、$A_i \cong \mathrm{M}_{n_i}(\boldsymbol{k})$ となる (系 2-18)。したがって、両辺の中心をとって、

$$Z(A_i) \cong Z(\mathrm{M}_{n_i}(\boldsymbol{k})) \cong \underset{\text{演習 1-4(3)}}{Z(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{k}$$

を得る。 $\square$

したがって、$Z(A_i)$ は直既約な左 $Z(A)$-加群である。

$Z(A_i) \underset{\uparrow}{=} Z(A)e_i$ であるから、e_i は $Z(A)$ の原始冪等元である (補題 1-2)。

$\left(\begin{array}{l} Z(A) = Z(A_1)\oplus\cdots\oplus Z(A_n),\ 1=e_1+\cdots+e_n,\ e_i \in Z(A_i), \\ i=1,\cdots,n \text{ という状況に補題 1-1(2) を適用} \end{array} \right)$

次に、A の中心的原始冪等元は $\{e_i\}_{i=1}^n$ に尽きることを示す。そのために、A の中心的原始冪等元 e を任意にとる。$Z(A)=Z(A_1)\oplus\cdots\oplus Z(A_n)$ であり、$\dim Z(A_i)=1\ (i=1,\cdots,n)$ であることがわかったから、

$$e = \sum_{i=1}^n c_ie_i \qquad (c_i \in \boldsymbol{k},\ i=1,\cdots,n)$$

と書くことができる。このとき、$e_1,\cdots,e_n$ が互いに直交する冪等元であることから

$$e = e^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2e_i$$

を得る。e_i の係数を比較して、

$$c_i^2 = c_i \qquad \therefore \quad c_i = 0,\ 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を得る。e は原始的であるから、$c_1, \cdots, c_n$ の中のどれか 1 つだけ 1 であって、その他は 0 でなければならない。故に、e は $e_1, \cdots, e_n$ のいずれかに一致する。

(2) $\{e_i\}_{i=1}^n$ は $Z(A)$ の基底であり、かつ、A の中心的な原始冪等元の全体であることが (1) の証明からわかる。よって、(2) が成立する。 (Q.E.D.)

演習 2-34

$A,\ B$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 的単純代数とする。
次の 4 つは互いに同値な条件であることを示せ。

(i) $A,\ B$ に属する可除代数が同型
(ii) ${}^\exists n, m \in \mathbb{N}$ s.t. $A \otimes \mathrm{M}_m(\boldsymbol{k}) \cong B \otimes \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ as algebras
(iii) ${}^\exists n, m \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathrm{M}_m(A) \cong \mathrm{M}_n(B)$ as algebras
(iv) 既約な左 A-加群 M と既約な左 B-加群 N について、$\mathrm{End}_A M \cong \mathrm{End}_B N$ as algebras

解；
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)：$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \otimes A \cong \mathrm{M}_n(A)$ である (演習 1-4) から、(ii) と (iii) は同値である。
(i) $\Longleftrightarrow$ (iii)：$A,\ B$ に属する可除代数をそれぞれ $D,\ E$ とおく。
$A \cong \mathrm{M}_m(D),\ B \cong \mathrm{M}_n(E)$ となる $m, n \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$\mathrm{M}_n(A) \cong \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_m(D)) \cong \mathrm{M}_{nm}(D), \quad \mathrm{M}_m(B) \cong \mathrm{M}_m(\mathrm{M}_n(E)) \cong \mathrm{M}_{nm}(E)$$

が成り立つ (演習 1-4(2) の証明参照) から、

$$D \cong E \quad \Longleftrightarrow \quad {}^\exists m, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \mathrm{M}_n(A) \cong \mathrm{M}_m(B)$$

となる (注：$\Longleftarrow$ を証明するには定理 2-19(2) が必要)。故に、(i) と (iii) は同値である。
(i) $\Longleftrightarrow$ (iv)：先程のように、可除代数 $D,\ E$ によって、$A \cong \mathrm{M}_m(D),\ B \cong \mathrm{M}_n(E)$ であるとする。

定理 2-19 の証明から、既約な左 A-加群 M に対して、$D^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A M$ が成り立つ (任意の既約な左 A-加群は互いに同型であることに注意)。同様に、既約な左 B-加群 N に対して、$E^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B N$ が成り立つ。これより、

$$D \cong E \quad \Longleftrightarrow \quad D^{\mathrm{op}} \cong E^{\mathrm{op}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{End}_A M \cong \mathrm{End}_B N$$

となるから、(i) と (iv) の同値性も示された。 (Q.E.D.)

演習 2-35

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 的単純代数
$P\ (\neq 0)$：右 A-加群または左 A-加群
$\Longrightarrow$ P：忠実平坦
となることを示せ。

解；

まず、P が 0 でない右 A-加群の場合に示す。

左 Artin 的単純代数は半単純 (定理 2-20) であり、半単純代数上の任意の加群は平坦である (演習 2-6 の注意 2°) から、P は平坦である。したがって、P が忠実平坦であることを示すには、$P \otimes_A M = 0$ を満たす左 A-加群 M は零加群 0 のみであることを示せばよい。

忠実平坦加群の直和は忠実平坦である (例題 1-45) から、P が既約な場合に証明すれば十分である。この場合、

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ A_A \cong P^{\oplus n} \quad \text{as right } A\text{-modules}$$

となる。

M を左 A-加群とし、$P \otimes_A M = 0$ が成り立っているとする。このとき、

$$M \cong A \otimes_A M \cong (P^{\oplus n}) \otimes_A M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-21}}}{\cong} (P \otimes_A M)^{\oplus n} = 0$$

となる。

以上から、右 A-加群 P は忠実平坦である。

次に、$P\ (\neq 0)$ を左 A-加群とする。

P は右 A^{op}-加群とみなせる。

A^{op} は右 Artin 的単純代数である (演習 2-23、定義 1-5 の下の注意 3°) が、右 Artin 的単純代数は左 Artin 的単純代数でもある (定理 2-16 の下の注意参照) から、A^{op} は左 Artin 的単純代数でもある。

したがって、P は右 A^{op}-加群として忠実平坦である。

したがって、左 A-加群 P は忠実平坦である。 (Q.E.D.)

§4. 中心的単純代数

単純代数の中心は基礎体を含む体になる (補題 2-24) が、特に、中心が基礎体に一致するとき、中心的であると呼ばれる。したがって、単純代数をその中心上の代数とみなすと中心的になる。ここでは、まず、中心的な有限次元単純代数の自己同型写像は内部自己同型であること (Skolem-Noether の定理) を示す。次に、有限次元中心的単純代数の単純な部分代数とその可換子代数との関係について述べる。有限次元中心的単純代数の単純な部分代数は再中心化性を持つことを示す。最後にその応用として、体とその自己同型写像の有限部分群との対応関係を顕した Galois の基本定理を証明する。

補題 2-24

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の単純代数とする。このとき、A の中心

$$Z(A) = \{b \in A \mid ab = ba \ \text{ for } {}^{\forall}a \in A\}$$

は体である。

(proof)

$b \in Z(A),\ b \neq 0$ とする。

$bA = Ab$ は A の $\{0\}$ でない両側イデアルである。

A の単純性から、$bA = Ab = A$ となる。

特に、$ba = 1$ となる $a \in A$ が存在する。$ab = ba = 1$ であるから、$b \in A$ は A の単元であり、$b^{-1} = a \in Z(A)$ となる。故に、$Z(A)$ は体である。 (Q.E.D.)

定義 2-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

$$A：\textbf{中心的}\ (\textit{central}) \Longleftrightarrow \text{写像}\ \boldsymbol{k} \longrightarrow Z(A),\ \lambda \longmapsto \lambda \cdot 1\ \text{が体の同型}$$

単純かつ中心的代数のことを**中心的単純代数** (*central simple algebra*) と呼ぶ。

注意 1°：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に対して、いつでも右辺の写像が定義されて単射な代数準同型になる。A が中心的であるとは、この写像が全射になるときに他ならない。

注意 2°：A が体 $\boldsymbol{k}$ 上の単純代数のとき、

$$A：\text{中心的} \iff A\ \text{に属する可除代数が中心的}$$

が成り立つ。

(proof)

A に属する可除代数を D とおくと、代数として

$$Z(A) \cong Z(D)$$

となる (定理 2-19 の証明の下の注意 2° 参照) ので、

$$A：\text{中心的} \iff D：\text{中心的}$$

が成り立つ。 □

注意 3°：A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の単純代数 $\Longrightarrow$ A：体 $Z(A)$ 上の代数として中心的単純

(proof)

まず、A は単純なので、$Z(A)$ は体をなすことに注意する。

A が $Z(A)$ 上中心的なことは明らかであるから、A が $Z(A)$ 上の代数として単純なことを示す。

I を $Z(A)$ 上の代数としての A の両側イデアルとする。すると、$\boldsymbol{k}1 \subset Z(A)$ であるから、I は $\boldsymbol{k}$ 上の代数としての A の両側イデアルになっている。A の $\boldsymbol{k}$ 上の代数としての単純性から、$I = \{0\}$ または $I = A$ を得る。故に、A は $Z(A)$ 上の代数としても単純である。 □

例題 2-25

(1) $\boldsymbol{k}$ を任意の体とする。このとき、$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ は中心的単純代数である。実際、

$$Z(\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})) = \{\lambda \cdot I_n \mid \lambda \in \boldsymbol{k}\}$$

となることから、写像 $\boldsymbol{k} \longrightarrow Z(\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})),\ \lambda \longmapsto \lambda \cdot I_n$ は体の同型である。

(2) $\mathbb{R}$ 上の代数として、四元数体 $\mathbb{H}$ (第 1 章第 1 節参照) は中心的単純代数である。実際、$\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上の可除代数なので単純である。また、$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ が中心 $Z(\mathbb{H})$ に属しているとすると、$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})\mathbf{i} = \mathbf{i}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$ でなければならないことから $c = d = 0$ が得られ、$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})\mathbf{j} = \mathbf{j}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$ でなければならないことから $b = d = 0$ が得られる。よって、$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\mathbf{1}$ であることがわかり、$\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上中心的である。

(3) $K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。$K \neq \boldsymbol{k}$ のとき $\boldsymbol{k}$ 上の代数としては中心的単純ではない (注：$\boldsymbol{k}$ 上の代数として単純ではある)。

命題 2-26

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の中心的単純代数

B：$\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

(1) $A \otimes B$ の両側イデアルは、$A \otimes I$(但し、I は B の両側イデアル) の形をしている。

(2) $B \otimes A$ の両側イデアルは、$I \otimes A$(但し、I は B の両側イデアル) の形をしている。

(3) B が単純ならば、$A \otimes B$ および $B \otimes A$ も単純である。

(proof)

(1) A の包括代数 $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ を考える。このとき、$A \otimes B$ は次の作用に関して左 A^e-加群となる：

$$(a \otimes a') \cdot (x \otimes y) = (axa') \otimes y \qquad\qquad (a \in A,\ a' \in A^{\mathrm{op}},\ x \in A,\ y \in B)$$

$A \otimes B$ は A と同型な左 A^e-加群の族の直和である。

$\because$)

$\{b_i\}_{i \in I}$ を B の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。すると

$$A \otimes B = \bigoplus_{i \in I} A \otimes b_i$$

となる。各 $A \otimes b_i$ は $A \otimes B$ の部分 A^e-加群となる。

A への A^e の左作用を次のように定めると、A は左 A^e-加群となり、左 A^e-加群として $A \otimes b_i \cong A$ となる。 $\square$

A は代数として単純であるから、左 A^e-加群として既約である (演習 2-24)。

したがって、左 A^e-加群 $A \otimes B$ は完全可約である。

さて、J を $A \otimes B$ の両側イデアルとする。J は左 A^e-加群 $A \otimes B$ の部分加群と思える。補題 2-1 より、J もまた A と同型な左 A^e-加群の直和となる。そこで、

$$J = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, \qquad M_\lambda \cong A \quad \text{as left } A^e\text{-modules}$$

と書く。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、左 A^e-加群の同型 $f_\lambda : A \longrightarrow M_\lambda$ を 1 つとる。

このとき、$f_\lambda(1_A) \in Z_{A \otimes B}(A)$ となる。

$\because$)

$$f_\lambda(1_A) \in Z_{A \otimes B}(A) \iff f_\lambda(1_A)(a \otimes 1_B) = (a \otimes 1_B) f_\lambda(1_A) \quad \text{for } {}^\forall a \in A$$

であるから、右辺を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
f_\lambda(1_A)(a\otimes 1_B) &= (1_A\otimes a)\cdot f_\lambda(1_A) \quad f_\lambda=\sum_j a_j\otimes b_j \text{ と表わして、両辺を計算する}\\
&= f_\lambda((1_A\otimes a)\cdot 1_A)\\
&= f_\lambda(a)\\
&= f_\lambda((a\otimes 1_A)\cdot 1_A)\\
&= (a\otimes 1_A)\cdot f_\lambda(1_A)\\
&= (a\otimes 1_B)\cdot f_\lambda(1_A)
\end{aligned}
$$

これで、示された。□

A は中心的であるから、

$$Z_{A\otimes B}(A)=Z(A)\otimes B=(\boldsymbol{k}\cdot 1_A)\otimes B=1_A\otimes B$$

となる (演習 1-7)。したがって、

$$f_\lambda(1_A)=1_A\otimes e_\lambda \qquad (e_\lambda\in B)$$

と書くことができ、$f_\lambda(A)=A\otimes e_\lambda$ となる。

$I\subset B$ を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって $\boldsymbol{k}$ 上張られる部分ベクトル空間とする。このとき、

$$J=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda(A)=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}A\otimes e_\lambda=A\otimes I$$

が成り立つ。

$1_A\otimes I=J\cap(1_A\otimes B)$ であるから、I は B の両側イデアルである。

$\uparrow$

($\because$ $1_A\otimes I\subset J\cap(1_A\otimes B)$ となることは、$1_A\otimes I\subset A\otimes I=J$ および $I\subset B$ からわかる。
$1_A\otimes I\supset J\cap(1_A\otimes B)$ となることを示す。A の基底 $\{a_\alpha\}$ として 1_A を含むものをとる。$J=A\otimes I$ の任意の元 x は
$\sum_\alpha a_\alpha\otimes b_\alpha,\quad b_\alpha\in I$ は有限個の α を除いて 0
のように一意的に表わされる。したがって、$x=\sum_\alpha a_\alpha\otimes b_\alpha\in 1_A\otimes B$ の場合には、$a_\alpha\neq 1_A$ なる α について $b_\alpha=0$ となる。したがって、$x\in J\cap(1_A\otimes B)$ ならば、$x=1_A\otimes b,\ b\in I$ と書けることが示された。□)

(2) 写像 $A\otimes B\longrightarrow B\otimes A,\ a\otimes b\longmapsto b\otimes a$ は代数の同型であるから、J が $B\otimes A$ の両側イデアルならば、$f^{-1}(J)$ は $A\otimes B$ の両側イデアルである。(1) により、$f^{-1}(J)=A\otimes I$ (I は B の両側イデアル) となる。故に、$J=f(f^{-1}(J))=f(A\otimes I)=I\otimes A$ を得る。

(3) は (1) と (2) から直ちに得られる。 (Q.E.D.)

注意：この命題において、B を $\boldsymbol{k}$ の拡大体 K にとることにより次を得る：

$$A\text{：体 }\boldsymbol{k}\text{ 上の中心的単純代数},\ \ K/\boldsymbol{k}\text{：体の拡大} \implies K\otimes A=A^K\text{：単純}$$

したがって、演習 1-7(3) を用いて体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に対して

$$A：\text{中心的単純代数} \quad \Longleftrightarrow \quad {}^{\forall}K/\boldsymbol{k}\ ：\text{体の拡大},\ \ A^K：\text{中心的単純代数}$$

が成り立つ。

一般に、代数 A に対して

$$\mathrm{Aut}(A) := \{ f : A \longrightarrow A \mid f\ \text{は代数の同型}\,\}$$

は写像の合成に関して群になる。この群を A の自己同型群と呼び、その元を A の自己同型と呼ぶ。$\mathrm{Aut}(A)$ は次のような部分群を含む：

$$\mathrm{Inn}(A) := \{ f_a : A \longrightarrow A \mid a \in A\ \text{は可逆}\,\}$$

但し、可逆元 $a \in A$ に対して $f_a(x) = a^{-1}xa,\ x \in A$ である。$\mathrm{Inn}(A)$ を A の内部自己同型群と呼び、その元を A の内部自己同型と呼ぶ。一般の代数では、$\mathrm{Aut}(A)$ は $\mathrm{Inn}(A)$ よりはるかに大きくなると予想されるが、中心的な有限次元単純代数の場合には、自己同型写像は内部自己同型になっている。この事実を、より一般的な次の定理の系として導こう。

定理 2-27(Skolem-Noether)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数

B：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元単純代数

$\sigma : B \longrightarrow A,\ \tau : B \longrightarrow A$ ：代数準同型　とする。このとき、

$${}^{\exists}t \in A : \text{可逆元}\ \ \text{s.t.}\ \ \sigma(b) = t^{-1}\tau(b)t \quad \text{for}\ {}^{\forall}b \in B$$

となる。

(proof)

σ を用いて、代数 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$ の A への左作用を

$$(b \otimes a) \cdot x = \sigma(b)xa \qquad\qquad (b \in B,\ a \in A^{\mathrm{op}},\ x \in A)$$

によって定義する。この作用により、A は左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群となる。この左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群 A を A_σ と書くことにする。同様にして、左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群 A_τ を定義する。

このとき、左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群として $A_\sigma \cong A_\tau$ が成り立つ。

$\because$)

A は中心的単純代数で、B は単純であるから、代数 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$ は単純である (演習 2-23(1) と命題 2-26(3) 参照)。また、A, B ともに有限次元なので、 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$ は左 Artin 代数である。

したがって、任意の左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群は完全可約である (定理 2-20)。しかも、その既約成分はすべて互いに同型となる (定理 2-19(1))。

今、$\dim A_\sigma = \dim A = \dim A_\tau$ であるから、A_σ と A_τ の既約成分の個数は一致していなければならない。

(A_σを既約な部分加群の直和に分解したときの直和因子の個数のこと)

故に、左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群として、$A_\sigma \cong A_\tau$ が成り立つ。 $\square$

$\varphi : A_\sigma \longrightarrow A_\tau$ を左 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$-加群の同型とする。$t := \varphi(1)$ とおく。このとき、

① 任意の $b \in B$ に対して $t\sigma(b) = \tau(b)t$ が成り立つ。

② t は可逆である。

$\because$)

①の証明：次の２つの等式から従う。

$\varphi(\sigma(b)) = \varphi((1 \otimes \sigma(b)) \cdot 1) = (1 \otimes \sigma(b)) \cdot \varphi(1) = (1 \otimes \sigma(b)) \cdot t = t\sigma(b)$,

$\varphi(\sigma(b)) = \varphi((b \otimes 1) \cdot 1) = (b \otimes 1) \cdot \varphi(1) = (b \otimes 1) \cdot t = \tau(b)t$

②の証明：$s = \varphi^{-1}(1)$ とおく。s は t の逆元である。実際、

$$1 = \varphi(s) = \varphi((1 \otimes s) \cdot 1) = (1 \otimes s) \cdot \varphi(1) = (1 \otimes s) \cdot t = ts$$

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$

σ は代数準同型なので、$\sigma(1)=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tau(1) = 1$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$$\varphi(st) = \varphi((1 \otimes t) \cdot s) = (1 \otimes t) \cdot \varphi(s) = (1 \otimes t) \cdot 1 = t = \varphi(1)$$

より、$ts = 1$ かつ $st = 1$ が得られる。 □

これで、証明が終わった。 (Q.E.D.)

上の定理の直接の帰結として、次を得る。

系 2-28

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数

$\Longrightarrow$ A の自己同型は内部自己同型

(proof)

定理 2-27 において、$B = A,\ \sigma = \mathrm{id}_A$ とし、τ を A の自己同型写像にとればよい。(Q.E.D.)

次に、有限次元中心的単純代数 B に含まれる単純な部分代数 A に対して、B における A の可換子代数 $Z_B(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ for } {}^\forall b \in B\}$ の構造について述べる。特に重要なのは (iii) で、有限次元中心的単純代数の部分単純代数は再中心化性を持つことを主張している。

定理 2-29(Brauer)

B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数

$A \subset B$：単純な部分代数　とする。このとき、

(i) $Z_B(A)$ は単純代数である。

(ii) $(\dim_{\boldsymbol{k}} A)(\dim_{\boldsymbol{k}} Z_B(A)) = \dim_{\boldsymbol{k}} B$

(iii) $Z_B(Z_B(A)) = A$

(iv) $Z(A) = A \cap Z_B(A) = Z(Z_B(A))$

(v) A：中心的単純 $\Longrightarrow$ $Z_B(A)$：中心的単純、$B \cong A \otimes Z_B(A)$ as algebras

定理を証明するために、補題を準備する。定理の証明のためには、次の補題において $B = A$ の場合だけが必要であるが、第 4 章で下で述べるような一般の場合が必要になるので、ついでに証明しておく。この補題は Skolem-Noether の定理の応用として得られる。

補題 2-30

B：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数
$A \subset B$：単純な部分代数　とする。このとき、

$$B \otimes A^{\mathrm{op}} \cong Z_B(A) \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A \quad \text{as algebras}$$

(proof)

$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$ は $\boldsymbol{k}$ 上の中心的単純代数であるから、

$$Z(B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A) \cong Z(B) \otimes Z(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A) \cong \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} \cong \boldsymbol{k}$$

となる (演習 1-7(3))。故に、$B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$ も中心的単純代数である (単純性は命題 2-26 参照)。

$$A_l := \{\ A \text{ の元の左正則作用 } \rho_l(a) \text{ 全体}\ \} \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$$
$$A_r := \{\ A \text{ の元の右正則作用 } \rho_r(a) \text{ 全体}\ \} \subset \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$$

とおく。A は単純なので、代数として $A_l \cong A,\ A_r \cong A^{\mathrm{op}}$ となる (演習 2-25(3))。そこで、中心的単純代数 $B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$ と代数準同型

$$\sigma : A \longrightarrow B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A, \quad a \longmapsto a \otimes \mathrm{id}_A,$$
$$\tau : A \longrightarrow B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A, \quad a \longmapsto 1 \otimes \rho_l(a)$$

に、Skolem-Noether の定理 (定理 2-27) を用いて、

$$^{\exists} u \in B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A \ \text{ s.t. } \ A \otimes \boldsymbol{k}\mathrm{id}_A = u^{-1}(\boldsymbol{k}1 \otimes A_l)u$$

を得る。よって、

$$Z_{B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A}(A \otimes \boldsymbol{k}\mathrm{id}_A) \cong Z_{B \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A}(\boldsymbol{k}1 \otimes A_l) \quad \text{as algebras} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を得る。ここで、

$$(*) \text{ の右辺} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-7(2)}}}{=} Z_B(\boldsymbol{k}1) \otimes Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A}(A_l) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 2-25(2)}}}{=} B \otimes A_r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 2-25(3)}}}{\cong} B \otimes A^{\mathrm{op}}$$

$$(*) \text{ の左辺} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-7(2)}}}{=} Z_B(A) \otimes Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A}(\boldsymbol{k}\mathrm{id}_A) \cong Z_B(A) \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A$$

であるから、

$$B \otimes A^{\mathrm{op}} \cong Z_B(A) \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A \quad \text{as algebras}$$

が得られた。　(Q.E.D.)

系 2-31

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数
$\quad \Longrightarrow \ A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A \quad \text{as algebras}$

(proof)

系の結果は補題 2-30 において $B = A$ の場合であるが、以下のようにして具体的に同型写像を与えて直接証明することもできる。

両側正則加群 ${}_AA_A$ を自然な方法で左 A^e-加群とみなし、その左作用に対応する表現を $\rho : A^e \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ とおく。ρ が代数の同型であることを証明する。表現は代数準同型であり、また、

$$\dim A^e = (\dim A)^2 = \dim \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$$

なので、ρ が代数の同型であることを証明するためには、ρ が単射になることを示せば十分である。

ところで、A は中心的単純なので、$A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ は単純代数と中心的単純代数のテンソル積として単純になる (命題 2-26(3))。単純代数上定義された代数準同型は単射である (定義 2-3 の下の注意 2° 参照) から、$\rho : A^e \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A$ は単射である。よって、ρ は代数の同型である。 (Q.E.D.)

注意：A の有限次元性は次元定理のところでのみ使ったので、ρ の全射性を直接証明することができれば、系の仮定から A の有限次元性をはずすことができるのではないか、と思うかもしれない。しかしながら、これは以下の証明を見る限り難しそうである。

ρ の全射性の直接証明：

A は単純なので、${}_AA_A$ は左 A^e-加群として既約になる (演習 2-24)。したがって、稠密性定理 (定理 1-63) により、$\rho(A^e)$ は $D := \mathrm{End}_{A^e}({}_AA_A)$ とおくと、$\mathrm{End}_D({}_AA_A)$ の中で稠密な環になる。ところが、仮定により、A は中心的単純代数であるから、

$$D = \mathrm{End}_{A^e}({}_AA_A) \cong Z(A) \cong \boldsymbol{k} \qquad \text{as algebras}$$

となる (演習 2-25(4))。

したがって、$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を $\boldsymbol{k}$ 上の A の基底とすると、A の任意の n 個の元 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ に対して、

$$^\exists\xi \in A^e \ \text{ s.t. } \ \rho(\xi)(x_i) = y_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$$

となる。このことは、ρ が全射であることを意味する。 □

(proof of Theorem 2-29)

(i), (ii) の証明：$B = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ (V：有限次元ベクトル空間) の場合には、演習 2-31 により、すでに示されている。一般の場合は、以下のようにして、上記の場合に帰着させて証明する。

B は有限次元中心的単純代数であるから、

$$B^e = B \otimes B^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}B \quad \text{as algebras}$$

となる (補題 2-30)。B は中心的単純で、A^{op} は単純であるから $B \otimes A^{\mathrm{op}}$ も単純になる (命題 2-26(3))。そこで、B^e の単純な部分代数 $B \otimes A^{\mathrm{op}}$ に演習 2-31 を適用すると、

$$Z_{B^e}(B \otimes A^{\mathrm{op}}) \text{ は単純代数であって、} \dim(B \otimes A^{\mathrm{op}}) \dim Z_{B^e}(B \otimes A^{\mathrm{op}}) = \dim B^e$$

を得る。証明を完成させるには、$Z_{B^e}(B \otimes A^{\mathrm{op}}) \cong Z_B(A)$ となることを示せばよい。

$\because$)

もし、$Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})\cong Z_B(A)$ ならば、$Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})$ が単純であることから、それと同型な $Z_B(A)$ も単純となり、(i) が得られる。また、

$$\begin{cases}\dim(B\otimes A^{\mathrm{op}})\dim Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})=\dim B^e\\ \dim(B\otimes A^{\mathrm{op}})=(\dim A)(\dim B)\\ \dim Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})=\dim Z_B(A)\\ \dim B^e=(\dim B)^2\end{cases}$$

となるから、$(\dim A)(\dim B)(\dim Z_B(A))=(\dim B)^2$ を得る。両辺を $\dim B$ で割ると (ii) の等式が得られる。 □

しかるに、$Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})\cong Z_B(A)$ となることは次のようにしてわかる：

$$Z_{B^e}(B\otimes A^{\mathrm{op}})\underset{\substack{\uparrow\\ \text{演習 1-7(3)}}}{\cong} Z_B(B)\otimes Z_{B^{\mathrm{op}}}(A^{\mathrm{op}})=Z_B(B)\otimes Z(A^{\mathrm{op}})\underset{\substack{\uparrow\\ B\text{ は中心的単純}}}{\cong}\boldsymbol{k}\otimes Z_B(A)\cong Z_B(A)$$

こうして、(i)(ii) は示された。

(iii) $A\subset Z_B(Z_B(A))$ となることは $Z_B(A)$ の定義からただちにわかる。よって、$A=Z_B(Z_B(A))$ を示すには、$\dim A=\dim Z_B(Z_B(A))$ を示せばよい。

$Z_B(A)$ は (i) により単純な B の部分代数であるから、(ii) において A のかわりに $Z_B(A)$ を使うと、

$$\dim Z_B(A)\cdot\dim Z_B(Z_B(A))=\dim B$$

が得られる。この式と (ii) から、$\dim A=\dim Z_B(Z_B(A))$ が得られる。

(iv) $Z(A)=A\cap Z_B(A)$ は明らかであろう。同様にして、$Z(Z_B(A))=Z_B(A)\cap Z_B(Z_B(A))$ が成り立つ。この等式と (iii) から、$Z(A)=Z(Z_B(A))$ を得る。

(v) A は中心的単純代数であるとする。(iv) より $Z(A)=Z(Z_B(A))$ であるから、$Z_B(A)$ も中心的であり、(i) から単純であることがわかる。次に $B\cong A\otimes Z_B(A)$ となることを示そう。

B の積を制限することによって得られる写像

$$\varphi: A\otimes Z_B(A)\longrightarrow B,\qquad \varphi(a\otimes b)=ab,\qquad a\in A,\ b\in Z_B(A)$$

を考える。これが代数の同型になることを示す。

・φ が代数準同型になること： $a,a'\in A,\ b,b'\in Z_B(A)$ に対して

$$\varphi(a\otimes b)\varphi(a'\otimes b')=(ab)(a'b')=a(ba')b'=a(a'b)b'=(aa')(bb')=\varphi(aa'\otimes bb')$$

となることと、$\varphi(1\otimes 1)=1$ となることからわかる。

・φ が単射であること：$\mathrm{Ker}\varphi$ は $A\otimes Z_B(A)$ の両側イデアルであり、全体でない。$A\otimes Z_B(A)$ の単純性 ($\because$ 中心的単純代数と単純代数のテンソル積は単純 命題 2-26(3)) により、$\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$ でなければならない。よって、φ は単射である。

(ii) より φ の定義域と値域の次元が等しいから、φ は代数の同型であることがわかる。

(Q.E.D.)

Brauer の定理の応用として、Galois 理論の基本定理を証明することができる。

定理 2-32(Galois 対応)

体 K に対して、$\mathrm{Aut}(K) := \{K$ 上の体の自己同型全体$\}$ とおく。$\mathrm{Aut}(K)$ は写像の合成を積として群になる。$G \subset \mathrm{Aut}(K)$ を有限部分群とする。
K の部分体 L に対して

$$G_L := \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x,\ {}^\forall x \in L\}$$

とおき、G の部分群 H に対して

$$K^H := \{x \in K \mid \sigma(x) = x,\ {}^\forall \sigma \in H\}$$

とおく。$\boldsymbol{k} := K^G$ とおく。このとき、２つの写像

$$\{\boldsymbol{k} \text{ と } K \text{ の間の中間体全体}\} \longrightarrow \{G \text{ の部分群全体}\},\quad L \longmapsto G_L$$
$$\{G \text{ の部分群全体}\} \longrightarrow \{\boldsymbol{k} \text{ と } K \text{ の間の中間体全体}\},\quad H \longmapsto K^H$$

は互いに他の逆写像である。

証明のために、補題を準備する。

補題 2-33

K を体、G を $\mathrm{Aut}(K)$ の有限部分群とする。G を K 上の基底にもつベクトル空間

$$\{\sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma \mid x_\sigma \in K\}$$

を考え、これに次のような積を入れたものを $K \rtimes G$ と書く：

$$(\sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma)(\sum_{\tau \in G} y_\tau \tau) = \sum_{\sigma, \tau \in G} x_\sigma \sigma(y_\tau) \sigma\tau$$

この積によって、$A := K \rtimes G$ は K 上の有限次元単純代数になる。

(proof)

まず、A が与えられた積に関して代数をなすことを確かめる。

A の３つの元 $x = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma,\ y = \sum_{\tau \in G} y_\tau \tau,\ z = \sum_{\chi \in G} z_\chi \chi$ に対して $(xy)z = x(yz)$ となることを示す。任意の $\sigma, \tau, \chi \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(x_\sigma \sigma \cdot y_\tau \tau) \cdot z_\chi \chi &= x_\sigma \sigma(y_\tau)(\sigma\tau)(z_\chi)\sigma\tau\chi \\ &= x_\sigma \sigma(y_\tau)\sigma(\tau(z_\chi))\sigma\tau\chi \\ &= x_\sigma \sigma(y_\tau \tau(z_\chi))\sigma\tau\chi \\ &= x_\sigma \sigma \cdot (y_\tau \tau(z_\chi)\tau\chi) \\ &= x_\sigma \sigma \cdot (y_\tau \tau \cdot z_\chi \chi)\end{aligned}$$

となる。よって、$(xy)z = x(yz)$ である。A の単位元は、$1 = \sum_{\sigma \in G} \delta_{\sigma, \mathrm{id}} \sigma$ で与えられる。ここで、$\delta_{\sigma, \mathrm{id}}$ は $\sigma = \mathrm{id}$ のとき $1 \in K$、$\sigma \neq \mathrm{id}$ のとき $0 \in K$ を表わす。よって、A は代数である。また、$\dim A = |G|$ ゆえ、有限次元である。

補題を次の順番で示す。

① 両側正則加群 ${}_AA_A$ において、その A の左作用・右作用を $K \rtimes \{\mathrm{id}\}$ に制限することにより、両側 K-加群とみなす。このとき、各 $\sigma \in G$ に対して $K\sigma := \{x\sigma \mid x \in K\} \subset M$ は A の部分両側 K-加群である。
② A は両側 K-加群として半単純である。
③ $I \subset A$ が両側イデアルならば、ある部分集合 S が存在して $I \cong \bigoplus_{\sigma \in S} K\sigma$ となる。
④ $M \cong K\sigma$ であるような A の部分両側 K-加群 M は $K\sigma$ に限る。
⑤ A の 0 でない両側イデアル I は、ある $K\sigma$ を含む。
①の証明：
　$x, y \in K$ に対して、

$$\begin{cases} y\mathrm{id} \cdot x\sigma = y\mathrm{id}(x)\mathrm{id}\sigma = yx\sigma \in K\sigma \\ x\sigma \cdot y\mathrm{id} = x\sigma(y)\sigma\mathrm{id} = x\sigma(y)\sigma \in K\sigma \end{cases}$$

となるので、$K\sigma$ は両側 K-加群 A の部分加群である。
②の証明：
　両側 K-加群として $A = \bigoplus_{\sigma \in G} K\sigma$ となる。各 $K\sigma$ は両側 K-加群として既約である ($\because$ $K\sigma$ を左 K-加群としてみると、K 上の次元は 1 である) から、A は両側 K-加群として半単純である。
③の証明：
　$I \subset A$ が両側イデアルであるとすると、I は両側 K-加群 A の部分加群とみなせる。したがって、②により、$I \cong \bigoplus_{\sigma \in S} K\sigma$ となる $S \subset G$ が存在する (補題 2-1)。
④の証明：
　$M \subset A$ を両側 K-加群であって、$K\sigma$ と同型なものとする。$\varphi : K\sigma \longrightarrow M$ を両側 K-加群の同型とする。$\iota : M \hookrightarrow A$ を包含写像とし、任意の $\tau \in G$ に対して $p_\tau : A \longrightarrow K\tau$ を直和分解 $A = \bigoplus_{\tau \in G} K\tau$ に附随する標準的な射影とする。このとき、$p_\tau \circ \iota \circ \varphi : K\sigma \longrightarrow K\tau$ は両側 K-加群準同型である。両側 K-加群として、$K\sigma,\ K\tau$ は既約であったから、

$$p_\tau \circ \iota \circ \varphi \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad K\sigma \cong K\tau \ \ \text{as } K\text{-bimodules}$$

となる (Schur の補題)。ここで、$K\sigma \cong K\tau$ as K-bimodules $\Longleftrightarrow$ $\sigma = \tau$ が成り立つ。
　$\because$)
　　「$\Longrightarrow$」のみ示せば十分である。
　　$f : K\sigma \longrightarrow K\tau$ を両側 K-加群の同型写像とする。$f(\sigma) = x_0\tau \ \ (x_0 \in K)$ とおくと、任意の $y \in K$ に対して、

$$\begin{aligned} f(\sigma \cdot y\mathrm{id}) &= f(\sigma(y)\sigma) \overset{\substack{f\text{ は左 }K\text{-加群準同型} \\ \downarrow}}{=} \sigma(y)f(\sigma) = \sigma(y)x_0\tau \\ f(\sigma) \cdot y\mathrm{id} &= x_0\tau \cdot y\mathrm{id} = x_0\tau(y)\tau \end{aligned}$$

が成り立つ。f が右 K-加群準同型であることから、上式の左辺は等しいから、

$$x_0\sigma(y)\tau = x_0\tau(y)\tau$$

を得る。$x_0 \neq 0$ ゆえ、$\sigma(y) = \tau(y)$ を得る。$y \in K$ は任意であるから、$\sigma = \tau$ を得る。
□

$$\therefore\ p_\tau \circ \iota \circ \varphi \neq 0 \iff \sigma = \tau$$

特に、

$$\tau \neq \sigma \implies \varphi(K\sigma) \subset A \text{ の } K\tau\text{-成分は } 0$$

となる。よって、$M = \varphi(K\sigma) \subset K\sigma$ を得る。$K\sigma$ は両側 K-加群として既約であったから、$M = K\sigma$ を得る。

⑤の証明：

$I \subset A$ を 0 でない両側イデアルとする。③により、$I \cong \bigoplus_{\sigma \in S} K\sigma$ となる $\emptyset \neq S \subset G$ が存在する。$\sigma \in S$ を 1 つとる。このとき、I は $K\sigma$ と同型な部分両側 K-加群を含む。ところが、そのような部分加群は④により $K\sigma$ しかない。故に、$K\sigma \subset I$ を得る。

以上のことを総合して、A の単純性が次のようにして証明される。

⑤より、A の 0 でない両側イデアル I は、ある $\sigma \in G$ を含む。σ は A において可逆であるから、$I = A$ を得る。故に、A は単純代数である。 (Q.E.D.)

命題 2-34

K を体、G を $\mathrm{Aut}(K)$ の有限部分群とする。このとき、$A := K \rtimes G$ の中心 $Z(A)$ は $K^G \rtimes \{\mathrm{id}\}$ である。さらに、A は $\boldsymbol{k} := K^G$ 上の代数として有限次元中心的単純になる。

(proof)

$a \in Z(A)$ とし、$a = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma,\ x_\sigma \in K$ と書く。任意の $y \in K$ に対して $(y\,\mathrm{id})a = a(y\,\mathrm{id})$ である。ここで、

$$\begin{cases} (y\,\mathrm{id})a &= \sum_{\sigma \in G} y x_\sigma \sigma \\ a(y\,\mathrm{id}) &= \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma(y) \sigma \end{cases}$$

なので、任意の $\sigma \in G$ に対して

$$y x_\sigma = x_\sigma \sigma(y)$$

となる。これより、$\sigma \neq \mathrm{id}$ の場合には $\sigma(y) \neq y$ となる $y \in K$ が存在するから、$x_\sigma = 0$ でなければならない。よって、$a \in Z(A)$ は

$$a = x\,\mathrm{id} \quad \text{for some } x \in K$$

と表わすことができる。任意の $\tau \in G$ に対して $a(1\tau) = (1\tau)a$ でなければならないから、$x\tau = \tau(x)\tau$ となる。故に、任意の $\tau \in G$ に対して $x = \tau(x)$ となる。これは $x \in K^G = \boldsymbol{k}$ となることを意味する。ゆえに、$Z(A) \subset \boldsymbol{k} \rtimes \{\mathrm{id}\}$ を得る。逆向きの包含関係はすぐに示されるから、$Z(A) = \boldsymbol{k} \rtimes \{\mathrm{id}\}$ となることがわかった。

補題 2-34 により、A は K 上の代数と見て単純であるから、$\boldsymbol{k} \subset K$ 上の代数とみても単純である。実際、A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみなしたときの両側イデアル $0 \neq I \subset A$ に対して、

$$(x\,\mathrm{id})I \subset I, \quad I(x\,\mathrm{id}) \subset I \qquad \text{for all } x \in K$$

が成り立つ。このことは I が A を体 K 上の代数と見たときの両側イデアルであることを意味する。よって、K 上の代数としての単純性から $I = A$ となる。こうして、A は $\boldsymbol{k} \subset K$ 上の代数とみても単純であることがわかった。

最後に A が $\boldsymbol{k}$ 上有限次元であることを示す。A は K 上有限次元であるから、体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ が有限次であることを示せばよい。

Jacobson の定理 (系 1-62) を K 上の単純代数 A とその既約な左 A-加群 $M := \{\sum_{\sigma\in G} x\,\sigma \mid x \in K\} \subset A$ について適用する (注：M が実際に既約な左 A-加群になることは次のようにしてわかる。M から任意の元 $\sum_{\sigma\in G} x\sigma \;\; (x \in K)$ をとる。任意の $y \in K$ と $\tau \in G$ に対して

$$(y\tau)\sum_{\sigma\in G} x\sigma = \sum_{\sigma\in G} y\tau(x)\tau\sigma = \sum_{\sigma\in G} y\tau(x)\sigma \in M$$

となる。したがって、M は ${}_AA$ の部分加群である。$\dim_K M = 1$ であるから M は既約である)。すると、M は $\mathrm{End}_A M$ 上有限次元の左ベクトル空間になることがわかる。

K 上のベクトル空間として $M \cong K$ であり、また、$\mathrm{End}_A M \cong \boldsymbol{k}$ となるから、体の拡大は $K/\boldsymbol{k}$ は有限次である。

$\because$)

$x \in K$ と $\sum_{\sigma\in G} x\sigma \in M$ を同一視する。すると、A の K への左作用が $a = \sum_{\tau\in G} y_\tau \tau$, $x \in K$ に対して

$$a \cdot x = \sum_{\tau\in G} y_\tau \tau(x)$$

となるように与えられる。$f \in \mathrm{End}_A K$ を任意にとる。$x \in K$ に対して、

$$f(x) = f((x\,\mathrm{id}) \cdot 1) = (x\,\mathrm{id}) \cdot f(1)$$

となるから f は $f(1)$ によって一意的に決まる。また、任意の $\tau \in G$ に対して、

$$\tau(f(1)) = (1\tau) \cdot f(1) = f((1\tau) \cdot 1) = f(\tau(1)) \underset{\uparrow}{=} f(1)$$

となる。　τ は体の同型だから単位元を保つ

故に、$f(1) \in K^G = \boldsymbol{k}$ となる。対応 $f \in \mathrm{End}_A K \longmapsto f(1) \in \boldsymbol{k}$ によって $\mathrm{End}_A K$ と $\boldsymbol{k}$ は斜体として同型になることがわかる。

K は $\mathrm{End}_A K$ 上有限次元であったから、K は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元である。このときの $\boldsymbol{k}$ の K への左作用は、$\boldsymbol{k}$ を K の部分体とみたときの K における積に一致する。実際、$\lambda \in \boldsymbol{k}$, $x \in K$ とする。$\lambda \in \boldsymbol{k}$ に対応する $\mathrm{End}_A K$ の元を f とおく。$f(1) = \lambda$ が成り立つ。このとき、

$$\lambda \cdot x \underset{\uparrow}{=} f(x) \overset{\substack{f \in \mathrm{End}_A K \\ \downarrow}}{=} (x\,\mathrm{id}) \cdot f(1) = (x\,\mathrm{id}) \cdot \lambda \underset{\uparrow}{=} x\lambda$$

となる。　$\boldsymbol{k}$ の K への左作用の定義　　A の K への左作用の定義

これで、示さなければならなかったことはすべて示された。 □

以上で、命題は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 2-32)

$S \subset A$ に対して

$$S' := Z_A(S) = \{a \in A \mid as = sa \ \text{ for all } s \in S\}$$

とおく。また、$\boldsymbol{k}$ と K の中間体 Δ と G の部分群 $\varGamma$ に対して

$$\Delta \rtimes \varGamma = \{\sum_{\sigma \in \varGamma} x_\sigma \sigma \mid x_\sigma \in \Delta \ (\sigma \in \varGamma)\}$$

を A の ($\boldsymbol{k}$ 上の代数としての) 部分代数とみなす。このとき、

$$\begin{cases} \text{(i) } G \text{ の部分群 } H \text{ に対して、} K^H \rtimes \{\mathrm{id}\} = (K \rtimes H)' \\ \text{(ii) } \boldsymbol{k} \text{ と } K \text{ の中間体 } L \text{ に対して、} K \rtimes G_L = (L \rtimes \{\mathrm{id}\})' \end{cases}$$

が成り立つ。

∵)

(i) の証明：

$x \in K$ を任意にとる。任意の $y \in K$ と任意の $\tau \in H$ に対して

$$(x\mathrm{id})(y\tau) = xy\tau, \quad (y\tau)(x\mathrm{id}) = y\tau(x)\tau$$

となる。$x \in K^H$ ならば、$\tau(x) = x$ であるから、$(x\mathrm{id})(y\tau) = (y\tau)(x\mathrm{id})$ となる。よって、$K^H \rtimes \{\mathrm{id}\} \subset (K \rtimes H)'$ を得る。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。$a \in (K \rtimes H)'$ を任意にとる。$a = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma,\ x_\sigma \in K$ と書く。$a(y\mathrm{id}) = (y\mathrm{id})a$ より $x_\sigma = 0 \ \ (\sigma \neq \mathrm{id})$ を得る (命題 2-34 の証明参照)。したがって、$a = x\,\mathrm{id} \ \ (x \in K)$ でなければならない。任意の $\tau \in H$ に対して $a(1\,\tau) = (1\,\tau)a$ を満たすことから、$\tau(x) = x$ を得る。これは $x \in K^H$ を意味する。よって、$a \in K^H \rtimes \{\mathrm{id}\}$ が示された。故に、$(K \rtimes H)' \subset K^H \rtimes \{\mathrm{id}\}$ も示された。

(ii) の証明：

まず、$K \rtimes G_L \subset (L \rtimes \{\mathrm{id}\})'$ を示す。$x \in K,\ \sigma \in G_L$ を任意にとる。このとき、任意の $y \in L$ に対して

$$\begin{cases} (x\sigma)(y\mathrm{id}) = x\sigma(y)\sigma = xy\sigma \\ (y\mathrm{id})(x\sigma) = yx\sigma \end{cases}$$

であるから、$x\sigma \in (L \rtimes \{\mathrm{id}\})'$ となる。よって、$K \rtimes G_L \subset (L \rtimes \{\mathrm{id}\})'$ が示された。次に、$(L \rtimes \{\mathrm{id}\})' \subset K \rtimes G_L$ を示す。$a \in (L \rtimes \{\mathrm{id}\})'$ を任意にとる。

$$a = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma \qquad (x_\sigma \in K)$$

と書く。任意の $y \in L$ に対して

$$\begin{cases} a(y\,\mathrm{id}) = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma(y)\sigma \\ (y\,\mathrm{id})a = \sum_{\sigma \in G} yx_\sigma \sigma \end{cases}$$

となる。$a \in L$ ゆえ $a(y\,\mathrm{id}) = (y\,\mathrm{id})a$ であるから、任意の $\sigma \in G$ に対して $x_\sigma \sigma(y) = y x_\sigma$ となる。$\sigma \notin G_L$ なる $\sigma \in G$ については

$$^\exists y \in L \ \text{ s.t. } \ \sigma(y) \neq y$$

となるから、$x_\sigma = 0$ でなければならないことがわかる。故に、

$$a = \sum_{\sigma \in G_L} x_\sigma \sigma \in K \rtimes G_L$$

となり、$(L \rtimes \{\mathrm{id}\})' \subset K \rtimes G_L$ も示された。 □

$K \rtimes H$ (但し、H は G の部分群) および $L \rtimes \{\mathrm{id}\}$ (但し、L は $\boldsymbol{k}$ と K の中間体) は、A を $\boldsymbol{k}$ 上の代数と見たときの単純な部分代数である。

$\because$)

$K \rtimes H$ は、補題 2-33 で A の単純性を証明したのと同じ理由で、K 上単純である。したがって、それは $\boldsymbol{k}$ 上の代数として単純になる (命題 2-34 の証明参照)。また、L は体であるから、L の両側イデアルは $\{0\}$ と L 自身のみである。$\boldsymbol{k}$ $(\subset L)$ 上の代数としての L の両側イデアルは、体としての L の両側イデアルであるから、L は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として単純である。したがって、$L \rtimes \{\mathrm{id}\}$ もまた $\boldsymbol{k}$ 上の代数として単純である。 □

$\varphi,\ \psi$ が互いに他の逆写像になることを示すには、

$$\begin{cases} ❶\ G \text{ の任意の部分群 } H \text{ に対して } G_{K^H} = H \\ ❷\ \boldsymbol{k} \text{ と } K \text{ の中間体 } L \text{ に対して } K^{G_L} = L \end{cases}$$

を示せばよい (注：その前に、G の任意の部分群 H に対して K^H が $\boldsymbol{k}$ と K の中間体になること、および、$\boldsymbol{k}$ と K の中間体 L に対して G_L が G の部分群になることを確かめておく必要があるが、これは簡単に確かめることできる)。

❶の証明：❶を示すには $K \rtimes G_{K^H} = K \rtimes H$ となることを示せばよい。

$K \rtimes H$ は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元中心的単純代数 A の単純な部分代数であるから、再中心化性をもつ (定理 2-29(iii))：$(K \rtimes H)'' = K \rtimes H$ 。よって、

$$K \rtimes H = (K \rtimes H)'' \underset{\text{(i)}}{=} (K^H \rtimes \{\mathrm{id}\})' \underset{\text{(ii)}}{=} K \rtimes G_{K^H}$$

を得る。故に、❶は示された。

❷の証明：❷を示すには $K^{G_L} \rtimes \{\mathrm{id}\} = L \rtimes \{\mathrm{id}\}$ となることを示せばよい。

$L \rtimes \{\mathrm{id}\}$ は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元中心的単純代数 A の単純な部分代数であるから、再中心化性をもつ (定理 2-29(iii))：$(L \rtimes \{1\})'' = L \rtimes \{1\}$ 。よって、

$$L \rtimes \{\mathrm{id}\} = (L \rtimes \{\mathrm{id}\})'' \underset{\text{(ii)}}{=} (K \rtimes G_L)' \underset{\text{(i)}}{=} K^{G_L} \rtimes \{\mathrm{id}\}$$

を得る。故に、❷は示された。 (Q.E.D.)

演習 2-36

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$A_1,\ A_2$：A の部分代数　とする。
$^\forall a_1 \in A_1,\ ^\forall a_2 \in A_2$ に対して、$a_1a_2 = a_2a_1$ であると仮定する。
A_1：中心的単純代数

$$\Longrightarrow \text{準同型} \quad \begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_2 & \longrightarrow & A_1A_2 \subset A \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a_1 \otimes a_2 & \longmapsto & a_1a_2 \end{array} \quad \text{は単射となる。}$$

これを示せ。

解；

問題の写像の核は $A_1 \otimes A_2$ の両側イデアルなので、命題 2-26 により

$$A_1 \otimes I, \quad I \text{ は } A_2 \text{ の両側イデアル}$$

の形をしている。任意に $a \in I$ をとると、$1 \otimes a$ は核に属するから、$1 \cdot a = 0$、すなわち、$a = 0$ を得る。

これは $I = 0$ となることを意味するので、問題に与えられている写像の単射性が示された。

(Q.E.D.)

演習 2-37

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数
B：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
$\Longrightarrow\ \mathrm{rad}(A \otimes B) = A \otimes \mathrm{rad}B$
となることを示せ。

解；

定理 1-17 により、$\mathrm{rad}B$ は B の冪零両側イデアルであるから、$A \otimes \mathrm{rad}B$ は $A \otimes B$ の冪零両側イデアルである。

$\mathrm{rad}(A \otimes B)$ は $A \otimes B$ の最大冪零イデアルであるから、

$$A \otimes \mathrm{rad}B \subset \mathrm{rad}(A \otimes B)$$

が成り立つ。

逆向きの包含関係が成り立つことを示す。

$\mathrm{rad}(A \otimes B)$ は $A \otimes B$ の両側イデアルであり、A は中心的単純代数であるから、命題 2-26 により、

$$\mathrm{rad}(A \otimes B) = A \otimes I \qquad (I\text{：}B \text{ の両側イデアル})$$

となる。$\mathrm{rad}(A \otimes B)$ の冪零性から、I も冪零でなければならない。よって、$I \subset \mathrm{rad}B$ を得る (定理 1-17)。

故に、$\mathrm{rad}(A \otimes B) \subset A \otimes \mathrm{rad}B$ を得る。 (Q.E.D.)

注意：この演習問題と定理 2-4 から、体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数 A と有限次元代数 B に対して、

$$B\text{：半単純} \iff A \otimes B\text{：半単純}$$

が成り立つ。すなわち、有限次元中心的単純代数をテンソルする操作の下で、半単純性は保たれる。

演習 2-38

> A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数
> $\Longrightarrow$ $\dim_{\boldsymbol{k}} A$ は平方数
> これを示せ。

解；

A に属する可除代数を D とおく。D は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元中心的である (定義 2-4 注意 2°)。

まず、D が平方数であることを示す。

K を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。

D^K は K 上の有限次元単純代数である。

∵)

$\dim_{\boldsymbol{k}} D = \dim_K(D^K)$ より、D^K は K 上有限次元である。また、D は $\boldsymbol{k}$ 上中心的単純であり、K は $\boldsymbol{k}$ 上単純であるから、$D^K = K \otimes D$ は K 上の単純代数である (命題 2-26(3))。 □

したがって、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$D^K \cong \mathrm{M}_n(K) \qquad \text{as } K\text{-algebras}$$

となる (∵ 代数閉体上の有限次元単純代数は全行列代数に同型 (系 2-18))。故に、

$$\dim_{\boldsymbol{k}} D = \dim_K(D^K) = \dim_K \mathrm{M}_n(K) = n^2$$

を得る。さて、A に属する可除代数を D とおいたから、ある $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$A \cong \mathrm{M}_m(D) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-4}}}{\cong} D \otimes \mathrm{M}_m(\boldsymbol{k}) \qquad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras}$$

が成り立つ。したがって、

$$\dim_{\boldsymbol{k}} A = m^2 \dim_{\boldsymbol{k}} D = m^2 n^2 = (mn)^2$$

を得る。故に、A の次元は平方数である。 (Q.E.D.)

演習 2-39

> D：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的可除代数
> K：D の**極大な部分体** $\left(i.e. \begin{array}{l} ① \ K \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ を含む } D \text{ の部分体、かつ、} \\ ② \ K'\text{：}D \text{ の部分体、} K \subset K' \Longrightarrow K' = K \end{array} \right)$
> $\Longrightarrow$ $\dim_{\boldsymbol{k}} D = [K : \boldsymbol{k}]^2$
> これを示せ。

解；

K は D の単純な部分代数であるから、Brauer の定理 (定理 2-29) により、

$$(\dim K)(\dim Z_D(K)) = \dim D \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。但し、次元はすべて $\boldsymbol{k}$ 上で考える。

K は D の極大な部分体であるから、

$$Z_D(K) = K \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

$\because$)

K は体なので、可換である。したがって、

$$K \subset Z_D(K) = \{a \in D \mid xa = ax \ \ \text{for } {}^\forall x \in K\}$$

が成り立つ。

逆向きの包含関係を示すために、任意に $a \in Z_D(K)$ をとる。

このとき、K に a を添加して得られる D の部分代数

$$K[a] := \{\sum_{i=0}^{k} x_i a^i \mid k \geq 0,\ x_i \in K\ (i = 0, 1, \cdots, k)\}$$

を考える。$L[a]$ は体である。これを示す。

まず、$a \in Z_D(K)$ ゆえ、D の部分代数として $K[a]$ は可換であることに注意しよう。

多項式代数 $K[x]$ から $K[a]$ への写像 $\varphi : K[X] \longrightarrow K[a],\ f(X) \longmapsto f(a)$ を考える。この写像は全射な代数準同型である。準同型定理から

$$K[a] \cong K[X]/\mathrm{Ker}\varphi \qquad \text{as algebras}$$

となる。ここで、$\mathrm{Ker}\varphi \neq \{0\}$ である。なぜならば、D は K 上有限次元であるから、十分大きく $n \in \mathbb{N}$ をとると $\{1, a, a^2, \cdots a^n\}$ は K 上一次従属になるからである。そこで、

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{f(X) \in K[X] \mid f(a) = 0\}$$

の 0 でない元の中で、次数が最小であって最高次の係数が 1 のものを $m(X)$ と書くと、$\mathrm{deg} m(X) \geq 1$ であり、(もし、$m(X) \neq 0$ が定数項だけであったとすると、$\mathrm{Ker}\varphi = K[X]$ となるが、$\varphi(1) = 1 \neq 0$ なので、そのようなことは起こり得ない。)

$$\mathrm{Ker}\varphi = (m(X)) \ \ \text{かつ} \ \ m(X) \text{ は } K \text{ 上既約}$$

であることがわかる (多項式に対する剰余の定理)。$m(X)$ が K 上既約であることから、$(m(X))$ が $K[X]$ の極大イデアルであることがわかり (拙著『代数系入門』p.276 問題 111 参照)、その結果として $K[X]/(m(X)) = K[X]/\mathrm{Ker}\varphi \cong K[a]$ は体になる。

$K \subset K[a]$ であり、$K[a]$ は D の部分体であるから、K の極大性により、$K[a] = K$ を得る。特に、$a \in K$ となる。これで、$Z_D(K) \subset K$ となることも示された。 □

①と②から、

$$(\dim K)^2 = \dim D$$

を得る。これが示したい等式であった。 (Q.E.D.)

注意：上の演習問題の K は D の分解体と呼ばれるものになっている (補題 4-23 の証明参照)。代数の分解体については、第 4 章第 6 節で詳しく扱う。

上の演習問題を用いて、次の有名な Frobenius の定理を証明することができる。

演習 2-40 (Frobenius)

実数体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元可除代数は、$\mathbb{R}$ 自身、複素数体 $\mathbb{C}$、四元数体 $\mathbb{H}$ のいずれかに限ることを示せ。

解；

D を $\mathbb{R}$ 上の有限次元可除代数とする。D を $Z(D)$ 上の中心的可除代数とみなし、K をその極大な部分体とする (したがって、$Z(D) \subset K$ が満たされている)。

D は有限次元なので、$[K:\mathbb{R}] < \infty$ である。

まず、$\mathbb{R}$ の有限次拡大体が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ に限ることに注意する。

$\because$)

$\mathbb{R}$ の有限次拡大体は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ に限ることを示すには、

① $\mathbb{R}$ の奇数次の拡大体は $\mathbb{R}$ に限る。

② $\mathbb{R}$ の 2 次の拡大体は $\mathbb{C}$ に同型となる。

の 2 つを示せばよい。

$\mathbb{R}$ の標数は 0 であるから、任意の有限次拡大 $E/\mathbb{R}$ は分離的である。したがって、

$$^{\exists}\theta \in E \quad \text{s.t.} \quad E = \mathbb{R}(\theta)$$

となる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.150 参照)。

θ の $\mathbb{R}$ 上の最小多項式を $m(X)$ とおくと、$\deg m(X) = [E:\mathbb{R}]$ となる。

①の証明：$[E:\mathbb{R}] = \deg m(X)$ は奇数であるとする。

よって、$m(X)$ は奇数次の $\mathbb{R}$ 上既約な多項式となる。

しかし、よく知られているように、奇数次の $\mathbb{R}$-係数多項式は $\mathbb{R}$ 内に根を持つ (例えば、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.203 補題 3-10(1) 参照)。$m(X)$ の既約性から、$m(X)$ は一次式でなければならない。故に、$[E:\mathbb{R}] = 1$、すなわち、$E = \mathbb{R}$ となる。

②の証明：$[E:\mathbb{R}] = \deg m(X) = 2$ であるとする。

E は $m(X)$ の分解体である。($\because$ $m(\theta) = 0$ なので、$E[X] = (\mathbb{R}(\theta))[X]$ において $m(X)$ は $X - \theta$ で割り切れる。よって、$m(X) = (X-\theta)f(X),\ f(X) \in E[X]$ と書けるが、$m(X)$ は 2 次式なので、$f(X)$ は 1 次式でなければならない。故に、E は $m(X)$ の分解体である。)

一方、$\mathbb{C}$ は代数閉体であるから、$m(X) \in \mathbb{R}[X]$ は $\mathbb{C}[X]$ において 1 次式に分解されるが、$m(X)$ の $\mathbb{R}[X]$ における既約性から、$m(X)$ の $\mathbb{C}$ 内の 2 根 α, β は実数でないことがわかる。よって、

$$\mathbb{R}(\alpha, \beta) = \mathbb{C}$$

が成り立ち、$\mathbb{C}$ も $m(X)$ の分解体であることがわかる ($\because$ $\alpha = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ とおくと $\beta = a - bi$ であって、$b \neq 0$ となることから)。

分解体の一意性 (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.56 定理 2-9 の系参照) から、体として

$$E \cong \mathbb{C}$$

を得る。 □

これより、$[K:\mathbb{R}]=1$ または $[K:\mathbb{R}]=2$ を得る。

・$[K:\mathbb{R}]=1$ の場合：

$[K:Z(D)][Z(D):\mathbb{R}]=[K:\mathbb{R}]=1$ なので、$[K:Z(D)]=[Z(D):\mathbb{R}]=1$ となる。

特に、$Z(D)=\mathbb{R}$ となる。

上の演習問題により $\dim_{Z(D)} D=[K:Z(D)]^2=1$ であるから、

$$D=Z(D)=\mathbb{R}$$

を得る。

・$[K:\mathbb{R}]=2$ の場合：

$[K:Z(D)][Z(D):\mathbb{R}]=[K:\mathbb{R}]=2$ なので、$[K:Z(D)]=2$ かつ $[Z(D):\mathbb{R}]=1$、または、$[K:Z(D)]=1$ かつ $[Z(D):\mathbb{R}]=2$ となる。

・$[K:Z(D)]=1$ かつ $[Z(D):\mathbb{R}]=2$ のとき：

$Z(D)$ は $\mathbb{R}$ の２次拡大体となるので、$Z(D)\cong\mathbb{C}$ となる。

上の演習問題により $\dim_{Z(D)} D=[K:Z(D)]^2=1$ であるから、

$$D=Z(D)\cong\mathbb{C}$$

を得る。

・$[K:Z(D)]=2$ かつ $[Z(D):\mathbb{R}]=1$ のとき：

K は $Z(D)=\mathbb{R}$ の２次拡大体となる。したがって、$K\cong\mathbb{C}$ であり、D は $\mathbb{R}$ 上中心的な4次元の可除代数である。

$\dim_{Z(D)} D=[K:Z(D)]^2=4$

$K=\mathbb{C}$ と同一視して、写像

$$f:K\longrightarrow K,\qquad a+ib\longmapsto a-ib,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

を考える。f は $\mathbb{R}$ 上の代数の自己同型である。Skolem-Noether の定理 (系 2-28) から

$$0\neq\ {}^{\exists}x\in D\ \text{ s.t. }\ x(a+ib)x^{-1}=(a-ib)\ \text{ for all } a,b\in\mathbb{R}$$

となる。任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して、

$$x^2(a+ib)x^{-2}=x(a-ib)a^{-1}=a+ib$$

であるから、$x^2\in Z_D(K)=K$ となる。

K の極大性（上の演習の解を参照）

$f(a+ib)=a-ib=x(a+ib)x^{-1},\ a,b\in\mathbb{R}$ であるから $f(x^2)=x^2$ を得る。したがって、$x^2\in\mathbb{R}$ である。

$x^2>0$ であると仮定する。

$x^2=r^2$ となる $r\in\mathbb{R}$ が存在する。すると、$x=\pm r\in\mathbb{R}$ となる。しかし、このときには、$-i=f(i)=xix^{-1}=i$ となり、矛盾が生じる。故に、$x^2<0$ でなければならない。このとき、

$$x^2=-y^2,\ y\in\mathbb{R}$$

と置くことができる。

$$j := xy^{-1}, \qquad k = ij$$

とおく。次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ &ij = k = -ji \\ &jk = i = -kj \\ &ki = j = -ik \end{aligned}$$

$\because$)

$y \in \mathbb{R} = Z(D)$ および $xi = -ix$ に注意して計算する。

- $j^2 = xy^{-1}xy^{-1} = x^2y^{-2} = -1$
- $k^2 = ijij = ixy^{-1}ixy^{-1} = ixixy^{-2} = -ixix^{-1} = -1$
- $-ji = -xy^{-1}i = -xiy^{-1} = ixy^{-1} = ij = k$
- $jk = jij = j(-ji) = -j^2i = i$
- $kj = ijj = ij^2 = -i$
- $ki = iji = i(-ij) = -i^2j = j$
- $ik = iij = -j$ $\square$

$\{1, i, j, k\}$ は D の $\mathbb{R}$ 上の基底である。

$\because$)

$\dim_{\mathbb{R}} D = 4$ であることは分かっているので、$\{1, i, j, k\}$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立なことを示せば十分である。

$$a + bi + cj + dk = 0 \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

であるとする。$j = xy^{-1}$, $k = ixy^{-1}$ を代入すると、上式は

$$a + bi + y^{-1}(c + di)x = 0$$

と書き換えられる。

$c + id \neq 0$ であると仮定する。すると、$x = \dfrac{a + bi}{c + di} y$ と書けることになるので、$x \in \mathbb{C}$ となる。このとき、任意の複素数 z に対して

$$\bar{z} = f(z) = xzx^{-1} = z$$

となり、矛盾が生じる。故に、$c + di = 0$ でなければならない。したがって、$c = d = 0$ であり、これを $(*)$ に代入して、$a + bi = 0$ を得る。これより、$a = b = 0$ を得るので、$\{1, i, j, k\}$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立なことが証明された。 $\square$

こうして、$[K : Z(D)] = 2$ かつ $[Z(D) : \mathbb{R}] = 1$ の場合には、$\mathbb{R}$ 上の代数として

$$D \cong \mathbb{H}$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

注意：$\mathbb{R}$ 上の可除代数の存在については、興味深い歴史的経緯がある (詳しくは H.-D. エビングハウス・他著、成木勇夫・訳『数 (下)』シュプリンガー・フェアラーク東京 1991 年を参照)。

それは Hamilton(1805 年–1865 年) に始まる。Hamilton は、複素数の計算規則を実数の順序対に関する操作として正当化できることに着目し、実数の 3 つ組に対しても「よい性質を持った積」が存在するのではないかと考えた。その研究の中で、彼は 4 次元において、0 以外の元が逆元を持つような結合的な積が存在することを示した。この代数が現在、**Hamilton の４元数体**という名で呼ばれる可除代数である (第 1 章第 1 節で $\mathbb{H}$ という記号で書いたもの)。残念ながら、彼自身は 3 次元に対しては「よい性質を持った積」が存在するかどうかという問題に決着をつけることはできなかった。この問題は、1877 年になってようやく Frobenius によって否定的に解決された。

演習 2-41

$\boldsymbol{k}$ を体とする。$\{\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数の全体 $\}$ 上に関係 $\sim$ を

$$A \sim B \iff A \text{ に属する可除代数と } B \text{ に属する可除代数は同型}$$

によって定義すると、$\sim$ は同値関係になる。

$$Br(\boldsymbol{k}) := \{\boldsymbol{k} \text{ 上の有限次元中心的単純代数の全体 }\}/\sim$$

とおく。$Br(\boldsymbol{k})$ は

$$[A]\cdot[B] := [A \otimes B]$$

を積として、アーベル群になることを示せ。

$Br(\boldsymbol{k})$ を体 $\boldsymbol{k}$ の **Brauer 群** (*Brauer group*) と呼ぶ。

解；

まず、2 つの有限次元中心的単純代数 A, B に対して、$A \otimes B$ はまた有限次元中心的単純代数になることに注意する (命題 2-26 から $A \otimes B$ の単純性が出て、演習 1-7(3) から中心的であることが従う)。

積が矛盾なく定義されていることを示す。

A_1, A_2, B_1, B_2 を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数とし、$A_1 \sim A_2,\ B_1 \sim B_2$ であるとする。

$A_1 \sim A_2$ なので、$A_1,\ A_2$ に属する可除代数は (同型を除き) 同じである。それを D とおく。同様に、$B_1,\ B_2$ に属する可除代数は同じであるから、それを E とおく。このとき、

$$^{\exists}m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ A_i \cong \mathrm{M}_{m_i}(D), \quad B_i \cong \mathrm{M}_{n_i}(E) \quad i = 1, 2$$

となる。すると、演習 1-4(2) により

$$\begin{aligned} A_1 \otimes B_1 &\cong \mathrm{M}_{m_1}(D) \otimes \mathrm{M}_{n_1}(E) \\ &\cong D \otimes \mathrm{M}_{m_1}(\boldsymbol{k}) \otimes \mathrm{M}_{n_1}(\boldsymbol{k}) \otimes E \\ &\cong D \otimes E \otimes \mathrm{M}_{m_1 n_1}(\boldsymbol{k}) \\ &\cong \mathrm{M}_{m_1 n_1}(D \otimes E) \end{aligned}$$

となる。同様にして、$A_2 \otimes B_2 \cong \mathrm{M}_{m_2 n_2}(D \otimes E)$ を得る。よって、$A_1 \otimes B_1 \sim A_2 \otimes B_2$ であることが確かめられた。

0. 積の可換性

$[A], [B] \in Br(\boldsymbol{k})$ を任意にとる。代数として、$A \otimes B \cong B \otimes A$ であるから $[A]\cdot[B] = [B]\cdot[A]$ を得る。

i. 積の結合律

$[A_1], [A_2], [A_3] \in Br(\boldsymbol{k})$ とする。代数として、$(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \cong A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)$ であるから、

$$([A_1] \cdot [A_2]) \cdot [A_3] = [(A_1 \otimes A_2) \otimes A_3] = [A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)] = [A_1] \cdot ([A_2] \cdot [A_3])$$

となる。よって、$Br(\boldsymbol{k})$ の積は結合的である。

ii. 単位元の存在

$\boldsymbol{k}$ 自身を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数とみることができる。その同値類 $[\boldsymbol{k}] \in Br(\boldsymbol{k})$ が単位元である。実際、任意の $[A] \in Br(\boldsymbol{k})$ に対して

$$[A] \cdot [\boldsymbol{k}] = [A \otimes \boldsymbol{k}] = [A] = [\boldsymbol{k} \otimes A] = [\boldsymbol{k}] \cdot [A]$$

となる。

iii. 逆元の存在

$[A] \in Br(\boldsymbol{k})$ を任意にとる。

A^{op} は有限次元中心的単純代数である。このとき、$[A^{\mathrm{op}}]$ が $[A]$ の逆元になる。なぜならば、

$$A \otimes A^{\mathrm{op}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 2-30}}}{\cong} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} A \underset{\substack{\uparrow \\ \dim A = n \text{ とおく}}}{\cong} \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \quad \text{for some } n \in \mathbb{N}$$

ゆえ、

$$[A] \cdot [A^{\mathrm{op}}] = [A \otimes A^{\mathrm{op}}] = [\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})] = [\boldsymbol{k}]$$

となる。積は可換だったので、$[A^{\mathrm{op}}] \cdot [A] = [A] \cdot [A^{\mathrm{op}}] = [\boldsymbol{k}]$ も成り立つ。

以上より、$Br(\boldsymbol{k})$ はアーベル群をなす。 (Q.E.D.)

注意 1°：２つの有限次元中心的単純代数 A, B が、上で述べた同値関係 $\sim$ によって $A \sim B$ となっているとき、A と B は**相似** (*similar*) であると呼ばれる。有限次元中心的単純代数を相似という関係で類別する方が、同型という関係で類別するより弱い (*i.e.* $A \cong B \implies A \sim B$) のであるが、相似で類別すると群構造が入るという良い状況が生まれる。この事実を最初に示したのは R.Brauer であった (1929 年)。

注意 2°：定理 2-19 により、体 $\boldsymbol{k}$ 上の任意の有限次元単純代数 A は、$\boldsymbol{k}$ 上のある有限次元可除代数 D と自然数 n によって、$A \cong \mathrm{M}_n(D)$ となる。ここで、$Z(A) \cong Z(\mathrm{M}_n(D)) \cong Z(D)$ である (演習 1-4) から、A が中心的ならば、D も中心的である。したがって、$[A] = [D]$ が成立する。これより、$Br(\boldsymbol{k})$ の代表元として、$\boldsymbol{k}$ 上有限次元可除代数をとることができる。そうであるならば、なぜ、$Br(\boldsymbol{k})$ を定義するときに、{$\boldsymbol{k}$ 上有限次元可除代数全体 } 上に演習と同じ関係をいれて、$Br(\boldsymbol{k})$ を定義しないのだろうか。ところが、もし、そのようにして $Br(\boldsymbol{k})$ を定義してしまったならば、その積構造を定義するときに困難が生じるのである。「有限次元可除代数と有限次元可除代数のテンソル積は可除代数になるとは限らない」からである (可除代数の２つ元 $d, d' \neq 0$ に対して、$d \otimes d'$ は確かに逆元を持つが、$d_1 \otimes d_1' + d_2 \otimes d_2' + \cdots + d_k \otimes d_k'$ のような元は逆元を持つであろうか？)。

注意 3°：Brauer 群を計算することは、とりわけ数論や代数幾何学の問題との関連において、重要な意味を持つ。一般に、Brauer 群 $Br(\boldsymbol{k})$ を計算することは非常に難しいが、次の場合には比較的簡単にわかる。$\boldsymbol{k}$ が代数閉体ならば、$Br(\boldsymbol{k}) = \{1\}$(自明な群) になる (演習 1-5)。したがって、$Br(\mathbb{C}) = \{1\}$ である。また、$\mathbb{R}$ 上の有限次元可除代数は、$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の 3 つに限るという Frobenius の定理 (演習 2-40) により、$Br(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となることがわかる。Brauer 群についてさらに詳しい情報を知りたければ、例えば、B.Farb, R.K.Dennis・共著『Noncommutative algebra』GTM144, Springer-Verlag (1993) を参照せよ。

演習 2-42

$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。このとき、写像 $Br(\boldsymbol{k}) \longrightarrow Br(K)$ が

$$[A] \longmapsto [A^K]$$

によって与えられる。この写像は、実際、矛盾なく定義されていて、群の準同型になっていることを示せ。

この写像の核を $Br(K/\boldsymbol{k})$ と書き、**相対 Brauer 群** (*relative Brauer group*) と呼ぶ。

解；

まず、$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数 A に対して、A^K は K 上有限次元中心的単純代数であることに注意する。

$\because$)

命題 2-26(2) により、A^K の両側イデアルは $I \otimes A$ (但し、I は K を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみたときの両側イデアル) の形をしている。K を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみたときの両側イデアルは、体 K の両側イデアルである。また、K は体であるから、その両側イデアルは、K または $\{0\}$ 自身に限る。したがって、$I = 0$ または $I = K$ である。故に、A^K は単純である。

$$Z(A^K) = Z(K) \otimes Z(A) \cong K \otimes \boldsymbol{k} \cong K$$

なので、A^K は K 上中心的である。さらに、$\dim_K(A^K) = \dim_{\boldsymbol{k}} A$ ゆえ、A^K は K 上有限次元である。 □

さて、写像が矛盾なく定義されていることを示す。

$A,\ B$ を $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数とする。$A \sim B$ ならば、

$$^\exists D：可除代数,\ ^\exists n, m \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ A \cong \mathrm{M}_m(D),\ B \cong \mathrm{M}_n(D)$$

となる。このとき、

$$A^K = K \otimes A = K \otimes \mathrm{M}_m(D) \cong K \otimes \mathrm{M}_m(\boldsymbol{k}) \otimes D \cong \mathrm{M}_m(\boldsymbol{k}) \otimes D^K \cong \mathrm{M}_m(D^K)$$

となる。同様に、$B^K \cong \mathrm{M}_n(D^K)$ となる。

D^K は K 上の有限次元中心的単純代数である ($\because$ D は有限次元中心的単純代数のなので、上で示したように D^K は K 上有限次元中心的単純代数である) から、定理 2-19 により、

$$^\exists E：K\ 上の可除代数,\ ^\exists l \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ D^K \cong \mathrm{M}_l(E)\ \text{ as } K\text{-algebras}$$

となる。このとき、

$$A^K \cong \mathrm{M}_m(D^K) \cong \mathrm{M}_m(\mathrm{M}_l(E)) \cong \mathrm{M}_{ml}(E)$$
$$B^K \cong \mathrm{M}_n(D^K) \cong \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_l(E)) \cong \mathrm{M}_{nl}(E)$$

となるから、$A^K \sim B^K$ を得る。これで、写像が矛盾なく定義されていることがわかった。

次に、与えられた写像が群の準同型であることを示す。

A, B を 2 つの $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数とする。このとき、代数として、

$$(A \otimes B)^K \cong A^K \otimes_K B^K$$

となる (演習 1-76)。したがって、

$$[(A \otimes B)^K] = [A^K \otimes_K B^K] = [A^K] \cdot [B^K]$$

が成り立つ。このことは、与えられた写像が群の準同型であることを意味する。　(Q.E.D.)

第３章　直既約加群に関する理論

§1. 局所的代数

極大左イデアルが唯一つしかない代数は局所的であると呼ばれる。ここでは、Artin 的かつ Noether 的な A-加群 $M(\neq 0)$ が直既約であるための必要十分条件は代数 $\mathrm{End}_A M$ が局所的なことであることを示す。この事実が次節で紹介する Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理 (直既約分解の存在と一意性に関する基本定理) を証明する際の鍵になる。

定義 3-1

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

A：**局所的** (*local*) $\Longleftrightarrow$ A の極大左イデアルはただ 1 つ

注意 1°： $\mathrm{rad}A =$ (すべての極大左イデアルの共通部分) であったから、

$$A\text{：局所的} \implies A \text{ の極大左イデアルは } \mathrm{rad}A$$

が成り立つ。逆に、$\mathrm{rad}A$ が A の極大左イデアルならば、A の任意の極大左イデアル I に対して、$\mathrm{rad}A \subset I$ となる (定義 1-9 参照)。したがって、$\mathrm{rad}A = I$ である。これより、A は局所的なことがわかる。以上をまとめて、

$$A\text{：局所的} \iff \mathrm{rad}A \text{ が極大左イデアル}$$

を得る。

注意 2°：局所的という概念は左右対称的である。すなわち、

$$A\text{：局所的} \iff A \text{ の極大右イデアルはただ 1 つ}$$

が成り立つ (命題 3-1 の証明の下の注意参照)。

注意 3°：局所的な代数の既約加群は同型を除いて一意的である。

(proof)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。$M,\ N$ を既約な左 A-加群とする。このとき、

$$^{\exists}I\text{：}A \text{ の極大左イデアル s.t. } M \cong A/I \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

$$^{\exists}J\text{：}A \text{ の極大左イデアル s.t. } N \cong A/J \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる (演習 1-36)。今、A が局所的であるとすると $I = J$ となる。

$$\therefore\ M \cong A/I = A/J \cong N \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。 □

命題 3-1

A : 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

次の 3 つは同値である。

(i) A は局所的である。

(ii) $S := \{x \in A \mid x \text{ は } A \text{ の単元でない}\}$ は両側イデアルをなす。

(iii) $x, y \in A$ が単元でないならば $x + y$ も単元でない。

(proof)
(i) $\Longrightarrow$ (ii)：
　仮定により、rad$A$ は A の極大左イデアルである。
　rad$A = S$ となることを示す。
　rad$A$ は単元を含まない (∵ もし、含んだとすると、rad$A = A$ となり矛盾である) から、rad$A \subset S$ である。逆向きの包含関係が成り立つことを示す。
　$x \in S$ とする。左イデアル Ax を考える。
　・もし、$Ax \neq A$ ならば、Ax を含む A の極大な左イデアルが存在する。A は局所的であるから、$Ax \subset$ rad$A$ となる。よって、$x \in$ rad$A$ を得る。　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$
　・もし、$Ax = A$ ならば、$ax = 1$ となる $a \in A$ が存在する。
　$a \notin$ rad$A$ である。
　∵)
　　$a \in$ rad$A$ であると仮定する。
　　rad$A$ は両側イデアルなので (補題 1-18)、$1 = ax \in$ rad$A$ となる。
　　これは、rad$A$ の極大性に反する。 □

　$(*)$ の対偶をとって、
　　$Aa = A$
を得る。よって、
　　$^{\exists}y \in A$ s.t. $ya = 1$
となる。$ya = 1$ かつ $ax = 1$ より、$a \in A$ は単元であることがわかる。したがって、x も単元である。これは、$x \in S$ であることに反する。
　以上により、

$$x \in S \implies Ax \neq A$$

が得られた。ここで、再び $(*)$ を適用して、$x \in$ rad$A$ を得る。
　こうして、rad$A = S$ が示された。特に、S は A の両側イデアルであることがわかる (補題 1-18)。
(ii) $\Longrightarrow$ (i)：
　S は A の極大な左イデアルである。
　∵)
　　S が極大でないと仮定すると、

$$^{\exists}I : A \text{ の極大な左イデアル} \quad \text{s.t.} \quad S \subsetneqq I$$

　となる。S の定義により、

$$a \in I - S \text{ は } A \text{ の単元}$$

　である。これより、I は A の単元を含むことになり、$I = A$ が得られる。
　　これは、I の極大性に反する。 □

さらに、S は $I \neq A$ なる任意の左イデアル I を含む ($\because$ $I \neq A$ なので、I には A の単元が含まれないから)。

したがって、S は A の唯一の極大左イデアルである。故に、A は局所的であって、$S = \mathrm{rad}A$ が成立する。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

これは明らかに成り立つ。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：

まず、A の冪等元は単位元のみであることを証明する。

1 とは異なる冪等元 $e \in A$ が存在したと仮定する。

$e(1-e) = 0$ より、$e,\ 1-e$ は A の単元でないことがわかる。

仮定により $1 = e + (1-e)$ は単元でないことになるが、これは矛盾である。

よって、A の冪等元は単位元 1 のみである。

S が両側イデアルであることを示すには、

$$\begin{cases} x, y \in S \implies x + y \in S & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x \in S \implies -x \in S & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ a \in A,\ x \in S \implies ax \in S & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ a \in A,\ x \in S \implies xa \in S & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を示せばよい。①は仮定そのものであり、自動的に満たされている。②が成り立つことはすぐにわかる。③と④を示す。

③の証明：ax が A の単元であると仮定する。すると、

$$^{\exists}b \in A \ \ \text{s.t.} \ \ b(ax) = (ax)b = 1$$

となる。$u := xba$ とおくと、

$$u^2 = (xba)(xba) = x(bax)ba = x1ba = u$$

を得る。$u \neq 0$ である。

$\because$)

> ax は単元なので、$ax \neq 0$ である。よって、$a \neq 0$ である。
>
> 一方、$au = a(xba) = (axb)a = 1a = a$ であるから、$au \neq 0$ である。故に、$u \neq 0$ である。 □

故に、u は A の冪等元である。A の冪等元は 1 のみであったから、$u = 1$ を得る。こうして、

$$xba = 1 = bax$$

が得られた。これは x が単元でないことに矛盾する。故に、ax は単元でない。

④の証明：xa が A の単元であると仮定する。すると、

$$^{\exists}c \in A \ \ \text{s.t.} \ \ c(xa) = (xa)c = 1$$

となる。$v := acx$ とおくと、③の証明と同様にして

$$v^2 = v \quad \text{かつ} \quad v \neq 0$$

であることがわかる。A の冪等元は 1 のみであったから、$v=1$ となるが、これは ac が x の逆元であることを意味し、x の取り方に矛盾する。故に、xa は単元でない。

以上により、S が A の両側イデアルであることが示された。 (Q.E.D.)

注意：(i) と (ii) の同値性により、

$$A\text{：局所的} \iff A^{\mathrm{op}}\text{：局所的}$$

が成り立つ。したがって、

$$A\text{：局所的} \iff A \text{ の極大右イデアルはただ 1 つ}$$

が成り立つ。

上の命題の証明において、

$$\text{(iii)} \implies A \text{ の冪等元は単位元のみ}$$

が示されている。(iii) と (i) は同値であるから、次の結果が得られれる。

系 3-2

A : 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

A : 局所的 $\Longrightarrow A$ の冪等元は単位元のみ

この節の目標は、次の定理の証明である。

定理 3-3

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：Artin 的かつ Noether 的な左 A-加群、$M \neq 0$ とする。

$E := \mathrm{End}_A M$ とおく。次が成り立つ。

$$M: \text{ 直既約} \iff E: \text{ 局所的}$$

この定理の必要性を証明するために、Fitting 分解について述べる。

補題 3-4(Fitting 分解)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：Artin 的かつ Noether 的な左 A-加群、$f \in \mathrm{End}_A V$

$$\Longrightarrow \ {}^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ V = \mathrm{Im} f^n \oplus \mathrm{Ker} f^n,$$

$$f|_{\mathrm{Im} f^n} : \mathrm{Im} f^n \longrightarrow \mathrm{Im} f^n \quad \text{は同型},$$

$$f|_{\mathrm{Ker} f^n} : \mathrm{Ker} f^n \longrightarrow \mathrm{Ker} f^n \quad \text{は冪零}$$

(proof)

$V \supset \mathrm{Im} f \supset \mathrm{Im} f^2 \supset \cdots\cdots$ であり、V は Artin 加群であるから、

$${}^{\exists}m \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \mathrm{Im} f^m = \mathrm{Im} f^{m+1} = \cdots\cdots$$

となる。この n に対して、V の部分加群の昇鎖列 $\mathrm{Ker} f^m \subset \mathrm{Ker} f^{m+1} \subset \cdots\cdots$ を考えると、V は Noether 加群であるから、

$${}^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^{n+1} = \cdots\cdots$$

となる。このとき、

$$\mathrm{Im}f^n = \mathrm{Im}f^{n+1} = \cdots\cdots$$

でもあることに注意する。すると、

$$V = \mathrm{Im}f^n \oplus \mathrm{Ker}f^n$$

が成立する。

$\because$)

$\mathrm{Im}f^n = \mathrm{Im}f^{2n}$ であるから、

$$^{\forall}v \in V,\ ^{\exists}v' \in V \ \ \text{s.t.} \ \ f^n(v) = f^{2n}(v')$$

となる。このとき、

$$v = \underset{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ \mathrm{Ker}f^n}}{\underbrace{(v - f^n(v'))}} + \underset{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ \mathrm{Im}f^n}}{\underbrace{f^n(v')}}$$

である。

故に、$V = \mathrm{Ker}f^n + \mathrm{Im}f^n$ を得る。

$v \in \mathrm{ker}f^n \cap \mathrm{Im}f^n$ をとる。$v \in \mathrm{Im}f^n$ であるから、$v = f^n(v'),\ v' \in V$ と書くことができる。$v \in \mathrm{Ker}f^n$ でもあるから、$f^n(f^n(v')) = 0$ となる。故に、$v' \in \mathrm{Ker}f^{2n} = \mathrm{Ker}f^n$ となる。よって、$v = f^n(v') = 0$ を得る。

以上より、$V = \mathrm{Ker}f^n \oplus \mathrm{Im}f^n$ が成立する。 $\square$

$V_0(f) = \mathrm{Ker}f^n, \quad V_1(f) = \mathrm{Im}f^n$ とおく。

$f(V_0(f)) \subset V_0(f), \quad f(V_1(f)) \subset V_1(f)$ が成り立つ。

$V_0(f)$ の定義により、$f^n(V_0(f)) = 0$ であるから、$f|_{V_0(f)} : V_0(f) \longrightarrow V_0(f)$ は冪零である。

次に、$f(V_1(f)) = \mathrm{Im}f^{n+1} = \mathrm{Im}f^n = V_1(f)$ であるから、$f|_{V_1(f)} : V_1(f) \longrightarrow V_1(f)$ は全射である。したがって、これは左 A-加群の同型写像である。 (Q.E.D.)

系 3-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、

V：左 A-加群、 $f \in \mathrm{End}_A V$ とする。

V が Artin 加群かつ Noether 加群のとき、

V：直既約

$\Longrightarrow$ f : 左 A-加群の同型 または $^{\exists}n \in \mathbb{N}$ s.t. $f^n = 0$

(proof)

補題 3-4 より、

$$\Longrightarrow \ ^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \ \text{s.t.} \ \ V = \mathrm{Im}f^n \oplus \mathrm{Ker}f^n,$$

$$f|_{\mathrm{Im}f^n} : \mathrm{Im}f^n \longrightarrow \mathrm{Im}f^n \quad \text{は同型},$$

$$f|_{\mathrm{Ker}f^n} : \mathrm{Ker}f^n \longrightarrow \mathrm{Ker}f^n \quad \text{は冪零}$$

となる。V は直既約なので、$\mathrm{Ker}f^n = 0$ または $\mathrm{Im}f^n = 0$ となる。

ここで、$f^n \neq 0$ の場合には、$\mathrm{Im}f^n \neq 0$ であるので、$\mathrm{Ker}f^n = 0$ でなければならない。

このとき、$V = \mathrm{Im}f^n$ となり、$f|_{\mathrm{Im}f^n} = f$ は同型である。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-3)

i. 十分性

E が局所的ならば、系 3-2 により、E の冪等元は id_M のみである。

演習 1-25 により、M は直既約な左 A-加群である。

ii. 必要性

M を直既約な左 A-加群とするとき、E が命題 3-1(iii) の条件を満たすことを示せばよい。

M を直既約な左 A-加群とする。単元でない 2 つの元 $f, g \in \mathrm{End}_A M$ をとる。$h := f + g$ とおく。

もし、h が単元であったとすると、

$$1 = h^{-1} \circ f + h^{-1} \circ g$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f \text{ は単元でない} &\iff f \text{ は単射でない} \\ &\iff h^{-1} \circ f \text{ は単射でない} \\ &\iff h^{-1} \circ f \text{ は単元でない} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$h^{-1} \circ f$ は単元でない。系 3-5 により、単元でない $\mathrm{End}_A M$ の元は冪零であるから、$h^{-1} \circ f$ は冪零である。よって、$h^{-1} \circ g = 1 - h^{-1} \circ f$ は A の単元である ($\because$ $(h^{-1} \circ f)^n = 0$ ならば $1 + (h^{-1} \circ f) + (h^{-1} \circ f)^2 + \cdots + (h^{-1} \circ f)^{n-1}$ が $1 - h^{-1} \circ f$ の逆元になる)。ところが、$h^{-1} \circ f$ が単元でないのと同じ理由で $h^{-1} \circ g$ も単元でないはずであるから、矛盾が生じている。よって、h は $E = \mathrm{End}_A M$ の単元ではない。

これで命題 3-1(iii) の条件が成り立つことがわかったので、定理の必要性も示された。

(Q.E.D.)

注意 1°：定理 3-3 を背景に、次の概念が考え出された。左 A-加群 $M \neq 0$ について

M：**強直既約** (*strongly indecomposable*) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{End}_A M$：局所的

定理の証明を見ればわかるように、十分性は M の Artin 性や Noether 性の仮定なしで成立する。したがって、左 A-加群が強直既約ならば直既約である。

注意 2°：既約な左 A-加群は強直既約である。

(proof)

M が既約ならば、$\mathrm{End}_A M$ は可除代数になる (Schur の補題)。

可除代数は局所的であるから、M は強直既約である。 □

演習 3-1

$\boldsymbol{k}$ を体とする。形式的冪級数代数

$$\boldsymbol{k}[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in \boldsymbol{k} \ (i = 0, 1, 2, \cdots\cdots)\}$$

は局所的であることを示せ。

解；

$\boldsymbol{k}[[X]]$ の極大イデアルは X によって生成されるイデアル (X) のみであることを示めせばよい。

まず、$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots\cdots \in \boldsymbol{k}[[X]]$ に対して、

$$f \text{ は } \boldsymbol{k}[[X]] \text{ の単元} \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 \neq 0$$

が成り立つことに注意する。

$\because$)

任意の $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots\cdots \in \boldsymbol{k}[[X]]$ に対して、

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \cdots\cdots$$

となる。f が単元ならば、$fg = 1$ となる $g \in \boldsymbol{k}[[X]]$ が存在する。この g を上のように書いたとすれば、$a_0b_0 = 1$ であるから、$a_0 \neq 0$ であることがわかる。逆に、$a_0 \neq 0$ ならば、b_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を以下のように帰納的に定義していくことができる：

$$\begin{cases} b_0 = a_0^{-1} \\ b_n = -a_0^{-1}(a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

このとき、$fg = 1$ となっていることが確かめられる。故に、f は単元である。 □

さて、I を $\boldsymbol{k}[[X]]$ の極大イデアルとする。$I \neq \boldsymbol{k}[[X]]$ である ($\because$ 極大イデアルの定義より) から、任意の $f \in I$ は単元ではない。すなわち、$f \in (X)$ となる。よって、$I \subset (X)$ となる。I の極大性から $I = (X)$ でなければならない。

証明に完全性を期すため、(X) が実際に $\boldsymbol{k}[[X]]$ の極大イデアルであることを証明しておく。$(X) \subsetneqq \mathfrak{m}$ となる $\boldsymbol{k}[[X]]$ のイデアル $\mathfrak{m}$ を考える。このとき、$f \in \mathfrak{m}$ であって $f \notin (X)$ となる元が存在するが、このような元 f については、その定数項は 0 でない。したがって、f は単元になる。イデアルが単元を含めば、それは全体に一致しなければならないから、$\mathfrak{m} = \boldsymbol{k}[[X]]$ を得る。故に、(X) は $\boldsymbol{k}[[X]]$ の極大イデアルである。 (Q.E.D.)

注意：$\boldsymbol{k}[[X]]$ の部分代数になっている多項式代数 $\boldsymbol{k}[X]$ は局所的ではない。なぜならば、既約な多項式 $f(X)$ で生成されるイデアル $(f(X))$ は $\boldsymbol{k}[X]$ の極大イデアルなので、$\boldsymbol{k}[X]$ の極大イデアルは沢山存在するからである。

演習 3-2

体 $\boldsymbol{k}$ 上の二変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X, Y]$ の商代数

$$A := \boldsymbol{k}[X, Y]/(X^{n+1}, X^nY, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

を考える。A は局所的な代数であることを示せ。

解；

$\pi : \boldsymbol{k}[X, Y] \longrightarrow A$ を自然な射影とし、各 $f \in \boldsymbol{k}[X, Y]$ に対して $\bar{f} := \pi(f) \in A$ とおく。

A の極大 (左) イデアルは $A\bar{X} + A\bar{Y}$ に限ることを示す。

I を A の 0 でない (左) イデアルとする。

$I \not\subset A\bar{X} + A\bar{Y}$ とすると、

$$^{\exists}f \in \boldsymbol{k}[X, Y] \ \text{ s.t. } \ \bar{f} \notin A\bar{X} + A\bar{Y}, \quad \bar{f} \in I$$

となる。

$$\bar{f} = \bar{1} + \sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n \\ (i,j)\neq(0,0)}} c_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j \qquad (c_{ij} \in \boldsymbol{k})$$

としてよい。このとき、任意の $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\bar{X}^{n-i}\bar{Y}^i = \bar{X}^{n-i}\bar{Y}^i\bar{f} \in I$$

となる。よって、

$$\bar{f}_1 := \bar{1} + \sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n-1 \\ (i,j)\neq(0,0)}} c_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j \quad \in I$$

となる。任意の $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{X}^{n-1-k}\bar{Y}^k\bar{f}_1 &= \bar{X}^{n-1-k}\bar{Y}^k + \sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n-1 \\ (i,j)\neq(0,0)}} c_{ij}\bar{X}^{i+n-1-k}\bar{Y}^{j+k} \\ &= \bar{X}^{n-1-k}\bar{Y}^k + \underset{\substack{\cap \\ I}}{\underline{\sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n-1 \\ i+j=1}} c_{ij}\bar{X}^{i+n-1-k}\bar{Y}^{j+k}}}\end{aligned}$$

となるが、$\bar{X}^{n-1-k}\bar{Y}^k\bar{f}_1 \in I$ であるから、$\bar{X}^{n-1-k}\bar{Y}^k \in I$ を得る。故に、

$$\bar{f}_2 := \bar{1} + \sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n-2 \\ (i,j)\neq(0,0)}} c_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j \quad \in I$$

であることがわかる。この両辺に $\bar{X}^{n-2-k}\bar{Y}^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$ を掛けて、上と同様の考察を行うことにより、$\bar{X}^{n-2-k}\bar{Y}^k \in I$ が得られ、その結果として

$$\bar{f}_3 := \bar{1} + \sum_{\substack{i,j=0,1,\cdots,n-3 \\ (i,j)\neq(0,0)}} c_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j \quad \in I$$

であることがわかる。以下、同様の考察を続けることにより、最終的に

$$\bar{f}_n := \bar{1} \in I$$

が得られる。これは $I = A$ となることを意味する。故に、A の左イデアル I が $I \neq A$ ならば $I \subset A\bar{X} + A\bar{Y}$ となる。これは $A\bar{X} + A\bar{Y}$ が A の唯一の極大 (左) イデアルであることを意味する。故に、A は局所的である。 (Q.E.D.)

演習 3-3

G：有限 p-群 (*i.e.* p：素数、$|G| = p^n$ for some $n \in \mathbb{N}$)
$\boldsymbol{k}$：標数 p の体　とする。次を示せ。
(1) 既約な左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群は、同型を法とすれば、G の自明な作用を伴った $\boldsymbol{k}$ しかない。ここで、G の $\boldsymbol{k}$ への自明な作用とは、$g \cdot r := r$ $(g \in G,\ r \in \boldsymbol{k})$ によって定まる左作用のことをいう。
(2) $\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = \bigoplus_{g \in G - \{1\}} \boldsymbol{k}(g-1)$ となる。
(3) $\boldsymbol{k}[G]$ は局所的である。

解；
(1) ◎「G の任意の正規部分群 H について、既約な左 $\boldsymbol{k}[G/H]$-加群は、G/H の自明な作用を伴った左 $\boldsymbol{k}[G/H]$-加群 $\boldsymbol{k}$ に同型である」
を証明すればよい。$|G|=p^n,\ n \geq 1$ とする。$k=0,1,\cdots,n$ とし、

$$\mathcal{S}_k := \{H : G \text{ の正規部分群} \mid |G/H| = p^k\}$$

とおく。◎を k に関する数学的帰納法で証明する。
$k=0$ のとき、明らかに成立する。
$n \geq k > 0$ とし、$\displaystyle\bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{S}_i$ に属する G の任意の正規部分群について◎は成立していると仮定する。
$H \in \mathcal{S}_k$ とする。
V を既約な左 $\boldsymbol{k}[G/H]$-加群とする。

$$N = \{x \in G/H \mid x \cdot v = v \ \text{ for all } v \in V\}$$

とおく。N は G/H の正規部分群である。また、$\pi : G \longrightarrow G/H$ を自然な射影とすると、$\pi^{-1}(N)$ は G の正規部分群であって、V は左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-加群としても既約である。
∵)
一般に、有限群 $\mathit{\Gamma}$ と左 $\mathit{\Gamma}$-加群 V が与えられたとき、

$$\mathit{\Gamma}_V := \{x \in \mathit{\Gamma} \mid x \cdot v = v \ \text{ for all } v \in V\}$$

は $\mathit{\Gamma}$ の正規部分群になり、V は左 $\mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_V$-加群とみなすことができる。
実際、$x, y \in \mathit{\Gamma},\ \gamma \in \mathit{\Gamma}$ に対して

$$\begin{cases} x^{-1}y \cdot v = x^{-1} \cdot v = v \\ (\gamma^{-1}x\gamma) \cdot v = \gamma^{-1}x(\gamma \cdot v) = \gamma^{-1}(\gamma \cdot v) = x \end{cases}$$

となるので、$\mathit{\Gamma}_V$ は $\mathit{\Gamma}$ の正規部分群である。そして、$\gamma \in \mathit{\Gamma}$ の $\mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_V$ における同値類を $\bar{\gamma}$ で表わすことにすると、$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$ ならば、$\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \mathit{\Gamma}_V$ であるから、$\gamma_1 \cdot v = \gamma_2 \cdot v \ (v \in V)$ が成り立つ。故に、

$$\bar{\gamma} \cdot v := \gamma \cdot v \qquad (\gamma \in \mathit{\Gamma},\ v \in V)$$

によって、V は左 $\mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_V$-加群とみなすことができる。
我々が考えている状況では、$\mathit{\Gamma} = G/H$ であり、$\mathit{\Gamma}_V = N$ である。準同型定理により、

$$(G/H)/N = (G/H)/(\pi^{-1}(N)/H) \cong G/\pi^{-1}(N) \quad \text{as groups}$$

となるので、V は左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-加群とみなすことができる。このとき、作用の定義から $W \subset V$ が V の左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-部分加群であることと左 $\boldsymbol{k}[G/H]$-部分加群であることとは同値であるから、V は左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-加群としても既約である。 □

・$N \neq \{1\}$ のとき：
$H \subsetneqq \pi^{-1}(N)$ となる。故に、$|G/\pi^{-1}(N)| < |G/H| = p^k$ となる。

既約な左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-加群 V に対して、帰納法の仮定を適用して、V は自明な作用を伴った $\boldsymbol{k}$ に左 $\boldsymbol{k}[G/\pi^{-1}(N)]$-加群として同型であることがわかる。したがってまた、V は自明な作用を伴った $\boldsymbol{k}$ に左 $\boldsymbol{k}[G/H]$-加群として同型である。

・$N=\{1\}$ のとき：

G/H は p-群なので、その中心は非自明である (例えば、拙著『代数系入門』p.121 補題 15 参照)。すなわち、

$$^{\exists}x \in Z(G/H) \ \ \text{s.t.} \ \ x \neq 1$$

このとき、$(x-1)V$ は V の 0 でない部分加群になる。

$\because$)

$x-1$ は G/H の中心に属するから、$(x-1)V$ は V の部分加群になっている。

もし、任意の $v \in V$ に対して $(x-1)\cdot v = 0$ であったとすると、$x \in N = \{1\}$ となる。これは、$x \neq 1$ に矛盾する。よって、

$$^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.} \ \ (x-1)\cdot v \neq 0$$

となる。 $\square$

V の既約性から、$(x-1)V=V$ を得る。したがって、

$$V=(x-1)V=(x-1)^2V=\cdots=(x-1)^{p^k}V \underset{\substack{\uparrow \\ \boldsymbol{k}\ \text{の標数は}\ p}}{=} (x^{p^k}-1)V \underset{\substack{\uparrow \\ |G/H|=p^k}}{=} 0$$

を得る。

これは、$V \neq 0$ に矛盾する。故に、$N=\{1\}$ は起こり得ない。

以上より、$H \in \mathcal{S}_k$ について◎は成り立つことが示され、帰納法が完成した。

(2) 補題 1-18 から、$\mathrm{rad}A$ は既約な左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群 M の零化イデアル

$$\mathrm{ann}M = \{a \in \boldsymbol{k}[G] \mid aM = 0\}$$

の共通部分として得られる。(1) により、既約な左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群 M は自明な左 $\boldsymbol{k}[G]$-加群 $\boldsymbol{k}$ に同型であるから、

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = \mathrm{ann}\boldsymbol{k} = \{a \in \boldsymbol{k}[G] \mid a\boldsymbol{k} = 0\}$$

となる。$a \in \boldsymbol{k}[G]$ を $a = \sum\limits_{g \in G} a_g g,\ a_g \in \boldsymbol{k}$ と書くとき、

$$\begin{aligned}
a \in \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) &\iff a \cdot r = 0 \ \ \text{for all } r \in \boldsymbol{k} \\
&\iff \sum_{g \in G} r a_g = 0 \ \ \text{for all } r \in \boldsymbol{k} \\
&\iff a_1 = -\sum_{g \in G-\{1\}} a_g \\
&\iff a \in \bigoplus_{g \in G-\{1\}} \boldsymbol{k}(g-1)
\end{aligned}$$

となるから、$\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G]) = \bigoplus\limits_{g \in G-\{1\}} \boldsymbol{k}(g-1)$ が示された。

(3) (2) により、$\dim(\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G])) = |G| - 1$ であることがわかる。したがって、$\mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[G])$ は $\boldsymbol{k}[G]$ の極大左イデアルである。故に、$\boldsymbol{k}[G]$ は局所的である (定義 3-1 下の注意 1° 参照)。(Q.E.D.)

演習 3-4

A : 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。 $$A\text{：局所的} \iff A/\mathrm{rad}A \text{ は可除}$$ となることを示せ。

解；

「$\Longrightarrow$」の証明：

命題 3-1 で証明したように、A が局所的ならば、$S = \mathrm{rad}A$ が成立することに注意する。

$0 \neq \overline{a} \in A/\mathrm{rad}A,\ a \in A$ を任意にとる。すると、$a \notin \mathrm{rad}A = S$ であるから、a は A の単元である。すなわち、

$$^\exists b \in A \ \ \text{s.t.}\ \ ab = ba = 1$$

となる。

$$\therefore\ \overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a} = \overline{1}$$

$$\therefore\ \overline{a} \text{ は } A/\mathrm{rad}A \text{ の単元}$$

である。故に、代数 $A/\mathrm{rad}A$ は可除である。

「$\Longrightarrow$」の証明：

$\mathrm{rad}A$ が極大でなかったと仮定する。

I を $\mathrm{rad}A \subsetneqq I$ となる A の極大左イデアルとする。

$a \in I$ を $a \notin \mathrm{rad}A$ を満たす元とする。すると、

$0 \neq \overline{a}$ in $A/\mathrm{rad}A$ であるから、仮定により、

$$^\exists b \in A \ \ \text{s.t.}\ \ \overline{b}\overline{a} = \overline{1} \ \ \text{in} \ \ A/\mathrm{rad}A$$

となる。このとき、

$$c := ba - 1 \in \mathrm{rad}A \subset I$$

となり、したがって、

$$1 = ba - c \in I$$

を得る。これは、I の極大性に反する。故に、$\mathrm{rad}A$ は A の極大左イデアルでなければならない。 (Q.E.D.)

注意 1°：体 $\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数 A に対して

$$A\text{：局所的} \iff A\text{：可除代数}$$

が成り立つ。

(proof)

上の演習問題より、

$$A\text{：局所的} \iff A/\mathrm{rad}A\text{：可除}$$

となる。半単純代数は左 Artin 的である (演習 2-5) から、A は左 Artin 的半単純代数になる。したがって、$\mathrm{rad}A = 0$ である (定理 2-4)。故に、$A/\mathrm{rad}A = A$ となり、上記の結果を得る。
$\square$

注意 2°：G $(\neq \{1\})$ を有限群とする。このとき、体 $\boldsymbol{k}$ に対して、群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ は可除ではない。実際、$1 \neq g_o \in G$ に対し、

$$\sum_{g\in G} g(1-g_o) = 0, \quad \sum_{g\in G} g \neq 0, \ 1-g_o \neq 0$$

となる。したがって、上の注意 1° により、$\boldsymbol{k}$ の標数が 0 または標数が $p > 0$ であって $|G|$ が p で割り切れないならば、群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ は局所的でない。したがって、群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ が局所的ならば、$\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ であって、G の位数は p で割り切れなければならない。一方、演習 3-3 で示したように、G が有限 p-群であって、$\boldsymbol{k}$ の標数が p のときには、群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ は局所的である。実は次の結果が成立する (T.Y.Lam・著『Exercies in classical ring theory』Springer-Verlag, p.213 参照)：

G を $\{1\}$ でない有限群とする。$\boldsymbol{k}$ を体とする。このとき、

群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ が局所的 $\iff$ $\boldsymbol{k}$ の標数は $p > 0$ かつ $|G| = p^\alpha$ $(\alpha \geq 1)$

§2. Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。0 でない左 A-加群 V が直既約であるとは、V が 0 でない部分 A-加群の直和に書けないことをいうのであった。この節では、加群の直既約分解の可能性と一意性に関する最も基本的な定理 (Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理) を紹介し、その証明を与える。

定理 3-6(Krull-Remak-Schmidt-東屋)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：Artin 的かつ Noether 的な左 A-加群、$M \neq 0$

$\Longrightarrow$ M は直既約な部分加群の有限個の直和として表わされる。

さらに、

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j \qquad (M_i,\ N_j \text{ は } M \text{ の直既約な部分加群})$$

と表わされたならば、$r = s$ であり、$\{1, \cdots, r\}$ 上のある置換 σ について、

$$M_i \cong N_{\sigma(i)} \quad (i = 1, \cdots, r)$$

が成り立つ。

注意 1°：$A = \boldsymbol{k}$ のとき、直既約加群は 1 次元のベクトル空間に他ならない。したがって、この場合、この定理は有限次元ベクトル空間の基底の個数が一定である、という周知の事実に他ならない。

注意 2°：A がたとえ有限次元であっても、直既約な左 A-加群の同型類が無限個ある例が存在する (演習 3-7 参照)。

注意 3°：この定理は文献によっては、Krull-Remak-Schmidt の定理と呼ばれたり、Krull-Schmidt の定理と呼ばれたりする。もともとこの定理は、1909 年に有限群に対して Wedderburn によって定式化された。Wedderburn の証明にはギャップがあり、それを Remak が埋めた。その結果を Schmidt が有限群上の加群に対して拡張し (Jacobson・著『Basic Algebra』W.H.Freeman and Company, 1980, p.115 および松村英之・著『代数学』朝倉書店 1990, p.154, p.197 を参照)、さらに、Krull がそれを一般の代数上の加群に対して拡張した。東屋五郎は、Krull の証明を再検討する中で、各直和因子が強直既約の場合には、直和因子の個数が無限個であっても同様の結果が成り立つことを示した。

注意 4°：証明をみればわかるように、この定理の直既約分解に関する一意性の部分は、M が強直既約分解を持てば成立する。

(proof of Theorem 3-6)

M は Noether 加群なので、有限個の直既約な部分加群の直和として表わされる (補題 1-8)。

次に、定理の後半部分を示す。r に関する帰納法で示す。

. $r = 1$ の場合

このとき、M は直既約であるから、$s = 1$ でなければならず、$M_1 = N_1$ を得る。

. $r > 1$ の場合

$\mu_i : M \longrightarrow M \ (i = 1, \cdots, r)$ を与えられた直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ に附随する射影とし、

$\nu_j : M \longrightarrow M \ (j = 1, \cdots, s)$ を与えられた直和分解 $M = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$ に附随する射影とする。

但し、$\mu_i(M) = M_i,\ \nu_j(M) = N_j$ とする。このとき、$\mathrm{id}_M = \sum_{j=1}^{s} \nu_j$ であるから、

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_1 \circ \nu_j|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1 \qquad \cdots\cdots ①$$

は id_{M_1} に一致する。但し、μ_1 を M から $\mu_1(M) = M_1$ への写像とみなしている。ここで、各 j に対して、$\mu_1 \circ \nu_j|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$ は左 A-加群の準同型であることに注意する。

M_1 は直既約であるから、代数 $\mathrm{End}_A(M_1)$ は局所的である (定理 3-3)。したがって、$\mathrm{End}_A(M_1)$ の単元でない元の和は単元でない (命題 3-1)。

このことと①が id_{M_1} に一致することから、$\mu_1 \circ \nu_j|_{M_1}$ $(j = 1, \cdots, s)$ の中に $\mathrm{End}_A(M_1)$ の単元であるもの、すなわち、左 A-加群同型射が存在することがわかる。必要ならば番号を付け変えることにより、$\mu_1 \circ \nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$ が左 A-加群の同型であるとしてよい。

$\varphi := \mu_1 \circ \nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$ とおく。

$$\mathrm{id}_{M_1} = (\varphi^{-1} \circ \mu_1) \circ \nu_1|_{M_1} \qquad \cdots\cdots ②$$

より

$$\nu_1(M_1) \text{ は } N_1 \text{ の直和因子} \qquad \cdots\cdots ③$$

i.e. $\quad N_1 = \nu_1(M_1) \oplus U_1$ for some left A-submodule U_1 of N_1

となる。

∵)

$\nu_1 : M \longrightarrow M$ は M から N_1 への左 A-加群準同型と思える。したがって、$\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M$ は $\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow N_1$ と思える。これを f とおく。このとき、

$$g := \varphi^{-1} \circ \mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$$

とおくと、

$$g \circ f = \mathrm{id}_{M_1}$$

が成り立つ。g も左 A-加群準同型である。

$$N_1 = f(M_1) \oplus \mathrm{Ker} g$$

となることを示す。

任意の $n \in N_1$ は $n = f(g(n)) + (n - f(g(n))$ と書けるので、

$$N_1 = f(M_1) + \mathrm{Ker} g$$

である。

$n \in f(M_1) \cap \mathrm{Ker} g$ とすると、$n = f(m),\ m \in M_1$ と書けて、

$$0 = g(n) = g(f(m)) = m \qquad \therefore\ n = f(m) = f(0) = 0$$

よって、$N_1 = f(M_1) \oplus \mathrm{Ker} g$ が示された。$f(M_1) = \nu_1(M_1)$ と $\mathrm{Ker} g$ は N_1 の部分加群であるから、③は示された。 □

N_1 は直既約であるから、③より $\nu_1(M_1) = 0$ または $\nu_1(M_1) = N_1$ である。

ところが、②により $\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_1$ は単射であり、また、M_1 は直既約ゆえ $M_1 \neq 0$ なので、$\nu_1(M_1) \neq 0$ を得る。

したがって、$\nu_1(M_1) = N_1$ でなければならない。よって、$M_1 \cong N_1$ (as left A-modules) を得る。

$$M' = N_1 + M_2 + \cdots + M_r \subset M$$

とおく。この和は直和である。

∵)

$$n_1 + m_2 + \cdots + m_r = 0 \qquad\qquad (n_1 \in N_1,\ m_2 \in M_2,\ \cdots, m_r \in M_r)$$

とおく。両辺に μ_1 を適用して、$\mu_1(n_1) = 0$ を得る。

②および $\nu_1|_{M_1} : M_1 \longrightarrow N_1$ が同型になることから、$\varphi^{-1} \circ \mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$ も同型である。これから、$\mu_1(n_1) = 0$ ならば $n_1 = 0$ を得る。このとき、$m_2 + \cdots + m_r = 0$ となるが、$M_2, \cdots, M_r$ は直和であるから、$m_2 = \cdots = m_r = 0$ となる。故に、

$$M' = N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r \subset M$$

が示された。 □

次に、$M' = M$ を示す。そのためには、$M_1 \subset M'$ を示せばよい。

$$N_1 \xrightarrow{\mu_1|_{N_1}} M_1 \xrightarrow{\varphi^{-1}} M_1$$

は同型だから、$\mu_1|_{N_1} : N_1 \longrightarrow M_1$ も同型である。特に、$M_1 = \mu_1(N_1)$ である。よって、M_1 の任意の元は、$\mu_1(x),\ x \in N_1$ と書くことができる。このとき、

$$\mu_1(x) = x - \mu_2(x) - \cdots - \mu_r(x) \in N_1 + M_2 + \cdots + M_r \subset M'$$

となるから、$M_1 \subset M'$ が示された。したがって、$M' = M$ 、すなわち、

$$M = N_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r$$

が示された。これより、

$$M/N_1 \cong M_2 \oplus \cdots \oplus M_r \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。一方、$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$ であるから、

$$M/N_1 \cong N_2 \oplus \cdots \oplus N_s \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

でもある。これより、左 A-加群として

$$\bigoplus_{i=2}^{r} M_i \cong \bigoplus_{j=2}^{s} N_j$$

を得る。

そこで、$N = \bigoplus_{i=2}^{r} M_i$ とおき、$\psi : \bigoplus_{j=2}^{s} N_j \longrightarrow N$ を左 A-加群の同型とすれば、

$$N = \bigoplus_{i=2}^{r} M_i = \bigoplus_{j=2}^{s} \psi(N_j) \text{ であり、各 } \psi(N_j) \text{ は } N \text{ の直既約な部分加群になる。}$$

M は左 Noether 加群だから、N は有限生成左 A-加群であり (補題 1-7)、$r > 1$ としているから、$N \neq 0$ である。

これで、N に帰納法の仮定を適用することができ、$r = s$ であり、必要ならば $\psi(N_j)$ $(j = 2, \cdots, r)$ の番号を付け直して、$M_i \cong \psi(N_i)$ $(i = 2, \cdots, r)$ となることがわかった。よって、$M_i \cong N_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が示され、定理の証明が完成した。 (Q.E.D.)

次は、定理 3-6 の系である。

系 3-7

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$M,\ N$：Artin 的かつ Noether 的な左 A-加群　とする。

${}^{\exists}n \in \mathbb{N}$ s.t. $M^{\oplus n} \cong N^{\oplus n}$ as left A-modules

$\Longrightarrow$ $M \cong N$ as left A-modules

(proof)

$M \neq 0,\ N \neq 0$ の場合に証明すればよい。

定理 3-6 により、$M,\ N$ は有限個の直既約な部分加群の直和として表わされる。今、

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i, \qquad (M_i\text{：直既約},\ i=1,\cdots,r)$$

$$N = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j, \qquad (N_j\text{：直既約},\ j=1,\cdots,s)$$

とおく。$M_1,\cdots,M_r$ の中で左 A-加群として同型なものをまとめる。(適当な番号の付け替えののち) $M_1,\cdots,M_a$ がそれらの代表系であるとし、$m_i = (M_1,\cdots,M_r$ の中で M_i と同型なものの個数$)$, $i=1,\cdots,a$ とおくと、

$$M \cong M_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus M_a^{\oplus m_a}$$

となる。同様に、$N_1,\cdots,N_s$ の中で左 A-加群として同型なものをまとめるとき、(適当な番号の付け替えののち) $N_1,\cdots,N_b$ が代表系であるとし、$n_j = (N_1,\cdots,N_s$ の中で N_j と同型なものの個数$)$, $j=1,\cdots,b$ とおくと、

$$N \cong N_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus N_b^{\oplus n_b}$$

となる。仮定 $M^{\oplus n} \cong N^{\oplus n}$ により、

$$M_1^{\oplus nm_1} \oplus \cdots \oplus M_a^{\oplus nm_a} \cong N_1^{\oplus nn_1} \oplus \cdots \oplus N_b^{\oplus nn_b} \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

を得る。定理 3-6 の直既約分解の一意性から、$a=b$ かつ適当な番号のつけかえののちに、$M_i \cong N_i\ (i=1,\cdots,a)$ かつ $nm_i = nn_i\ (i=1,\cdots,a)$ となる。

$$\therefore \quad m_i = n_i \qquad (i=1,\cdots,a)$$

したがって、

$$M \cong N \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。 (Q.E.D.)

演習 3-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。
0 でない Artin 的かつ Noether 的な左 A-加群 $V,\ U,\ W$ が $V \oplus U \cong V \oplus W$ を満たすとき、

$$U \cong W \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。これを示せ。

解；

V が直既約な場合に証明すれば十分である。

$U,\ W$ を直既約分解する：

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m,\ W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \quad (\text{各 } U_j, W_k \text{ は直既約})$$

このとき、

$$V \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \cong V \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$$

となる。$V = U_0 = W_0$ とおく。

Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理から、$m=n$ であり、ある全単射 $\sigma:\{0,1,\cdots,m\}\longrightarrow\{0,1,\cdots,m\}$ が存在して、各 U_i $(i=0,1,\cdots,m)$ は $W_{\sigma(i)}$ と同型になる。

$\sigma(0)=0$ の場合には、$U=U_1\oplus\cdots\oplus U_m\cong W_1\oplus\cdots\oplus W_n=W$ となり、演習に書かれている命題は成立する。

$\sigma(0)=i$ $(i\neq 0)$ の場合には、$V\cong W_i$ であるから、

$$\begin{aligned}U=U_1\oplus\cdots\oplus U_m&\cong V\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_{i-1}\oplus W_{i+1}\oplus\cdots\oplus W_n\\&\cong W_i\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_{i-1}\oplus W_{i+1}\oplus\cdots\oplus W_n\cong W\end{aligned}$$

となる。よって、この場合にも、演習に書かれている命題は成立する。 (Q.E.D.)

演習 3-6

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の代数閉体　とする。
次のような生成元と関係式で記述された代数 A について (演習 1-49 参照)、その有限次元直既約加群を同型を除いてすべて求めよ。
生成元：$g,\ x$
関係式：$g^2=1,\ x^2=0,\ gx=-xg$

解；

まず、1 次元表現を求める。$\chi:A\longrightarrow\boldsymbol{k}$ を代数準同型とする。このとき、$\chi(g)^2=1,\ \chi(x)^2=0$ であるから、$\chi(g)=\pm1,\ \chi(x)=0$ となることがわかる。よって、1 次元表現は次の 2 つである：

$$\chi_i\ (i=0,1):\quad \chi_i(g)=(-1)^i,\ \chi_i(x)=0$$

次に V を $\dim V>1$ なる有限次元ベクトル空間とし、$\rho:A\longrightarrow\mathrm{End}(V)$ を直既約表現とする。$\rho(g)^2=\mathrm{id}$ ゆえ、$\rho(g)$ は対角化可能であり、$\{\rho(g)$ の固有値全体$\}\subset\{\pm1\}$ となる。よって、$\alpha=\pm1$ に対して $V(\rho(g);\alpha)=\{v\in V\mid \rho(g)(v)=\alpha v\}$ とおくと、

$$V=V(\rho(g);1)\oplus V(\rho(g);-1)$$

が成り立つ。また、$\rho(x)\circ\rho(g)=-\rho(g)\circ\rho(x)$ であるから

$$\rho(x)(V(\rho(g);1))\subset V(\rho(g);-1),\quad \rho(x)(V(\rho(g);-1))\subset V(\rho(g);1)$$

が成り立つ。よって、線形写像

$$\begin{cases}\varphi:=\rho(x)|_{V(\rho(g);1)}:V(\rho(g);1)\longrightarrow V(\rho(g);-1)\\ \psi:=\rho(x)|_{V(\rho(g);-1)}:V(\rho(g);-1)\longrightarrow V(\rho(g);1)\end{cases}$$

を考えることができる。

$$V(\rho(g);1)=\mathrm{Ker}\varphi\oplus V_1,\quad V(\rho(g);-1)=\mathrm{Im}\varphi\oplus V_2$$

となる部分空間 $V_1\subset V(\rho(g);1)$ と $V_2\subset V(\rho(g);-1)$ をとると、$\rho(x)^2=0$ なので、

$$\rho(x)(V_2)\subset\mathrm{Ker}\varphi$$

が成り立つ。よって、

$$U_1:=V_1\oplus\mathrm{Im}\varphi,\quad U_2:=V_2\oplus\mathrm{Ker}\varphi$$

は V の部分 A-加群であり、$V = U_1 \oplus U_2$ が成り立つ。V は直既約であるから、$V = U_1$ または $V = U_2$ となる。

・$V = U_1$ のとき：

$V(\rho(g);1) = V_1,\ V(\rho(g);-1) = \mathrm{Im}\varphi$ であり、$\mathrm{Ker}\varphi = 0$ である。よって、$\varphi = \rho(x)|_{V(\rho(g);1)} : V(\rho(g);1) \longrightarrow V(\rho(g);-1)$ は線形同型写像である。$\{v_1, \cdots, v_m\}$ を $V(\rho(g);1)$ の基底とすれば、$\{v_1, \rho(x)(v_1), \cdots, v_m, \rho(x)(v_m)\}$ は V の基底であり、

$$\begin{cases} V = (\boldsymbol{k}v_1 + \boldsymbol{k}\rho(x)(v_1)) \oplus \cdots \oplus (\boldsymbol{k}v_m + \boldsymbol{k}\rho(x)(v_m)) \\ \boldsymbol{k}v_i + \boldsymbol{k}\rho(x)(v_i)\ (i = 1, \cdots, m) \text{ は } V \text{ の部分 } A\text{-加群} \end{cases}$$

となる。ρ の直既約性により、ある i に対して、$V = \boldsymbol{k}v_i + \boldsymbol{k}\rho(x)(v_i)$ となる。したがって、ρ は次のような行列表現と同値になる：

$$\rho_0(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

・$V = U_2$ のとき：

$V(\rho(g);1) = \mathrm{Ker}\varphi,\ V(\rho(g);-1) = V_2$ であり、$\mathrm{Im}\varphi = 0$ である。

$$V(\rho(g);-1) = \mathrm{Ker}\psi \oplus W_2, \quad V(\rho(g);1) = \mathrm{Im}\psi \oplus W_1$$

となる部分空間 $W_2 \subset V(\rho(g);-1)$ と $W_1 \subset V(\rho(g);1)$ をとる。このとき、

$$\begin{cases} V = (W_2 \oplus \mathrm{Im}\psi) \oplus W_1 \oplus \mathrm{Ker}\psi \\ W_2 \oplus \mathrm{Im}\psi,\ W_1,\ \mathrm{Ker}\psi \text{ は部分 } A\text{-加群} \end{cases}$$

となる。V は直既約であるから、$V = W_2 \oplus \mathrm{Im}\psi$ または $V = W_1$ または $V = \mathrm{Ker}\psi$ のいずれかが成り立つ。しかし、$W_1,\ \mathrm{Ker}\psi$ は $\rho(x)$ では $\{0\}$ に写されるから、これらは 1 次元部分加群の直和となる。$\dim V > 1$ と仮定していたから、$V = W_1,\ V = \mathrm{Ker}\psi$ ではないことがわかった。故に、$V = W_2 \oplus \mathrm{Im}\psi$ である。$\psi|_{W_2} : W_2 \longrightarrow \mathrm{Im}\psi$ は線形同型写像であり、$\{w_1, \cdots, w_l\}$ を W_2 の基底とすれば、$\{w_1, \rho(x)(w_1), \cdots, w_l, \rho(x)(w_l)\}$ は V の基底であり、

$$\begin{cases} V = (\boldsymbol{k}w_1 + \boldsymbol{k}\rho(x)(w_1)) \oplus \cdots \oplus (\boldsymbol{k}w_l + \boldsymbol{k}\rho(x)(w_l)) \\ \boldsymbol{k}w_i + \boldsymbol{k}\rho(x)(w_i)\ (i = 1, \cdots, l) \text{ は } V \text{ の部分 } A\text{-加群}, \end{cases}$$

となる。ρ の直既約性により、ある j に対して、$V = \boldsymbol{k}w_j + \boldsymbol{k}\rho(x)(w_j)$ となる。したがって、ρ は次のような行列表現と同値になる：

$$\rho_1(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

直既約表現 ρ_0 と ρ_1 は同値でない。

$\because)$

もし、ρ_0 と ρ_1 が同値であったと仮定すると、

$$^{\exists}P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{ 正則 s.t. } P\rho_0(g) = \rho_1(g)P,\ P\rho_0(x) = \rho_1(x)P$$

となる。

$$P\rho_0(x) = \rho_1(x)P \iff p = s \text{ かつ } q = 0$$

ゆえ、$P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ r & p \end{pmatrix}$ である。このとき、

$$P\rho_0(g) = \rho_1(g)P \iff p = -p \ i.e.\ 2p = 0$$

となる。$\boldsymbol{k}$ の標数は 0 であるから、$2p = 0$ は $p = 0$ と同値である。これは P の正則性に矛盾する。 □

よって、A の有限次元直既約表現の同型類は全部で 4 個あり、それらは $\{\chi_0, \chi_1, \rho_0,\ \rho_1\}$ によって与えられる。 (Q.E.D.)

注意：この演習問題の代数は根基が 1 つの元で生成されているから、単列代数と呼ばれるものになっている (この結果は森田、中山-東屋による。証明は、Karpilovsky・著『Structure of blocks of group algebras』p.378, Proposition 54.12 参照)。有限次元代数 A が **単列代数** (*uniserial algebra*) であるとは、任意の直既約な左 A-加群 V に対して、降鎖列 $V \supset (\mathrm{rad}A)V \supset (\mathrm{rad}A)^2V \supset \cdots \supset (\mathrm{rad}A)^{k-1}V \supset 0$ が組成列になっているときをいう。但し、k は $(\mathrm{rad}A)^{k-1} \neq 0$ かつ $(\mathrm{rad}A)^k = 0$ となる自然数を表す (A は有限次元なので、このような k が存在することに注意)。もし、A が単列代数ならば、任意の直既約な左 A-加群は有限次元であり、直既約な左 A-加群の同型類の個数は有限個となることが知られている (Karpilovsky・著『Structure of blocks of group algebras』p.374, Proposition 54.8 参照)。この事実によれば、この演習問題の代数については、その直既約加群はすべて有限次元になっていて、その同型類は上の解答の中で与えた 4 個であることがわかる。単列代数に関するさらに詳しい事柄ついては、上記の Karpilovsky による本のほか、W. Feit・著『The representation theory of finite groups』を参照せよ。

演習 3-7

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の代数閉体 とする。

A_{C_2} を次のような生成元と関係式によって記述される $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする：

生成元：$g,\ x,\ y$ 関係式：$g^2 = 1,\ x^2 = y^2 = 0,\ gx = -xg,\ gy = -yg,\ xy = -yx$

このとき、

(1) $\dim A_{C_2} = 8$ を示せ。

(2) 2 次元直既約加群の同型類は無限個存在することを示せ。

(3) r を任意の自然数とし、V を $\{v_i\}_{i=1}^{2r}$ を基底にもつ $2r$ 次元のベクトル空間とする。$\rho : A_{C_2} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ を次のように定義する。

$$\rho(g)(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{if } i = 1, \cdots, r, \\ -v_i & \text{if } i = r+1, \cdots, 2r, \end{cases}$$

$$\rho(x)(v_i) = \begin{cases} v_{r+i} & \text{if } i = 1, \cdots, r, \\ 0 & \text{if } i = r+1, \cdots, 2r, \end{cases}$$

$$\rho(y)(v_i) = \begin{cases} v_{r+i-1} & \text{if } i = 2, \cdots, r, \\ 0 & \text{if } i = 1, r+1, \cdots, 2r. \end{cases}$$

ρ は直既約であることを示せ。同様に、V を $\{v_i\}_{i=1}^{2r-1}$ を基底にもつ $2r-1$ 次元のベクトル空間とするとき、次のようにして定義される $\rho : A_{C_2} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ は直既約であることを示せ。

$$\rho(g)(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{if } i = 1, \cdots, r, \\ -v_i & \text{if } i = r+1, \cdots, 2r-1, \end{cases}$$

$$\rho(x)(v_i) = \begin{cases} v_{r+i} & \text{if } i = 1, \cdots, r-1, \\ 0 & \text{if } i = r, \cdots, 2r-1, \end{cases}$$

$$\rho(y)(v_i) = \begin{cases} v_{r+i-1} & \text{if } i = 2, \cdots, r, \\ 0 & \text{if } i = 1, r+1, \cdots, 2r-1. \end{cases}$$

解；

(1) 与えられた関係式により、A_{C_2} が $\boldsymbol{k}$ 上

$$1, x, y, xy, g, gx, gy, gxy$$

によって張られることはすぐにわかるから、$\dim A_{C_2} \leq 8$ であることがわかる。

$\mathbb{Z}_2$ を $0, 1$ からなる群とし、集合としての直積 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ を考える。G を $\boldsymbol{k}$ 上の基底とするベクトル空間を L とおく。

$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \boldsymbol{k}$ を $\varphi(i, j) = \dfrac{1 + (-1)^{ij}}{2}$ によって定義する。すなわち、

$$\varphi(0,0) = \varphi(0,1) = \varphi(1,0) = 1, \quad \varphi(1,1) = 0$$

とする。今、L に次のような積を導入する：

$$(i_1, j_1, k_1) \cdot (i_2, j_2, k_2) = (-1)^{i_2(k_1+j_1)+k_1 j_2} \varphi(j_1, j_2)\varphi(k_1, k_2)(i_1 + i_2, j_1 + j_2, k_1 + k_2)$$

このとき、L は $\boldsymbol{k}$ 上の代数になる。

$\because$)

単位元は $(0,0,0)$ である。

積の結合律を確かめる。

$(-1)^{i_2(k_1+j_1)+k_1 j_2 + i_3(k_1+k_2+j_1+j_2)+(k_1+k_2)j_3} \varphi(j_1, j_2)\varphi(k_1, k_2)\varphi(j_1 + j_2, j_3)\varphi(k_1 + k_2, k_3)$

$= (-1)^{i_3(k_2+j_2)+k_2 j_3 + (i_2+i_3)(k_1+j_1)+k_1(j_2+j_3)} \varphi(j_2, j_3)\varphi(k_2, k_3)\varphi(j_1, j_2 + j_3)\varphi(k_1, k_2 + k_3)$

を示せばよい。上式は

$\varphi(j_1, j_2)\varphi(k_1, k_2)\varphi(j_1+j_2, j_3)\varphi(k_1+k_2, k_3) = \varphi(j_2, j_3)\varphi(k_2, k_3)\varphi(j_1, j_2+j_3)\varphi(k_1, k_2+k_3)$

と同値である。$j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi(j_1, j_2)\varphi(j_1 + j_2, j_3) = \varphi(j_2, j_3)\varphi(j_1, j_2 + j_3)$$

が成り立つから、積の結合律が成り立つことが示された。 □

x,y,g を $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする 3 次元ベクトル空間 V を考える。$f:V\longrightarrow L$ を

$$f(x)=(0,1,0),\quad f(y)=(0,0,1),\quad f(z)=(1,0,0)$$

なる線形写像とする。この f を拡張して代数準同型 $\tilde{f}:\mathcal{T}(V)\longrightarrow L$ を作る。ここで、$\mathcal{T}(V)$ は V のテンソル代数を表わす。$\mathcal{I}$ を $x^2,y^2,g^2-1,gx+xg,gy+yg,xy+yx$ によって生成される $\mathcal{T}(V)$ の両側イデアルであるとする。$\tilde{f}(\mathcal{I})=0$ であることが確かめられる。これより、$\tilde{f}$ は代数準同型 $\bar{f}:A_{C_2}\longrightarrow L$ を誘導することがわかる。$\bar{f}$ は全射であるから、$\dim A_{C_2}\geq\dim L=8$ である。よって、$\dim A_{C_2}=8$ であることが示された。

(2) $\rho_{a,b,i}$ $(a,b\in\boldsymbol{k},\ (a,b)\neq(0,0),\ i=0,1)$ を次式で定義される直既約表現とする：

$$\rho_{a,b,i}(g)=(-1)^i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \rho_{a,b,i}(x)=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix},\quad \rho_{a,b,i}(y)=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}$$

任意の 2 次元直既約表現はある $\rho_{a,b,i}$ と同値なことを示す。

$\rho:A_{C_2}\longrightarrow \mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ を直既約な表現とする。

$\rho(g)^2=I_2$ なので、$\rho(g)$ は対角化可能であり、固有値は 1 か -1 である。ρ は直既約と仮定しているので、$\rho(g)\neq\pm I_2$ となる。よって、

$$\rho(g)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

であると仮定することができる。$\rho(g)\rho(x)+\rho(x)\rho(g)=O$ より、$\rho(x)=\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}$ とおくことができる。$\rho(x)^2=O$ なので、$ab=0$ でなければならない。同様に、$\rho(g)\rho(y)+\rho(y)\rho(g)=O$ より、

$$\rho(y)=\begin{pmatrix}0&c\\d&0\end{pmatrix}$$

とおくことができ、$\rho(y)^2=O$ より、$cd=0$ を得る。

・$a=b=0$ のとき：

ρ の直既約性から $c=0$ かつ $d\neq0$ であるか、または $c\neq0$ かつ $d=0$ であるかのいずれかであることがわかる。$c=0$ かつ $d\neq0$ の場合には、ρ は $\rho_{0,1,1}$ に同値であり、$c\neq0$ かつ $d=0$ の場合には、ρ は $\rho_{0,1,0}$ に同値である。

・$a\neq0$ かつ $b=0$ のとき：

ρ は直既約である。また、$\rho(x)\rho(y)+\rho(y)\rho(x)=O$ より $d=0$ でなければならない。ρ は $\rho_{1,c,0}$ に同値である。

・$a=0$ かつ $b\neq0$ のとき：

ρ は直既約である。また、$\rho(x)\rho(y)+\rho(y)\rho(x)=O$ より $c=0$ でなければならない。ρ は $\rho_{1,d/b,1}$ に同値である。

最後に、$\rho_{a,b,i}$ と $\rho_{a',b',i'}$ が同値になるための必要十分条件を求める。$P^{-1}\rho_{a,b,i}(g)P=\rho_{a',b',i'}(g)$, $P^{-1}\rho_{a,b,i}(x)P=\rho_{a',b',i'}(x)$, $P^{-1}\rho_{a,b,i}(y)P=\rho_{a',b',i'}(y)$ となる正則行列 P が

存在するための必要十分条件を求めればよい。$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ とおくと、求める条件は

$$\begin{aligned}
P^{-1}\rho_{a,b,i}(g)P=\rho_{a',b',i'}(g) &\iff (-1)^i p_{kl}=(-1)^{i'+k+l}p_{kl}\ (k,l=1,2)\\
P^{-1}\rho_{a,b,i}(x)P=\rho_{a',b',i'}(x) &\iff ap_{21}=0,\ a'p_{21}=0,\ a'p_{11}=ap_{22}\\
P^{-1}\rho_{a,b,i}(y)P=\rho_{a',b',i'}(y) &\iff bp_{21}=0,\ b'p_{21}=0,\ b'p_{11}=bp_{22}
\end{aligned}$$

となる。もし、$i\neq i'$ ならば、$p_{11}=p_{22}=0$ となる。P は正則でなければならないので、$p_{21}\neq 0$ である。これより、$a=a'=b=b'=0$ が得られてしまう。よって、$\rho_{a,b,i}$ と $\rho_{a',b',i'}$ が同値ならば、$i=i'$ である。このとき、$p_{12}=p_{21}=0$ となるので、P の正則性から $p_{11}\neq 0,\ p_{22}\neq 0$ を得る。これより、$a'b=ab'$ を得る。逆に、$a'b=ab'$ であるような $a,a',b,b'\in\boldsymbol{k},\ (a,b)\neq(0,0),\ (a',b')\neq(0,0)$ に対して、$\rho_{a,b,i}$ と $\rho_{a',b',i}$ は同値であることがわかる。したがって、

$$\rho_{a,b,i}\ \text{と}\ \rho_{a',b',i'}\ \text{が同値} \iff ab'=a'b\ \text{かつ}\ i=i'$$

が得られた。

(3) ある部分加群 V_1 と V_2 に対して $V=V_1\oplus V_2$ であると仮定する。$\mathrm{Ker}(\rho(y)|_{V(\rho(g);1)})=\boldsymbol{k}v_1$ なので、$v_1\in V_1$ または $v_1\in V_2$ が成り立つ。

∵)

$$v_1=w_1+w_2,\qquad w_1\in V_1,\ w_2\in V_2$$

と書くと、$0=\rho(y)(v_1)=\rho(y)(w_1)+\rho(y)(w_2)$ となる。$\rho(g)(y)(w_i)\in V_i\ (i=1,2)$ であるから、$\rho(g)(y)(w_i)=0\ (i=1,2)$ となる。よって、$w_i\in\mathrm{Ker}(\rho(y)|_{V(\rho(g);1)})=\boldsymbol{k}v_1$ となる。$w_1=c_1v_1,\ w_2=c_2v_1,\ c_1,c_2\in\boldsymbol{k}$ とおくと、$V_1\cap V_2=\{0\}$ ゆえ、$c_1=0$ または $c_2=0$ でなければならない。よって、$w_1\in V_1$ または $w_2\in V_2$ である。 □

$v_1\in V_1$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、$\rho(x)(v_1)=v_{r+1}\in V_1$ となる。さらに、$\rho(y)(v_2)=v_{r+1}$ および $v_2\in V(\rho(g);1)$ より $v_2\in V_1$ である。

∵)

$$v_2=u_1+u_2,\qquad u_1\in V_1,\ u_2\in V_2$$

と書くと、$\rho(g)(v_2)=v_2$ より $\rho(g)(u_1)=u_1,\ \rho(g)(u_2)=u_2$ を得る。

さらに、$\rho(y)(v_2)=v_{r+1}\in V_1$ であるから、$\rho(y)(u_1)=v_{r+1}$ かつ $\rho(y)(u_2)=0$ でなければならない。よって、$u_2\in\mathrm{Ker}(\rho(y)|_{V(\rho(g);1)})=\boldsymbol{k}v_1$ となる。ところが、$v_1\in V_1$ としていたから、$V_2\cap(\boldsymbol{k}v_1)=\{0\}$ である。故に、$u_2=0$ を得る。よって、$v_2=u_1\in V_1$ が示された。 □

これより、$\rho(x)(v_2)=v_{r+2}\in V_1$ を得る。同様の議論を繰り返すことにより、$v_3,v_{r+3},\cdots,v_r,v_{2r}\in V_1$ となることがわかるから、$V_1=V$ を得る。これは V が直既約なことを意味する。

後者の $2r-1$ 次元の表現が直既約であることも、上と同様にして示すことができる。(Q.E.D.)

注意：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A に対して、次の２つは同値であることが知られている (M. Auslander[25] Theorem A 参照)：

❶ 直既約な有限次元左 A-加群の同型類の個数は有限個である。

❷ 任意の直既約な左 A-加群は有限次元である。

この結果に従えば、上の演習問題の代数 A_{C_2} の場合、無限次元の直既約な左 A-加群が存在することになる。

演習 3-8

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
$M\ (\neq 0)$：左 A-加群　とする。このとき、次を示せ。
${}^{\exists}\varepsilon : A \longrightarrow \boldsymbol{k}$：代数準同型
${}^{\exists}r \geq 1$ s.t. $M^{\oplus r}$：有限階数をもつ自由 A-加群
　$\Longrightarrow$ M：自由 A-加群

解；

仮定により、

$$ {}^{\exists}s \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ M^{\oplus r} \cong ({}_A A)^{\oplus s} \quad \text{as left } A\text{-modules} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① $$

となる。これより、M は有限次元であることに注意する。

一方、$\boldsymbol{k}$ を ε によって右 A-加群とみなすことができる：

$$ x \cdot a := \varepsilon(a)x \qquad (x \in \boldsymbol{k},\ a \in A) $$

このとき、

$$ \boldsymbol{k} \otimes_A (M^{\oplus r}) \cong \boldsymbol{k} \otimes_A (({}_A A)^{\oplus s}) \qquad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② $$

となる。

$$ t := \dim_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k} \otimes_A M) $$

とおくと、②において $\boldsymbol{k}$ 上の次元を比較して

$$ rt = s $$

を得る。故に、

$$ M^{\oplus r} \cong ({}_A A)^{\oplus s} \cong ({}_A A)^{\oplus rt} \cong (({}_A A)^{\oplus t})^{\oplus r} \quad \text{as left } A\text{-modules} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ $$

を得る。M は有限次元なので左 Artin 加群かつ左 Nether 加群であるから、Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理 (定理 3-6) を適用することができて

$$ M \cong ({}_A A)^{\oplus t} \quad \text{as left } A\text{-modules} $$

を得る。これは M が自由 A-加群になっていることを意味する。 (Q.E.D.)

§3. Deuring-Noether の定理

ある体 $\boldsymbol{k}$ 上で有限次元な左 A-加群 V と W が同型であるかどうかは、$\boldsymbol{k}$ の拡大体 K をとったときに V^K と W^K が左 A^K-加群として同型かどうかで決まる。この事実は Deuring-Noether の定理と呼ばれる。ここでは、この定理を Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理の応用として証明する。

定理 3-8(Deuring-Noether)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、 $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

$V,\ W$：有限次元左 A-加群　とする。このとき

$$V \cong W \quad \text{as left } A\text{-modules} \iff V^K \cong W^K \quad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

次の補題は Deuring-Noether の定理を証明する際の鍵である。

補題 3-9

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、 $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大

$V,\ W$：有限次元左 A-加群　とする。このとき

W^K が V^K のある直和因子に同型

　　$\Longrightarrow$ W は V のある直和因子に同型

(proof)

２段階にわけて証明する。

Step1　W が直既約の場合

仮定により、

$$^\exists f \in \mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K),\quad g \in \mathrm{Hom}_{A^K}(W^K, V^K) \quad \text{s.t.} \quad f \circ g = \mathrm{id}$$

となる。系 1-48 より、K-加群として、

$$\mathrm{Hom}_{A^K}(V^K, W^K) \cong (\mathrm{Hom}_A(V, W))^K$$

であるので、その同型対応 (系 1-48 の証明参照) によって

$$f \longleftrightarrow \sum_i \lambda_i \otimes f_i, \qquad \lambda_i \in K,\ f_i \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$$

$$g \longleftrightarrow \sum_j \mu_j \otimes g_j, \qquad \mu_j \in K,\ g_j \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$$

であるとすると、$f \circ g = \mathrm{id}$ により、

$$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \otimes (f_i \circ g_j) = \mathrm{id}$$

となる。

各 i, j に対して、$f_i \circ g_j \in \mathrm{End}_A W$ なので、

$^\exists i,\ j$　s.t.　$f_i \circ g_j \notin \mathrm{rad}(\mathrm{End}_A W)$ となる。

$\because$)

もし、すべての i, j について、$f_i \circ g_j \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_A W)$ であったとすると、

$$\lambda_i \mu_j \otimes (f_i \circ g_j) \in (\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A W))^K \subset \mathrm{rad}((\mathrm{End}_A W)^K)$$

となる (演習 2-1)。したがって、

$$\mathrm{id} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \otimes (f_i \circ g_j) \in \mathrm{rad}((\mathrm{End}_A W)^K)$$

となる。しかし、この事実は、有限次元代数の根基が冪零イデアルであることに矛盾している。 □

したがって、$f_i \circ g_j$ によって生成される $\mathrm{End}_A W$ の左イデアルは冪零でない (有限次元代数の任意の冪零左イデアルはその根基に含まれることから従う)。

これより、その左イデアルには冪零でない元が存在することがわかる (命題 2-5 証明の下の注意参照)：

$$^\exists h \in \mathrm{End}_A W \quad \text{s.t.} \quad h \circ f_i \circ g_j \text{ は冪零でない。}$$

W は直既約であったから、$h \circ f_i \circ g_j : W \longrightarrow W$ は左 A-加群の同型でなければならない (系 3-5)。したがって、$f_i \circ g_j : W \longrightarrow W$ も同型である。特に、

$$^\exists h' : W \longrightarrow W \text{ ：左 } A\text{-加群の同型} \quad \text{s.t.} \quad f_i \circ (g_j \circ h') = \mathrm{id}_W$$

となる。これは、

$$W \cong (g_j \circ h')(W) = g_j(W) \quad \text{かつ} \quad V = \mathrm{Im}(g_j \circ h') \oplus \mathrm{Ker} f_i = g_j(W) \oplus \mathrm{Ker} f_i$$

となることを意味する。こうして、W が直既約の場合には証明された。

Step2 W が一般の場合

Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理により、

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \qquad (\text{各 } W_i \text{ は直既約な部分加群})$$

と書ける。n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ の場合は Step1 で示した。$n > 1$ とし、$n-1$ のとき補題は成り立つと仮定する。

$$W^K \cong W_1^K \oplus \cdots \oplus W_n^K \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となるので、W_1^K は V^K のある直和因子に同型である。Step1 により、

$$^\exists U \text{：} V \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad V \cong W_1 \oplus U$$

となる。よって、

$$V^K \cong W_1^K \oplus U^K$$

となる。一方、仮定により、

$$^\exists M \text{：} V^K \text{ の部分加群} \quad \text{s.t.} \quad V^K \cong W^K \oplus M$$

となるから、左 A^K-加群としての同型

$$W_1^K \oplus U^K \cong V^K \cong W_1^K \oplus \cdots \oplus W_n^K \oplus M$$

を得る。Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理により、左 A^K-加群として

$$U^K \cong W_2^K \oplus \cdots \oplus W_n^K \oplus M \cong (W_2 \oplus \cdots \oplus W_n)^K \oplus M$$

となることがわかる (演習 2-3)。帰納法の仮定により、

$$W' := W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

は U のある直和因子に同型である。したがって、$W = W_1 \oplus W'$ は $V \cong W_1 \oplus U$ のある直和因子に同型である。これで、Step2 も完成し、補題の証明が終わった。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-8)

V と W が左 A-加群として同型ならば、V^K と W^K が同型になることはすぐにわかる。逆が成り立つことを示す。

$V^K \cong W^K$ as left A^K-modules であると仮定する。

すると、W^K は V^K のある直和因子に同型であるから、補題3-9 により、W は V のある直和因子に同型となる。ここで、

$$\dim_{\boldsymbol{k}} W = \dim_K W = \dim_K V = \dim_{\boldsymbol{k}} V$$

であるから、線形代数学の初歩から、

$$W \cong V \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

でなければならないことがわかる。 (Q.E.D.)

Deuring-Noether の定理の 1 つの応用として、次を得る。

命題 3-10

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数、$K/\boldsymbol{k}$: 体の拡大 とする。このとき、

$$A^K : \text{フロベニウス代数} \iff A : \text{フロベニウス代数}$$

(proof)

i. 必要性：

A をフロベニウス代数とすると、左 A-加群として ${}_AA \cong (A_A)^*$ となる。

故に、左 A^K-加群として $({}_AA)^K \cong (A_A)^{*K}$ となる。

系 1-49 により、左 A^K-加群として $(A_A)^{*K} \cong (A_A)^{K*}$ であるから、左 A^K-加群としての同型

$$({}_AA)^K \cong (A_A)^{K*}$$

を得る。よって、A^K はフロベニウス代数である。

ii. 十分性：

A^K がフロベニウス代数ならば、系 1-49 を用いて、左 A^K-加群としての同型

$$({}_AA)^K \cong (A_A)^{K*} \cong (A_A)^{*K}$$

を得る。すると、Deuring-Noether の定理 (定理 3-8) から、左 A-加群としての同型 ${}_AA \cong (A_A)^*$ を得る。

よって、A はフロベニウス代数である。 (Q.E.D.)

§4. 有限次元代数の原始冪等元と既約加群との対応

この節では、体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A に対して、その原始冪等元全体と既約な左 A-加群の同型類全体の間に 1 対 1 対応があることを示す。

定理 3-11

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$A_1, \cdots, A_r$：${}_AA$ の直既約な直和因子の完全代表系　とする。

各 A_i $(i = 1, \cdots, r)$ は A の原始冪等元 e_i を用いて $A_i = Ae_i$ と表わすことができる。このとき、$\overline{A}_i = A_i/(\mathrm{rad}A)e_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ とおき、これらを自然に左 A-加群とみなすと、$\overline{A}_1, \cdots, \overline{A}_r$ は既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系となる。

注意：${}_AA$ の直既約な直和因子に同型な左 A-加群は**主直既約加群** (*principal indecomposable module*) と呼ばれる。上の定理は、有限次元代数 A について、次の 3 つの間に 1 対 1 対応が存在することを主張している。

(i) 既約な左 A-加群の同型類全体

(ii) 主直既約な左 A-加群の同型類全体

(iii) A の原始冪等元全体

定理を証明するために、いくつか補題を準備しよう。

補題 3-12

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$e, f \in A$：冪等元　とする。このとき、次の 3 つは同値である。

① $eA \cong fA$　as right A-modules

② $Ae \cong Af$　as left A-modules

③ ${}^\exists a \in fAe,\ {}^\exists b \in eAf$　s.t.　$ab = f,\ ba = e$

(proof)

① $\Longrightarrow$ ③：

$\varphi : eA \longrightarrow fA$ を右 A-加群の同型とする。

このとき、$a := \varphi(e),\ b := \varphi^{-1}(f)$ とおく。

$a \in fA$ であって、f は冪等元であるから、$fa = a$ を満たす ($\because$ $a = fa'$ $(a' \in A)$ と書けるので、$fa = f^2a' = fa' = a$ となる)。

また、φ は右 A-加群準同型であって、e は冪等元であるから、

$$a = \varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)e = ae$$

を満たす。故に、

$$a = fa = fae \in fAe$$

を得る。

上の議論において、φ を φ^{-1} に置き換えて e と f を置き換えると、a と b が置き換わるから、

$$b = eb = ebf \in eAf$$

を得る。また、

$$f = \varphi(\varphi^{-1}(f)) = \varphi(b) = \varphi(eb) = \varphi(e)b = ab$$
$$g = \varphi^{-1}(\varphi(e)) = \varphi^{-1}(a) = \varphi^{-1}(fa) = \varphi(f)a = ba$$

が成り立つ。

③ $\Longrightarrow$ ①：

$\varphi : eA \longrightarrow fA$ を $\varphi(ex) = ax \quad (x \in A)$ により定義する。

φ は矛盾なく定義されている。

$\because$)

まず、$a \in fAe$ であるから、$x \in A$ に対して、$ax \in fA$ となることに注意しよう。

$x, y \in A$ とし、$ex = ey$ であるとする。

このとき、$faex = faey$ となる。ここで、$a \in fAe$ であって e, f が冪等元であるから、$fae = a$ が成り立つ ($\because$ $a \in fAe$ なので、$a = fa'e$ と置くことができる。したがって、$fae = f(fa'e)e = f^2a'e^2 = fa'e = a$ となる)。

これで、$ex = ey$ ならば $\varphi(ex) = \varphi(ey)$ が示された。 $\square$

φ が右 A-加群準同型であることはすぐにわかる。

同様にして、右 A-加群準同型 $\psi : fA \longrightarrow eA$ を $\psi(fx) = bx \quad (x \in A)$ によって定義することができる。

φ と ψ は互いに他の逆写像になっている。

$\because$)

$$(\varphi \circ \psi)(fx) = \varphi(bx) \underset{\substack{\uparrow \\ b \in eAf \text{ より } b = ebf \text{ が成り立つ。}}}{=} \varphi(ebfx) = abfx = f^2x = fx \quad \text{for all } {}^\forall x \in A$$

であるから、$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ である。同様に、

$$(\psi \circ \varphi)(ex) = \varphi(ax) = \varphi(faex) = baex = e^2x = ex \quad \text{for all } {}^\forall x \in A$$

であるから、$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ である。 $\square$

これで、φ は右 A-加群の同型を与えることがわかった。

① $\Longrightarrow$ ② も同様に証明される。 (Q.E.D.)

補題 3-13

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$e \in A$：冪等元

$\Longrightarrow \quad \mathrm{rad}(eAe) = e(\mathrm{rad}A)e = (\mathrm{rad}A) \cap (eAe)$

(proof)

① $e(\mathrm{rad}A)e = (\mathrm{rad}A) \cap (eAe)$ であること：

$\mathrm{rad}A$ は A の両側イデアルであるから、$e(\mathrm{rad}A)e \subset (\mathrm{rad}A) \cap (eAe)$ となることは直ちにわかる。

逆に、$x \in (\mathrm{rad}A) \cap (eAe)$ とすると、$x = eye \ (y \in A)$ と書ける。このとき、$e^2 = e$ であるから

$$exe = e(eye)e = e^2ye^2 = eye = x$$

となる。故に、$x = exe \ \in e(\mathrm{rad}A)e$ を得る。したがって、$(\mathrm{rad}A) \cap (eAe) \subset e(\mathrm{rad}A)e$ も示された。

② $\mathrm{rad}(eAe) = e(\mathrm{rad}A)e$ であること：

i. $e(\mathrm{rad}A)e \subset \mathrm{rad}(eAe)$ の証明：

演習 1-47 により、任意の $x \in \mathrm{rad}A$ に対して $e - exe$ が eAe における可逆元であることを示せばよい (e は代数 eAe の単位元であり、$e(\mathrm{rad}A)e$ は eAe の左イデアルであることに注意)。

$x \in \mathrm{rad}A$ を任意にとる。$\mathrm{rad}A$ は A の両側イデアルであるから、$exe \in \mathrm{rad}A$ である。したがって、$1 - exe$ は可逆である (補題 1-9)：

$$^{\exists}y \in A \quad \text{s.t.} \quad y(1 - exe) = 1 = (1 - exe)y$$

この両辺に、左右から e を掛けて、

$$eye(e - exe) = e = (e - exe)eye$$

を得る。e は eAe の単位元であるから、$e - exe$ は eAe における可逆元である。故に、$e(\mathrm{rad}A)e \subset \mathrm{rad}(eAe)$ が示された。

ii. $\mathrm{rad}(eAe) \subset e(\mathrm{rad}A)e$ の証明：

$\mathrm{rad}(eAe) \subset eAe$ であるので、$\mathrm{rad}(eAe) \subset \mathrm{rad}A$ となることが示されれば、①を用いて、$\mathrm{rad}(eAe) \subset (\mathrm{rad}A) \cap (eAe) = e(\mathrm{rad}A)e$ が証明される。そこで、

$$\mathrm{rad}(eAe) \subset \mathrm{rad}A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示す。

$$\mathrm{rad}A = \bigcap_{M:\text{既約な左 } A\text{-加群}} \mathrm{ann}M, \quad \mathrm{ann}M = \{a \in A \mid aM = 0\}$$

であるので、$(*)$ を示すには、任意の既約な左 A-加群 M に対して、

$$\mathrm{rad}(eAe)M = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

となることを示せばよい。そこで、任意に既約な左 A-加群 M をとる。このとき、eM は左 eAe-加群になる。

もし、$eM = 0$ ならば、$\mathrm{rad}(eAe)M = 0$ となることは直ちにわかる。

$eM \neq 0$ の場合には、eM が左 eAe-加群として既約になる。

$\because)$

$N\ (\neq 0)$ を eM の部分左 eAe-加群とする。このとき、AN は M の部分左 A-加群であって、0 ではない。よって、M の既約性から、$M = AN$ となる。

$AN = AeN$ であるから、$eM = eAN = eAeN \subset N$ となる。

$\hookleftarrow$ e は eAe の単位元で、N は左 eAe-加群なので、$eN = N$.

故に、$eM = N$ を得る。 $\square$

したがって、

$$\mathrm{rad}(eAe)M = \mathrm{rad}(eAe)eM = 0$$

$\hookleftarrow$ $\mathrm{rad}(eAe) = \bigcap_{W:\text{既約な左 } eAe\text{-加群}} \mathrm{ann}W.$

を得る。これで、$(**)$ が示された。 (Q.E.D.)

命題 3-14

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

I：A の両側イデアル、$I \subset \mathrm{rad}A$ とする。

$\bar{A} = A/I$ とおき、自然な射影 $\pi : A \longrightarrow \bar{A}$ による $a \in A$ の像を $\bar{a}$ と書く。

このとき、A の冪等元 e, f に対して、次が成り立つ。

$$Ae \cong Af \quad \text{as left } A\text{-modules}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \bar{A}\bar{e} \cong \bar{A}\bar{f} \quad \text{as left } \bar{A}\text{-modules}$$

(proof)

i. 必要性：

$\varphi : Ae \longrightarrow Af$ を左 A-加群の同型とする。

$\varphi(Ie) = If$ が成り立つ。

$\because$)

$\varphi(e) = af,\ a \in A$ とおく。

$x \in I$ ならば $\varphi(xe) = x\varphi(e) = xaf \ \in If$ となる。

故に、$\varphi(Ie) \subset If$ となる。

$\varphi^{-1} : Af \longrightarrow Ae$ について、同様に考えて、

$$\varphi^{-1}(If) \subset Ie$$

を得る。これは、$If \subset \varphi(Ie)$ となることと同値である。

故に、$\varphi(Ie) = If$ となることが示された。 $\square$

これより、φ は左 A-加群の同型

$$\bar{\varphi} : Ae/Ie \longrightarrow Af/If$$

を誘導する。演習 1-26 より、左 A-加群として

$$Ae/Ie \cong \bar{A}\bar{e}, \quad Af/If \cong \bar{A}\bar{f}$$

であるから、左 A-加群としての同型

$$\bar{A}\bar{e} \longrightarrow \bar{A}\bar{f}$$

の存在がわかる。この同型は左 $\bar{A}$-加群としての同型にもなっている。

ii. 十分性：

左 $\bar{A}$-加群として $\bar{A}\bar{e} \longrightarrow \bar{A}\bar{f}$ であると仮定する。

補題 3-12 から、

$$^{\exists}a,\ b \in A \ \text{ s.t. } \ \bar{a} \in \bar{f}\bar{A}\bar{e}, \quad \bar{b} \in \bar{e}\bar{A}\bar{f}, \quad \bar{a}\bar{b} = \bar{f}, \quad \bar{b}\bar{a} = \bar{e}$$

となる。$\bar{e}, \bar{f}$ の冪等性から、$\bar{a} \in \bar{f}\bar{A}\bar{e},\ \bar{b} \in \bar{e}\bar{A}\bar{f}$ は

$$\bar{a} = \bar{f}\bar{a}\bar{e}, \qquad \bar{b} \in \bar{e}\bar{b}\bar{f}$$

と同値である。さらに、必要ならば、a, b のかわりに fae, ebf をとることにより、

$$fae = a, \qquad ebf = b$$

であると仮定してよい。

すると、左 A-加群準同型 $\varphi : Ae \longrightarrow Af$ を $\varphi(xe) = xb \ \ (x \in A)$ により定めることができ、また、左 A-加群準同型 $\psi : Af \longrightarrow Ae$ を $\psi(yf) = ya \ \ (y \in A)$ により定めることができる。

$\because$)

> φ, ψ が矛盾なく定義されていることを確かめる。例えば、φ が矛盾なく定義されていることを確かめる。
>
> まず、$b = ebf$ であることから、任意の $x \in A$ に対して、$xb \in Af$ であることに注意する。
>
> 次に、$x, y \in A$ が $xe = ye$ を満たすとき、この両辺に右から bf 掛けて、$xb = xebf = yebf = yb$ を得る。
>
> 故に、φ は矛盾なく定義されている。同様にして、ψ が矛盾なく定義されていることを確かめることができる。 $\square$

φ と ψ が同型写像になっていることを示す。そのために、$\varphi \circ \psi$ と

$$(\varphi \circ \psi)(xf) = \varphi(xa) = \varphi(xfae) = (xfa)b = (xf)(ab)$$
$$(\psi \circ \varphi)(xe) = \psi(xb) = \psi(xebf) = (xeb)a = (xe)(ba)$$

であることがわかる。これより、$ab \in fAf$ が fAf の可逆元であって、$ba \in eAe$ が eAe の可逆元であることがわかれば、φ と ψ はともに同型写像になっていることがわかる。

$\because$)

> 例えば、ab が fAf の可逆元であることがわかったとする。
>
> すなわち、
>
> $$^{\exists}d \in fAf \ \ \text{s.t.} \ \ abd = dab = f$$
>
> であるとする。このとき、写像 $\tau : Af \longrightarrow Af, xf \longmapsto (xf)d, \ x \in A$ は $\varphi \circ \psi$ の逆写像になることがわかる。特に、$\tau \circ \varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ であるから、ψ は単射であって、φ は全射であることがわかる。
>
> ba が eAe の可逆元であることがわかれば、同様にして φ の単射性と ψ の全射性がわかる。 $\square$

以下では、ab が fAf の可逆元であって、ba が eAe の可逆元であることを示す。

ab が fAf の可逆元であることを示すには、$c := f - ab \in fAf$ が $\mathrm{rad}(fAf)$ に属することを示せばよい (補題 1-9 参照、f は fAf の単位元に注意)。

$\bar{c} = \bar{f} - \bar{a}\bar{b} = 0$ なので、$c \in I$ である。したがって、

$$c \in (fAf) \cap I = fIf \underset{\substack{\uparrow \\ \text{仮定より}}}{\subset} f(\mathrm{rad}A)f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 3-13}}}{=} \mathrm{rad}(fAf)$$

を得る。これで、ab が fAf において可逆であることが証明された。同様にして、ba が eAe において可逆であることを示すことができる。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-11)

Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理により、${}_AA$ は直既約な部分加群の直和として (順番を無視すれば) 一意的に表わされる。すなわち、

$$ {}_AA = \bigoplus_{j=1}^{n} A_j \qquad (A_j \text{ は直既約な部分加群}) \qquad \cdots\cdots ① $$

のように書ける。ここで、$A_1, \cdots, A_r$ は互いに同型でないとし、A_j $(j = r+1, \cdots, n)$ は $A_1, \cdots, A_r$ のいずれかと同型であるとする。

・各 A_i が A の原始冪等元 e_i を用いて、$A_i = Ae_i$ とあらわすことができること：

単位元 $1 \in A$ を①の直和分解に応じて、

$$ 1 = \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad (e_i \in A_i,\ i = 1, \cdots, n) $$

と書く。$Ae_i \subset A_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ であることは直ちにわかる。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

$a \in A_i$ とする。このとき、$a = a \cdot 1 = a \cdot \sum_{j=1}^{n} e_j = \sum_{j=1}^{n} ae_j$ となる。

各 ae_j は A_j に属しているので、直和分解の定義から

$$ ae_j = 0 \quad (j \neq i), \quad ae_i = a $$

でなければならない。故に、

$$ a \in A_i \implies a = ae_i \in Ae_i \qquad \cdots\cdots ② $$

が示された。よって、$A_i = Ae_i$ であることがわかった。

e_i が A の原始冪等元であることを示す。

A_i は直既約なので、$A_i \neq 0$ である。したがって、$e_i \neq 0$ である。また、②において $q = e_i$ にとることにより、$e_i = e_i^2$ を得る。よって、e_i は A の冪等元である。再び、$A_i = Ae_i$ の直既約性から、e_i が原始的な冪等元であることがわかる (補題 1-2)。

・各 $\bar{A}_i = Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i$ が左 A-加群として既約であること：

$\bar{A} = A/\mathrm{rad}A$ とおく。また、自然な射影 $A \longrightarrow \bar{A}$ による各元 $a \in A$ の像を $\bar{a}$ と書くことにする。このとき、

$$ \bar{A}_i := Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i \cong \bar{A}\overline{e_i} \quad \text{as left } A\text{-modules} \qquad \cdots\cdots ③ $$

が成り立つ (演習 1-26)。さらに、$\overline{e_i}$ は $\bar{A}$ の原始冪等元である (系 1-5)。

したがって、$\bar{A}\overline{e_i}$ は ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ の直既約な部分加群である (補題 1-2)。

ところで、$\bar{A} = A/\mathrm{rad}A$ は有限次元の半単純な代数であるから、$\boldsymbol{k}$ 上有限次元であるような左 $\bar{A}$-加群 V に対して、

$$ V : \text{直既約} \iff V : \text{既約} $$

が成り立つ。よって、$\bar{A}\overline{e_i}$ は左 $\bar{A}$-加群として既約となる。したがって、また、$\bar{A}\overline{e_i}$ は 左 A-加群として既約になる ($W \subset \bar{A}\overline{e_i}$ が左 A-加群としての部分加群ならば、W は左 $\bar{A}$-加群としての部分加群になるから)。

③より、$\bar{A}_i = Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i$ は左 A-加群として既約である。

・$\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_r$ が既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系であること：

まず、任意の既約な左 A-加群は $\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_r$ のいずれかに同型になることを示す。

M を既約な左 A-加群とすると、$(\mathrm{rad}A)M = 0$ となる (補題 1-18) から、M は自然な方法で左 $\bar{A}$-加群とみなされる。

このとき、その作用の定義の仕方から、M は左 $\bar{A}$-加群として既約になることがわかる。

すると、$\bar{A}$ の半単純性により、M は $\bar{A}$ のある極小左イデアルと左 $\bar{A}$-加群として同型になる (演習 2-1)。

ところで、$\bar{1} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n},\ \overline{e_i}\,\overline{e_j} = \delta_{i,j}\overline{e_j}\ (i, j = 1, \cdots, n)$ であるから、直和分解

$$\bar{A} = \bigoplus_{j=1}^{n} \bar{A}\overline{e_j}$$

を得る。各 e_j が $\bar{A}$ の原始冪等元であったことから、各 $\bar{A}\overline{e_j}$ は $\bar{A}$ の極小左イデアルになっている。したがって、M は $\bar{A}\overline{e_1}, \cdots, \bar{A}\overline{e_n}$ のいずれかと左 $\bar{A}$-加群として同型になる (演習 2-1 の証明参照)。これより、M は $\bar{A}\overline{e_1}, \cdots, \bar{A}\overline{e_n}$ のいずれかと左 A-加群として同型になることがわかる。

次に、

$$\bar{A}_i \cong \bar{A}_j \ \text{ as left } A\text{-modules} \iff A_i \cong A_j \ \text{ as left } A\text{-modules}$$

となることを示す。これは、命題 3-14 を用いて、次のようにして導かれる：

$$\begin{aligned}
\bar{A}_i \cong \bar{A}_j \ \text{ as left } A\text{-modules} &\iff \bar{A}\overline{e_i} \cong \bar{A}\overline{e_j} \ \text{ as left } A\text{-modules} \\
&\iff \bar{A}\overline{e_i} \cong \bar{A}\overline{e_j} \ \text{ as left } \bar{A}\text{-modules} \\
&\iff Ae_i \cong Ae_j \ \text{ as left } A\text{-modules} \quad \text{命題 3-14 より} \\
&\iff A_i \cong A_j \ \text{ as left } A\text{-modules}
\end{aligned}$$

こうして、定理の証明が終わった。 (Q.E.D.)

注意：定理の証明から、次のことがわかる。

$e_1,\ e_2$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A の 2 つの原始冪等元とする。このとき、

$$Ae_1 \cong Ae_2 \ \text{ as left } A\text{-modules} \iff Ae_1/(\mathrm{rad}A)e_1 \cong Ae_2/(\mathrm{rad}A)e_2 \ \text{ as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。

§5. 単射的外皮

左 A-加群 M が単射的であるとは、M を含む任意の左 A-加群の直和因子に M がなることをいうのであった (第 1 章第 7 節参照)。ここでは、加群の拡大という視点から、左 A-加群の単射性という概念を捉える。左 A-加群 V の単射的外皮 (あるいは単射包絡) とは、V を部分加群として含む単射的な左 A-加群の中で極小なものをいう。任意の左 A-加群には単射的

外皮が常に存在し、同型を除いて一意的である。ここでは、その証明と単射的外皮の性質について調べる。

命題 3-15

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。このとき、次の３つは同値である。

(i) V は単射的である。

(ii) 任意の左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow V$ は、M を部分加群として含む任意の左 A-加群 $\widetilde{M}$ からの準同型 $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow V$ に拡張できる。

(iii) I が A の左イデアルで、$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(I, V)$ ならば、ある $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_A(A, V)$ が存在して、$\widetilde{\varphi}|_I = \varphi$ となる。

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

$i : M \longrightarrow \widetilde{M}$ を包含準同型とする。V は単射的であるから、$i^* : \mathrm{Hom}_A(\widetilde{M}, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ は全射である。したがって、

$$^\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, V), \quad ^\exists \widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(\widetilde{M}, V) \ \ \text{s.t.} \ \ \widetilde{f} \circ i = f$$

となる。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：

$f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。任意に $h \in \mathrm{Hom}_A(M, V)$ をとる。このとき、左 A-加群準同型

$$g : f(M) \cong M \xrightarrow{h} V$$

を考えることができる。仮定により、

$$^\exists \widetilde{g} : N \longrightarrow V : \text{左 } A\text{-加群準同型} \ \ \text{s.t.} \ \ \widetilde{g}|_{f(M)} = g$$

となる。したがって、

$$\widetilde{g}(f(m)) = g(f(m)) = h(m) \qquad \text{for} {}^\forall m \in M$$

であるから、

$$f^*(\widetilde{g}) = h$$

故に、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ は全射である。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

$M = I,\ \widetilde{M} = A$ という特別な場合として得られる。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：

M を左 A-加群 $\widetilde{M}$ の部分加群とし、$f : M \longrightarrow V$ を左 A-加群準同型とする。

$$\mathcal{S} = \{(U, g) \mid U \text{ は } M \text{ を含む } \widetilde{M} \text{ の部分加群},\ g \in \mathrm{Hom}_A(U, V),\ g|_M = f\}$$

とおく。

$(M, f) \in \mathcal{S}$ より $\mathcal{S} \neq \emptyset$ となることに注意する。

$(U_1,g_1),\ (U_2,g_2)\in\mathcal{S}$ に対して、

$$(U_1,g_1)\leq(U_2,g_2)\iff U_1\subset U_2 \text{ かつ } g_2|_{U_1}=g_1$$

と定める。$(\mathcal{S},\leq)$ は順序集合である。さらに、$\mathcal{S}$ の任意の鎖が $\mathcal{S}$ 内に極大元を持つことが容易にわかるから、$\mathcal{S}$ は順序 $\leq$ に関して極大な元 (U,g) を持つ。$U=\widetilde{M}$ を示せば、証明が終わる。

$x\in\widetilde{M}$ とし、$I=\{a\in A\mid ax\in U\}$ とおく。I は A の左イデアルである。

左 A-加群準同型 $\varphi:I\longrightarrow V$ を $\varphi(a)=g(ax),\ a\in I$ により定義する。

仮定により、φ は左 A-加群準同型 $\widetilde{\varphi}:A\longrightarrow V$ に拡張される。この $\widetilde{\varphi}$ を用いて $\widetilde{g}:U+Ax\longrightarrow V$ を

$$\widetilde{g}(u+ax)=g(u)+\widetilde{\varphi}(a) \qquad (u\in U,\ a\in A)$$

によって定義することができる。

$\because$)

$u+ax=u'+bx\ \ (u,u'\in U,\ a,b\in A)$ であるとする。

$u-u'=(b-a)x$ となる。したがって、

$g(u-u')=g((b-a)x)=\varphi(b-a)=\widetilde{\varphi}(b-a)=\widetilde{\varphi}(b)-\widetilde{\varphi}(a).$

故に、$g(u)-g(u')=\widetilde{\varphi}(b)-\widetilde{\varphi}(a)\quad\square$

$(U,g)\leq(U+Ax,\widetilde{g})$ であるから、(U,g) の極大性により、$U=U+Ax$ かつ $g=\widetilde{g}$ を得る。こうして、$x\in U$ かつ $U=\widetilde{M}$ が証明された。 (Q.E.D.)

注意：(iii) の条件は

「I：A の左イデアル、$\varphi\in\mathrm{Hom}_A(I,V)\implies {}^{\exists}a\in A\ \text{ s.t. }\ \varphi(x)=xa\ \text{ for all } x\in I$」

と同値である。

(iii) は **Baer の基準** (*Baer's Criterion*) と呼ばれ、具体的に与えられた加群の単射性の判定に有効である (演習 3-11)。ここでその 1 つの応用を述べよう。

命題 3-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、次の 2 つは同値である。

(i) A は左 Noether 代数である。

(ii) 任意の単射的な左 A-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ に対して $\bigoplus_{i\in I}V_i$ は単射的である。

注意：この命題から、A が左 Noether 代数でなければ、単射的な左 A-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ であって、$\bigoplus_{i\in I}V_i$ が単射的でないようなものが存在することがわかる。このとき、I は無限集合でなければならない (演習 1-56)。

(proof of Proposition 3-16)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

$\{V_i\}_{i\in I}$ を単射的な左 A-加群の族とし、$V := \bigoplus_{i\in I} V_i$ とおく。V が単射的なことを示すには、A の任意の左イデアル $\mathfrak{A}$ に対して左 A-加群準同型 $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow V$ が A から V への左 A-加群準同型に拡張できることを示せばよい。

A は左 Noether 代数なので、$\mathfrak{A}$ は有限生成である (補題 1-7)。そこで

$$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{n} Ax_j \qquad\qquad (x_j \in I,\ j = 1, \cdots, n)$$

とおく。各 $j = 1, \cdots, n$ について $\varphi(x_j) \in V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ なので、

$$^{\exists}I_o \subset I：有限部分集合 \ \text{ s.t. } \ ^{\forall}j = 1, \cdots, n, \ \ \varphi(x_j) \in \bigoplus_{i\in I_o} V_i$$

となる。

$\because$)

各 j について $\varphi(x_j) = (v_i^j)_{i\in I}$ $(v_i^j \in V_i,\ i \in I)$ と書くと、直和の定義から、$v_i^j \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個である。各 j についてこのような $i \in I$ を集めて I_o とおけば、I_o は有限集合であって、$\varphi(x_j) \in \bigoplus_{i\in I_o} V_i$ を満たす。 □

I は $x_1, \cdots, x_n$ によって生成されているから、$\varphi(\mathfrak{A}) \subset \bigoplus_{i\in I_o} V_i$ となる。よって、

$$\begin{cases} \varphi_o : \mathfrak{A} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_o} V_i \text{ を } \varphi_o(x) = \varphi(x),\ x \in \mathfrak{A} \\ i : \bigoplus_{i\in I_o} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i \text{ を包含写像} \end{cases}$$

と定義すれば、$\varphi = i \circ \varphi_o$ が成り立つ。

I_o は有限集合であるから、$\bigoplus_{i\in I_o} V_i$ は単射的である (演習 1-56)。したがって、

$$^{\exists}\widetilde{\varphi_o} : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_o} V_i：左 \ A\text{-加群準同型} \ \text{ s.t. } \ \widetilde{\varphi_o}|_{\mathfrak{A}} = \varphi_o$$

となる。このとき、

$$\widetilde{\varphi} := i \circ \widetilde{\varphi_o} : A \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$$

おくと、

$$\widetilde{\varphi}|_{\mathfrak{A}} = i \circ \widetilde{\varphi_o}|_{\mathfrak{A}} = i \circ \varphi_o = \varphi$$

を得る。こうして、Baer の基準によって、$\bigoplus_{i\in I} V_i$ が単射的になることが示された。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：

A の左イデアルの昇鎖列 $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \cdots\cdots$ を任意にとる。$J := \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ とおく。J は A の左イデアルである。

各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $k_i : J/J_i \longrightarrow I(J/J_i)$ を包含写像とする。

$\varphi : J \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i)$ を

$$\varphi(x) = (k_i(x + J_i))_{i=1}^{\infty}, \qquad x \in J$$

によって定義する。φ は確かに $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i)$ への写像になっていて左 A-加群準同型である。

$\because$)

$x \in J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ ゆえ、

$$^{\exists}n_x \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ i > n_x \ \Rightarrow \ x \in J_i$$

となる。よって、

$$i > n_x \implies x + J_i = J_i = (J/J_i \text{ の零元})$$

となる。したがって、$(x + J_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} J/J_i$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} J/J_i$ に属している。よって、写像 $j : J \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} J/J_i$ が $j(x) = (x + J_i)_{i=1}^{\infty}$, $x \in J$ によって定義される。

φ は２つの左 A-加群準同型 j と $\bigoplus_{i=1}^{\infty} k_i : \bigoplus_{i=1}^{\infty} J/J_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i)$ との合成であるから、左 A-加群準同型である。 $\square$

仮定により $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i)$ は単射的であるから、

$$^{\exists}\widetilde{\varphi} : A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i) : \text{左 } A\text{-加群準同型} \ \text{ s.t. } \ \widetilde{\varphi}|_J = \varphi$$

となる。

$$\widetilde{\varphi}(1) = (a_i)_{i=1}^{\infty}, \quad a_i \in I(J/J_i),\ i \in \mathbb{N}$$

とおくと、任意の $x \in J$ に対して

$$(k_i(x + J_i))_{i=1}^{\infty} = \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) = x\widetilde{\varphi}(1) = x(a_i)_{i=1}^{\infty} = (xa_i)_{i=1}^{\infty}$$

となる。$\widetilde{\varphi}(1)$ は直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I(J/J_i)$ に属しているから

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ i \geq n \ \Rightarrow \ a_i = 0$$

となる。このとき、任意の $x \in J$ に対して

$$i > n \implies k_i(x + J_i) = xa_i = 0$$

を得る。このことは $i \geq n$ のとき $k_i = 0 : J/J_i \longrightarrow I(J/J_i)$、すなわち、$J = J_i$ となることを意味する。これで、

$$i \geq n \implies J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = \cdots\cdots = J$$

となることが示されたから、A は左 Noether 代数である。 (Q.E.D.)

定義 3-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
左 A-加群 U が V の**本質的拡大** (*essential extension*) であるとは、次の２条件が成り立つときをいう。

(i) U は V を部分加群として含む。
(ii) V は U の**本質的部分加群**である。すなわち、

$$W : U \text{ の部分加群、} W \cap V = 0 \implies W = 0$$

注意： 任意の左 A-加群 V に対し、V 自身は V の本質的拡大である。

命題 3-17

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。このとき、次が成り立つ。

$$V : \text{単射的} \iff V \text{ は真の本質的拡大を持たない}$$

ここで、左 A-加群 U が V の真の本質的拡大とは、V の本質的拡大であり、かつ、$U \neq V$ を満たすものをいう。

(proof)
i. 必要性：
V は単射的であるとする。
V の真の本質的拡大 U が存在すると仮定する。
V は単射的なので U の直和因子である (命題 1-32)：

$$^{\exists}W : \ U \text{ の部分加群 } \ \text{s.t.} \quad U = V \oplus W$$

$V \neq U$ であるから、$W \neq 0$ である。これは U が本質的拡大であるための条件 (ii) に反する。
ii. 十分性：
V は真の本質的拡大を持たないと仮定する。
V を部分加群として含む任意の左 A-加群 U を考える。V が U の直和因子になることを示せばよい (命題 1-32)。
集合

$$\mathcal{S} = \{W \mid W \text{ は } U \text{ の部分加群}, \ W \cap V = 0\}$$

を考える。$0 \in \mathcal{S}$ より、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。$\mathcal{S}$ を集合の包含関係に関する順序集合とみる。このとき、$\mathcal{S}$ には極大元が存在する。
$\because$)
$\mathcal{S}$ の任意の鎖 $\mathfrak{C} = \{W_i\}_{i \in I}$ を考える。$W = \sum_{i \in I} W_i$ とおく。$W \in \mathcal{S}$ となることを示せばよい。

$v \in W \cap V$ とする。

$$v = \sum_{i \in I} w_i \qquad (w_i \in W_i,\ \text{有限個の } i \in I \text{ を除いて } w_i = 0)$$

と書ける。

$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、$w_i \neq 0$ となる W_i の中で、包含関係に関して最大となる W_{i_o} が存在する。

このとき、$v \in W_{i_o}$ となる。

$$v \in V \cap W_{i_o} = 0$$

よって、$\mathfrak{C}$ は $\mathcal{S}$ の中に極大元を持つ。Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ は極大元を持つ。 $\square$

さて、W を $\mathcal{S}$ の極大元とする。$U = V + W$ となることを示す。

$V \cap W = 0$ であるから、

$$V \cong (V + W)/W \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。包含写像 $V + W \hookrightarrow U$ は単射な左 A-加群準同型 $(V + W)/W \longrightarrow U/W$ を誘導する。この写像によって、

$$(V + W)/W \subset U/W$$

とみなす。

$(V + W)/W$ は U/W の本質的拡大になっている。これを示す。

そのために、U/W の 0 でない部分加群 T を勝手にとる。

$W \subset X$ を満たす U の部分加群 X を使って、T は $T = X/W$ と表される。$T \neq 0$ より、$W \subsetneqq X$ である。

W の $\mathcal{S}$ における極大性から、$V \cap X \neq 0$ となる。したがって、

$$(X/W) \cap ((V + W)/W) \neq 0$$

である。

$\because$)

$0 \neq v \in V \cap X$ とする。

もし、$v \in W$ であったとすると、$v \in V \cap W = 0$ となり、矛盾。

したがって、$v \notin W$ である。

v の W による剰余類は $(X/W) \cap ((V + W)/W)$ に属し、0 ではない。 $\square$

こうして、$V \cong (V + W)/W$ は U/W の本質的拡大になっていることが示された。

仮定から $V \cong (V + W)/W$ は真の本質的拡大を持たないので、

$$(V + W)/W = U/W \quad i.e. \quad V + W = U$$

でなければならない。

$V \cap W = 0$ であったから、$V + W = U$ は V が U の直和因子になることを意味する。命題 1-32 により、V は単射的である。 (Q.E.D.)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、V を左 A-加群とする。

左 A-加群 U が V の**極大な本質的拡大** (*maximal essential extension*) であるとは、次の 2 条件が満たされるときをいう：

① U は V の本質的拡大である。

② U' が U を含む V の本質的拡大ならば、$U' = U$ となる。

命題 3-18

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$V,\ W$：左 A-加群、$V \subset W$ とする。このとき、

W：単射的

$\Longrightarrow\ {}^{\exists}U : V$ の極大な本質的拡大 s.t. $U \subset W$

(proof)

集合 $\mathcal{S} = \{\, U :\ W$ の部分加群 $\mid U$ は V の本質的拡大 $\}$ を考える。

$V \in \mathcal{S}$ なので、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

Zorn の補題により、$\mathcal{S}$ には極大元が存在する。

$\because)$

$\mathfrak{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ を $\mathcal{S}$ 内の任意の鎖とする。$U = \displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$ とおく。$V \subset U \subset W$ が成り立つ。さらに、U は V の本質的拡大である。実際、$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、U は W の部分 A-加群になっている。

$U \supset X$ を部分加群であって、$X \cap V = 0$ を満たしているものとする。

$X \neq 0$ と仮定し、$0 \neq x \in X$ を 1 つとる。このとき、$x \in U_i$ となる $i \in I$ が存在する。

$$Ax \subset U_i \text{ であり、} Ax \cap V \subset X \cap V = 0$$

である。$U_i \in \mathcal{S}$ より $Ax = 0$、特に、$x = 1 \cdot x = 0$ となる。これは矛盾である。故に、$X = 0$ でなければならない。

故に、$U \in \mathcal{S}$ が示された。 □

今、U を $\mathcal{S}$ の 1 つの極大元とする。U が求めるものであることを示す。

M を V の本質的な拡大であって、U を含むものとする。

W は単射的であるから、包含写像 $i : U \longrightarrow W$ はある左 A-加群準同型

$$t : M \longrightarrow W$$

に拡張される (命題 3-15)。M は V の本質的拡大であるので、M は U の本質的拡大でもある。

しかるに、$U \cap \mathrm{Ker}\,t = 0$ ($\because$ 任意の $u \in U$ に対して $t(u) = u$) であるから、$\mathrm{Ker}\,t = 0$ を得る。

よって、t は単射である。これより、

$$M \cong t(M) \subset W$$

は V の本質的拡大であり、$U \subset t(M)$ となる。

U の極大性から $U = t(M)$ を得る。$t(U) = U$ と t の単射性から、$U = M$ を得る。これで、U は極大な本質的拡大であることが示された。 (Q.E.D.)

定義 3-3

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、V を左 A-加群とする。
左 A-加群 U が V の**単射的外皮** (*injective hull*) であるとは、次の 3 条件が成り立つときをいう。

(i) U は V を部分加群として含む。
(ii) U は 単射的である。
(iii) $V \subset U' \subsetneqq U$ を満たす単射的な左 A-加群 U' は存在しない。

注意 $1°$：V が単射的ならば V 自身 V の単射的外皮である。

注意 $2°$：単射的外皮と双対的に射影的被覆という概念がある。左 A-加群 P が V の**射影的被覆** (*projective cover*) であるとは、次の 3 条件が成り立つときをいう。

(i) 全射な左 A-加群準同型 $f : P \longrightarrow V$ が存在する。
(ii) P は 射影的である。
(iii) 任意の部分 A-加群 $W \subsetneqq P$ に対して、$f|_W : W \longrightarrow V$ は全射でない。

単射的外皮は常に存在する (次の定理参照) が、射影的被覆は存在するとは限らない (詳しくは T.Y.Lam・著『A first course in noncommutative rings』(GTM 131)§24 や C.W.Curtis and I.Reiner・共著『Methods of representation theory with applications to finite groups and orders volume 1』p.131 など参照)。

定理 3-19

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
任意の左 A-加群 V に対して、その単射的外皮が存在する。

この定理の証明は最後に廻す。先に、単射的外皮であるための条件の同値な言い換えや単射的外皮の性質を述べる。

補題 3-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
V を含む左 A-加群 U に対して、次の 3 つの条件は同値である。

(i) U は V の極大な本質的拡大である。
(ii) U は V の本質的拡大であって、単射的である。
(iii) U は V の単射的外皮である。

(proof)
(i) $\Longrightarrow$ (ii)：
U が単射的なことを示せばよい。そのためには U は真の本質的拡大を持たないことを示せばよい (命題 3-17)。

U' を U の本質的拡大すると、U' は V の本質的拡大でもある。U の極大性から、$U' = U$ でなければならない。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

U が V の単射的外皮でないと仮定する。$V \subset U' \subsetneqq U$ を満たす単射的な左 A-加群 U' が存在する。

U は単射的であるから

$$^{\exists}U'' : U \text{ の部分加群 } \text{ s.t. } \quad U = U' \oplus U''$$

となる (命題 1-32)。$U'' \neq 0$ であるが、$V \subset U'$ なので、$V \cap U'' = 0$ となる。これは、U が V の本質的拡大であることに反する。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

U は単射的なので

$$^{\exists}U' : V \text{ の極大な本質的拡大 } \text{ s.t. } U' \subset U$$

となる (命題 3-18)。「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」により、U' は単射的である。

したがって、単射的外皮の定義により、$U' = U$ を得る。 (Q.E.D.)

注意：W：単射的、V：W の部分加群 $\Longrightarrow$ V の単射的外皮は W 内に存在する。

(proof)

命題 3-18 により、V の極大な本質的拡大 U が W 内に存在する。

上の命題の (i) と (iii) の同値性により U は V の単射的外皮である。

よって、 V の単射的外皮は W 内に存在する。 □

補題 3-21

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。

左 A-加群の間の任意の同型は、それらの (任意の) 単射的外皮の間の同型に拡張される。

(proof)

$f : V \longrightarrow V'$ を左 A-加群の同型とする。 $V,\ V'$ の単射的外皮 $U,\ U'$ をそれぞれ 1 つずつとる。

合成 $V \xrightarrow{f} V' \hookrightarrow U'$ に命題 3-15 を適用して、

$$^{\exists}g : U \longrightarrow U' \ \text{：左 } A\text{-加群準同型 } \text{ s.t. } \ f(v) = g(v) \ \text{ for } {}^{\forall}v \in V$$

となる。g が全単射であることを示す。

f は同型なので、$\mathrm{Ker}g \cap V = 0$ となる。U は V の本質的な拡大である (補題 3-20) から、$\mathrm{Ker}g = 0$ を得る。よって、g は単射である。

$g(U) \cong U$ より $g(U)$ は単射的である。また、$V' = f(V) \subset g(U)$ であるから、単射的外皮の定義により、$g(U) = U'$ でなければならない。これで、g の全射性も示せた。 (Q.E.D.)

系 3-22

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群 とする。

$U,\ W$：V の単射的外皮

$$\Longrightarrow \quad {}^{\exists}f : U \longrightarrow W \text{：左 } A\text{-加群の同型 \ s.t. } f(v) = v, \ {}^{\forall}v \in V$$

となる。

(proof)

恒等準同型 $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ を考える。上の補題により、id_V は単射的外皮 $U,\ W$ の間の同型に拡張される。すなわち、

$${}^{\exists}f : U \longrightarrow W \text{：左 } A\text{-加群の同型 \ s.t. } f(v) = v \ \text{ for } {}^{\forall}v \in V$$

となる。 (Q.E.D.)

注意： この系により、V の単射的外皮は同型を除いて一意的なことがわかる。しかし、V の２つの単射的外皮 $U,\ W$ が与えられても、系の同型写像 f は一意に決まらない。このことは、V の単射的外皮という概念が圏論的でないことを示唆している。それにもかかわらず、単射的外皮という概念は、A-加群を考える上で、非常に有用である。

記号

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、V を左 A-加群とする。

以下、V の単射的外皮を $I(V)$ という記号で表わす。

しかし、先にも注意したように、単射的外皮 $I(V)$ は同型を法としてしか定まらないことに留意すべきである。

補題 3-23

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群

W：V の部分加群　とする。

V の単射的外皮 $I(V)$ に対して、W の単射的外皮 $I(W)$ をうまくとれば、次が成り立つ。

(1) $I(W)$ は $I(V)$ の直和因子となる。

(2) V が W の本質的拡大ならば、$I(W) = I(V)$ となる。

(proof)

(1) $W \subset V \subset I(V)$ に対し、命題 3-18 から

$${}^{\exists}U \text{：} W \text{ の極大な本質的拡大 \ s.t. } U \subset I(V)$$

となる。補題 3-20 により、U は W の単射的外皮である。

そこで、$I(W) = U$ にとれば、$I(W) \subset I(V)$ となるので、命題 1-32 により、$I(W)$ は $I(V)$ の直和因子である。

(2) V が W の本質的拡大であるとすると、$I(V)$ も W の本質的拡大となる (本質的拡大の定義による)。$I(V)$ は単射的なので、補題 3-20 により、$I(V)$ は W の単射的外皮である。(1) から $I(W) \subset I(V)$ となるように $I(W)$ をとることができるので、$I(W) = I(V)$ を得る。

(Q.E.D.)

命題 3-24

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$V(\neq 0)$：単射的な左 A-加群　とする。

このとき、次の３つは同値である。

(i) V は直既約である。

(ii) $V = I(W)$　for　$0 \neq {}^{\forall}W \subset V$　：submodule

(iii) V の 0 でない２つの部分加群 $V_1,\ V_2$ に対して、$V_1 \cap V_2 \neq 0$

(proof)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：W を 0 でない V の部分加群とする。

補題 3-23(の証明) により、V の単射的外皮 $I(V)$ に対して W の単射的外皮 $I(W)$ をうまくとれば、$I(W) \subset I(V)$ であり、かつ、$I(W)$ は $I(V)$ の直和因子となる。

今、V は単射的と仮定しているから、$I(V) = V$ にとることができる。このとき、$I(W)$ は V の直和因子となる。

$V(\neq 0)$ が直既約であることと $I(W) \neq 0$ より、$V = I(W)$ を得る。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：$V_1,\ V_2$ を V の 0 でない２つの部分加群とする。

仮定により、$V = I(V_1)$ となる。補題 3-20 により、V は V_1 の本質的拡大である。したがって、$V_1 \cap V_2 \neq 0$ でなければならない。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：対偶を示す。

V が直既約でないとすると、

$$^{\exists}V_1,\ V_2\ \text{：}V \text{ の } 0 \text{ でない２つの部分加群 s.t. } V = V_1 \oplus V_2$$

となる。特に、$V_1 \cap V_2 = 0$ である。よって、対偶が示された。 (Q.E.D.)

系 3-25

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$V(\neq 0)$：左 A-加群　とする。このとき、

$I(V)$：直既約 $\Longleftrightarrow$ 0 でない２つの部分加群 $V_1,\ V_2 \subset V$ に対して $V_1 \cap V_2 \neq 0$

(proof)

i. 必要性：命題 3-24 による。

ii. 十分性：命題 3-24 により、$I(V)$ の２つの部分加群 U_1 と U_2 が $U_1 \cap U_2 = 0$ ならば、$U_1 = 0$ または $U_2 = 0$ となることを示せばよい。

V の部分加群 $U_1 \cap V$ と $U_2 \cap V$ は

$$(U_1 \cap V) \cap (U_2 \cap V) = (U_1 \cap U_2) \cap V = 0$$

を満たす。仮定により、$U_1 \cap V = 0$ または $U_2 \cap V = 0$ でなければならない。

$I(V)$ は V の本質的拡大であるから、$U_1 \cap V = 0$ ならば $U_1 = 0$、$U_2 \cap V = 0$ ならば $U_2 = 0$ となる。これで、証明された。 (Q.E.D)

系 3-26

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：既約な左 A-加群
$\Longrightarrow$ $I(V)$：直既約

(proof)

V が既約ならば、V の 0 でない部分加群は V のみである。

したがって、V の 0 でない 2 つの部分加群の共通部分は V であって、0 ではない。系 3-25 により、$I(V)$ は直既約である。 (Q.E.D)

ここで、単射的外皮の概念を用いて得られる 1 つの応用を述べよう。

定理 3-27

(1) A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Noether 代数
$\Longrightarrow$ 任意の単射的な左 A-加群は直既約な部分加群のいくつかの直和である。
(2) A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
$\Longrightarrow$ 任意の単射的な左 A-加群は既約な部分加群の単射的外皮のいくつかの直和である。

注意 1°：単射的な左 A-加群がその部分加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の直和ならば、各 V_i も単射的である (演習 1-56 の証明の下の注意参照)。したがって、(1) の結論の部分は「単射的な左 A-加群は直既約かつ単射的な部分加群のいくつかの直和である」と言い換えることができる。

注意 2°：実は、(1)(2) 共に、逆が成立する (F.Kasch・著『Modules and rings』London Math. Soc. Monograph No.17 p.163 Theorem 6.6.4, p.229 Theorem 9.5.1 あるいは T.Y.Lam・著『Lectures on modules and rings』GTM189 p.82 Thorem 3.48 参照)。したがって、左 Noether 代数や左 Artin 代数は上の命題のように単射的加群の言葉によって特徴づけられる。

定理 3-27(1) を証明するには、次の補題が必要である。

補題 3-28

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Noether 代数
$V(\neq 0)$：単射的左 A-加群
$\Longrightarrow$ ${}^{\exists}U \subset V$：直既約かつ単射的な部分 A-加群

(proof)

$V(\neq 0)$ を単射的左 A-加群とする。

$${}^{\exists}E：V \text{ の } 0 \text{ でない部分左 } A\text{-加群 s.t. } I(E) \subset V \text{ かつ } E：\text{Noether 加群}$$

となる。

$\because$)

$0 \neq x \in V$ をとる。$Ax \subset V$ は有限生成な V の部分加群である。A は左 Noether 代数なので Ax は左 Noether 加群である (補題 1-7)。

V は単射的なので、Ax の単射的外皮は V 内に存在する (補題 3-20 の証明の下の注意参照)。 □

$I(E)$ の中に直既約かつ単射的な部分 A-加群が存在することを示せばよい。そこで、改めて $V = I(E)$ とおく。

左 A-加群 E は Noether 加群なので、E の中には無限個の 0 でない部分加群の直和は含まれない。

$\because$)

> E の 0 でない部分左 A-加群の族 $\mathcal{S}$ が E の中で直和 (すなわち、$\mathcal{S}$ に属する任意の有限個が E 内で直和) であるとする。
>
> $\mathcal{S}$ が無限集合であったとすると、
>
> $$^{\exists}\{W_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$$
>
> となる。このとき、E の部分加群の昇鎖列
>
> $$W_1 \subsetneqq W_1 \oplus W_2 \subsetneqq W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \subsetneqq \cdots\cdots$$
>
> が得られる。これは E が Noether 的であることに反する。 □

$V = I(E)$ は E の本質的拡大である (補題 3-20) から、V の中にも無限個の 0 でない部分加群の直和は含まれない。

$\because$)

> V の部分左 A-加群の族 $\{W_i\}_{i \in I}$ が V の中で直和であるとする。
>
> このとき $\{W_i \cap E\}_{i \in I}$ は E の中で直和である。よって、$W_i \cap E \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個しか存在しない。
>
> $W_i \cap E = 0$ となる $i \in I$ については、V が E の本質的拡大であることから、$W_i = 0$ となる。
>
> よって、$\{W_i\}_{i \in I}$ の中で 0 でないものは $\{W_i \mid i \in I,\ W_i \cap E \neq 0\}$ であり、これは有限集合である。故に、V の中にも無限個の 0 でない部分加群の直和は含まれない。
> □

さて、$V = I(E)$ の中に直既約かつ単射的な部分 A-加群が存在することを示そう。背理法による。すなわち、$V = I(E)$ の中には直既約かつ単射的な部分 A-加群は存在しないと仮定する。すると、V 自身は直既約でないから、$V = V_1' \oplus V_2$ となる $V_1', V_2 \neq 0$ となる V の部分加群 $V_1', V_2 \subset V$ が存在する。V は単射的なので V_2 は単射的である (演習 1-56 の証明の下の注意参照)。仮定により、V_2 は直既約でない。よって、$V_2 = V_2' \oplus V_3$ となる V_2 の 0 でない部分加群 $V_2', V_3 \subset V_2$ が存在する。このとき、$V = V_1' \oplus V_2' \oplus V_3$ となり、V_3 は単射的である。仮定により、V_3 はいずれも直既約でない。以下、同様に考えることにより、V の 0 でない単射的な部分加群の族 $\{V_i'\}_{i=1}^{\infty}$ であって、V の中で直和になっているものの存在を示すことができる。これは、V の中に無限個の 0 でない部分加群の直和は含まれないことに反する。故に、V の中には直既約かつ単射的な部分 A-加群が存在する。 (Q.E.D.)

次の補題は定理 3-27(2) の証明に使われる (命題 3-24「(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)」を参照)。

補題 3-29

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
$V(\neq 0)$：左 A-加群　とする。このとき、

$$V：直既約かつ単射的 \iff {}^{\exists}U \subset V：既約な部分 A\text{-加群} \ \text{s.t.} \quad V = I(U)$$

(proof)
「$\Longleftarrow$」の証明：

既約な部分 A-加群の単射的外皮は直既約である (系 3-26) ことから直ちに従う。

「$\Longrightarrow$」の証明：

V を直既約かつ単射的な左 A-加群とする。

$0 \neq x \in V$ をとり、V の部分加群 Ax を考える。Ax は x で生成されるから A 上有限生成であり、A は左 Artin 代数であるから、左 A-加群 Ax は Artin 加群である。

Artin 加群には既約な部分加群が存在する () ので、その 1 つを U とおく。

このとき、V は単射的かつ直既約なので $V = I(U)$ となる (命題 3-24)。　(Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-27)
(1) $M \neq 0$ を単射的な左 A-加群とする。

$$\mathcal{S} := \{\{M_i\}_{i\in I}：M \text{ の単射的かつ直既約な部分加群からなる族} \mid \{M_i\}_{i\in I} \text{ は } M \text{ の中で直和}\}$$

とおく。$\mathcal{S}$ は包含関係を順序として順序集合になる。

A は左 Noether 代数なので、M 内に直既約な単射的部分加群が存在する (補題 3-28)。よって、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

$\mathfrak{C}$ を $\mathcal{S}$ 内の任意の鎖とする。

$\Lambda := \bigcup_{S\in\mathfrak{C}} S$ は $\mathfrak{C}$ の $\mathcal{S}$ における上界である。

$\because$)

> Λ はその定義から単射的かつ直既約な部分加群からなる族であって、任意の $S \in \mathfrak{C}$ に対して $S \subset \Lambda$ である。
>
> Λ が M の中で直和になっていることを示す。そのためには、直和の定義から、Λ に属する任意の有限個の元 $M_1, \cdots, M_n$ が M 内で直和であることを示せばよい。
>
> 各 M_i に対して $M_i \in S_i$ となる $S_i \in \mathfrak{C}$ が存在する。$\mathfrak{C}$ は鎖であるから、$S_1, \cdots, S_n$ の中に包含関係に関して最大なものがある。それを S_0 とおくと、
>
> $$M_1, \cdots, M_n \in S_0$$
>
> となる。$S_0 \in \mathcal{S}$ であるから、$M_1, \cdots, M_n$ は M 内で直和である。
>
> 故に、Λ は M の中で直和である。よって、$\Lambda \in \mathcal{S}$ が示された。　□

Zorn の補題によって、$\mathcal{S}$ 内に極大元が存在する。極大元の 1 つを $\{M_i\}_{i\in I}$ とする。

A は左 Noether 代数であり、M_i $(i \in I)$ は単射的であるから、$\bigoplus_{i\in I} M_i$ は単射的である (命題 3-16)。

したがって、$\bigoplus_{i \in I} M_i \subset M$ は M の直和因子である (命題 1-32)。そこで

$$M = E \oplus (\bigoplus_{i \in I} M_i) \qquad (E：M \text{ の部分加群})$$

とおく。$E = 0$ となることを示す。

M は単射的であるから、その直和因子である E も単射的である。

もし、$E \neq 0$ であったと仮定すると、補題 3-28 より、

$$^{\exists}U \subset E：\text{直既約な単射的部分加群}$$

となる。すると、$\{M_i \mid i \in I\} \cup \{U\}$ は $\{M_i \mid i \in I\}$ を真に含む $\mathcal{S}$ の元となる。これは $\{M_i \mid i \in I\}$ の $\mathcal{S}$ における極大性に反する。故に、$E = 0$ であって、

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

を得る。

(2) 左 Artin 代数は左 Noether 代数である (演習 2-14) から、(1) によって、任意の単射的な左 A-加群 $M(\neq 0)$ は直既約な単射的部分加群の族 $\{M_i\}_{i \in I}$ の直和である：$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ 。

A は左 Artin 代数であって、各 M_i は直既約かつ単射的であるから、補題 3-29 により、

$$M_i = I(U_i) \qquad (U_i：M \text{ の既約な部分加群})$$

となる。故に、M は既約な部分加群の単射的外皮の直和である。 (Q.E.D.)

いよいよ、定理 3-19 の証明 (の準備) にとりかかろう。定理 3-19 の証明には次の定理を用いる。

定理 3-30

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

任意の左 A-加群はある単射的な左 A-加群の中に埋め込むことができる。

この定理を示すため、可除な加群という概念を導入する。

定義 3-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群 とする。

V : **可除** (*divisable*) $\iff$ 右零因子でない任意の $a \in A$ に対して $V = aV$

注意 1°： $a \in A$ が**右零因子でない**とは、$a \neq 0$ であって、$ba = 0,\ b \in A$ ならば $b = 0$ を満たすときをいう (演習 1-61 参照)。

注意 2°： $\mathbb{Z}$-加群に対しても、同様にして可除という概念が定義される。

例題 3-31

有理数全体の作る $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Q}$ は可除である。さらに、$\mathbb{Q}$ の任意個の直和およびそのような加群の $\mathbb{Z}$-加群準同型による像もまた可除である。

(proof)

$\mathbb{Q}$ が可除な $\mathbb{Z}$-加群であることはすぐにわかる。

$\mathbb{Q}$ の任意個の直和 $V = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}$ が可除になること示す。

$0 \neq m \in \mathbb{Z}$ とする。

V の任意の元 $(r_i)_{i \in I}$ をとる。$r_i \neq 0$ となる $i \in I$ は有限個であるから、そのような i について分母を通分することにより、

$$^{\exists}q \in \mathbb{Z} \ \ \text{s.t.} \ \ ^{\forall}i \in I, \ r_i = \frac{p_i}{q} \ \ \text{for some } p_i \in \mathbb{Z}$$

となる。

$$(r_i)_{i \in I} = m\left(\frac{p_i}{mq}\right)_{i \in I} \quad \in \ mV$$

より、$V = mV$ が得られる。よって、V は可除な $\mathbb{Z}$-加群である。

次に、U を $\mathbb{Z}$-加群とし、全射な $\mathbb{Z}$-加群準同型 $f : V \longrightarrow U$ が存在するとする。このとき、U も可除になることを示す。

$^{\forall}u \in U$ とすると、$f(v) = u$ となる $v \in V$ が存在する。

$V = mV$ より、$v = mv', \ v' \in V$ と書ける。

$$\therefore \ u = f(v) = mf(v')$$

$$\therefore \ U = mU$$

よって、U も可除である。 (Q.E.D.)

補題 3-32

任意の $\mathbb{Z}$-加群はある可除な $\mathbb{Z}$-加群の中に埋め込むことができる。

(proof)

V を任意の $\mathbb{Z}$-加群とし、$\{x_i\}_{i \in I}$ をその生成元とする。

$\{y_i\}_{i \in I}$ を $\mathbb{Z}$ 上の基とする自由 $\mathbb{Z}$-加群 F を考え、$\phi : F \longrightarrow V$ を $\phi(y_i) = x_i \ \ (i \in I)$ によって定まる $\mathbb{Z}$-加群準同型とする。

F は $\mathbb{Z}$-加群 $\widetilde{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}y_i$ の部分加群であるから、$\mathrm{Ker}\phi$ は $\widetilde{F}$ の部分加群であり、包含準同型 $i : F \hookrightarrow \widetilde{F}$ は単射な $\mathbb{Z}$-加群準同型

$$V \cong F/\mathrm{Ker}\phi \xrightarrow{\ \bar{i}\ } \widetilde{F}/\mathrm{Ker}\phi$$

を誘導する。例 3-31 により、$\widetilde{F}/\mathrm{Ker}\phi$ は可除であるから、補題は証明された。 (Q.E.D.)

補題 3-33

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群　とする。このとき、次が成り立つ。

(1) V：単射的 $\Longrightarrow V$：可除

(2) A が左主イデアル域 (*i.e.* すべてのイデアルが単項であるような、零因子を持たない代数) のとき、

$$V\text{：単射的} \iff V\text{：可除}$$

(proof)

(1) V は単射的であると仮定する。

$v \in V$ とし、$a \in A$ は零因子でないとする。

写像 $f : Aa \longrightarrow V$ を $f(ba) = bv,\ \ b \in A$ によって定義することができる。

実際、f が矛盾なく定義されていることは

$$ba = ca \quad \Longrightarrow \quad (b-c)a = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ a\text{ は右零因子でない}}}{\Longrightarrow} b - c = 0 \Longrightarrow \quad b = c$$

となることからわかる。

f は定義の仕方から左 A-加群準同型であるから、命題 3-15 により、左 A-加群準同型 $\widetilde{f} : A \longrightarrow V$ に拡張される。したがって、

$$v = f(a) = \widetilde{f}(a) = a\widetilde{f}(1) \ \in \ aV$$

すなわち、$V = aV$ となる。

(2) A を左主イデアル域とする。

可除な左 A-加群 V が単射的になることを示せばよい。そのために、命題 3-15(iii) の条件が成り立つことを示す。

I を A の左イデアルとし、$f \in \mathrm{Hom}_A(I, V)$ とする。

$I \neq 0$ の場合に証明すれば十分である。

さて、A は左主イデアル域であるから、

$$I = Ab \qquad\qquad (b \in A)$$

と書き表わすことができる。$I \neq 0$ より $b \neq 0$ に注意する。V は可除であるから、

$${}^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.} \ \ f(b) = bv$$

となる。写像

$$\widetilde{f} : A \longrightarrow V$$

を

$$\widetilde{f}(a) = av \qquad\qquad (a \in A)$$

により定義する。$\widetilde{f}$ は左 A-加群準同型である。任意の $a \in A$ に対して

$$\widetilde{f}(ab) = (ab) \cdot v = af(b) = f(ab)$$

となるので、

$$\widetilde{f}|_I = f$$

が示された。よって、V は単射的である。 (Q.E.D.)

次の命題が定理 3-30 を証明する際の鍵である。

命題 3-34

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
D：可除な $\mathbb{Z}$-加群
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$: 単射的な左 A-加群

(proof)

まず、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ は次の和とスカラー倍に関して $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間になることに注意する。

$$\begin{cases}(\varphi+\varphi')(a)=\varphi(a)+\varphi'(a) \\ (\alpha\cdot\varphi)(a)=\varphi(\alpha a)\end{cases} \qquad (a\in A,\ \alpha\in\boldsymbol{k},\ \varphi,\varphi'\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D))$$

次に、このベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ への A の左作用を

$$(a\cdot\varphi)(b)=\varphi(ba) \qquad (a,\ b\in A,\quad \varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D))$$

により定義する。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ は左 A-加群になる。

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ が単射的であることを示す。

M を左 A-加群とし、$\widetilde{M}$ を M を部分加群として含む左 A-加群とする。

$f: M\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ を左 A-加群準同型とする。f の定義域を $\widetilde{M}$ 上に拡張できることを示せばよい。

写像

$$g: M\longrightarrow D$$

を

$$g(m)=(f(m))(1) \qquad (m\in M)$$

によって定義する。g は $\mathbb{Z}$-加群準同型である。D は単射的であるから、命題 3-15(ii) より

$$^{\exists}\widetilde{g}:\widetilde{M}\longrightarrow D\ \text{：左 }\mathbb{Z}\text{-加群準同型}\ \text{ s.t. }\quad \widetilde{g}|_M=g$$

となる。そこで、

$$\widetilde{f}:\widetilde{M}\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$$

を

$$(\widetilde{f}(\tilde{m}))(a)=\widetilde{g}(a\cdot\tilde{m}) \qquad (a\in A,\quad \tilde{m}\in\widetilde{M})$$

によって定義する。$\widetilde{f}$ は左 A-加群準同型である。

$\because$)

$$\widetilde{f}(\tilde{m}_1+\tilde{m}_2)=\widetilde{f}(\tilde{m}_1)+\widetilde{f}(\tilde{m}_2) \qquad (\tilde{m}_1,\tilde{m}_2\in\widetilde{M})$$

となることはすぐにわかる。$\tilde{m}\in\widetilde{M},\ b\in A$ とする。任意の $a\in A$ に対して

$$(\widetilde{f}(b\cdot\tilde{m}))(a)=\widetilde{g}(a\cdot(b\cdot\tilde{m}))=\widetilde{g}((ab)\cdot\tilde{m})=(\widetilde{f}(\tilde{m}))(ab)=(b\cdot\widetilde{f}(\tilde{m}))(a)$$

となるので、

$$\widetilde{f}(b\cdot\tilde{m})=b\cdot\widetilde{f}(\tilde{m})$$

を得る。

さらに、任意の $m \in M$ と任意の $a \in A$ に対して、

$$(\widetilde{f}(m))(a) = \widetilde{g}(a \cdot m) = g(a \cdot m) = (f(a \cdot m))(1) = (a \cdot f(m))(1) = (f(m))(1 \cdot a) = (f(m))(a)$$

となる。故に、$\widetilde{f}|_M = f$ となることがわかった。 (Q.E.D.)

これで、定理 3-30 を証明するための準備が整った。

(proof of Theorem 3-30)

V を左 A-加群とする。V は自然に左 $\mathbb{Z}$-加群と思える。補題 3-32 により

$$^{\exists}D：可除な\ \mathbb{Z}\text{-加群},\quad {}^{\exists}f : V \longrightarrow D\ :\ 単射な\ \mathbb{Z}\text{-加群準同型}$$

となる。命題 3-34 から、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ は単射的な左 A-加群になる。

写像 $g : V \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ を

$$(g(v))(a) = f(a \cdot v) \qquad (v \in V,\ a \in A)$$

により定義する。g は左 A-加群準同型である。さらに、

$$\begin{aligned} g(v) = 0 &\Longrightarrow\ f(a \cdot v) = 0\ \ \text{for } {}^{\forall}a \in A \\ &\Longrightarrow\ f(v) = 0 \\ &\Longrightarrow\ v = 0 \qquad (\because\ f\ \text{は単射}) \end{aligned}$$

となるので g は単射である。 (Q.E.D.)

定理 3-30 を用いて定理 3-19 を証明する。

(proof of Theorem 3-19)

任意の左 A-加群 V に対して、V を含む単射的な左 A-加群 W が存在する (定理 3-30) ので、V の本質的拡大 U が W の中にとれる (命題 3-18)。

補題 3-20 により、U は V の単射的外皮である。これで、単射的外皮の存在が証明された。
(Q.E.D.)

演習 3-9

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
$\{V_i\}_{i \in I}$ を左 A-加群の族とし、各 $i \in I$ に対し、W_i を V_i の本質的拡大とする。このとき、$\bigoplus_{i \in I} W_i$ は $\bigoplus_{i \in I} V_i$ の本質的拡大であることを示せ。

解；

$V = \bigoplus_{i \in I} V_i,\ W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ とおく。

$0 \neq w \in W$ に対し、$aw \neq 0$ かつ $aw \in V$ となる $a \in A$ が存在することを示せばよい。

$w = (w_i)_{i \in I}$ とおき、$w_i \neq 0$ となる $i \in I$ を $i_1, \cdots, i_k$ とおく。

k に関する数学的帰納法で証明する。

1° $k = 1$ のとき： W_{i_1} は V_{i_1} の本質的拡大であるから、$w_{i_1} \neq 0$ より

$$(Aw_{i_1}) \cap V_{i_1} \neq 0$$

すなわち、

$$^\exists\ a \in A \ \text{ s.t. } \ 0 \neq aw_{i_1} \in V_{i_1}$$

となる。このとき、$aw \in V$ かつ $aw \neq 0$ となる。よって、$k = 1$ の場合には示された。

2° $k > 1$ とし、$k - 1$ のときに成り立つと仮定する。

$$w' = w_{i_1} + \cdots + w_{i_{k-1}} \in W$$

とおく。

$aw_{i_k} = 0$ ならば、$aw = aw'$ となり、証明がおわる。

$aw_{i_k} \neq 0$ のとき、W_{i_k} は V_{i_k} の本質的拡大であるから、

$$^\exists\ b \in A \ \text{ s.t. } \ 0 \neq b(aw_{i_k}) \in V_{i_k}$$

となる。このとき、

$$baw = baw' + baw_{i_k} \in V, \qquad baw \neq 0$$

となる (baw' の V_{i_k}-成分は 0 なので、(baw の V_{i_k}-成分)$= baw_{i_k} \neq 0$ となり、$baw \neq 0$ を得る)。これで、帰納法が完成した。 (Q.E.D.)

演習 3-10

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
$V_1, \cdots, V_n$ を左 A-加群とするとき、$I(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)$ が成り立つことを示せ。

解；

補題 3-20 から、各 $I(V_i)$ は V_i の本質的拡大である。

したがって、(1) により、$\bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)$ は $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ の本質的拡大である。

各 $I(V_i)$ は単射的であるから、演習 1-56(2) により、$\bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)$ は単射的である。

再び補題 3-20 から、$\bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)$ は $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ の単射的外皮である。 (Q.E.D.)

演習 3-11

$\boldsymbol{k}$ を体とする。Baer の基準を用いて、0 でない多項式 $f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ に対して、商代数 $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ の左正則加群は単射的であることを示せ。

解；

$\pi : \boldsymbol{k}[X] \longrightarrow \boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ を自然な射影とする。

I を $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ の (左) イデアルとする。$\pi^{-1}(I)$ は $\boldsymbol{k}[X]$ の (左) イデアルである。$\boldsymbol{k}[X]$ は単項イデアル整域なので、

$$\pi^{-1}(I) = (g(X)), \qquad g(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

と書くことがきできる。$(f(X)) = \pi^{-1}(0) \subset \pi^{-1}(I) = (g(X))$ なので、

$$f(X) = h(X)g(X), \qquad h(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

と書くことができる。

$\varphi : I \longrightarrow \boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ を左 $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$-加群準同型とする。

$\boldsymbol{k}[X]$ の元 $p(X)$ に対して、$\pi(p(X))$ を $\overline{p(X)}$ と書くことにする。

$$\varphi(\overline{g(X)}) = \overline{a(X)}, \qquad a(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

とおく。このとき、

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\overline{f(X)}) = \varphi(\overline{h(X)} \cdot \overline{g(X)}) = \overline{h(X)} \cdot \varphi(\overline{g(X)}) = \overline{h(X)} \cdot \overline{a(X)} = \overline{h(X)a(X)}$$

を得る。故に、

$$h(X)a(X) = b(X)f(X) \qquad \text{for some } b(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

となる。よって、

$$h(X)a(X) = b(X)f(X) = b(X)h(X)g(X)$$

を得る。$h(X) \neq 0$ であり ($\because 0 \neq f(X) = h(X)g(X)$)、$\boldsymbol{k}[X]$ は整域であるから、上式は

$$a(X) = b(X)g(X)$$

と同値である。そこで、$\tilde{\varphi} : \boldsymbol{k}[X]/(f(X)) \longrightarrow \boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ を

$$\tilde{\varphi}(\overline{1}) = \overline{b(X)}$$

となる左 $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$-加群準同型とすると $\tilde{\varphi}|_I = \varphi$ が成り立つことがわかる。

$\because$)

(左) イデアル I は $\overline{g(X)}$ によって生成されていて、

$$\tilde{\varphi}(\overline{g(X)}) = \tilde{\varphi}(\overline{g(X)} \cdot \overline{1}) = \overline{g(X)} \cdot \tilde{\varphi}(\overline{1}) = \overline{g(X)} \cdot \overline{b(X)} = \overline{g(X)b(X)} = \overline{a(X)} = \varphi(\overline{g(X)})$$

となることから、$\tilde{\varphi}|_I = \varphi$ となることがわかる。 □

Baer の基準 (命題 3-15) から代数 $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ の左正則加群は単射的である。 (Q.E.D.)

注意 1°：$\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ は実はフロベニウス代数である (T.Y.Lam・著『Lectures on rings and modules』p.67–p.68)。

注意 2°：$\boldsymbol{k}[X]$ の左正則加群は単射的でない。

(proof)

$X \in \boldsymbol{k}[X]$ は右零因子でなく、しかも $\boldsymbol{k}[X] \neq X\boldsymbol{k}[X]$ を満たす。$\boldsymbol{k}[X]$ は左主イデアル域であるから、補題 3-33 により、左正則加群は単射的でない。□

演習 3-12

$\boldsymbol{k}$ を体とする。商代数

$$\boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1}, X^nY, X^{n-1}Y^2, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

の左正則加群は単射的でないことを示せ。

解；

$A := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1}, X^nY, X^{n-1}Y^2, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$ とおく。

自然な射影 $\pi : \boldsymbol{k}[X,Y] \longrightarrow A$ による $f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の像 $\pi(f)$ を $\bar{f}$ によって表わすことにする。$\varphi : A\bar{X}^n \longrightarrow {}_AA$ を $\varphi(\bar{X}^n) = \bar{Y}^n$ となる左 A-加群準同型とする。この写像は ${}_AA$ からの左 A-加群準同型には拡張することができない。

$\because$)

まず、$\varphi : A\bar{X}^n \longrightarrow {}_AA$ が矛盾なく定義されていることを確かめておく。

$A\bar{X}^n$ の任意の元は $\overline{f(X,Y)X^n}$, $f(X,Y) \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の形に書くことができる。

$\overline{f(X,Y)X^n} = \overline{g(X,Y)X^n}$, $f(X,Y), g(X,Y) \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ であるとする。

$$(f(X,Y) - g(X,Y))X^n \in (X^{n+1}, X^nY, X^{n-1}Y^2, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

なので、

$$(f(X,Y) - g(X,Y))X^n = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq n+1}} a_{ij}X^iY^j \qquad (a_{ij} \in \boldsymbol{k})$$

となる。X の次数を比較して $i \leq n-1$ に対して $a_{ij} = 0$ でなければならないことがわかるから

$$(f(X,Y) - g(X,Y))X^n = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} a_{i+n,j}X^{i+n}Y^j$$

となる。よって、

$$f(X,Y) - g(X,Y) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} a_{i+n,j}X^iY^j$$

と書き表わすことができる。すると、

$$(f(X,Y) - g(X,Y))Y^n = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} a_{i+n,j}X^iY^{j+n} \in (X^{n+1}, X^nY, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

となるから、$\overline{f(X,Y)Y^n} = \overline{g(X,Y)Y^n}$ を得る。故に、

$$\varphi(\overline{f(X,Y)X^n}) = \overline{f(X,Y)Y^n}, \qquad f(X,Y) \in \boldsymbol{k}[X,Y]$$

によって写像 $\varphi : A\bar{X}^n \longrightarrow {}_AA$ が矛盾なく定義される。この写像が左 A-加群準同型となることは簡単に確かめることができる。

次に、φ が ${}_AA$ からの左 A-加群準同型に拡張することができないことを示す。仮に、左 A-加群準同型 $\tilde{\varphi} : {}_AA \longrightarrow {}_AA$ であって、$\tilde{\varphi}|_{A\bar{X}^n} = \varphi$ となるものが存在したとする。このとき、

$$\bar{Y}^n = \varphi(\bar{X}^n) = \tilde{\varphi}(\bar{X}^n) = \tilde{\varphi}(\bar{X}^n \cdot \bar{1}) = \bar{X}^n \cdot \tilde{\varphi}(\bar{1}) \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

$$\tilde{\varphi}(\bar{1}) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j \qquad (a_{ij} \in \boldsymbol{k})$$

とおくと、$(*)$ から

$$\bar{Y}^n = \bar{X}^n \cdot (\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j) = a_{00}\bar{X}^n$$

を得る。これは $Y^n - a_{00}X^n \in (X^{n+1}, X^nY, X^{n-1}Y^2, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$ となることを意味するが、多項式の次数などを考えてみればそのようなことは起こり得ないことがわかる。故に、φ は ${}_AA$ からの左 A-加群準同型に拡張することができない。 $\square$

したがって、Baer の基準 (命題 3-15) により、${}_AA$ は単射的でない。 (Q.E.D.)

演習 3-13

$\boldsymbol{k}$ を体とする。商代数

$$A := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1}, X^nY, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

について考える。

(1) $M := \left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{k}[X,Y]X^iY^{n-i}\right)/(X^{n+1}, Y^{n+1})$ は左 A-加群になることを示せ。

(2) $E = \boldsymbol{k}x^ny^n$ は M の既約な部分 A-加群であって、M は E の本質的な拡大になっていることを示せ。ここで、自然な射影 $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{k}[X,Y]X^iY^{n-i} \longrightarrow M$ による $X,\ Y$ の像をそれぞれ $x,\ y$ とおいた。

(3) 左 A-加群として $M \cong A_A^*$ となることを示せ。したがって、左 A-加群 M は単射的である。

注意：(2)(3) から M は E の単射的外皮であることがわかる。

解；

(1) M は左正則 $\boldsymbol{k}[X,Y]$-加群の商として、左 $\boldsymbol{k}[X,Y]$-加群になる。これが、左 A-加群の構造を持つことを示すには、

$$X^{n+1-k}Y^k \cdot M = 0 \qquad \text{for all} \quad k = 0, 1, \cdots, n, n+1$$

となることを示せばよい。

自然な射影 $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{k}[X,Y]X^iY^{n-i} \longrightarrow M$ による $X,\ Y$ の像をそれぞれ $x,\ y$ とおく。このとき、M の元は

$$x^iy^j \qquad (0 \leq j \leq n,\ n-j \leq i \leq n)$$

によって $\boldsymbol{k}$ 上張られるベクトル空間である。今、$k = 0, 1, \cdots, n, n+1$ および $0 \leq j \leq n,\ n-j \leq i \leq n$ を満たす i, j について

$$X^{n+1-k}Y^k \cdot x^iy^j = x^{n+1-k+i}y^{k+j}$$

となるが、

・$k \leq i$ ならば $x^{n+1-k+i}y^{k+j} = x^{n+1}(x^{i-k}y^{k+j}) = 0$ となり、

・$k > i$ ならば $k+j > i+(n-i) = n$ となるので $x^{n+1-k+i}y^{k+j} = (x^{n+1-k+i}y^{k+j-n-1})y^{n+1} = 0$ となる。

こうして、任意の $k = 0, 1, \cdots, n, n+1$ に対して $X^{n+1-k}Y^k \cdot M = 0$ となることが示されたので、M は左 A-加群になる。

(2) $X\cdot E=0\subset E$, $Y\cdot E=0\subset E$ なので E は M の部分左 A-加群である。また、$\dim E=1$ なので、既約である。

以下、M が E の本質的拡大であることを示す。

自然な射影 $\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{k}[X,Y]X^iY^{n-i}\longrightarrow M$ による X, Y の像をそれぞれ x, y とおく。このとき、

$$x^iy^j \qquad (0\leq j\leq n,\ n-j\leq i\leq n)$$

は M の $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての基底になる。

$\because$)

$\{x^iy^j\}_{\substack{0\leq j\leq n\\ n-j\leq i\leq n}}$ が M の生成系であることは M の定義からすぐにわかる。一次独立系であることを示す。

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j}^{n}c_{ij}x^iy^j=0 \qquad (c_{ij}\in\boldsymbol{k})$$

とおく。すると、

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j}^{n}c_{ij}X^iY^j\in(X^{n+1},\ Y^{n+1})$$

を得る。よって、

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j}^{n}c_{ij}X^iY^j=\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}d_{ij}X^iY^j+\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}d_{ij}X^iY^j$$

(但し、$d_{ij}\in\boldsymbol{k}$) と書き表わされなければならない。係数を比較して

$$c_{ij}=0 \qquad \text{for}\ \ 0\leq j\leq n,\ n-j\leq i\leq n$$

を得る。よって、$\{x^iy^j\}_{\substack{0\leq j\leq n\\ n-j\leq i\leq n}}$ は M の一次独立系である。 □

これより、任意の $m\in M$ は

$$m=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n-j}^{n}c_{ij}x^iy^j \qquad (c_{ij}\in\boldsymbol{k})$$

のように一意的に書き表わすことができる。$m\neq 0$ に対して、

$$\text{m-deg}_y m:=\min\{j\ \in\{0,1,\cdots,n\}\mid c_{ij}\neq 0\}$$

と定める。

さて、N を M の部分加群であって、$N\cap E=0$ を満たすものとする。

$N\neq 0$ であると仮定し、$0\neq m\in N$ を m-deg$_y$ が最小となるような N の元とする。m-deg$_y m=k$ とおくと

$$m=\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=n-j}^{n}c_{ij}x^iy^j \qquad (\text{但し、}c_{nk},c_{n-1,k}\cdots,c_{n-k,k}\ \text{の中に}\ 0\ \text{でないものが存在})$$

と書くことができる。$y^{n+1}=0$ であるから、

$$y^{n-k}m=\sum_{i=n-k}^{n}c_{ik}x^iy^n$$

となる。N は部分加群ゆえ、$y^{n-k}m \in N$ に注意する。さらに、$x^{n+1}=0$ であるから

$$x^k y^{n-k} m = c_{n-k,k} x^n y^n \quad \in \quad N \cap E$$

となる。仮定により $N \cap E = 0$ であるから、$c_{n-k,k}=0$ を得る。故に、

$$y^{n-k}m = \sum_{i=n-k+1}^{n} c_{ik} x^i y^n$$

となる。今度は x^{k-1} を掛けて

$$x^{k-1} y^{n-k} m = c_{n-k+1,k} x^n y^n \quad \in \quad N \cap E$$

を得る。したがって、$c_{n-k+1,k}=0$ を得る。以下、同様の考察を行うことにより、

$$c_{n-k,k} = c_{n-k+1,k} = c_{n-k+2,k} = \cdots = c_{n,k} = 0$$

を得る。これは k の取り方に矛盾している。故に、$N=0$ でなければならない。

(3) 自然な射影 $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{k}[X,Y]X^iY^{n-i} \longrightarrow M$ による $f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の像を $[f]$ によって表わすことにする。また、自然な射影 $\boldsymbol{k}[X,Y] \longrightarrow A$ による各 $g \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ の像を $\bar{g}$ によって表わすことにする。このとき、$\varphi : M \longrightarrow A^*_A$ を

$$\varphi([f])(\bar{g}) := ([fg] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) \qquad\qquad (f,\ g \in \boldsymbol{k}[X,Y])$$

によって定義する。φ は左 A-加群準同型である。

$\because$)

(1) により、

$$A \times M \longrightarrow M, \qquad (\bar{g},\ [f]) \longmapsto [fg], \qquad f, g \in \boldsymbol{k}[X,Y]$$

は矛盾なく定義されている。また、先程示したように、M の任意の元は

$$x^i y^j \qquad (0 \leq j \leq n,\ n-j \leq i \leq n)$$

の $\boldsymbol{k}$ 上の一次結合として一意的に書き表わされる。故に、φ は矛盾なく定義されている。

・$[f] \in M$ に対して $\varphi([f]) \in A^*$ であること：

任意の $f, g_1, g_2 \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ に対して

$$[f(g_1+g_2)] = [fg_1 + fg_2] = [fg_1] + [fg_2]$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\varphi([f])(\bar{g}_1 + \bar{g}_2) &= \varphi([f])(\overline{g_1+g_2}) \\
&= [f(g_1+g_2)] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\
&= ([fg_1] + [fg_2]) \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\
&= ([fg_1] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) + ([fg_2] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) \\
&= \varphi([f])(\bar{g}_1) + \varphi([f])(\bar{g}_2)
\end{aligned}$$

を得る。また、任意の $c \in \boldsymbol{k}$ および任意の $f, g \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ に対して

$$[f(cg)] = c[fg]$$

となるから、

$$\begin{aligned}\varphi([f])(c\bar{g}) &= \varphi([f])(\overline{cg}) \\ &= [f(cg)] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= c[fg] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= c([fg] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) \\ &= c\varphi([f])(\bar{g})\end{aligned}$$

を得る。故に、$\varphi([f])$ は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像である。

・φ が $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像であること：

任意の $f_1, f_2, g \in \boldsymbol{k}[X, Y]$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi([f_1]+[f_2])(\bar{g}) &= \varphi([f_1+f_2])(\bar{g}) \\ &= [(f_1+f_2)g] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= ([f_1 g]+[f_2 g]) \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= ([f_1 g] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数})+([f_2 g] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) \\ &= \varphi([f_1])(\bar{g})+\varphi([f_2])(\bar{g}) \\ &= (\varphi([f_1])+\varphi([f_2]))(\bar{g})\end{aligned}$$

を得る。また、任意の $c \in \boldsymbol{k}$ および任意の $f, g \in \boldsymbol{k}[X, Y]$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(c[f])(\bar{g}) &= \varphi([cf])(\bar{g}) \\ &= [(cf)g] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= c[fg] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= c([fg] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数}) \\ &= c\varphi([f])(\bar{g}) \\ &= (c\varphi([f]))(\bar{g})\end{aligned}$$

を得る。故に、φ は $\boldsymbol{k}$ 上の線形写像である。

・φ が左 A-加群準同型であること：

$a \in A,\ f, g \in \boldsymbol{k}[X, Y]$ を任意にとる。$a = \bar{h}\ \ (h \in \boldsymbol{k}[X, Y])$ とおくと、

$$\begin{aligned}(a \cdot \varphi([f]))(\bar{g}) &= \varphi([f])(\bar{g} \cdot a) \\ &= \varphi([f])(\overline{gh}) \\ &= [f(gh)] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= [(hf)g] \text{ における } x^n y^n \text{ の係数} \\ &= \varphi([hf])(\bar{g}) \\ &= \varphi(a \cdot [f])(\bar{g})\end{aligned}$$

を得る。故に、φ は左 A-加群準同型である。 □

$$\dim(A^*_A) = \dim A = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dim M$$

なので、φ が同型であることを示すには、それが単射であることを示せばよい。

$f \in \boldsymbol{k}[X,Y]$ が $\varphi([f])=0$ を満たすとする。このとき、

$$(A[f]) \cap E = 0$$

となる。(2) から、$A[f]=0$ を得る。よって、$[f]=0$ である。これで、φ によって

$$M \cong A_A^* \qquad \text{as left } A\text{-modules}$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

演習 3-14

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
V：単射的かつ直既約 $\Longrightarrow$ $\mathrm{End}_A V$：局所的
となることを示せ。

注意：この問題は V が単射的なときは、V に Artin 性と Noether 性を仮定しなくても、定理 3-3 と同様の結果が成り立つことを主張している。したがって、単射的な左 A-加群に対して

$$V：直既約 \iff V：強直既約$$

が成り立つ。さらに、次のことも成り立つ。

もし、左 A-加群 V が単射的で

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

のように直既約な部分 A-加群の直和に２通りに分解されたとするならば、$m=n$ かつ適当な番号をつけかえののちに $V_i \cong U_i \ \ (i=1,\cdots,n)$ が成り立つ (Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理の注意 4°)。

演習 3-14 の解；

V を単射的かつ直既約な左 A-加群とする。$\mathrm{End}_A V$ が局所的なことを示すには

「$f, g \in \mathrm{End}_A V$：可逆でない $\Longrightarrow$ $f+g$：可逆でない」

となることを示せばよい (命題 3-1)。

・f が単射な場合：$f(V) \cong V$ となるので、$f(V)$ は単射的である。したがって、$f(V)$ は $f(V)$ を含む任意の左 A-加群の直和因子になる (命題 1-32)。$f(V) \subset V$ であるから、

$$V = f(V) \oplus W \qquad \text{for some submodule } W \subset V$$

となる。V は直既約であるから、$f(V)=0$ または $W=0$ でなければならない。しかるに、f は可逆でないので、$f(V)=0$ であることがわかる。故に、$f=0$ となる。したがって、$f+g=g$ も可逆でない。

・g が単射な場合：上と同様にして $g=0$ となることがわかるので、$f+g=f$ は可逆でない。

・$f,\ g$ が単射でない場合：$\mathrm{Ker} f \neq 0$ かつ $\mathrm{Ker} g \neq 0$ となる。

左 A-加群 V は単射的な直既約であるから、命題 3-24 により、0 でない 2 つの部分加群の共通部分は 0 でない。したがって、

$$\mathrm{Ker}(f+g) \supset \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g \neq 0$$

となる。故に、$f+g$ も単射でない。よって、$f+g$ は可逆でない。 (Q.E.D.)

演習 3-15

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
P：両側 (A,B)-加群、右 B-加群として平坦　とする。
左 A-加群 V に対して、

$$\tilde{V} := \mathrm{Hom}_A(P,V)$$

とおく。$\tilde{V}$ は、B の次の作用に関して、左 A-加群になる (演習 1-10(1) 参照)。

$$(b\cdot f)(p) = f(p\cdot b) \qquad (f\in\tilde{V},\ b\in B,\ p\in P)$$

$$V：単射的な左\ A\text{-加群} \implies \tilde{V}：単射的な左\ B\text{-加群}$$

となることを示せ。

解；

$f : M \longrightarrow N$ を単射な左 A-加群準同型とする。

$W = M, N$ とおくと、ベクトル空間としての自然な同型

$$\phi_W : \mathrm{Hom}_B(W,\tilde{V}) = \mathrm{Hom}_B(W,\mathrm{Hom}_A(P,V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B W, V)$$

が存在する (演習 1-13(2))。自然性により、図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_B(N,\tilde{V}) & \xrightarrow{\phi_N} & \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B N, V) \\
{\scriptstyle f^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_P\otimes_B f)^*} \\
\mathrm{Hom}_B(M,\tilde{V}) & \xrightarrow{\phi_M} & \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B M, V)
\end{array}$$

は可換である。ここで、$f^* : \mathrm{Hom}_B(N,\tilde{V}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M,\tilde{V})$ は $f^*(\alpha) = \alpha\circ f,\ \alpha \in \mathrm{Hom}_B(N,\tilde{V})$ によって定義される線形写像であり、$(\mathrm{id}_P\otimes_B f)^* : \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B M, V)$ は $(\mathrm{id}_P\otimes_B f)^*(\beta) = \beta\circ(\mathrm{id}_P\otimes_B f),\ \beta\in\mathrm{Hom}_A(P\otimes_B N,V)$ によって定義される線形写像である。

P は右 B-加群として平坦であるので、$\mathrm{id}_P\otimes_B f : P\otimes_B M \longrightarrow P\otimes_B N$ は単射である。

さらに、V は単射的な左 A-加群であるから、$(\mathrm{id}_P\otimes_B f)^* : \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P\otimes_B M, V)$ は全射である。したがって、上の可換図式により、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N,\tilde{V}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\tilde{V})$ も全射である。こうして、$\tilde{V}$ が単射的な左 B-加群であることが示された。

(Q.E.D.)

注意 1°：上の演習問題は**単射性産出補題 (Injective Producing Lemma)** と呼ばれる。

注意 2°：上の演習問題において $A := \mathbb{Z},\ B := A,\ P := A_A,\ V := D$ (可除な $\mathbb{Z}$-加群) の場合を考えることにより、命題 3-34 が再証明される。

演習 3-16 (Sandomierski)

D：体 $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数

V：D 上無限次元左 D-加群　とする。

$E := \mathrm{End}_D V$ とおく。V は右 E-加群とみなせる。

(1) 右 E-加群 V は可除であるが、単射的でないことを示せ。

(2) 左正則加群 ${}_E E$ は単射的であるが、右正則加群 E_E は単射的でないことを示せ。

解；

(1) 右 E-加群 V が可除であること：

左零因子でない元 $a \in E$ を任意にとる。$Va = V$ となることを示す。

$u \in V$ を任意にとる。$u \notin Va$ であると仮定する。

このとき、$u \neq 0$ であって、$Du \cap (Va) = 0$ となる。

$\because$)

$u \notin Va$ なので、$u \neq 0$ でなければならない。

$v \in Du \cap (Va)$ をとると、$v = du$ $(d \in D)$ と書くことができる。

もし、$d \neq 0$ ならば、D が可除代数であることから、d^{-1} が存在するので、

$$u = d^{-1}v \underset{\substack{\uparrow \\ a \in E = \mathrm{End}_D V \text{ より } d^{-1}(Va) \subset (d^{-1}V)a \subset Va}}{\in} Va$$

となる。

これは $u \notin Va$ に矛盾する。よって、$d = 0$、すなわち、$v = 0$ である。 □

Va は V の部分 D-加群であるから、D 上の基底が存在する。

$\{u\} \cup \{Va$ の D 上の基底$\}$ は D 上一次独立であるから、これに V のベクトルをいくつか付け加えることにより、V の D 上の基底を得る。この基底を用いて、左 D-加群準同型 $x : V \longrightarrow V$ であって $x(u) \neq 0$ かつ $x(Va) = 0$ となるものを作ることができる。このとき、

$$(ax)(V) = V(ax) = x(Va) = 0$$

となるから、$E = \mathrm{End}_D V$ の元として

$$ax = 0$$

を得る。a は左零因子でないので、$x = 0$ となる。これは、$x(u) \neq 0$ であることに矛盾する。故に、$u \in Va$ でなければならない。こうして、左零因子でない任意の元 $a \in E$ に対して、$Va = V$ となることが示されたので、右 E-加群 V は可除である。

・右 E-加群 V が単射的でないこと：

$\{v_i\}_{i \in I}$ を V の D 上の基底とする。

各 $i \in I$ に対して、左 D-加群準同型 $\pi_i : V \longrightarrow V$ を

$$\pi_i(v_j) = \delta_{ij} v_i \qquad (j \in I)$$

によって定義する。但し、δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

E の右イデアル $\mathfrak{A} := \sum_{i \in I} \pi_i E$ を考える。

$\{\pi_i E\}_{i\in I}$ は E の中で直和になることに注意する。

$\because$)

$$\sum_{i\in I}\pi_i e_i = 0$$

とおく。但し、$e_i \in E$ は高々有限個の $i \in I$ を除いて 0 とする。このとき、任意の $j \in I$ に対して

$$\begin{aligned}0 = v_j(\sum_{i\in I}\pi_i e_i) &= \sum_{i\in I}(v_j\pi_i)e_i \\ &= \sum_{i\in I}\pi_i(v_j)e_i = \sum_{i\in I}(\delta_{ij}v_i)e_i \\ &= v_j e_j\end{aligned}$$

を得る、故に、

$$v_i\cdot(\pi_j e_j) = (v_i\pi_j)e_j = \delta_{ij}v_j e_j = 0 \qquad \text{for all } i\in I$$

となる。これは、$\pi_j e_j = 0$ となることを意味する。よって、右イデアルの族 $\{\pi_i E\}_{i\in I}$ は E の中で直和である。 $\square$

写像 $f : \mathfrak{A} \longrightarrow V$ を

$$f(\sum_{i\in I}\pi_i e_i) = \sum_{i\in I}v_i e_i \qquad (\text{但し、} e_i\in E \text{ は高々有限個の } i\in I \text{ を除いて } 0)$$

によって定義する。f は右 E-加群準同型である。もし、右 E-加群 V が単射的ならば、f は E_E から V への右 E-加群準同型に拡張されなければならない。すなわち、

$$^{\exists}v\in V \ \text{ s.t. } \ v_i = f(\pi_i) = v\pi_i \ \text{ for all } i\in I$$

となならければならない。ところが、これは不可能である。実際、このような $v\in V$ が存在したと仮定し、

$$v = \alpha_{i_1}v_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n}v_{i_n} \qquad (\alpha_{i_j}\in D,\ j = 1,\cdots,n)$$

と書くと、$i \notin \{i_1,\cdots,i_n\}$ なる任意の $i\in I$ に対して

$$v\pi_i = (\alpha_{i_1}v_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n}v_{i_n})\pi_i = \alpha_{i_1}\pi_i(v_{i_1}) + \cdots + \alpha_{i_n}\pi_i(v_{i_n}) = 0$$

となる。これは、$v\pi_i = v_i \neq 0$ に矛盾する。故に、右 E-加群 V は単射的でない。

(2)・E_E が単射的でないこと：

$\{v_i\}_{i\in I}$ を V の D 上の基底とする。$i\in I$ を勝手に 1 つとり、固定する。

$$V = v_i E$$

が成り立つ。

$\because$)

任意の $j\in I$ に対して、左 D-加群準同型 $x_{ij} : V \longrightarrow V$ を $x_{ij}(v_k) = \delta_{ik}v_j,\ k\in I$ によって定義する。

このとき、

$$v_j = x_{ij}(v_i) = v_i x_{ij} \in v_i E$$

となる。故に、$V \subset v_iE$ を得る。$V \supset v_iE$ は明らかであるから、$V = v_iE$ が示された。
□

$g : E \longrightarrow V$ を $g(e) = v_ie,\ e \in E$ によって定義する。g は全射な右 E-加群準同型である。また、$s : V \longrightarrow E$ を $s(v_ie) = \pi_ie,\ e \in E$ によって定義する。但し、$\pi_i : V \longrightarrow V$ は (2) で定義したものと同じである。

s は矛盾なく定義された右 E-加群準同型である。

$\because$)

$e, e' \in E$ とし、$v_ie = v_ie'$ であったとする。このとき、任意の $j \in I$ に対して

$$v_j(\pi_ie) = (v_j\pi_i)e = \delta_{ij}v_ie = v_ie' = (v_j\pi_i)e' = v_j(\pi_ie')$$

となる。これは $\pi_ie = \pi_ie'$ となることを意味する。よって、s は矛盾なく定義されている。このとき、s が右 E-加群準同型になることは、その定義から直ちにわかる。 □

$g \circ s = \mathrm{id}_V$ であるから、

$$E_E \cong V \oplus \mathrm{Ker}g \qquad \text{as right } E\text{-modules} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる (補題 1-30)。(1) により右 E-加群 V は単射的でないから、それを直既約因子として含む E_E も単射的でない (演習 1-56 の下の注意参照)。

・${}_EE$ が単射的であること：

D は可除代数なので、V は左 D-加群として可除である。したがって、V は左 D-加群として単射的である ($\because$ 可除代数は左主イデアル域であることと補題 3-33 による)。また、$(*)$ により、V は右 E-加群として射影的である。したがって、V は右 E-加群として平坦である。V を両側 (D, E)-加群とみなしたものを ${}_DV_E$ と書くことにする。このとき、

$$\mathrm{Hom}_D({}_DV_E, V)$$

は単射的な左 E-加群である (演習 3-15)。

$${}_EE = \mathrm{Hom}_D({}_DV_E, V) \qquad \text{as left } E\text{-modules}$$

であるから、${}_EE$ は単射的である。 (Q.E.D.)

§6. 加群の台座

左 A-加群に対して、そのすべての既約な部分加群の和を台座という。ここでは、加群の台座の基本的性質および台座と単射的外皮とのかかわりあいについて説明する。例えば、有限次元代数 A 上の加群について、その台座が既約であることとその単射的外皮が直既約であることとが同値になる。その応用として、2 つの有限生成左 A-加群が同型かどうかはそれらの単射的外皮が同型かどうかで判定できることを示す。

定義 3-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
V のすべての既約な部分加群の和を V の**台座** (*socle*) といい、記号 $\mathrm{soc}V$ により表わす。
V に既約な部分加群が存在しないときには、$\mathrm{soc}V = 0$ と定める。
右 A-加群 V に対しても、同様にして、台座 $\mathrm{soc}V$ を定義する。

台座は次のような性質を持つ。

補題 3-35

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、
(1) $V,\ W$：左 A-加群 $f : V \longrightarrow W$：左 A-加群準同型
　　$\Longrightarrow \quad f(\mathrm{soc}V) \subset \mathrm{soc}W$
(2) $\{V_i\}_{i\in I}$：左 A-加群の族
　　$\Longrightarrow \quad \mathrm{soc}(\bigoplus_{i\in I} V_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{soc}(V_i)$
(3) V：左 A-加群 $W \subset V$：部分 A-加群
　　$\Longrightarrow \quad \mathrm{soc}W = W \cap (\mathrm{soc}V)$

(proof)
(1) $\mathrm{soc}V = 0$ すなわち、V が既約な部分加群を持たないときには明らかに補題は成り立つ。
　V が既約な部分加群 V' を持つときを考える。この場合、Schur の補題により $f|_{V'} : V' \longrightarrow f(V')$ は 0-写像かまたは同型になる。
　よって、$f(V') \subset \mathrm{soc}W$ となる。
　故に、$f(\mathrm{soc}V) \subset \mathrm{soc}W$ を得る。
(2) $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ とおき、$\iota_i : V_i \longrightarrow V\ (i \in I)$ をこの直和に附随する自然な単射とする。
　各 $i \in I$ に対して、ι_i を通じて $V_i \subset V$ とみなす。このとき、V_i の既約な部分加群は V の既約な部分加群であるから、

$$\mathrm{Soc}(V_i) \subset \mathrm{Soc}(V)$$

となる。よって、

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{soc}(V_i) \subset \mathrm{soc}V \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。
　$(*)$ において等号が成り立つことを示す。$\mathrm{soc}V = 0$ ならば $(*)$ において等号が成り立つことは明らかである。よって、$\mathrm{soc}V \neq 0$ の場合に示せばよい。V の任意の既約な部分加群 W に対して、$W \subset \bigoplus_{i\in I} \mathrm{soc}(V_i)$ となることを示せばよい。
　$\pi_i : V \longrightarrow V_i\ (i \in I)$ を直和 $(V = \bigoplus_{i\in I} V_i,\ \{\iota_i\}_{i\in I})$ から定まる自然な射影とする。V の部分加群 W が既約ならば、各 $i \in I$ に対して $\pi_i|_W : W \longrightarrow \pi_i(W)$ は 0-写像かまたは同型で

ある (Schur の補題)。故に、$\pi_i(W) \subset \mathrm{soc}(V_i)$ $(i \in I)$ が成り立つ。したがって、

$$W \subset \bigoplus_{i\in I} \pi_i(W) \subset \bigoplus_{i\in I} \mathrm{soc}(V_i)$$

が成り立つ。
(3) W の既約な部分加群は V の既約な部分加群でもあるから、$\mathrm{soc}W \subset \mathrm{soc}V$ となる。よって、$\mathrm{soc}W \subset W \cap \mathrm{soc}V$ である。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。$W \cap \mathrm{soc}V$ は、完全可約な左 A-加群 $\mathrm{soc}V$ の部分加群であるから、やはり完全可約である (補題 2-1)。したがって、$W \cap \mathrm{soc}V$ は V のいくつかの既約な部分加群の和で表わされる。そこに現われる既約な部分加群は $W \cap \mathrm{soc}V \subset W$ に含まれるから、それらはすべて W の既約な部分加群となる。故に、$W \cap \mathrm{soc}V \subset \mathrm{soc}W$ を得る。こうして、$\mathrm{soc}W = \mathrm{soc}V$ は証明された。 (Q.E.D.)

補題 3-36

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数
(1) V：左 A-加群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{soc}V = \{x \in V \mid (\mathrm{rad}A)x = 0\}$
(2) V：右 A-加群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{soc}V = \{x \in V \mid x(\mathrm{rad}A) = 0\}$

(proof)
(1) A は左 Artin 代数なので、左 A-加群 V に対して

$$\text{「}V \text{ が完全可約} \Longleftrightarrow (\mathrm{rad}A)V = 0\text{」} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ (系 2-7 参照)。
　$\mathrm{soc}V$ は完全可約である (台座の定義と補題 2-1 参照) から $(\mathrm{rad}A)(\mathrm{soc}V) = 0$ となる。よって、

$$\mathrm{soc}V \subset \{x \in V \mid (\mathrm{rad}A)x = 0\}$$

を得る。逆向きの包含関係も成り立つことを示す。

$$U = \{x \in V \mid (\mathrm{rad}A)x = 0\}$$

とおく。$\mathrm{rad}A$ は A の両側イデアルであるから、U は左 A-加群である。また、$(\mathrm{rad}A)U = 0$ となるから、U は完全可約な左 A-加群である ($(*)$ による)。$\mathrm{soc}V$ の定義により、

$$U \subset \mathrm{soc}V$$

であることがわかる。これで、$U = \mathrm{soc}V$ が示された。
(2) A は左 Artin 代数なので、右正則加群 V に関しても、

$$\text{「}V \text{ が完全可約} \Longleftrightarrow V(\mathrm{rad}A) = 0\text{」}$$

が成り立つ (演習 2-20 参照)。これを用いて、(1) と同様の方法で示すことができる。(Q.E.D.)

　上の補題により、左 Artin 代数の正則加群およびその双対加群の台座をその根基から求めることができる。記号を用意する。

定義 3-6

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$\emptyset \neq S \subset A$：部分集合　とする。

$$l(S) = \{a \in A \mid aS = 0\}, \quad r(S) = \{a \in A \mid Sa = 0\}$$

をそれぞれ S の**左消去集合** (*left annihilator*)、**右消去集合** (*right annihilator*) と呼ぶ。

注意： $l(S)$ は A の左イデアル、$r(S)$ は A の右イデアルになる。

系 3-37

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数　とする。

(1) 左正則加群 ${}_AA$ の台座 $\mathrm{soc}({}_AA)$ は

$$\mathrm{soc}({}_AA) = r(\mathrm{rad}A)$$

で与えられる。同様に、右正則加群 A_A の台座は $l(\mathrm{rad}A)$ で与えられる。

(2) 右正則加群 A_A の双対加群 ${A_A}^*$ の台座は

$$\mathrm{soc}({A_A}^*) = \{p \in A^* \mid \mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p\}$$

で与えられる。また、この右辺は左正則加群 ${}_AA$ の双対加群 ${}_AA^*$ の台座 $\mathrm{soc}({}_AA^*)$ にも一致する。

(proof)

(1) 補題 3-36 において $V = {}_AA$ および $V = A_A$ にとるだけで、求めたい結果が得られる。

(2) 補題 3-36(1) により、

$$\mathrm{soc}({A_A}^*) = \{p \in A^* \mid (\mathrm{rad}A)p = 0\}$$

である。したがって、$p \in A^*$ に対して、

$$(\mathrm{rad}A)p = 0 \iff \mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p$$

を示せばよい。

「$\Longrightarrow$」の証明：$(\mathrm{rad}A)p = 0$ であるとする。このとき、任意の $a \in \mathrm{rad}A$ に対して、$a \cdot p = 0$ となる。

$$\therefore\ 0 = (a \cdot p)(1) = p(1 \cdot a) = p(a)$$

$$\therefore\ a \in \mathrm{Ker}p$$

となる。

「$\Longleftarrow$」の証明：$\mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p$ とする。$a \in \mathrm{rad}A,\ b \in A$ に対して、

$$(a \cdot p)(b) = p(ba) \subset p(\mathrm{rad}A) = 0$$

$$\uparrow$$

$$\mathrm{rad}A \text{ は両側イデアル}$$

$$\therefore\ a \cdot p = 0 \qquad\qquad \therefore\ (\mathrm{rad}A)p = 0$$

となる。これで、$\mathrm{Soc}({A_A}^*) = \{p \in A^* \mid \mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p\}$ が示された。

$\mathrm{Soc}({}_AA^*) = \{p \in A^* \mid \mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p\}$ も同様にして示される。 (Q.E.D.)

注意 1°：$\mathrm{soc}({}_AA)$ および $\mathrm{soc}(A_A)$ は A の両側イデアルである。
(proof)

系によって、$\mathrm{soc}({}_AA) = r(\mathrm{rad}A)$ であるから、$\mathrm{soc}({}_AA)$ は右イデアルである。

$\mathrm{rad}A$ は右イデアルでもあったから、

$$x \in r(\mathrm{rad}A),\ a \in A \quad\Longrightarrow\quad (\mathrm{rad}A)ax \subset (\mathrm{rad}A)x = 0$$

となる。故に、$ax \in r(\mathrm{rad}A)$ となり、$r(\mathrm{rad}A) = \mathrm{soc}({}_AA)$ が左イデアルになることもわかった。

同様にして、$\mathrm{soc}(A_A)$ が A の両側イデアルになることがわかる。 □

注意 2°：$\mathrm{soc}({}_AA) \neq \mathrm{soc}(A_A)$ となる代数 A が存在する (演習 3-18 参照)。

以下では有限次元代数に対して、その加群の台座と単射的外皮との関係に関する結果を述べる。

補題 3-38

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。
$V(\neq 0)$：左 A-加群　とする。このとき、

$$I(V)\ \text{：直既約} \iff \mathrm{soc}V\ \text{：既約}$$

(proof)

$\mathrm{soc}V$ の定義と V が少なくとも 1 つの既約な部分加群を持つこと（$\because$ $0 \neq v \in V$ を取り、部分加群 $W := Av$ を考える。A は有限次元なので、W も有限次元である。また、$W \neq 0$ である。したがって、W に含まれる 0 でない最小の次元を持つ部分加群を取れば、それは既約である。）から

$$\mathrm{Soc}(V)\ \text{：既約} \iff V\ \text{の既約な部分加群は唯一つ}$$

が成り立つ。また、系 3-25 により、

$$I(V)\ \text{：直既約} \iff 0\ \text{でない 2 つの部分加群}\ V_1,\ V_2 \subset V\ \text{に対して}\ V_1 \cap V_2 \neq 0$$

である。したがって、

$$0\ \text{でない 2 つの部分加群}\ V_1,\ V_2 \subset V\ \text{に対して}\ V_1 \cap V_2 \neq 0 \iff V\ \text{の既約な部分加群は唯一つ}$$

となることを示せばよい。

「$\Longrightarrow$」の証明：

$W_1,\ W_2$ を V の既約な部分加群とすると、仮定により $W_1 \cap W_2 \neq 0$ となる。

$W_1 \cap W_2$ は W_1 の部分加群ゆえ $W_1 \cap W_2 = W_1$ を得る。同様の理由により $W_1 \cap W_2 = W_2$ を得る。よって、$W_1 = W_2$ を得る。

故に、V の既約な部分加群は唯一つである。

「$\Longleftarrow$」の証明：

$V_1,\ V_2 \subset V$ を V の 0 でない 2 つの部分加群とする。

上で示したようにして、 各 V_i $(i=1,2)$ は既約な部分加群を含むことがわかる。V_i の既約加群は V の既約加群でもあるので、仮定により、V_1 に含まれる既約な部分加群と V_2 に含まれる既約な部分加群は一致しなければならない。特に、$V_1 \cap V_2 \neq 0$ を得る。 (Q.E.D.)

補題 3-39

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
V：左 A-加群 とする。
このとき、$I(V) = I(\mathrm{soc}V)$ が成り立つ。
V が有限生成ならば、$\mathrm{soc}V = \mathrm{soc}(I(V))$ が成り立つ。

(proof)

$V=0$ の場合は明らかに成り立つ。以下、$V \neq 0$ の場合を考える。

$I(V) = I(\mathrm{soc}V)$ となることを示すには、補題 3-23(2) により、$\mathrm{soc}V$ が V の本質的部分加群になることを示せばよい。すなわち、V の 0 でない部分加群 W に対して、$W \cap \mathrm{soc}V \neq 0$ となることを示せばよい。

W を V の 0 でない部分加群とすると、A の有限次元性から、W は既約な部分加群を含むことがわかる（補題 3-38 の証明参照）。したがって、$W \cap \mathrm{soc}V \neq 0$ が示された。

次に、V は有限生成であると仮定する。

$$\mathrm{soc}V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \qquad (V_i \text{ は } V \text{ の既約な部分加群}, 1 \leq i \leq n)$$

と書く。このとき、補題の前半部分と演習 3-10 から

$$I(V) = I(\mathrm{soc}V) = \bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)$$

となる。一方、各 V_i は既約なので、系 3-25 により $I(I(V_i)) = I(V_i)$ は直既約である。したがって、補題 3-38 から、$\mathrm{soc}(I(V_i))$ は既約である。

$V_i \subset \mathrm{soc}(V_i) \subset \mathrm{soc}(I(V_i))$ なので、既約性により $V_i = \mathrm{soc}(I(V_i))$ でなければならない。こうして、

$$\mathrm{soc}(I(V)) = \mathrm{soc}(\bigoplus_{i=1}^{n} I(V_i)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{soc}(I(V_i)) = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = \mathrm{soc}(V)$$

を得る。ここで、左から二番目の等式は補題 3-35(2) から従う。 (Q.E.D.)

命題 3-40

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
V, W：既約な有限生成左 A-加群 とする。
このとき、

$$I(V) \cong I(W) \quad \text{as left } A\text{-modules} \iff V \cong W \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

が成り立つ。

(proof)

「$\Longleftarrow$」は明らかに成立するから、「$\Longrightarrow$」を示す。

$f: I(V) \longrightarrow I(W)$ を左 A-加群の同型とする。補題 3-35(1) により

$$f(\mathrm{soc}(I(V))) = \mathrm{soc}(I(W))$$

を得る。$V,\ W$ は有限生成なので、補題 3-39 から、上式は

$$f(\mathrm{soc}V) = \mathrm{soc}W$$

と同値である。V は既約なので、$\mathrm{soc}V = V$ となる。同様の理由で、$\mathrm{soc}W = W$ となる。

故に、$f(V) = W$ が示され、V と W は左 A-加群として同型であることがわかった。

(Q.E.D.)

演習 3-17

$\boldsymbol{k}$ を体とする。商代数

$$A := \boldsymbol{k}[X, Y]/(X^{n+1}, X^n Y, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$$

の左正則加群の台座は $(n+1)$ 個の既約加群の直和であることを示せ。

解；

自然な射影 $\boldsymbol{k}[X, Y] \longrightarrow A$ による $X,\ Y$ の像をそれぞれ $\bar{X},\ \bar{Y}$ とおく。このとき、$\mathrm{rad}A = A\bar{X} + A\bar{Y}$ であった (演習 3-2)。したがって、

$$\mathrm{soc}({}_A A) = r(\mathrm{rad}A) = \{a \in A \mid (\mathrm{rad}A)a = 0\} = \{a \in A \mid \bar{X}a = \bar{Y}a = 0\}$$

となる。A は

$$\{\bar{X}^i \bar{Y}^j \mid i, j \geq 0,\ i + j \leq n\}$$

を $\boldsymbol{k}$ 上の基底にもつから、任意の $a \in A$ は一意的に

$$a = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{ij} \bar{X}^i \bar{Y}^j \qquad (c_{ij} \in \boldsymbol{k})$$

と書くことができる。

$$\begin{aligned}
\bar{X}a &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{ij} \bar{X}^{i+1} \bar{Y}^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_{0j} \bar{X} \bar{Y}^j + \sum_{j=0}^{n-1} c_{1j} \bar{X}^2 \bar{Y}^j + \cdots + \sum_{j=0}^{1} c_{n-1,j} \bar{X}^n \bar{Y}^j + \sum_{j=0}^{0} c_{nj} \bar{X}^{n+1} \bar{Y}^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} c_{0j} \bar{X} \bar{Y}^j + \sum_{j=0}^{n-2} c_{1j} \bar{X}^2 \bar{Y}^j + \cdots + \sum_{j=0}^{0} c_{n-1,j} \bar{X}^n \bar{Y}^j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i-1,j} \bar{X}^i \bar{Y}^j
\end{aligned}$$

であるから、

$$\bar{X}a = 0 \iff c_{ij} = 0 \qquad \text{for } \ i = 0, 1, \cdots, n-1,\ j = 0, 1, \cdots, n-i-1$$

を得る。同様にして、

$$\bar{Y}a = 0 \iff c_{ij} = 0 \qquad \text{for } \ j = 0, 1, \cdots, n-1,\ i = 0, 1, \cdots, n-j-1$$

を得る。故に、$a=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}c_{ij}\bar{X}^i\bar{Y}^j\in A$ について

$$a\in\mathrm{soc}({}_AA)\iff a=\sum_{i=0}^{n}c_{i,n-i}\bar{X}^i\bar{Y}^{n-i}$$

が成り立つ。よって、

$$\mathrm{soc}({}_AA)=\bigoplus_{i=0}^{n}\boldsymbol{k}\bar{X}^i\bar{Y}^{n-i}$$

を得る。各 $i=0,1,\cdots,n$ に対して $\boldsymbol{k}\bar{X}^i\bar{Y}^{n-i}$ は既約な ${}_AA$ の部分 A-加群であるから、$\mathrm{soc}({}_AA)$ は $(n+1)$ 個の既約加群の直和である。 (Q.E.D.)

演習 3-18

$\boldsymbol{k}$ を体とし、$\mathrm{M}_2(\boldsymbol{k})$ の部分代数

$$A=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}\;\middle|\;x,y,z\in\boldsymbol{k}\right\}$$

を考える。A は $\mathrm{soc}({}_AA)\neq\mathrm{soc}(A_A)$ を満たす左 Artin 代数であることを示せ。

解；

$\dim A=3<\infty$ なので A は左 Artin 代数である。

系 3-37 を用いて正則加群の台座を計算するために、$\mathrm{rad}A$ を求める。$\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}\in A$ について、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}\in\mathrm{rad}A&\iff{}^\forall r\in\boldsymbol{k},\;\; I_2-r\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}\;\text{は左逆元をもつ}\\&\iff{}^\forall r\in\boldsymbol{k},\;\;\det\begin{pmatrix}1-rx&-ry\\0&1-rz\end{pmatrix}\neq0\\&\iff{}^\forall r\in\boldsymbol{k},\;\;(1-rx)(1-rz)\neq0\\&\iff x=z=0\end{aligned}$$

となる (補題 1-14)。したがって、

$$\mathrm{rad}A=\left\{\begin{pmatrix}0&y\\0&0\end{pmatrix}\;\middle|\;y\in\boldsymbol{k}\right\}$$

であることがわかった。このことから、系 3-37 により

$$\mathrm{soc}({}_AA)=r(\mathrm{rad}A)=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}\;\middle|\;x,y\in\boldsymbol{k}\right\}$$
$$\mathrm{soc}(A_A)=l(\mathrm{rad}A)=\left\{\begin{pmatrix}0&y\\0&z\end{pmatrix}\;\middle|\;y,z\in\boldsymbol{k}\right\}$$

を得る。故に、$\mathrm{soc}({}_AA)\neq\mathrm{soc}(A_A)$ である。 (Q.E.D.)

注意：この事実は ${}_AA$ が単射的でない (演習 1-58 参照) ことに起因している。もし、${}_AA$ が単射的ならば、後の節で示すように、左正則加群の台座と右正則加群の台座は一致しなければならないからである (定理 3-46、系 3-53)。

演習 3-19

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。
左 A-加群 M に対して

$$\mathrm{rad}M := \bigcap_{N:M\text{ の極大な部分加群}} N$$

と定める。M が極大な部分加群を持たないとき、$\mathrm{rad}M = M$ と定める。$\mathrm{rad}M$ を M の**根基** (*radical*) と呼ぶ。次が成り立つことを示せ。

(1) $V,\ W$：左 A-加群、$f: V \longrightarrow W$：左 A-加群準同型

$\quad \Longrightarrow \quad f(\mathrm{rad}V) \subset \mathrm{rad}W$

(2) $\{V_i\}_{i\in I}$：左 A-加群の族

$\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rad}(\bigoplus_{i\in I} V_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{rad}(V_i)$

(3) V：左 A-加群、$W \subset \mathrm{rad}V$：部分 A-加群

$\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rad}(V/W) = (\mathrm{rad}V)/W$

解；

(1) W が極大な部分加群を持たないとき、$\mathrm{rad}W = W$ であるから、$f(\mathrm{rad}V) \subset W = \mathrm{rad}W$ となり、成立する。

以下、W が極大な部分加群を持つときを考える。W の極大な部分加群 M を任意にとる。$\pi: W \longrightarrow W/M$ を自然な射影とする。合成写像 $g := \pi \circ f: V \longrightarrow W/M$ は左 A-加群準同型である。W/M は既約であるから、$\mathrm{Ker}g$ は V の極大な部分加群になる (演習 1-39)。したがって、$\mathrm{rad}V \subset \mathrm{Ker}g$ となる。よって、

$$g(\mathrm{rad}V) = 0 \quad i.e. \quad f(\mathrm{rad}M) \subset M$$

となる。M は W の任意の極大な部分加群であるから、

$$f(\mathrm{rad}V) \subset \bigcap_{\substack{M:W\text{ の極大}\\ \text{な部分加群}}} M = \mathrm{rad}W$$

を得る。

(2) $V := \bigoplus_{i\in I} V_i$ とおく。各 $i \in I$ に対して $V_i \subset V$ であるから $\mathrm{rad}V_i \subset \mathrm{rad}V$ となる ($\because$ (1) において、f として包含写像 $i: V_i \longrightarrow V$ と採用する)。$\mathrm{rad}V_i \subset V_i$ であるから、$\{\mathrm{rad}V_i\}_{i\in I}$ は V の中で直和になっている。したがって、

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{rad}(V_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{rad}(V_i) \subset \mathrm{rad}V$$

を得る。逆向きの包含関係を示す。任意に $x \in \mathrm{rad}V$ をとる。$x \in V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ ゆえ

$$x = \sum_{i\in I} x_i,\quad x_i \in V_i\ (i \in I),\quad \text{但し、}x_i \neq 0 \text{ となる } i \text{ は有限個}$$

と書くことができる。$p_i: V \longrightarrow V_i,\ i \in I$ を直和 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に関する自然な射影とする。p_i は左 A-加群準同型であるから、(1) により、$p_i(\mathrm{rad}V) \subset \mathrm{rad}(V_i)$ となる。したがって、各 $i \in I$ に

対して

$$p_i(x) = x_i \in \mathrm{rad}(V_i)$$

となる。故に、

$$x = \sum_{i \in I} x_i \in \sum_{i \in I} \mathrm{rad}(V_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{rad}(V_i)$$

を得る。こうして、$\mathrm{rad}V = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{rad}(V_i)$ が示された。

(3) $\pi : V \longrightarrow V/W$ を自然な射影とする。V の任意の極大な部分加群 M は W を含む ($\because$ $W \subset \mathrm{rad}V \subset M$) ので、$V$ の極大な部分加群 M に対して $\pi(M)$ を対応させることによって、1 対 1 対応

$$\begin{array}{ccc} \{V \text{ の極大な部分加群全体}\} & & \\ \| & & \\ \{W \text{ を含む } V \text{ の極大な部分加群全体}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{V/W \text{ の極大な部分加群全体}\} \end{array} \quad \cdots\cdots (*)$$

が得られる。これより、

$$V \text{ に極大な部分加群が存在しない} \iff V/W \text{ に極大な部分加群が存在しない}$$

となるので、

$$\pi(\mathrm{rad}V) = \pi(V) = V/W = \mathrm{rad}(V/W)$$

を得る。以下、V に極大な部分加群が存在する場合を考える。V の任意の極大な部分加群 M は W を含むことから、

$$\pi(\bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} M) = \bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} \pi(M)$$

が成り立つ。

$\because$)

$\pi(\bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} M) \subset \bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} \pi(M)$ であることはすぐにわかる。逆向きの包含関係を示す。$\bar{x} \in \bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} \pi(M)$ を任意にとる。V の任意の極大な部分加群 M に対して、

$$^{\exists}x_M \in M \quad \text{s.t.} \quad \pi(x_M) = \bar{x}$$

となる。V の極大な部分加群のうちの 1 つを固定し、それを M_0 とおく。このとき、V の任意の極大な部分加群 M に対して $x_{M_0} - x_M \in W$ となる。よって、

$$x_{M_0} = x_M + w_M \quad \text{for some} \quad w_M \in W$$

となる。$W \subset M$ であるから、$x_{M_0} \in M$ を得る。このことは $x_{M_0} \in \bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} M$ となることを意味する。故に、

$$\bar{x} = \pi(x_{M_0}) \in \pi(\bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} M)$$

となり、逆向きの包含関係 $\pi(\bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} M) \supset \bigcap_{\substack{M : V \text{ の極大} \\ \text{な部分加群}}} \pi(M)$ も示された。 $\square$

したがって、

$$\pi(\mathrm{rad}V)=\pi(\bigcap_{\substack{M:V\text{ の極大}\\ \text{な部分加群}}} M)=\bigcap_{\substack{M:V\text{ の極大}\\ \text{な部分加群}}}\pi(M)\underset{\substack{\uparrow\\ (*)}}{=}\mathrm{rad}(V/W)$$

となる。 (Q.E.D.)

次の問題は加群の台座と根基の (圏論的な) 特徴づけを与えている。

演習 3-20

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
(1) soc$V$ は soc$W=W$ となる V の部分加群 W の中で最大である。
(2) rad$V$ は rad$(V/W)=0$ となる V の部分加群 W の中で最小である。

解；
(1) 次の２点を示せばよい。

(i) $W:V$ の部分加群, $\mathrm{soc}W=W \implies W\subset \mathrm{soc}V$
(ii) $\mathrm{soc}(\mathrm{soc}V)=\mathrm{soc}V$

(i) の証明：$W\subset V$ なので、

$$W=\mathrm{soc}W\subset\mathrm{soc}V$$

となる (補題 3-35(iii))。
(ii) の証明：$W:=\mathrm{soc}V$ とおく。$W\subset V$ であるから、$\mathrm{soc}W\subset\mathrm{soc}V=W$ となる。逆に、M を V の既約な部分加群とすると、$M\subset\mathrm{soc}V=W$ となる。したがって、M は W の既約な部分加群になる。よって、$M\subset\mathrm{soc}W$ を得る。

$$\therefore\ W=\mathrm{soc}V=\sum_{M:V\text{ の既約な部分加群}} M\subset\mathrm{soc}W$$

$$\therefore\ W=\mathrm{soc}W$$

(2) 次の２点を示せばよい。

(i) $W:V$ の部分加群, $\mathrm{rad}(V/W)=0 \implies \mathrm{rad}V\subset W$
(ii) $\mathrm{rad}(V/\mathrm{rad}V)=0$

(i) の証明：$\pi:V\longrightarrow V/W$ を自然な射影とする。

$$\pi(\mathrm{rad}M)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{演習 3-19}}}{\subset}\mathrm{rad}(V/W)=0$$

であるから、

$$\pi(\mathrm{rad}V)=0\quad i.e.\ \ \mathrm{rad}V\subset W$$

を得る。
(ii) の証明：演習 3-19(3) において $W=\mathrm{rad}V$ の場合を考えて、

$$\mathrm{rad}(V/\mathrm{rad}V)=\mathrm{rad}V/\mathrm{rad}V=0$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 3-21

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群または右 A-加群　とする。
V：完全可約　$\Longrightarrow$　$\mathrm{soc}V = V, \quad \mathrm{rad}V = 0$
となることを示せ。

解；

$\mathrm{soc}V$ の定義と完全可約の定義により、$\mathrm{soc}V = V$ となることはすぐにわかる。

$\mathrm{rad}V = 0$ となることを示す。

$V = 0$ のときは明らかに成り立つ。

$V \neq 0$ のとき、V は完全可約であるから

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \qquad (V_i\text{：既約},\ i \in I)$$

と表わすことができる。任意の $i_o \in I$ に対して $I_o = I - \{i_o\}$ とおき、

$$W_{i_o} = \bigoplus_{i \in I_o} V_i$$

とおく。V の W_{i_o} は極大な部分加群である。

$\because$)

$V/W \cong V_{i_o}$ となり、V/W は既約となる。したがって、演習 1-39 により、W は V の極大な部分加群である。　□

よって、

$$\mathrm{rad}V \subset \bigcap_{i_o \in I} W_{i_o} = 0$$

となる。故に、

$\mathrm{rad}V = 0$ を得る。

$\uparrow$

$$\left(\begin{array}{l} x \in \bigcap_{i_o \in I} W_{i_o} \text{ とする。} \\ x = (x_i)_{i \in I},\ x_i \in V_i \text{ と書く。} \\ \text{任意の } i_o \in I \text{ に対して } x \in W_{i_o} \\ \text{であるから } x_{i_o} = 0 \text{ となる。} \\ \text{よって、} x = 0 \text{ である。} \quad \square \end{array}\right)$$

(Q.E.D.)

演習 3-22

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の左 Artin 代数　とする。
(1) V：左 A-加群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{rad}V = (\mathrm{rad}A)V$
(2) V：右 A-加群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{rad}V = V(\mathrm{rad}A)$
となることを示せ。

解；

(1) まず、$(\mathrm{rad}A)V \subset \mathrm{rad}V$ となることを示す。

・V が極大な部分加群を持たない場合：

$\mathrm{rad}V = V$ である。よって、$(\mathrm{rad}A)V \subset \mathrm{rad}V$ が成り立つ。

・V が極大な部分加群を持つ場合：

M を V の極大な部分加群とする。このとき、V/M は既約になる (演習 1-39)。よって、

$$(\mathrm{rad}A)(V/M) = 0$$

となる (系 2-7)。これは $(\mathrm{rad}A)V \subset M$ となることを意味する。よって、

$$(\mathrm{rad}A)V \subset \bigcap_{M:V\text{ の極大な部分加群}} M = \mathrm{rad}V$$

を得る。

次に、$\mathrm{rad}V \subset (\mathrm{rad}A)V$ となることを示す。

演習 3-20 により、$\mathrm{rad}(V/(\mathrm{rad}A)V) = 0$ となることを示せばよい。

$V/(\mathrm{rad}A)V$ は左 $A/\mathrm{rad}A$-加群とみなすことができる。

$\because$)

> $v \in V$ を自然な射影 $V \longrightarrow V/(\mathrm{rad}A)V$ で $V/(\mathrm{rad}A)V$ に写したものを $\bar{v}$ と書く。このとき、$a \in \mathrm{rad}A$ に対して $a \cdot v \in (\mathrm{rad}A)V$ であるから
>
> $$a \cdot \bar{v} = \overline{a \cdot v} = 0 \ \text{ in } V/(\mathrm{rad}A)V$$
>
> となる。よって、$A/\mathrm{rad}A$ の $V/(\mathrm{rad}A)V$ への左作用を
>
> $$\bar{a} \cdot x = a \cdot x \qquad (a \in A,\ x \in V/(\mathrm{rad}A)V)$$
>
> によって矛盾なく定義することができる。ここで $\bar{a}$ は自然な射影 $A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ によって a を写して得られる $A/\mathrm{rad}A$ の元を表わす。この作用で $V/(\mathrm{rad}A)V$ が左 $A/\mathrm{rad}A$-加群になることは簡単に確かめられる。 □

A は左 Artin 的であるから、$A/\mathrm{rad}A$ は半単純である (系 2-6)。よって、$V/(\mathrm{rad}A)V$ は左 $A/\mathrm{rad}A$-加群として完全可約である。既約な左 $A/\mathrm{rad}A$-加群を自然な射影 $A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ を経由して左 A-加群とみなしても既約であるから、$V/(\mathrm{rad}A)V$ は左 A-加群として完全可約である。よって、

$$\mathrm{rad}(V/(\mathrm{rad}A)V) = 0$$

が示された。これで、$\mathrm{rad}V \subset (\mathrm{rad}A)V$ も示された。

(2) (1) の証明において、

・系 2-7 のかわりに演習 2-20 を、

・$V/V(\mathrm{rad}A)$ の右 $A/\mathrm{rad}A$-加群としての完全可約性の保証に命題 2-2 の下の注意を

用いることにより、同様にして示すことができる。 (Q.E.D.)

§7. 余生成元

左 A-加群 V が ${}_A\mathbb{M}$ の生成元であるとは、任意の左 A-加群 M が V のいくつかの直和の商として書けるときをいった。この条件は、任意の左 A-加群 M に対して、

$$M = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(V,M)} \mathrm{Im}f$$

となることと同値である (命題 1-55)。この生成元の概念を双対化することにより、余生成元という概念が得られる。余生成元はすべての既約加群の単射的外皮を部分加群として含むような加群として特徴づけられる。ここでは、有限次元代数 A の右正則加群 A_A の双対左加群 ${A_A}^*$ が常に単射的な余生成元になることを示す。

定義 3-7

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
V：左 A-加群　とする。
　V : **余生成元** (*cogenerator*) $\Longleftrightarrow$ 任意の左 A-加群 U に対して、$\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Hom}_A(U,V)} \mathrm{Ker} f = 0$

補題 3-41

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
V：左 A-加群　とする。このとき、
V：余生成元
　$\Longleftrightarrow$ 任意の既約な左 A-加群 W に対して、W の単射的外皮が V のある部分加群に同型

(proof)
i. 必要性：
　V を余生成元とする。
　W を既約な左 A-加群とする。$W \neq 0$ に注意する。
　$I(W)$ を W の単射的外皮とする。
　仮定により、$\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Hom}_A(I(W),V)} \mathrm{Ker} f = 0$ となる。したがって、

$$^\exists f \in \mathrm{Hom}_A(I(W), V) \;\; \text{s.t.} \;\; W \not\subset \mathrm{Ker} f$$

である。よって、$W \neq W \cap \mathrm{Ker} f$ となる。
　W は既約ゆえ、$W \cap \mathrm{Ker} f = 0$ でなければならない。
　$\mathrm{Ker} f \subset I(W)$ であり、W は $I(W)$ の本質的部分加群であるから、$\mathrm{Ker} f = 0$、すなわち、f は単射となる。よって、

$$I(W) \cong f(I(W)) \subset V$$

となる。
ii. 十分性：
　$U(\neq 0)$ を任意の左 A-加群とする。
　$0 \neq u \in U$ とする。
　Au は 0 でない。そこで、M を Au の極大な部分加群 (*i.e.* M は Au に一致しない部分加群で、N が Au の部分加群であって、$M \subsetneqq N$ ならば、$N = Au$ となるもの。A は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元だから、このような M は存在する) とする。
　$W = Au/M$ は既約な左 A-加群になる。
　$I(W)$ を W の単射的外皮とすると、仮定により、

$$^\exists \psi : I(W) \longrightarrow V \;\; : \; \text{単射な左 } A\text{-加群準同型}$$

となる。

$\pi : Au \longrightarrow Au/M = W$ を自然な射影とする。このとき、

$$\pi(u) = u + M \neq 0 \ \text{ in } W$$

である。

$\because$)

もし、$\pi(u) = 0$ ならば、$u \in M$ となる。

M は左 A-加群より、$Au \subset M$ となる。しかし、$M \subset Au$ であったから、$Au = M$ を得る。これは M の取り方に反する。 □

$I(W)$ は単射的であるから、左 A-加群準同型

$$Au \xrightarrow{\ \pi\ } W \hookrightarrow I(W)$$

は左 A-加群準同型

$$\tilde{\pi} : U \longrightarrow I(W)$$

に拡張される (命題 3-15)。特に、$\tilde{\pi}(u) = \pi(u) \neq 0$ である。

$$f := \psi \circ \tilde{\pi} : U \longrightarrow V$$

とおく。f は左 A-加群準同型であり、$f(u) \neq 0$ *i.e.* $u \notin \mathrm{Ker} f$ を満たす。したがって、

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)} \mathrm{Ker} f = 0$$

がいえた。故に、V は余生成元である。 (Q.E.D.)

注意：上の証明から、左 A-加群 V に対して、次がいえる。

V：余生成元 $\iff$ 任意の既約な有限生成左 A-加群 W に対して、
W の単射的外皮が V のある部分加群に同型

系 3-42

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
W：既約な左 A-加群　とする。
$I(W)$ を W の単射的外皮とする。このとき、
V：余生成元 $\Longrightarrow I(W)$ は V の直既約な直和因子に同型

(proof)

補題 3-41 により、$I(W)$ は V のある部分加群 U と同型である。

$I(W)$ は単射的なので、U も単射的である。したがって、命題 1-32 から、U は V の直和因子である。

W の既約性から $I(W)$ は直既約 (系 3-26) なので、U もそうである。 (Q.E.D.)

補題 3-43

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$V_1, \cdots, V_r$：既約な左 A-加群の同型類に関する完全代表系　とする。

各 $i = 1, \cdots, r$ に対して、$I(V_i)$ を V_i の単射的外皮とする。このとき、

(1) $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ は単射的かつ直既約な左 A-加群の同型類に関する完全代表系となる。

(2) 有限生成左 A-加群 V が単射的、かつ、余生成元

$$\Longrightarrow \ V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} I(V_i)^{\oplus n_i} \quad (n_i \geq 1,\ i = 1, \cdots, r)$$

となる。

(proof)

(1) V_i は既約なので、$I(V_i)$ は直既約である (系 3-26)。

$I(V_1), \cdots, I(V_r)$ が互いに同型でないことは、命題 3-40 による。

V を単射的、かつ、直既約な左 A-加群とする。

V には既約な有限次元部分加群が存在する。

$\because$)

V は直既約なので、$V \neq 0$ である。

$0 \neq v \in V$ を 1 つとり、$W = Av$ を考える。

W は V の部分加群で、有限次元である。また、$W \neq 0$ である。

したがって、W に含まれる 0 でない最小の次元を持つ部分加群をとれば、それは既約である。　□

その 1 つを W とおく。命題 3-24 の (i) と (ii) の同値性から、$V = I(W)$ を得る。

W は $V_1, \cdots, V_r$ のいずれかと同型になるから、V も $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ のいずれかと同型になる。これで示された。

(2) $\dim A < \infty$ かつ V が A 上有限生成であることから $\dim V < \infty$ を得るので、

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \qquad (W_j\ ：直既約,\ j = 1, \cdots, s)$$

と書くことができる。

各 W_j は単射的である (演習 1-56(2))。(1) より、各 W_j はある $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ のいずれかと同型である。よって、

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} I(V_i)^{\oplus n_i} \qquad (n_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, r)$$

であることがわかる。系 3-42 により、各 $I(V_i)$ に対して、これと同型な V の直既約な直和因子が存在するから、すべての $i = 1, \cdots, r$ について、$n_i \geq 1$ であることがわかる。(Q.E.D.)

注意：上の補題の (1) と命題 3-24 から、次の結果が得られる (永尾-中山)。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$e_1, \cdots, e_r$：$Ae_1, \cdots, Ae_r$ が主直既約加群の同型に関する完全代表系となるような A の原始冪等元

$\Longrightarrow$　$(Ae_1)^*, \cdots, (Ae_r)^*$：単射的かつ直既約な右 A-加群の同型に関する完全代表系

(proof)

定理 3-11 から、

$$Ae_1/(\mathrm{rad}A)e_1,\ \cdots, Ae_r/(\mathrm{rad}A)e_r$$

は既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系となる。よって、

$$(Ae_1/(\mathrm{rad}A)e_1)^*,\ \cdots, (Ae_r/(\mathrm{rad}A)e_r)^*$$

は既約な右 A-加群の同型に関する完全代表系となる (演習 1-42)。

したがって、上の補題 (1) の右 A-加群版を考えることにより、

$$I((Ae_1/(\mathrm{rad}A)e_1)^*), \cdots, I((Ae_r/(\mathrm{rad}A)e_r)^*)$$

は単射的かつ直既約な右 A-加群の同型に関する完全代表系となる。証明を完成させるには、

$$(Ae_i)^* = I((Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i)^*) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\#)$$

となることを示せばよい。

各 $i = 1, \cdots, r$ に対して、自然な射影 $\pi_i : Ae_i \longrightarrow Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i$ は単射な右 A-加群準同型

$$^t\pi_i : (Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i)^* \longrightarrow (Ae_i)^*$$

を誘導する。また、Ae_i は直既約なので、$(Ae_i)^*$ も直既約であり (演習 1-28(2))、Ae_i が射影的なので、$(Ae_i)^*$ は単射的である (補題 1-35)。

したがって、既約右 A-加群 $(Ae_i/(\mathrm{rad}A)e_i)^*$ は単射的な直既約加群 $(Ae_i)^*$ の部分加群とみなすことができる。ここで、命題 3-24 の (i) と (ii) の同値性を適用すれば、(#) が得られる。
□

命題 3-44

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。

右正則加群 A_A の双対加群 ${A_A}^*$ について、以下のことが成り立つ。

(1) ${A_A}^*$ は $\mathrm{soc}({A_A}^*)$ の単射的外皮であり、左 A-加群として $A/\mathrm{rad}A \cong \mathrm{soc}({A_A}^*)$ となる。

(2) ${A_A}^*$ は単射的な余生成元である。

(proof)

(1) 命題 1-36 より、${A_A}^*$ は単射的な左 A-加群である。

$\mathrm{soc}({A_A}^*)$ は ${A_A}^*$ の本質的部分加群である (補題 3-39 の証明参照)。

したがって、${A_A}^*$ は $\mathrm{soc}({A_A}^*)$ の単射的外皮である (補題 3-20 参照)。

次に、後半部分を示す。

命題 3-37(2) により $\mathrm{soc}({A_A}^*) = \{p \in A^* \mid \mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}p\}$ となる。これより、写像

$$f : \mathrm{soc}({A_A}^*) \longrightarrow (A/\mathrm{rad}A)^*$$

を

$$\begin{array}{cccccc} f(p): & A/\mathrm{rad}A & \longrightarrow & \boldsymbol{k}, & & p \in \mathrm{soc}({A_A}^*) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & \bar{a} & \longmapsto & p(a) & & \end{array}$$

によって定義することができる。

f は全単射である。

$\because$)

i. f の単射性：

$$\begin{aligned} f(p) = 0 &\implies p(a) = 0 \ \ \text{for } {}^\forall a \in A \\ &\implies p = 0 \end{aligned}$$

ii. f の全射性：

任意に $\mu \in (A/\mathrm{rad}A)^*$ をとる。$\pi : A \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$ を自然な射影とする。

$\mu \circ \pi \in A^*$ となる。

$(\mu \circ \pi)(\mathrm{rad}A) = 0$ であるから、$\mu \circ \pi \in \mathrm{soc}({A_A}^*)$ となる。

このとき、$f(\mu \circ \pi) = \mu$ となる。

i. と ii. から f は全単射である。 □

$A/\mathrm{rad}A$ を自然に右 A-加群とみなして、$(A/\mathrm{rad}A)^*$ をその双対左 A-加群と考えるとき、f は左 A-加群準同型となる。

$\because$)

f が A の左作用を保つことだけ見ればよい。

$a \in A,\ p \in \mathrm{soc}({A_A}^*),\ b \in A/\mathrm{rad}A$ を任意にとる。このとき、

$$f(a \cdot p)(\bar{b}) = (a \cdot p)(b) = p(b \cdot a) = p(ba) = f(p)(\overline{ba}) \underset{\substack{\uparrow \\ A/\mathrm{rad}A\text{ への }A\text{ の右作用の定義}}}{=} f(p)(\bar{b} \cdot a) = (a \cdot f(p))(\bar{b})$$

となる。故に、

$$f(a \cdot p) = a \cdot f(p)$$

を得る。 □

したがって、f は左 A-加群の同型を与える。

$A/\mathrm{rad}A$ は有限次元の半単純代数であるから、Eilenberg-中山の定理 (定理 2-23) により、

$$^\exists g : (A/\mathrm{rad}A)^* \longrightarrow A/\mathrm{rad}A \ \ \text{：左 } A/\mathrm{rad}A\text{-加群の同型}$$

となる。g は左 A-加群の同型とみなすことができる。こうして、左 A-加群の同型

$$g \circ f : \mathrm{soc}({A_A}^*) \longrightarrow A/\mathrm{rad}A$$

を得る。

(2) 補題 3-41 により、任意の既約な左 A-加群 V に対して、${A_A}^*$ が V の単射的外皮と同型な部分加群を含むことをいえばよい。

V を既約な左 A-加群とする。

系 2-7 より $(\mathrm{rad}A)V = 0$ となるので、V は左 $A/\mathrm{rad}A$-加群と思えて、しかも、既約になる。

$A/\mathrm{rad}A$ は半単純であるから、V は $A/\mathrm{rad}A$ のある極小な左イデアルと同型になる (演習 2-1 参照)。

(1) により $\mathrm{soc}({A_A}^*) \cong A/\mathrm{rad}A$ であるから、$\mathrm{soc}({A_A}^*)$ の部分加群で、V と同型なものが存在する。すなわち、${A_A}^*$ は V と同型な部分加群を含む。

故に、${A_A}^*$ の単射的外皮 $I({A_A}^*)$ を任意に与えたとき、V の単射的外皮 $I(V)$ をうまくとれば、$I(V) \subset I({A_A}^*)$ となる (補題 3-23 参照)。

${A_A}^*$ は単射的であるから、${A_A}^*$ の単射的外皮 $I({A_A}^*)$ として、${A_A}^*$ 自身をとることができる。したがって、V の単射的外皮 $I(V)$ をうまくとれば、${A_A}^*$ は $I(V)$ を含む。

こうして ${A_A}^*$ が V の単射的外皮と同型な部分加群を含むことが示された (系 3-22 参照) ので、${A_A}^*$ は余生成元である。 (Q.E.D.)

注意：この命題と補題 3-43 を使って、次がわかる。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数、V：既約な左 A-加群 $\Longrightarrow$ $I(V)$：有限次元

演習 3-23

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

V：左 A-加群 とする。次を示せ。

(1) V：${}_A\mathbb{M}$ の生成元 $\Longleftrightarrow$ $0 \neq {}^\forall f \in \mathrm{Hom}_A(M, N),\ \ {}^\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_A(V, M)$ s.t. $f \circ \alpha \neq 0$

(2) V：${}_A\mathbb{M}$ の余生成元 $\Longleftrightarrow$ $0 \neq {}^\forall g \in \mathrm{Hom}_A(L, M),\ \ {}^\exists \beta \in \mathrm{Hom}_A(M, V)$ s.t. $\beta \circ g \neq 0$

解；

(1)「$\Longrightarrow$」の証明：

$0 \neq f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ を任意にとる。

$$ {}^\exists m \in M \quad \text{s.t.} \quad f(m) \neq 0 $$

である。V は生成元であるから、

$$ m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v_i) \qquad\qquad (\alpha_i \in \mathrm{Hom}_A(V, M),\ v_i \in V,\ \ i = 1, \cdots, n) $$

と書ける。よって、$0 \neq f(m) = \sum_{i=1}^{n} (f \circ \alpha_i)(v_i)$ を得る。故に、ある $i \in \{1, \cdots, n\}$ に対して、$f \circ \alpha_i \neq 0$ となる。

「$\Longleftarrow$」の証明：

$\mathrm{Im}(V, M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(V,M)} \mathrm{Im} f \subset M$ とおく。

$p : M \longrightarrow M/\mathrm{Im}(V, M)$ を自然な射影とする。

もし、$M \neq \mathrm{Im}(V, M)$ ならば $p \neq 0$ である。仮定により、

$$ {}^\exists f_o \in \mathrm{Hom}_A(V, M) \quad \text{s.t.} \quad p \circ f_o \neq 0 $$

となる。これは、

$$ \mathrm{Im} f \not\subset \mathrm{Im}(V, M) $$

となることを意味する。ところが、$\mathrm{Im}(V, M)$ の定義から、任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(V, M)$ に対して $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im}(V, M)$ でなければならない。ここに、矛盾が生じた。故に、$M = \mathrm{Im}(V, M)$ である。

(2)「$\Longrightarrow$」の証明：

$0 \neq g \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ を任意にとる。

$$^{\exists}l \in L \quad \text{s.t.} \quad g(l) \neq 0$$

となる。V は余生成元なので、

$$^{\exists}\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V) \quad \text{s.t.} \quad g(l) \notin \mathrm{Ker}\beta$$

となる。

$\because$)

もし、任意の $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V)$ について $g(l) \in \mathrm{Ker}\beta$ ならば

$$g(l) \in \bigcap_{\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V)} \mathrm{Ker}\beta = \{0\}$$

となり、$g(l) \neq 0$ に矛盾する。 $\square$

故に、$(\beta \circ g)(l) \neq 0$ を得る。

「$\Longleftarrow$」の証明：

$\mathrm{Ker}(M,V) := \bigcap_{\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V)} \mathrm{Ker}\beta$ とおく。

もし、$\mathrm{Ker}(M,V) \neq \{0\}$ であるならば、包含写像 $\iota : \ker(M,V) \hookrightarrow M$ は 0-写像ではない。よって、仮定により、

$$^{\exists}\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V) \quad \text{s.t.} \quad \beta \circ \iota \neq 0$$

となる。しかし、$\mathrm{Ker}(M,V)$ の定義から $\mathrm{Ker}(M,V) \subset \mathrm{Ker}\beta$ であるから、$\beta \circ \iota \neq 0$ となって、矛盾が生じる。故に、$\mathrm{Ker}(M,V) = \{0\}$ でなければならない。 (Q.E.D.)

演習 3-24

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$F : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$: $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手

$V \in {}_A\mathbb{M}$ とする。次を示せ。

$$V \in {}_A\mathbb{M} : \text{余生成元} \iff F(V) \in {}_B\mathbb{M} : \text{余生成元}$$

解；

「$\Longrightarrow$」を示せば十分である。

$\because$)

「$\Longrightarrow$」が示されたとする。

${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ は $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手 $F : {}_A\mathbb{M} \longrightarrow {}_B\mathbb{M}$ と $G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$ によって圏同値であるとする。$F(V)$ が ${}_B\mathbb{M}$ の余生成元ならば、「$\Longrightarrow$」を G について適用して、$GF(V)$ は ${}_A\mathbb{M}$ の余生成元になることがわかる。$V \cong GF(V)$ であるから、V も ${}_A\mathbb{M}$ の余生成元である ($\because$ 余生成元のもともとの定義から)。 $\square$

さて、V を ${}_A\mathbb{M}$ の余生成元とする。$F(V)$ が ${}_B\mathbb{M}$ の余生成元になることを示すには、演習 3-23 により、任意の $S, X \in {}_B\mathbb{M}$ と $0 \neq g \in \mathrm{Hom}_B(S,X)$ に対して、$\beta \circ g \neq 0$ となる $\beta \in \mathrm{Hom}_B(X, F(V))$ が存在することを示せばよい。

F は圏同値を与えるので、左 B-加群の同型 $\eta : S \longrightarrow F(L),\ \xi : X \longrightarrow F(M)$ が存在する。このとき、

$$\mathrm{Hom}_B(S,X) \cong \mathrm{Hom}_B(F(L),F(M)) \overset{F}{\cong} \mathrm{Hom}_A(L,M)$$

となる。この線形同型写像を具体的に書くと、

$$f \in \mathrm{Hom}_A(L,M) \longmapsto \xi^{-1} \circ F(f) \circ \eta \in \mathrm{Hom}_B(S,X)$$

となる。したがって、$g = \xi^{-1} \circ F(f) \circ \eta,\ f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ と書くことができる。V は余生成元であったから、

$$^{\exists}\beta \in \mathrm{Hom}_A(M,V) \ \text{ s.t. } \ \beta \circ f \neq 0$$

を得る。F は $\boldsymbol{k}$-線形であるから、$p \in \mathrm{Hom}_A(L,V)$ に対して

$$F(p) = 0 \iff p = 0$$

を得る。

$\because$)

$p = 0$ ならば $F(p) = 0$ となることは、F が $\boldsymbol{k}$-線形であることから直ちに従う。この逆を示す。F は圏同値を与えるから、

$^{\exists}G : {}_B\mathbb{M} \longrightarrow {}_A\mathbb{M}$: $\boldsymbol{k}$-線形な共変関手 s.t. ${}_A\mathbb{M}$ と ${}_B\mathbb{M}$ は F と G によって圏同値

が成り立つ。このとき、次を可換にする左 A-加群の同型 $L \cong GF(L)$ と $V \cong GF(V)$ が存在する：

$$\begin{array}{ccc} GF(L) & \xrightarrow{GF(p)} & GF(V) \\ {\scriptstyle\exists}\downarrow\wr\!\!| & & {\scriptstyle\exists}\downarrow\wr\!\!| \\ L & \xrightarrow[p]{} & V \end{array}$$

$F(p) = 0$ であるとすると $GF(p) = 0$ ゆえ、上の可換図式から $p = 0$ を得る。 □

よって、$F(\beta) \circ F(f) \neq F(0) = 0$ となる。これに $F(f) = \xi \circ g \circ \eta^{-1}$ を代入すると $F(\beta) \circ \xi \circ g \circ \eta^{-1} \neq 0$ となるが、η は同型写像であるから、$F(\beta) \circ \xi \circ g \neq 0$ を得る。こうして、$F(V)$ は演習 3-23(2) の右辺の条件を満たすことがわかった。したがって、$F(V)$ は ${}_B\mathbb{M}$ の余生成元である。 (Q.E.D.)

§8. 準フロベニウス代数

フロベニウス代数とは、左正則加群 ${}_AA$ と、右正則加群の双対加群 $(A_A)^*$ が左 A-加群として同型となるような代数のことであった。ここでは、フロベニウス代数の拡張概念である準フロベニウス代数について述べる。準フロベニウス代数の概念は 1939 年に中山正によって導入された。代数 A が準フロベニウスであるとは、${}_AA$ の直既約な直和因子の同型類と、$(A_A)^*$ の直既約な直和因子の同型類との間に 1 対 1 対応が存在するときをいう。一見するだけでは、準フロベニウス代数という概念はフロベニウス代数のそれよりもつかみにくいと感じられるかもしれないが、圏論の立場からは、準フロベニウス代数の方が自然であり、扱いやすい (後述の定理 3-46(iv))。

定義 3-8

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
$A_1, \cdots, A_n$：${}_AA$ の直既約な直和因子の (加群の同型を法とした下での) 完全代表系
$B_1, \cdots, B_m$：$(A_A)^*$ の直既約な直和因子の (加群の同型を法とした下での) 完全代表系　とする。このとき、
A：**準フロベニウス代数** (*quasi-Frobenius algebra*)
$\iff$ $n = m$ かつ適当な並べ替えの後に $A_i \cong B_i$ $(i = 1, \cdots, n)$　as left A-modules

命題 3-45

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。
A：フロベニウス代数 $\Longrightarrow$ A：準フロベニウス代数

(proof)

A をフロベニウス代数であるとすると、左 A-加群としての同型 $\theta : {}_AA \longrightarrow (A_A)^*$ が存在する。$A_1, \cdots, A_n$ が ${}_AA$ を直既約分解したときの直和因子全体の中における互いに同型でないもの全体とすると、$\theta(A_1), \cdots, \theta(A_n)$ は $(A_A)^*$ を直既約分解したときの直和因子全体の中における互いに同型でないもの全体になる。よって、A は準フロベニウス代数である。

(Q.E.D.)

注意 1°：この命題から今まで出てきた多くの代数が準フロベニウス代数になっていることがわかる。例えば、有限群 G の体 $\boldsymbol{k}$ 上の群代数 $\boldsymbol{k}[G]$ や全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$、多項式 $f(X) \neq 0$ によって生成されるイデアルによる商代数 $\boldsymbol{k}[X]/(f(X))$ などはすべて準フロベニウス代数である。

注意 2°：この命題の逆は成立しない。反例は、準フロベニウス代数の概念を導入した中山正自身によって与えられている (T.Y.Lam・著『Lectures on modules and rings』GTM189, Springer,1999, p.429 参照)。

この節の目標は、次の定理の証明である。

定理 3-46

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。このとき、次は同値である。

(i) A は準フロベニウス代数である。
(ii) 左正則加群 ${}_AA$ は余生成元である。
(iii) 左正則加群 ${}_AA$ は単射的である。
(iv) 任意の射影的な左 A-加群は単射的である。
(v) A の任意の左イデアル X と右イデアル Y に対して、$l(r(X)) = X$ かつ $r(l(Y)) = Y$ となる。

注意：(i) と (v) の同値性により、準フロベニウス代数という概念は**左右対称性**を持つ。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A に対して

$A_1, \cdots, A_n$：A_A の直既約な直和因子の完全代表系
$B_1, \cdots, B_m$：$({}_AA)^*$ の直既約な直和因子の完全代表系　とする。このとき、

A：準フロベニウス代数

$\Longleftrightarrow$ $n = m$ かつ適当な並べ替えの後に $A_i \cong B_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ as right A-modules が成り立つ。

この定理を示すために、若干の準備をする。

補題 3-47

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。
左正則加群 ${}_AA$ が単射的
$\Longrightarrow$ (i) A の任意の左イデアル X, Y に対して $r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$,
(ii) 任意の $y \in A$ に対して、$r(l(yA)) = yA$

(proof)

(i) $a \in A$ が $Xa = 0$ を満たせば、$(X \cap Y)a = 0$ を満たすから、$r(X) \subset r(X \cap Y)$ である。同様に考えて、$r(Y) \subset r(X \cap Y)$ となる。$r(X \cap Y)$ は A の線形部分空間であるから、

$$r(X) + r(Y) \subset r(X \cap Y)$$

が得られた。逆向きの包含関係が成り立つことを示す。

$a \in A$ が $(X \cap Y)a = 0$ を満たしていると仮定する。このとき、写像

$$f : X + Y \longrightarrow A, \quad f(x + y) = ya \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

は矛盾なく定義されている。

$\because$)

$x, x' \in X,\ y, y' \in Y$ が $x + y = x' + y'$ を満たしているとき、$(x + y)a = (x' + y')a$ となるから、

$$(y - y')a = (x' - x)a \ \in (X \cap Y)a = 0$$

となる。故に、$ya = y'a$ を得る。 $\square$

f は左 A-加群準同型である。

仮定により、${}_AA$ は単射的なので、f は左 A-加群準同型 $\tilde{f} : A \longrightarrow A$ に拡張される。

$z := \tilde{f}(1) \in A$ とおく。

任意の $x \in X$ と任意の $y \in Y$ に対して、

$$ya = f(x + y) = \tilde{f}(x + y) = (x + y)\tilde{f}(1) = (x + y)z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。特に、$y = 0$ にとることにより

$$xz = 0, \qquad i.e.\ \ z \in r(X)$$

が得られる。また、$(*)$ において $x = 0$ にとることにより、

$$ya = yz \quad i.e.\ \ y(a - z) = 0 \qquad\qquad az \in r(Y)$$

が得られる。したがって、

$$a = z + (a - z) \ \in r(X) + r(Y)$$

を得る。こうして、$r(X \cap Y) \subset r(X) + r(Y)$ も示された。

(ii) $yA \subset r(l(yA))$ となることは消去作用素 r と l の定義からすぐにわかる。

逆向きの包含関係が成り立つことを示す。$x \in r(l(yA))$ を任意にとる。このとき、$x \in r(l(y))$ なので、$l(y) \subset l(x)$ となる。

写像 $g : Ay \longrightarrow A$ を

$$g(ay) = ax, \quad a \in A$$

によって定義する。g は矛盾なく定義されていて、左 A-加群準同型となる。

$\because$)

$a, a' \in A$ が $ay = a'y$ を満たしているとする。$a - a' \in l(y)$ であるから、先程の注意によって $a - a' \in l(x)$ となる。

これは $(a - a')x = 0$ と同値である。故に、$ax = a'x$ が得られたので、g は矛盾なく定義されている。

g が左 A-加群準同型となることは直ちにわかる。 □

さて、A は単射的なので、g は左 A-加群準同型 $\tilde{g} : A \longrightarrow A$ に拡張される。

$w := \tilde{g}(1) \in A$ とおくと、

$$x = g(y) = \tilde{g}(y \cdot 1) = y\tilde{g}(1) = yw$$

となる。よって、$x \in yA$ である。こうして、$r(l(yA)) \subset yA$ となることが示された。(Q.E.D.)

A が体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数ならば上の補題の逆が成立する。すなわち、次が成り立つ。

命題 3-48

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。このとき、

左正則加群 ${}_AA$ が単射的

$\iff$ (i) A の任意の左イデアル X, Y に対して $r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$

(ii) A の任意の右イデアル Y に対して、$r(l(Y)) = Y$

(proof)

i. 必要性：補題 3-47 により、(i) の条件は満たされる。(ii) の条件も成り立つことを示す。

Y を A の右イデアルとする。A は有限次元であるから、Y は A 上有限生成な右イデアルである。したがって、

$${}^{\exists}y_1, \cdots, y_n \in A \ \ \text{s.t.} \ \ Y = y_1A + \cdots + y_nA$$

と表わせる。このとき、補題 3-47 により、

$$r(l(Y)) \underset{\substack{\uparrow \\ l\,\text{の定義}}}{=} r(l(\sum_{i=1}^{n} y_iA)) = r(\bigcap_{i=1}^{n} l(y_iA)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 3-47(i)}}}{=} \sum_{i=1}^{n} r(l(y_iA)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 3-47(ii)}}}{=} \sum_{i=1}^{n} y_iA = Y$$

を得る。

ii. 十分性：X を A の左イデアルとし、$f : X \longrightarrow A$ を左 A-加群準同型とする (注：ここでは、A は左正則加群と見ていて、X はその部分加群と見ている)。

f が A から A への左 A-加群準同型 $\tilde{f}: A \longrightarrow A$ に拡張されることを示せばよい。そのためには、

$f(x) = xa$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つような $a \in A$ が存在する　$\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

ことを示せばよい。

X の生成元の個数に関する帰納法で証明する。

.X が 1 つの元 x_0 によって生成されている場合：

この場合、$X = Ax_0$ と表わすことができるから、

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x_0) = x_0 a \text{ となるような } a \in A \text{ が存在する} \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x_0) \in x_0 A \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x_0)A \subset x_0 A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

となる。そこで、①を証明する。

f は左 A-加群準同型であるから、$l(x_0) \subset l(f(x_0))$ となる。

したがって、$l(x_0 A) \subset l(f(x_0)A)$ となる。

この両辺の右消去作用素 r をとって、

$$r(l(x_0 A)) \supset r(l(f(x_0)A))$$

を得る。ここで、条件 (ii) を用いると、

$$x_0 A = r(l(x_0 A)) \supset r(l(f(x_0)A)) = f(x_0)A$$

となることがわかる。こうして、①が証明された。

. 左イデアル X の生成元の個数が n のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

$x+1$ 個の元 $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ によって生成される左イデアル X を任意にとる。

$$X_1 := (x_1, \cdots, x_n \text{ によって生成される左イデアル})$$

とおく。帰納法の仮定を $f_1 := f|_{X_1} : X_1 \longrightarrow A$ に適用して、

$$^\exists z_1 \in A \ \text{ s.t. } \ f(y_1) = y_1 z_1 \ \text{ for } ^\forall y_1 \in X_1$$

がわかる。同様に、により

$$^\exists z_2 \in A \ \text{ s.t. } \ f(y_2) = y_2 z_2 \ \text{ for } ^\forall y_2 \in Ax_{n+1}$$

がわかる。よって、任意の $y_1 \in X_1,\ y_2 \in Ax_{n+1}$ に対して、

$$f(y_1 + y_2) = y_1 z_1 + y_2 z_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。この右辺がある $a \in A$ を用いて $(y_1 + y_2)a$ のように書き表わされればよい。すなわち、

$$^\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ y_1(z_1 - a) + y_2(z_2 - a) = 0 \ \text{ for } ^\forall y_1 \in X_1,\ y_2 \in Ax_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

を示せばよい。そのためには

$$^\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ y_1(z_1 - a) = 0,\ y_2(z_2 - a) = 0 \ \text{ for } ^\forall y_1 \in X_1,\ y_2 \in Ax_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を示せば十分である。

$$④ \iff {}^{\exists}a \in A \text{ s.t. } z_1 - a \in r(X_1), \quad z_2 - a \in r(Ax_{n+1})$$
$$\iff z_1 - z_2 \in r(X_1) + r(Ax_{n+1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

であるが、条件 (i) により $r(X_1) + r(Ax_{n+1}) = r(X_1 \cap (Ax_{n+1}))$ であるので、⑤は $(X_1 \cap (Ax_{n+1}))(z_1 - z_2) = 0$ と同値である。

さて、任意に $y \in X_1 \cap (Ax_{n+1})$ に対して、z_1, z_2 の選び方から

$$y(z_1 - z_2) = yz_1 - yz_2 = f(y) - f(y) = 0$$

となるから、$(X_1 \cap (Ax_{n+1}))(z_1 - z_2) = 0$、すなわち⑤は証明された。こうして、$X$ の生成元が $n+1$ 個の場合にも $(*)$ が成り立つことが示され、帰納法が完成した。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-46)

最初に (i) と (ii) と (iii) の同値性を示す。

まず、A は有限次元なので、任意の既約な左 A-加群は有限次元であることに注意する (下の注意参照)。また、補題 3-43 により、$V_1, \cdots, V_r$ を既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系とすると、それらの単射的外皮 $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ は単射的かつ直既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系となり、$(A_A)^*$ が単射的な余生成元である (命題 3-44) ことから、

$$(A_A)^* \cong \bigoplus_{i=1}^{r} I(V_i)^{\oplus n_i} \quad \text{for some } n_i \geq 1 \ (i = 1, \cdots, r) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成立する。

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

${}_AA$ が余生成元であることを示すには、任意の既約な左 A-加群に対して、その単射的外皮が ${}_AA$ のある部分加群と同型になることを示せばよい (補題 3-41)。

$(*)$ により、各 $I(V_i)$ は $(A_A)^*$ の直既約な直和因子である。

A は準フロベニウス代数なので、各 i について

$${}^{\exists}A_i：{}_AA \text{ の直既約な直和因子 s.t. } A_i \cong I(V_i)$$

となる。このことは、任意の既約な左 A-加群に対して、その単射的外皮が ${}_AA$ のある部分加群と同型になることを意味する。故に、${}_AA$ は余生成元である。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

${}_AA$ が単射的なことを示すには、${}_AA$ を直既約分解したときに、その各直和因子が単射的になることを示せばよい (演習 1-56(2))。一般に、

$$\sharp\{{}_AA \text{ の直既約な直和因子の完全代表系}\} = \sharp\{\text{既約な左 } A\text{-加群の完全代表系}\} = r$$

である (定理 3-11) が、${}_AA$ は余生成元であるので、各 $I(V_i)$ は ${}_AA$ の直既約な直和因子に同型となる (系 3-42)。したがって、${}_AA$ の直既約な直和因子の完全代表系は $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ に (同型を除いて) 一致しなければならない。このことは、${}_AA$ を直既約分解したときの各直和因子が単射的な左 A-加群 $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ のいずれかに同型になることを意味する。これで、${}_AA$ が単射的なことが示された。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

${}_AA$ を直既約な部分加群の直和に分解する：${}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \quad (A_i$ ：直既約, $i = 1, \cdots, r)$.

${}_AA$ が単射的なことから、各 A_i $(i = 1, \cdots, r)$ は単射的 (演習 1-56(2)) かつ直既約である。また、$A_1, \cdots, A_n$ の中で互いに同型でない左 A-加群の個数は r である (定理 3-11) であるから、$A_1, \cdots, A_r$ をその完全代表系とすると、これらは互いに同型でない単射的かつ直既約な左 A-加群である。よって、適当な番号のつけかえの後、$A_i \cong I(V_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$ とならなければならない。

$A_1, \cdots, A_r$ は ${}_AA$ の直既約な直和因子の完全代表系、$I(V_1), \cdots, I(V_r)$ は $(A_A)^*$ の直既約な直和因子の完全代表系であり、各 $i = 1, \cdots, r$ に対して $A_i \cong I(V_i)$ が成り立つから A は準フロベニウス代数である。

以上で、(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) が証明された。

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)：

${}_AA$ は単射的であると仮定する。

射影的な左 A-加群 V はある自由左 A-加群の直和因子に同型である (命題 1-31) から、V が単射的であることを示すには、演習 1-56 の下の注意から、自由左 A-加群が単射的なことを示せばよい。

A は準フロベニウス代数なので左正則加群 ${}_AA$ は単射的であり (定理 3-46)、A は左 Noether 代数である ($\because \dim A < \infty$) から、単射的加群の (有限個あるいは無限個の) の直和は単射的である (命題 3-16)。

このことから、自由左 A-加群は単射的であることがわかる ($\because$ 自由左 A-加群は左正則加群 ${}_AA$ のいくつかの直和に同型)。故に、射影的な左 A-加群は単射的であることが示された。

逆に、任意の射影的左 A-加群が単射的であると仮定する。左正則加群 ${}_AA$ は射影的である (命題 1-31 の証明の下の注意参照)。したがって、仮定により、${}_AA$ は単射的である。

最後に、(i),(ii),(iii) と (v) の同値性を示す。

(i), (ii), (iii) $\Longleftrightarrow$ (v)：

${}_AA$ は単射的なので、命題 3-48 により、任意の右イデアル Y について $r(l(Y)) = Y$ となる。

X を任意の左イデアルとする。

$$X \subset l(r(X))$$

となることは消去作用素 r と l の定義から直ちにわかる。逆向きの包含関係を示す。

$X = A$ のときは $A \subset l(r(A)) \subset A$ より $l(r(A)) = A$ を得る。

$X \neq A$ のときを考える。$l(r(X)) \subset X$ を示すには、

$$a \notin X \quad \Longrightarrow \quad a \notin l(r(X)) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。

$a \notin X$ であるような $a \in A$ を任意にとる。${}_AA$ は余生成元であるので、

$$^{\exists} f : A/X \longrightarrow A \ : \ \text{左 } A\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad f(\bar{a}) \neq 0$$

となる。但し、$\bar{a}$ は a の属する X による剰余類を表わす。

$\because$)

任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(A/X, A)$ について、$f(\bar{a}) = 0$ になったとすると、

$$\bar{a} \in \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_A(A/X,A)} \mathrm{Ker} f = \{0\}$$

となり、$a \notin X$ としたことに矛盾する。 $\Box$

$\pi : A \longrightarrow A/X$ を自然な射影とする。このとき、

$$0 = (f \circ \pi)(X) = X(f \circ \pi)(1)$$

となる。したがって、

$$(f \circ \pi)(1) \in r(X)$$

となる。さらに、

$$a(f \circ \pi)(1) = (f \circ \pi)(a) = f(\bar{a}) \neq 0$$

であるから、

$$a \notin l(r(X))$$

を得る。これで、$(*)$ が示された。

(vi) $\Longleftrightarrow$(i), (ii), (iii)

命題 3-48 により、任意の左イデアル X, Y に対して、$r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$ となることを示せばよい。

仮定により、

$$\begin{aligned} l(r(X \cap Y)) = X \cap Y &= l(r(X)) \cap l(r(Y)) \\ &= l(r(X) + r(Y)) \end{aligned}$$

が成り立つ。この両辺に r を作用させて、

$$r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$$

を得る。

これで、(i) から (v) までのすべての命題が同値になることが示された。 (Q.E.D.)

定理 3-46 の応用として次の結果が得られる。

系 3-49

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数

V：既約な左 A-加群

$\Longrightarrow$ $I(V)$：射影的

(proof)

準フロベニウス代数の左正則加群は単射的かつ余生成元である (定理 3-46) から、$V_1, \cdots, V_r$ を既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系とすると、それらの単射的外皮 $I(V_1), \cdots, I(V_r)$ について

$$_AA \cong \bigoplus_{i=1}^{r} I(V_i)^{\oplus n_i} \quad \text{for some } n_i \geq 1 \ (i = 1, \cdots, r)$$

が成立する (命題 3-44)。左 A-加群として $V \cong V_i$ ならば、左 A-加群として $I(V) \cong I(V_i)$ であるから (補題 3-21)、$I(V)$ は左正則加群 ${}_AA$ の直既約な直和因子となる。故に、$I(V)$ は射影的である (命題 1-31)。 (Q.E.D.)

次の結果も定理 3-46 の系である。

系 3-50

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数とする。このとき、写像

$$\begin{array}{ccc} \{A \text{ の左イデアル全体}\} & \longrightarrow & \{A \text{ の右イデアル全体}\} \\ \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & r(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\} \end{array}$$

は全単射であり、左イデアル X_1, X_2 に対して

(i) $r(X_1 + X_2) = r(X_1) \cap r(X_2)$

(ii) $r(X_1 \cap X_2) = r(X_1) + r(X_2)$

(iii) $X_1 \subset X_2 \iff r(X_2) \subset r(X_1)$

が成立する。

(proof)

$\mathcal{L} = \{A \text{ の左イデアル全体}\},\ \mathcal{R} = \{A \text{ の右イデアル全体}\}$ とおく。

定理 3-46 により、2 つの写像

$$\begin{array}{c} r : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{R}, \quad X \longmapsto r(X) \\ l : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L}, \quad X \longmapsto l(X) \end{array}$$

は互いに他の逆写像である。したがって、特に、r は全単射である。

$X_1, X_2 \in \mathcal{L}$ とする。

(i) は r の定義から直ちに成立することがわかる。

(ii) 定理 3-46 により ${}_AA$ は単射的であり、したがって、命題 3-48 により $r(X_1 \cap X_2) = r(X_1) + r(X_2)$ が成り立つ。

(iii)「$\Longrightarrow$」は r の定義からすぐに成立することがわかる。「$\Longleftarrow$」を示す。

$Y_1 = r(X_1),\ Y_2 = r(X_2)$ とおくと、仮定により $Y_1 \supset Y_2$ であるから $l(Y_1) \subset l(Y_2)$ を得る。

$$l(Y_1) = l(r(X_1)) = X_1, \quad l(Y_2) = l(r(X_2)) = X_2$$

であるから、$X_1 \subset X_2$ となることが示された。 (Q.E.D.)

注意：上と同様の結果は、左消去作用素 l についても成り立つ。

演習 3-25

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

$A \oplus B$：準フロベニウス代数 $\iff$ $A,\ B$：準フロベニウス代数

となることを示せ。

解；

・「$\Longrightarrow$」の証明：$A \oplus B$ の任意の左イデアル X と右イデアル Y に対して $l(r(X)) = X$ かつ $r(l(Y)) = Y$ となることを示せばよい (定理 3-46)。

$A \oplus B$ の左イデアル X は

$$X = X_1 \oplus X_2 \ (X_1 : A \text{ の左イデアル}, \ X_2 : B \text{ の左イデアル})$$

と書くことができる (演習 1-3)。このとき、

$$\begin{aligned} r(X) &= \{(a,b) \in A \oplus B \mid X(a,b) = 0\} \\ &= \{(a,b) \in A \oplus B \mid X_1 a = 0, \ X_2 b = 0\} \\ &= r(X_1) \oplus r(X_2) \end{aligned}$$

を得る。同様にして、$A \oplus B$ の右イデアル Y は

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \qquad (Y_1 : A \text{ の右イデアル}, \ Y_2 : B \text{ の右イデアル})$$

と書くことができ (演習 1-3)、

$$l(Y) = l(Y_1) \oplus l(Y_2)$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} l(r(X)) &= l(r(X_1) \oplus l(X_2)) = l(r(X_1)) \oplus l(r(X_2)) \overset{\substack{A,B\text{ は準フロベニウス代数} \\ \downarrow}}{=} X_1 \oplus X_2 = X \\ r(l(Y)) &= r(l(Y_1) \oplus l(Y_2)) = r(l(Y_1)) \oplus r(l(Y_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ A,B\text{ は準フロベニウス代数}}}{=} Y_1 \oplus Y_2 = Y \end{aligned}$$

を得る。

故に、$A \oplus B$ は準フロベニウス代数である (定理 3-46)。

・「$\Longleftarrow$」の証明：A の左イデアル I に対して $I \oplus B$ は $A \oplus B$ の左イデアルである。このとき、

$$I \oplus B \underset{\substack{\uparrow \\ A \oplus B\text{ は準フロベニウス代数}}}{=} l(r(I \oplus B)) = l(r(I) \oplus r(B)) = l(r(I) \oplus 0) = l(r(I)) \oplus l(0) = l(r(I)) \oplus B$$

を得る。

故に、$I = l(r(I))$ が成り立つ。また、A の右イデアル J に対して $J \oplus B$ は $A \oplus B$ の右イデアルである。そして $J \oplus B = r(l(J \oplus B)) = r(l(J)) \oplus B$ となることから、$J = r(l(J))$ を得る。よって、A は準フロベニウス代数である (定理 3-46)。同様にして、B が準フロベニウス代数であることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 3-26

代数が準フロベニウス代数であるという性質は、部分代数や商代数に遺伝しないことを示せ。

解；

全行列代数 $M_2(\boldsymbol{k})$ はフロベニウス代数 (例題 1-28) なので準フロベニウス代数である (命題 3-45)。一方、その部分代数

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{k} \right\}$$

は準フロベニウス代数ではない (演習 1-58、定理 3-46)。よって、準フロベニウス代数であるという性質は、部分代数に遺伝しない。

２変数多項式代数 $\boldsymbol{k}[X,Y]$ の商代数

$A := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1}, Y^{n+1}), \quad B := \boldsymbol{k}[X,Y]/(X^{n+1}, X^nY, X^{n-1}Y^2, \cdots, XY^n, Y^{n+1})$

を考える。A はフロベニウス代数 (演習 1-52) なので準フロベニウス代数である。一方、その商代数になっている B は左正則加群が単射的でない (演習 3-12) ので、準フロベニウス代数でない (定理 3-46)。よって、準フロベニウス代数であるという性質は、商代数に遺伝しない。

(Q.E.D.)

演習 3-27

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数

V：左 A-加群　とする。このとき、

$$V\text{：単射的} \iff V\text{：射影的}$$

となることを示せ。

解；

射影的な左 A-加群が単射的なことは定理 3-46 で示されている。

V を単射的な左 A-加群とする。

A は左 Artin 代数であるから、V は既約な部分加群の単射的外皮の直和である (定理 3-27(2))：

$$V = \bigoplus_{i \in I} I(U_i) \qquad (U_i \text{ は既約な部分加群})$$

A は準フロベニウス代数であるから、既約加群の単射的外皮は射影的である (系 3-49)。よって、各 $I(U_i)$ は射影的である。

射影的な部分加群の直和は射影的であるから、$\bigoplus_{i \in I} I(U_i) = V$ は射影的である。　(Q.E.D.)

注意：実は体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数について、次の 3 つは同値である (Faith-Walker)。

(i) A は準フロベニウス代数である。

(ii) 任意の射影的な左 A-加群は単射的である。

(iii) 任意の単射的な左 A-加群は射影的である。

(i) と (ii) の同値性は定理 3-46 で示した。(i) と (iii) の同値性の証明は易しくない。証明については、F.Kasch・著『Modules and rings』p.352—p.361 参照)。

演習 3-28

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

A と B が森田同値のとき、

$$A\text{：準フロベニウス代数} \iff B\text{：準フロベニウス代数}$$

となることを示せ。

解；

まず、A と B が森田同値のとき、

$$A\text{：有限次元} \iff B\text{：有限次元}$$

となることに注意する (定理 1-58 の証明の下の注意参照)。

B は準フロベニウス代数であると仮定する。

定理 3-46 により、任意の有限生成射影的な左 A-加群 V が単射的になることを示せばよい。すなわち、単射的な左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対して、$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V)$ が全射になることを証明すればよい。

F は完全である (演習 1-83) から、$F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ も単射的な左 B-加群準同型となる。

また、F は有限生成射影的左 A-加群を有限生成射影的左 B-加群に写す (演習 1-85) から、$F(B)$ は有限生成射影的左 B-加群である。

B は準フロベニウス代数であるから、${}_BB$ は単射的である (定理 3-46)。したがって、

$$F(f)^* : \mathrm{Hom}_B(F(N), F(V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(M), F(V)) \text{ は全射}$$

になる。可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(N, V) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_A(M, V) \\
{\scriptstyle F(N,V)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(M,V)} \\
\mathrm{Hom}_B(F(N), F(V)) & \xrightarrow[F(f)^*]{} & \mathrm{Hom}_B(F(M), F(V))
\end{array}$$

において、$F(X, V) : \mathrm{Hom}_A(X, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(X), F(V)),\ \varphi \longmapsto F(\varphi),\ (X = N, M)$ は全単射であるから、

$$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, V) \text{ も全射}$$

であることがわかる。

こうして、A は準フロベニウス代数であることが示された。 (Q.E.D.)

演習 3-29

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

$K/\boldsymbol{k}$：体の拡大　とする。

$$A\text{：準フロベニウス代数} \implies A^K\text{：準フロベニウス代数}$$

となることを示せ。

解；

A が準フロベニウス代数ならば、A は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元である。$\dim_K(A^K) = \dim_{\boldsymbol{k}} A$ であるから、A^K も K 上有限次元である。

$${}_AA = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m \quad \text{：}{}_AA \text{ の直既約分解}$$

とする。このとき、

$${}_{A^K}A^K = ({}_AA)^K \cong A_1^K \oplus A_2^K \oplus \cdots \oplus A_m^K \text{ as left } A^K\text{-modules}$$

となる (演習 1-74)。同様に、

$$A_A{}^* = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n \quad \text{：}A_A{}^* \text{ の直既約分解}$$

とすると、

$$(A^K_{A^K})^* = (A_A{}^K)^* \overset{\text{系 1-49}}{\cong} (A_A{}^*)^K \cong B_1^K \oplus B_2^K \oplus \cdots \oplus B_n^K \quad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

となる。今、各 A_i^K $(i=1,\cdots,m)$, B_j^K $(j=1,\cdots,n)$ は直既約とは限らないので、これらをそれぞれ

$$A_i^K = X_{i1} \oplus \cdots \oplus X_{is(i)}$$
$$B_j^K = Y_{j1} \oplus \cdots \oplus Y_{jt(j)}$$

のように、直既約な部分加群 $X_{i1},\cdots,X_{is(i)}$ および $Y_{j1},\cdots,Y_{jt(j)}$ の直和に分解する。A は準フロベニウス代数であるから、

$$\begin{cases} {}^\forall i=1,\cdots,m,\ {}^\exists j=1,\cdots,n \ \text{ s.t. } \ A_i \cong B_j \\ {}^\forall l=1,\cdots,n,\ {}^\exists k=1,\cdots,m \ \text{ s.t. } \ B_l \cong A_k \end{cases}$$

となる。$A_i \cong B_j$ であるとすると、

$$X_{i1} \oplus \cdots \oplus X_{is(i)} = A_i^K \cong B_j^K = Y_{j1} \oplus \cdots \oplus Y_{jt(j)} \quad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

となる。Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理 (定理 3-6) から、$s(i)=t(j)$ であり、適当な番号のつけ替えののちに、任意の $\alpha=1,\cdots,s(i)$ に対して

$$X_{i\alpha} \cong Y_{j\alpha} \quad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

となる。このことは、A^K が準フロベニウス代数になることを意味する。 (Q.E.D.)

演習 3-30

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数 とする。
次の 4 つは同値であることを示せ。

(i) A は左 Artin 的
(ii) A は右 Artin 的
(iii) A は左 Noether 的
(iv) A は右 Noether 的

解；

Hopkins の定理 (演習 2-14) により、(i) $\Longrightarrow$ (iii) および (ii) $\Longrightarrow$ (iv) が成り立つ。よって、(iii) $\Longrightarrow$ (ii) および (iv) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) の証明：

A の右イデアルの降鎖列 $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots\cdots$ を考える。

この降鎖列に左消去作用素 l を適用すると、

$$l(X_1) \subset l(X_2) \subset l(X_3) \subset \cdots\cdots$$

という左イデアルの昇鎖列が得られる (系 3-50 参照)。A は左 Noether 的であるから、この昇鎖列は有限で止まる：

$${}^\exists n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ l(X_n) = l(X_{n+1}) = l(X_{n+2}) = \cdots\cdots$$

準フロベニウス代数は再消去性をもつ (定理 3-36) ので、これに右消去作用素 r を適用して

$$X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots\cdots$$

を得る。よって、A は右 Artin 的である。

同様にして、A の左イデアルの降鎖列 $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots\cdots$ に対して $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots\cdots$ となる $n \in \mathbb{N}$ を見つけることができる (今度は $l(r(X)) = X$ を用いる) ので、(iv) $\Longrightarrow$ (i) も成り立つことがわかる。 (Q.E.D.)

§9. 準フロベニウス代数における忠実加群の特徴づけ

表現 $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}W$ が単射、すなわち、代数の埋め込みになっているとき、**忠実** (*faithful*) であると呼ばれる。この条件を加群の言葉で言い換えると「$aW = 0$ となる $a \in A$ は 0 のみ」となる (p.16 を参照)。例えば、左正則加群 ${}_AA$ は忠実である。忠実な加群の性質はもともとの代数 A の性質に非常によく反映される。ここでは、準フロベニウス代数上の忠実加群は「正則加群のすべての直既約な直和因子を、直既約な直和因子として含む加群」として特徴付けられることを示す。

定理 3-51

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数
W：有限生成左 A-加群　とする。このとき、次が成り立つ。
W：忠実
　$\Longleftrightarrow$ 左正則加群 ${}_AA$ の任意の直既約な直和因子が W の直既約な直和因子に同型

定理を証明するために、いくつか補題を用意する。

補題 3-52

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数
$e \in A$：原始冪等元
$\Longrightarrow$ $er(\mathrm{rad}A)$: A の極小右イデアル
　$l(\mathrm{rad}A)e$: A の極小左イデアル

(proof)
$er(\mathrm{rad}A)$ が A の極小右イデアルであることを示す。
まず、次の等式が成り立つことに注意する。

$$er(\mathrm{rad}A) = r(A(1-e) + (\mathrm{rad}A)e)$$

$\because$)
右消去作用素 r の定義から、

$$r(A(1-e) + (\mathrm{rad}A)e) = r(A(1-e)) \cap r((\mathrm{rad}A)e)$$

となる。$r(A(1-e)) = eA$ であるから、

$$er(\mathrm{rad}A) = eA \cap r((\mathrm{rad}A)e) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。
$p \in eA$ に対しては $ep = p$ であるから、

$$((\mathrm{rad}A)e)p = (\mathrm{rad}A)(ep) = (\mathrm{rad}A)p$$

となる。よって、

$$p \in r((\mathrm{rad}A)e) \implies p \in r(\mathrm{rad}A) \implies p = ep \in er(\mathrm{rad}A)$$

が成り立つ。逆に、$p \in er(\mathrm{rad}A)$ ならば $p = ea,\ a \in r(\mathrm{rad}A)$ と書けて、

$$((\mathrm{rad}A)e)p = ((\mathrm{rad}A)e)ea = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{rad}A\ \text{は}\ A\ \text{の両側イデアルより}}}{((\mathrm{rad}A)e)a \subset} (\mathrm{rad}A)a = 0$$

ゆえ、$p \in \mathrm{rad}((\mathrm{rad}A)e)$ となる。よって、

$$p \in er(\mathrm{rad}A) \implies p \in eA \cap r((\mathrm{rad}A)e)$$

が成り立つ。

これで $(*)$ が示された。 □

この等式と A が準フロベニウス代数であることから、

$$\begin{aligned} er(\mathrm{rad}A)\ \text{が}\ A\ \text{の極小右イデアル} &\iff r(A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e)\ \text{が}\ A\ \text{の極小右イデアル} \\ &\iff A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e\ \text{が}\ A\ \text{の極大左イデアル} \end{aligned}$$

が成り立つ (系 3-50(iii))。したがって、$A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e$ が A の極大左イデアルであることを示せばよい。

いま、左 A-加群として

$$A/(A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e) \underset{\substack{\uparrow \\ e\ \text{は冪等元なので、}A(1-e)\cap Ae=0}}{=} (A(1-e)\oplus Ae)/(A(1-e)\oplus(\mathrm{rad}A)e) \cong Ae/(\mathrm{rad}A)e)$$

であるが、$Ae/(\mathrm{rad}A)e$ は既約な左 A-加群なので (定理 3-11)、$A/(A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e)$ も既約になる。このことは、$A(1-e)+(\mathrm{rad}A)e)$ が A の左イデアルとして極大なことを意味する。こうして、$er(\mathrm{rad}A)$ が A の極小右イデアルであることが示された。

同様にして、

$$l(\mathrm{rad}A)e = l((1-e)A + e\,\mathrm{rad}A)$$

であることがわかるから、$l(\mathrm{rad}A)e$ は A の極小左イデアルである。 (Q.E.D.)

系 3-53

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数 とする。
このとき、$l(\mathrm{rad}A) = r(\mathrm{rad}A)$ が成り立つ。したがって、左正則加群の台座と右正則加群の台座は一致する。

(proof)

${}_AA$ を直既約分解して、

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

と表わす。単位元 $1 \in A$ をこの直和分解に応じて、

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \quad e_i \in A_i\ (1 \le i \le n)$$

と書き表わすと、各 e_i は A の原始冪等元となる (補題 1-1、補題 1-2)。このとき、前補題から次を得る。

$$r(\mathrm{rad}A)\mathrm{rad}A = \sum_{i=1}^{n} e_i r(\mathrm{rad}A)\mathrm{rad}A = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} r(\mathrm{rad}A) = 1 \cdot r(\mathrm{rad}A) \subset \sum_{i=1}^{n} e_i r(\mathrm{rad}A). \\ \text{一方、}\mathrm{rad}A \text{ は } A \text{ の右イデアルなので} \\ e_i r(\mathrm{rad}A) \subset r(\mathrm{rad}A). \\ \therefore\ r(\mathrm{rad}A) = \sum_{i=1}^{n} e_i r(\mathrm{rad}A) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathrm{rad}A = \bigcap_{M\,:\,\text{既約な右 } A\text{-加群}} \mathrm{ann}M, \\ \mathrm{ann}M = \{a \in A \mid Ma = 0\} \\ \text{であるが、前補題から、} e_i r(\mathrm{rad}A) \text{ は} \\ \text{右正則加群の既約な部分加群となるので、} \\ e_i r(\mathrm{rad}A)\mathrm{rad}A = 0 \text{ を得る。} \end{array}\right)$$

このことは、$r(\mathrm{rad}A) \subset l(\mathrm{rad}A)$ となることを意味する。

同様にして、

$$\mathrm{rad}A l(\mathrm{rad}A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rad}A l(\mathrm{rad}A) e_i = 0$$

となることが示されるから、$l(\mathrm{rad}A) \subset r(\mathrm{rad}A)$ を得る。

これで、$r(\mathrm{rad}A) = l(\mathrm{rad}A)$ が示された。また、このことと命題 3-37(1) より、左正則加群の台座と右正則加群の台座は一致することがわかる。 (Q.E.D.)

補題 3-54

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数

$e \in A$：原始冪等元　とする。このとき、

(1) 直既約加群 Ae は唯一の極小部分加群として $l(\mathrm{rad}A)e$ を持つ。

(2) Ae は $l(\mathrm{rad}A)e$ の単射的外皮である。

(proof)

補題 3-52 により、$l(\mathrm{rad}A)e \subset Ae$ は Ae の極小な部分加群である。

また、${}_AA$ は単射的である (定理 3-46) から、その直和因子 Ae も単射的である (演習 1-56)。

$${}_AA = Ae \oplus A(1-e)$$

よって、Ae は単射的かつ直既約な左 A-加群である。

命題 3-31 より、Ae は $l(\mathrm{rad}A)e$ の単射的外皮である。

また、同じ命題 3-31 より、V_1, V_2 を Ae の既約な部分加群とすると、$V_1 \cap V_2 \neq 0$ となることがわかる。

V_i $(i = 1, 2)$ の既約性により、$V_1 = V_1 \cap V_2 = V_2$ を得る。よって、Ae の既約な部分加群は唯一である。 (Q.E.D.)

補題 3-55

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数

$e \in A$：原始冪等元　とする。

$I := l(\mathrm{rad}A)e$ とおく。

左 A-加群 V が $IV \neq 0$ を満たすならば、V は Ae と同型な部分加群を直和因子として含む。

(proof)

$IV \neq 0$ より、$Iv \neq 0$ となる $v \in V$ が存在する。

$v' = ev$ $(\neq 0)$ とおく。

$v' = ev'$ かつ $Iv' = Iv \neq 0$ が成り立つ。

この v' を改めて v とおくと、v は

$$v \neq 0 \text{ かつ } v = ev \text{ かつ } Iv \neq 0$$

を満たしている。$\theta : Ae \longrightarrow Av$ を

$$\theta(ae) = aev = av \qquad (a \in A)$$

により定義する。θ は全射な左 A-加群準同型である。

さらに、θ は単射でもある。

実際、もし、$\mathrm{Ker}\theta \neq 0$ であるとすると、I は Ae の唯一の極小部分加群であるから (補題 3-54)、$I \subset \mathrm{Ker}\theta$ となる。ところが、$Iv \neq 0$ ゆえ、$I \not\subset \mathrm{Ker}\theta$ である。ここに矛盾が生じた。故に、$\mathrm{Ker}\theta = 0$ であり、したがって、θ は単射である。

$$\therefore \quad Ae \cong Av \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

Ae は単射的 (補題 3-54) であるから、Av もそうである。したがって、Av は V の直和因子である (命題 1-32)。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 3-51)

${}_AA$ の直既約分解

$${}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

を考える。適当に番号をつけかえることにより、

$A_1, \cdots, A_r$ は互いに同型でない、かつ、各 A_i $(i = r{+}1, \cdots, n)$ は $A_1, \cdots, A_r$ のいずれかに同型

を満たしていると仮定しても一般性を失わない。

i. 十分性：仮定により、ある左 A-加群 W' により

$$W \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_r \oplus W' \quad \text{as left } A\text{-modules}$$

となる。

$a \in A$ が $aW = 0$ を満たしていると仮定する。

このとき、任意の $i = 1, \cdots, r$ について $aA_i = 0$ が成り立つ。

したがって、任意の $i = 1, \cdots, n$ について $aA_i = 0$ が成り立つ。これは $aA = 0$ となることを意味する。$a = a \cdot 1 \in aA = 0$ ゆえ、$a = 0$ を得る。

よって、W は忠実である。

ii. 必要性：W は有限生成なので、有限個の直既約な部分加群の直和に分解される (Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理)：

$$W = \bigoplus_{j=1}^{m} W_j \qquad (W_j \text{ は直既約な部分加群, } j = 1, \cdots, r)$$

$i=1,\cdots,r$ を任意にとり、固定する。このとき、$W_1,\cdots,W_m$ の中に A_i と同型なものが存在することを示す。

A_i はある原始冪等元 $e\in A$ を用いて $A_i=Ae$ と表わすことができる。

$I:=l(\mathrm{rad}A)e$ とおく。W は忠実なので、$IW\neq 0$ である ($\because$ もし、$IW=0$ であるとすると、W の忠実性から $I=0$ となるが、これは I の極小性 (補題 3-52) に矛盾する)。

したがって、

$$^{\exists}j\in\{1,\cdots,m\}\ \text{ s.t. }\ IW_j\neq 0$$

となる。補題 3-55 より、W_j は $Ae=A_i$ と同型な部分加群を直和因子として含む。しかしながら、W_j は直既約であるから W_j 自身が A_i と同型でなければならない。

よって、$r\leq m$ であり、適当な番号のつけかえを行って

$$W_1\cong A_1,\ W_2\cong A_2,\ \cdots,W_r\cong A_r\ \text{ as left } A\text{-modules}$$

となることがわかる。これで、定理の証明が終わった。 (Q.E.D.)

演習 3-31

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の準フロベニウス代数

$e,\ f\in A$：原始冪等元　とする。このとき、次を示せ。

$$\begin{aligned}&Ae\cong Af\quad \text{as left } A\text{-modules}\\ &\Longleftrightarrow\quad l(\mathrm{rad}A)e\cong l(\mathrm{rad}A)f\quad \text{as left } A\text{-modules}\end{aligned}$$

解；

i. 必要性：$Ae\cong Af$ であると仮定する。$\varphi:Ae\longrightarrow Af$ を左 A-加群の同型とする。

$$\begin{aligned}\varphi(l(\mathrm{rad}A)e)&\subset l(\mathrm{rad}A)\varphi(e)\\ &\subset l(\mathrm{rad}A)Af\\ &\subset l(\mathrm{rad}A)f\end{aligned}$$

$\mathrm{rad}A$ は A の右イデアル

となる。同様にして、$\varphi^{-1}(l(\mathrm{rad}A)f)\subset l(\mathrm{rad}A)e$ となることがわかるから、

$$\varphi(l(\mathrm{rad}A)e)=l(\mathrm{rad}A)f$$

を得る。

ii. 十分性：左 A-加群として $l(\mathrm{rad}A)e\cong l(\mathrm{rad}A)f$ であると仮定する。

A は準フロベニウス代数であるから、$Ae,\ Af$ はそれぞれ $l(\mathrm{rad}A)e,\ l(\mathrm{rad}A)f$ の単射的外皮である (補題 3-54(2))。同型な加群の単射的外皮は同型である (補題 3-21) から、Ae と Af は左 A-加群として同型である。 (Q.E.D.)

第４章　分離的代数

§1. 分離的代数の定義

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とする。任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して、K 上の代数 $A^K := K \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ が半単純になるとき、A は分離的であると呼ばれる。この節では、代数が分離的であるための必要十分条件のうち、その定義から直接導かれる結果について述べる。

定義 4-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

A：**分離的** (*separable*) $\iff$ 任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して A^K は半単純

注意：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A が分離的ならば、任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して、A^K は分離的である。

(proof)

E を K の任意の拡大体とする。このとき、

$$(A^K)^E = E \otimes_K (K \otimes_{\boldsymbol{k}} A) \cong (E \otimes_K K) \otimes_{\boldsymbol{k}} A \cong E \otimes_{\boldsymbol{k}} A = A^E \qquad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

が成り立つ (演習 1-13(1))。具体的には、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての同型写像 $f : (A^K)^E \longrightarrow A^E$ が

$$\xi \otimes_K (x \otimes_{\boldsymbol{k}} a) \longmapsto (\xi x) \otimes_{\boldsymbol{k}} a \qquad\qquad (\xi \in E,\ x \in K,\ a \in A)$$

によって与えられる。この f は E 上の代数としての同型写像にもなっていることが確かめられる ($\because$ E と K の可換性に注意)。

A の分離性により、$(A^K)^E \cong A^E$ は半単純である。

よって、A^K は K 上分離的な代数である。 □

次の補題は定義から直接わかる。

補題 4-1

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$\bar{\boldsymbol{k}}$：$\boldsymbol{k}$ の代数的閉包　とする。このとき、

A：分離的 $\iff$ $A^{\bar{\boldsymbol{k}}}$：半単純

(proof)

必要性は明らかであるから、十分性についてのみ示す。

$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とし、$\overline{K}$ を K の代数的閉包とする。

$\bar{\boldsymbol{k}} \subset \overline{K}$ であると仮定しても一般性を失わない。

$\because$)

$L = \{\alpha \in \overline{K} \mid \alpha$ は $\bar{\boldsymbol{k}}$ 上代数的$\}$ とおくと、L は $\bar{\boldsymbol{k}}$ の代数的閉包になる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』補題 2-18 参照)。

$\boldsymbol{k}$ の代数的閉包の一意性 (系 A-5) により、

$$^{\exists}\varphi : \bar{\boldsymbol{k}} \longrightarrow L :\text{体の同型}\ \ \text{s.t.}\ \ \varphi|_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{k}}$$

となる。よって、$L = \bar{\boldsymbol{k}}$ であるとしてよい。 $\square$

$A^{\bar{\boldsymbol{k}}}$ は代数閉体 $\bar{\boldsymbol{k}}$ 上の有限次元半単純代数であるから、

$$A^{\bar{\boldsymbol{k}}} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{n_i}(\bar{\boldsymbol{k}}) \qquad \text{as algebras}$$

となる (系 2-22)。よって、

$$A^{\overline{K}} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{n_i}(\overline{K}) \qquad \text{as algebras}$$

となる。

$\because$)

$$\begin{aligned} A^{\overline{K}} &= \overline{K} \otimes_{\bar{\boldsymbol{k}}} A \cong (\overline{K} \otimes_{\bar{\boldsymbol{k}}} \bar{\boldsymbol{k}}) \otimes_{\boldsymbol{k}} A \cong \overline{K} \otimes_{\bar{\boldsymbol{k}}} (\bar{\boldsymbol{k}} \otimes_{\boldsymbol{k}} A) \\ &\cong \overline{K} \otimes_{\bar{\boldsymbol{k}}} (\bigoplus_{i=1}^{n} M_{n_i}(\bar{\boldsymbol{k}})) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{K} \otimes_{\bar{\boldsymbol{k}}} M_{n_i}(\bar{\boldsymbol{k}})) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{n_i}(\overline{K}) \quad \square \end{aligned}$$

故に、$A^{\overline{K}}$ は半単純である。

$$A^{\overline{K}} \cong (A^K)^{\overline{K}}$$

であるから、A^K は半単純である (演習 2-3)。任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ について、A^K は半単純なることが示されたので、A は分離的である。 (Q.E.D.)

補題 4-2

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数とする。このとき、次が成り立つ。

$$A : 分離的 \iff \boldsymbol{k} \text{ の任意の有限次拡大体 } K \text{ に対して、} A^K \text{ は半単純}$$

(proof)

必要性は明らか。十分性を示す。

Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。補題 4-1 により、A^Ω が半単純になることを示せばよい。

K を条件

$$\boldsymbol{k} \subset K \subset \Omega, \qquad \dim_{\boldsymbol{k}} K < \infty$$

を満たす Ω の部分体とする。

A^K は仮定により、半単純であるから、$\mathrm{rad}(A^K) = 0$ である。

$K \otimes A \hookrightarrow \Omega \otimes A$ により、$A^K \subset \Omega \otimes A$ とみなし、$A^K \cap \mathrm{rad}(A^\Omega)$ を考える。

これは、A^K の冪零な両側イデアルである (定理 1-17)。

したがって、

$$A^K \cap \mathrm{rad}(A^\Omega) \subset \mathrm{rad}(A^K)$$

を得る。故に、

$$A^K \cap \mathrm{rad}(A^\Omega) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を得る。

さて、$x \in A^\Omega$ を任意にとる。このとき、

$$^\exists K : \boldsymbol{k} \text{ と } \Omega \text{ の中間体 s.t. } x \in A^K, \ \dim_{\boldsymbol{k}} K < \infty$$

となる。

$\because$)

$$x = \sum_{i=1}^m x_i \otimes a_i \qquad (x_i \in \Omega, \ a_i \in A)$$

と書く。各 $x_i \in \Omega$ はある多項式 $f_i(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ の Ω における根である。

$f_1(X), \cdots, f_m(X)$ の Ω における分解体を K とおくと、$x_i \in K$ $(i = 1, \cdots, m)$ であり、$\dim_{\boldsymbol{k}} K < \infty$ となる。 □

したがって、$x \in \mathrm{rad}(A^\Omega)$ のとき、$x \in A^K$ かつ $\dim_{\boldsymbol{k}} K < \infty$ を満たす、$\boldsymbol{k}$ と Ω の中間体 K をとると、$(*)$ から

$$x \in A^K \cap \mathrm{rad}(A^\Omega) = 0$$

を得る。故に、

$$\mathrm{rad}(A^\Omega) = 0$$

が得られた。これは、A^Ω が半単純なことを意味する。 (Q.E.D.)

演習 4-1

$A, \ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

$$A, \ B \text{ ：分離的} \iff A \oplus B \text{ ：分離的}$$

が成り立つことを示せ。

解；

$K/\boldsymbol{k}$ を任意の体の拡大とする。このとき、

$$(A \oplus B)^K \cong A^K \oplus B^K \qquad \text{as } K\text{-algebras}$$

が成り立つ (演習 1-74)。２つの代数の直和が半単純であるための必要十分条件は、それぞれの代数が半単純になることである (演習 2-2) から

$$(A \oplus B)^K \text{：半単純} \iff A^K, \ B^K \text{：半単純}$$

となる。このことから、

$$A, \ B \text{ ：分離的} \iff A \oplus B \text{ ：分離的}$$

を得る。 (Q.E.D.)

演習 4-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 とする。次を示せ。

(1) A：分離的 $\iff$ $Z(A)$：分離的

(2) A：分離的 $\iff$ A^{op}：分離的

解；

(1) $K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。演習 2-28 の下の注意により、

$$A^K\text{：半単純} \iff Z(A^K)\text{：半単純}$$

が成り立つ。

$$Z(A^K) = Z(K\otimes A) = Z(K)\otimes Z(A) = K\otimes Z(A) = Z(A)^K$$

となる (演習 1-7) から、

$$A^K\text{：半単純} \iff Z(A)^K\text{：半単純}$$

を得る。したがって、

$$A\text{：分離的} \iff Z(A)\text{：分離的}$$

が成り立つ。

(2) $K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。

K 上の代数として $(A^{\mathrm{op}})^K \cong (A^K)^{\mathrm{op}}$ である (演習 1-72) から、

$$A^K\text{：半単純} \underset{\text{演習 2-23}}{\iff} (A^K)^{\mathrm{op}}\text{：半単純} \iff (A^{\mathrm{op}})^K\text{：半単純}$$

となる。したがって、

$$A\text{：分離的} \iff A^{\mathrm{op}}\text{：分離的}$$

となることが示された。 (Q.E.D.)

注意：代数として、$\mathrm{End}_A({}_AA) \cong A^{\mathrm{op}}$ である (演習 1-11(2)) から、A が有限次元のとき、(1)(2) により、

$$\begin{aligned} A\text{：分離的} &\iff \mathrm{End}_A({}_AA)\text{：分離的} \\ &\iff Z(\mathrm{End}_A({}_AA))\text{：分離的} \end{aligned}$$

が成り立つ。

演習 4-3

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

左 A-加群 M が**分離的** (*separable*) であるとは、任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して、M^K が完全可約なときをいう。

次を示せ。

(1) M：分離的な左 A-加群、N：M の部分加群 $\Longrightarrow$ N：分離的

(2) 左 A-加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ に対して、

$$\bigoplus_{i\in I} M_i\text{：分離的} \iff \text{任意の } i\in I \text{ に対して } M_i\text{：分離的}$$

解；

(1) $K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。

M は分離的なので、M^K は完全可約である。

N^K は自然に M^K の部分加群とみなせる (演習 1-78)。

よって、完全可約加群の部分加群として、N^K は完全可約になる (補題 2-1)。

よって、N は分離的である。

(2) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ とおく。

・「$\Longrightarrow$」の証明：

各 M_i は M の部分加群とみなせるから、(1) により、分離的である。

・「$\Longleftarrow$」の証明：

任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して

$$M^K \cong \bigoplus_{i \in I} M_i^K \qquad \text{as left } A^K\text{-modules}$$

が成り立つ (演習 1-74)。したがって、

$$\begin{aligned} M_i\ ({}^{\forall} i \in I) : \text{分離的} &\Longrightarrow\ M_i^K\ ({}^{\forall} i \in I) : \text{完全可約} \\ &\Longrightarrow\ \bigoplus_{i \in I} M_i^K : \text{完全可約} \\ &\Longrightarrow\ M^K : \text{完全可約} \end{aligned}$$

となる。故に、M は分離的である。 (Q.E.D.)

注意：加群に対する分離性の定義により、次が直ちにわかる。

(1) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の分離的代数 A に対して、任意の左 A-加群は分離的である。

(2) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数とし、$K/\boldsymbol{k}$ を体の拡大とする。このとき、左 A-加群 M が分離的ならば、M^K は左 A^K-加群として分離的である。

演習 4-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：既約な有限次元左 A-加群 とする。

$D := (\mathrm{End}_A M)^{\mathrm{op}}$ とおく。

このとき、次を示せ。

(1) 体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して

$$M^K : \text{完全可約} \iff D^K : \text{半単純}$$

(2) M：分離的 $\iff$ D：分離的

解；

(1) 例題 1-52(1) の方法により、M は両側 (A, D)-加群とみなされる。

一方、K は両側 (K, K)-加群とみなされる (すなわち、正則両側 (K, K)-加群 ${}_K K_K$ を考える)。

左正則 K-加群 ${}_K K$ は既約である。

また、K-上の代数としての同型写像 $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}} \longrightarrow K$ が

$$f \longmapsto f(1), \qquad f \in (\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}}$$

によって与えられる (演習 1-11(2))。この同型の下で $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}} = K$ と同一視を行うと

(K への $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}}$ の右作用)=(K_K への K の右作用)

が成り立つ。

$\because$)

K への $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}}$ の右作用は次のようにして与えられる (例題 1-52(1))：

$$x \cdot f = f(x) \qquad (x \in K,\ f \in (\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}})$$

したがって、上で述べた同型写像 $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}} \longrightarrow K$ によって

$$x \cdot f = f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) \qquad (x \in K,\ f \in (\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}})$$

となる。このことは、$(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}} = K$ と同一視で、K への $(\mathrm{End}_K({}_K K))^{\mathrm{op}}$ の右作用が右正則作用と一致することを意味している。 □

さて、M は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元なので D 上有限次元であり、${}_K K$ は、当然、K 上有限次元であるから、命題 1-63 の仮定が満たされる。したがって、包含関係に関する順序集合として、

$$\{M^K \text{ の部分 } A^K\text{-加群全体}\} \cong \{D^K \text{ の左イデアル全体}\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。特に、M^K の極大部分 A^K-加群全体と D^K の極大左イデアル全体は 1 対 1 に対応する。これより、上の対応 $(*)$ の下で

$$\mathrm{rad}(M^K) = \bigcap_{N\,:\,M^K \text{ の極大部分加群}} N \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{rad}(D^K) = \bigcap_{I\,:\,D^K \text{ の極大左イデアル}} I$$

となる。$(*)$ は包含関係に関する順序を保つので、M^K の零部分加群は D^K の零左イデアルに対応しているから、

$$\mathrm{rad}(M^K) = \{0\} \iff \mathrm{rad}(D^K) = \{0\}$$

を得る。これを用いると

$$M^K：\text{完全可約} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 3-21}}}{\iff} \mathrm{rad}(M^K) = \{0\} \iff \mathrm{rad}(D^K) = \{0\} \underset{\substack{\uparrow \\ \dim_K(D^K) = \dim_{\boldsymbol{k}} D < \infty \text{ および定理 2-4}}}{\iff} D^K：\text{半単純}$$

となる。

(2) 加群と代数に対する分離性の定義と (1) から直ちに得られる。 (Q.E.D.)

§2. 分離性冪等元

有限次元代数が分離的かどうかは、分離性冪等元と呼ばれるよい性質を持った元が存在するかどうかで判定することができる。この節では、この事実を証明する。

代数 A に対して、包括代数と呼ばれる代数が定義されたことを思い出そう (第 1 章第 1 節参照)。包括代数は、ベクトル空間 $A^e := A \otimes A^{\mathrm{op}}$ に次のような積を導入することによって与えられる。

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (a \cdot a') \otimes (b * b') \qquad (a, a' \in A,\ b, b' \in A^{\mathrm{op}})$$

但し、$*$ は A^{op} の積を表わす：

$$a * b := b \cdot a \qquad (a, b \in A)$$

$\mu : A^e \longrightarrow A$ を $\mu(a \otimes b) = ab \ \ (a, b \in A)$ によって定義される線形写像とする。μ は代数 A の積を定義する写像に他ならない。

μ は左 A^e-加群準同型である。

$\because$)

任意の $\xi, \eta \in A^e$ に対して、$\mu(\xi \cdot \eta) = \xi \cdot \mu(\eta)$ となることを示めす。

μ の線形性により、

$$\xi = a \otimes b, \quad \eta = a' \otimes b' \qquad\qquad (a, a' \in A,\ b, b' \in A^{\mathrm{op}})$$

の場合に示せばよい。

$$\mu(\xi \cdot \eta) = \mu(aa' \otimes b * b') = \mu(aa' \otimes b'b) \quad A^e \text{ への } A^e \text{ の左作用は左正則作用で定義}$$

$$= (aa')(b'b) = a(a'b')b = (a \otimes b) \cdot (a'b') = (a \otimes b) \cdot \mu(a' \otimes b')$$

$\hookleftarrow$ A^e の A への左作用の定義

$$= \xi \cdot \mu(\eta)$$

よって、μ は左 A^e-加群準同型である。 $\square$

定義 4-2

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

$\kappa \in A^e$：A に対する**分離性冪等元**(*separability idempotent* for A)

$$\iff \begin{cases} \text{(i) } {}^\forall x \in A, \quad (x \otimes 1)\kappa = (1 \otimes x)\kappa \\ \text{(ii) } \mu(\kappa) = 1 \end{cases}$$

注意 1°：このノートでは、(i) の条件を満たす $\kappa \in A^e$ を山崎圭次郎『環と加群』に倣い、**準平均作用素**と呼ぶことにする。したがって、

$$\kappa \in A^e : \textbf{分離性冪等元} \iff \begin{cases} \text{(i) } \kappa \text{ は準平均作用素} \\ \text{(ii) } \mu(\kappa) = 1 \end{cases}$$

と書き直すことができる。

注意 2°： κ：A の準平均作用素

$\Longrightarrow$ $\kappa^2 = \mu(\kappa)\kappa$ となる。ここで、$\mu(\kappa) \in A$ と $\mu(\kappa) \otimes 1 \in A^e$ を同一視している。したがって、A に対する分離性冪等元は A^e における冪等元である。

(proof)

$\kappa = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ を準平均作用素とする。このとき、

$$\kappa^2 = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i)\kappa = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i)\kappa = \sum_{i=1}^n (a_i b_i \otimes 1)\kappa = (\mu(\kappa) \otimes 1)\kappa \quad \square$$

注意 3°：分離性冪等元の概念は、F. DeMeyer と E. Ingraham によって、可換環に対する Brauer 群の理論の研究のために導入された [21]。

例題 4-3

(1) $\boldsymbol{k}$ を体とする。n 次全行列代数 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ には分離性冪等元が存在する。
(2) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 $A,\ B$ に分離性冪等元が存在するならば、$A \oplus B$ にも分離性冪等元が存在する。

(proof)

(1) $\{E_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ を行列単位とする。このとき、$\kappa = \sum_{i=1}^{n} E_{i1} \otimes E_{1i}$ は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ に対する分離性冪等元である。これを示す。

i. κ が準平均作用素であること：任意の $a = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ に対して

$$\begin{aligned}(a \otimes 1)\kappa &= \sum_{i=1}^{n} aE_{i1} \otimes E_{1i} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}E_{k1} \otimes E_{1i} = \sum_{k=1}^{n} E_{k1} \otimes (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}E_{1i}) = \sum_{k=1}^{n} E_{k1} \otimes E_{1k}a \\ &= (1 \otimes a)\kappa\end{aligned}$$

となる。よって、κ は準平均作用素である。

ii. $\mu(\kappa) = 1$ であること：

$$\mu(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} E_{i1}E_{1i} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I_n$$

となる。よって、$\mu(\kappa) = 1$ である。

i. と ii. から、κ は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ に対する分離性冪等元である。

(2) $A,\ B$ に対する分離性冪等元をそれぞれ $\kappa_A,\ \kappa_B$ とおく。

$$\kappa_A = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes a'_i \ \in A \otimes A^{\mathrm{op}}, \qquad \kappa_B = \sum_{j=1}^{n} b_i \otimes b'_i \ \in B \otimes B^{\mathrm{op}}$$

と書く。このとき、$\kappa \in (A \oplus B)^e$ を

$$\kappa = \sum_{i=1}^{m} (a_i, 0) \otimes (a'_i, 0) + \sum_{j=1}^{n} (0, b_j) \otimes (0, b'_j)$$

により定める。κ は $A \oplus B$ に対する分離性冪等元である。これを示す。

i. κ が準平均作用素であること：

任意の $(a, b) \in A \oplus B$ に対して、

$$\begin{aligned}((a,b) \otimes (1,1))\kappa &= \sum_{i=1}^{m} (aa_i, b \cdot 0) \otimes (a'_i \cdot 1, 0 \cdot 1) + \sum_{j=1}^{n} (a \cdot 0, bb_j) \otimes (0 \cdot 1, b'_j \cdot 1) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (aa_i, 0) \otimes (a'_i, 0) + \sum_{j=1}^{n} (0, bb_j) \otimes (0, b'_j) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$((1,1) \otimes (a,b))\kappa = \sum_{i=1}^{m} (a_i, 0) \otimes (a'_i a, 0) + \sum_{j=1}^{n} (0, b_j) \otimes (0, b'_j b) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ここで、線形写像 $A^e \longrightarrow (A\oplus B)^e,\ \ a\otimes a' \longmapsto (a,0)\otimes(a',0)$ による $(a\otimes 1)\kappa_A = (1\otimes a)\kappa_A$ の像を考えて、

$$\sum_{i=1}^m (aa_i,0)\otimes(a'_i,0) = \sum_{i=1}^m (a_i,0)\otimes(a'_i a,0)$$

が得られ、線形写像 $B^e \longrightarrow (A\oplus B)^e,\ \ b\otimes b' \longmapsto (0,b)\otimes(0,b')$ による $(b\otimes 1)\kappa_B = (1\otimes b)\kappa_B$ の像を考えて、

$$\sum_{j=1}^n (0,bb_j)\otimes(0,b'_j) = \sum_{j=1}^n (0,b_j)\otimes(0,b'_j b)$$

が得られるので、①と②は等しい。故に、$((a,b)\otimes(1,1))\kappa = ((1,1)\otimes(a,b))\kappa$ が得られ、κ が準平均作用素であることが示された。

ii. $\mu_{A\oplus B}(\kappa)=1$ (但し、$\mu_{A\oplus B}$ は $A\oplus B$ の積) であること：
次の式変形より得られる。

$$\begin{aligned}
\mu_{A\oplus B} &= \sum_{i=1}^m (a_i a'_i,0) + \sum_{j=1}^n (0,b_j b'_j)\\
&= (\sum_{i=1}^m a_i a'_i,0) + (0,\sum_{j=1}^n b_j b'_j)\\
&= (1_A,0)+(0,1_B)\\
&= (1_A,1_B)
\end{aligned}$$

i. と ii. により、κ は $A\oplus B$ に対する分離性冪等元である。 (Q.E.D.)

この節の目標は、次の定理の証明である。

定理 4-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。
このとき、次の 3 つは同値である。

(i) A は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元であって、かつ、分離的である。
(ii) A には分離性冪等元が存在する。
(iii) A の積によって与えられる左 A^e-加群準同型 $\mu : A^e \longrightarrow A,\ \mu(a\otimes b)=ab$ に対して、ある左 A^e-加群準同型 $\psi : A \longrightarrow A^e$ が存在して、$\mu\circ\psi = \mathrm{id}_A$ となる。

(ii) と (iii) の同値性は直ちに得られる。

補題 4-5

定理 4-4 の (ii) と (iii) は同値である。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に関する次の 2 つの命題は同値である。
(ii) A には分離性冪等元が存在する。
(iii) A の積によって与えられる左 A^e-加群準同型 $\mu : A^e \longrightarrow A,\ \mu(a\otimes b)=ab$ に対して、ある左 A^e-加群準同型 $\psi : A \longrightarrow A^e$ が存在して、$\mu\circ\psi = \mathrm{id}_A$ となる。

(proof)

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

$\kappa \in A^e$ を A に対する分離性冪等元とする。このとき、$\psi : A \longrightarrow A^e$ を $\psi(a) = (a \otimes 1)\kappa,\ a \in A$ によって定義する。

ψ は左 A^e-加群準同型である。

$\because$)

ψ が線形写像であることは明らかなので、ψ が A^e の左作用を保つことを見る。

$a, b, x \in A$ とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\psi((a \otimes b) \cdot x) &= \psi(axb) = ((axb) \otimes 1)\kappa \\
&= (ax \otimes 1)(b \otimes 1)\kappa \\
&= (ax \otimes 1)(1 \otimes b)\kappa \qquad \kappa\text{：準平均作用素} \\
&= (ax \otimes b)\kappa \\
&= (a \otimes b)((x \otimes 1)\kappa) \\
&= (a \otimes b)\psi(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

さらに、任意の $a \in A$ に対して、

$$
(\mu \circ \psi)(a) = \mu((a \otimes 1)\kappa) \underset{\mu\text{: 左 } A^e\text{-加群準同型}}{=} (a \otimes 1) \cdot \mu(\kappa) = (a \otimes 1) \cdot 1 = a
$$

となるので、$\mu \circ \psi = \mathrm{id}$ を得る。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：

$\kappa := \psi(1) \in A^e$ とおく。κ は A に対する分離性冪等元である。これを示す。

任意の $a \in A$ に対し、

$$
\begin{aligned}
(a \otimes 1)\kappa &= (a \otimes 1)\psi(1) \\
&= \psi((a \otimes 1) \cdot 1) \qquad \psi\text{：左 } A^e\text{-加群準同型} \\
&= \psi(a) \\
&= \psi((1 \otimes a) \cdot 1) \\
&= (1 \otimes a)\psi(1) \qquad \psi\text{：左 } A^e\text{-加群準同型}
\end{aligned}
$$

となる。故に、κ は準平均作用素である。

さらに、

$$
\mu(\kappa) = \mu(\psi(1)) \underset{\mu \circ \psi = \mathrm{id}}{=} 1
$$

であるから、κ は A に対する分離性冪等元である。 (Q.E.D.)

次は上の補題の系であるが、定理 4-4 の (i) と (ii) の同値性の証明に用いられる。

系 4-6

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数、 $K/\boldsymbol{k}$：体の拡大 とする。
A^K が分離性冪等元をもつ
$\Longrightarrow$ A も分離性冪等元をもつ

(proof)

補題 4-5 より、

$$^{\exists}\psi : A^K \longrightarrow (A^K)^e : 左\ (A^K)^e\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad \mu_{A^K} \circ \psi = \mathrm{id}$$

となる。K を $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間とみて、基底 $\{x_i\}_{i \in I}$ をとる。但し、$0 \in I$ であるとし、$x_0 = 1$ にとっておく。各 $a \in A$ に対し、

$$\begin{aligned}\psi(1 \otimes a) \in (A^K)^e &= (K \otimes A) \otimes (K \otimes A)^{\mathrm{op}} \\ &= (K \otimes A) \otimes (K \otimes A^{\mathrm{op}}) \quad K\ の積は可換 \\ &\cong K \otimes A \otimes A^{\mathrm{op}}\end{aligned}$$

とみなし、

$$\psi(1 \otimes a) = \sum_{i \in I} x_i \otimes \psi_i(a) \qquad (\psi_i(a) \in A \otimes A^{\mathrm{op}},\ 但し、有限個の\ i \in I\ を除き\ \psi_i(a) = 0)$$

と書く。$(\mu_{A^K} \circ \psi)(1 \otimes a) = 1 \otimes a$ より、

$$\sum_{i \in I} x_i \otimes \mu_A(\psi_i(a)) = 1 \otimes a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。この等式より、$i \in I$ に対して、
$i \neq 0 \Longrightarrow \mu_A(\psi_i(a)) = 0,$
$i = 0 \Longrightarrow \mu_A(\psi_i(a)) = a$
であることがわかる。特に、$\mu_A \circ \psi_0 = \mathrm{id}_A$ を得る。

$\psi_0 : A \longrightarrow A^e$ が左 A^e-加群準同型であることを示す。

任意の $a, b, c \in A$ に対して、$\psi_0((b \otimes c) \cdot a) = (b \otimes c) \cdot \psi_0(a)$ となることを示せばよい。

ψ は左 $(A^K)^e$-加群準同型であるから、

$$\psi(((1 \otimes b) \otimes (1 \otimes c)) \cdot (1 \otimes a)) = ((1 \otimes b) \otimes (1 \otimes c)) \cdot \psi(1 \otimes a)$$

が成り立つ。ここで、
左辺 $= \psi(1 \otimes (bac)) = 1 \otimes \psi_0(bac)$
右辺 $= ((1 \otimes b) \otimes (1 \otimes c)) \cdot (1 \otimes \psi_0(a)) = 1 \otimes (b\psi 0(a)c)$
ゆえ、

$$\psi_0(bac) = b\psi_0(a)c$$

を得る。故に、$\psi_0((b \otimes c) \cdot a) = (b \otimes c) \cdot \psi_0(a)$ となることが示された。

補題 4-5 より、A に対する分離性冪等元が存在する。 (Q.E.D.)

命題 4-7

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の分離性冪等元をもつ代数
B：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$：半単純

(proof)

M を任意の左 $A\otimes B$-加群とする。その任意の部分加群 N が M の直和因子になることを示せばよい。

$i: N \longrightarrow M$ を包含写像とする。M は左 B-加群としては完全可約なので、

$$^{\exists}\pi : M \longrightarrow N : \text{左 } B\text{-加群準同型} \ \text{ s.t. } \ \pi \circ i = \mathrm{id}_N$$

となる。A に対する分離性冪等元を $\kappa = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes a'_i \in A^e$ とおく。

これを用いて、$\pi' : M \longrightarrow N$ を

$$\pi'(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i \otimes 1) \cdot x) \qquad (x \in M)$$

により定義する。

π' は左 $A\otimes B$-加群準同型である。

$\because$)

π' が $\boldsymbol{k}$-線形写像であることはすぐにわかる。

$a \in A,\ b \in B,\ x \in M$ とする。

$$\begin{aligned}
\pi'(a \otimes b \cdot x) &= \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i \otimes 1) \cdot (a \otimes b) \cdot x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i a \otimes b) \cdot x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((1 \otimes b) \cdot (a'_i a \otimes 1) \cdot x) && \pi \ \text{：左 } B\text{-加群準同型} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b) \cdot \pi((a'_i a \otimes 1) \cdot x) \\
&= (1 \otimes b) \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i a \otimes 1) \cdot x) && (*) \\
&= (1 \otimes b) \cdot \sum_{i=1}^{n} (a a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i \otimes 1) \cdot x) \\
&= (a \otimes b) \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1) \cdot \pi((a'_i \otimes 1) \cdot x) \\
&= (a \otimes b) \cdot \pi'(x)
\end{aligned}$$

$(*)$ の部分は $((a\otimes 1)\kappa) \otimes x = ((1 \otimes a)\kappa) \otimes x$ の次の合成写像による像を考えると得られる：

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes A^{\mathrm{op}} \otimes M & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \otimes M & \longrightarrow & M \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
a \otimes a' \otimes x & \longmapsto & a \otimes 1 \otimes a' \otimes 1 \otimes x & & \\
 & & \xi \otimes \eta \otimes x & \longmapsto & \xi \cdot \pi(\eta \cdot x)
\end{array}$$

但し、$\xi, \eta \in A \otimes B,\ x \in M$

以上から、π' は左 $A\otimes B$-加群準同型である。 □

$\pi'\circ i=\mathrm{id}_N$ が成り立つ。

$\because$)

$x\in N$ のとき、

$$\begin{aligned}\pi'(x)&=\sum_{i=1}^{n}(a_i\otimes 1)\pi(\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{(a_i'\otimes 1)\cdot x})\\&=\sum_{i=1}^{n}(a_i\otimes 1)((a_i'\otimes 1)\cdot x)\\&=((\sum_{i=1}^{n}a_ia_i')\otimes 1)\cdot x\\&=(1\otimes 1)\cdot x\\&=x\qquad\square\end{aligned}$$

波線部分が N に属していることと $\pi\circ i=\mathrm{id}_N$ より

よって、M は部分左 $A\otimes B$-加群 $\mathrm{Ker}\pi'$ により、$M=N\oplus\mathrm{Ker}\pi'$ のように直和分解される。故に、$A\oplus B$ は半単純である。 (Q.E.D.)

注意：この命題は、(定理 4-4 が証明された後には) 次のように言い換えることができる。

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元分離的代数

B：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数 $\Longrightarrow$ $A\otimes B$：半単純

補題 4-8(Villamayor-Zelinsky)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

A が分離性冪等元をもつ $\Longrightarrow$ $\dim A<\infty$

(proof)

$\kappa\in A^e$ を A に対する分離性冪等元とする。

$\{b_i\}_{i\in I}$ を A の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。

各 $i\in I$ に対して、$f_i:A\longrightarrow\boldsymbol{k}$ を $f_i(b_j)=\delta_{ij}\quad(j\in I)$ を満たす線形写像とする。

$$J=\{i\in I\mid(\mathrm{id}\otimes f_i)(\kappa)\neq 0\}$$

とおく。J は空でない有限集合である。

$\because$)

$\kappa=\sum_{i\in I}a_i\otimes b_i,\quad a_i\in A$ は有限個の $i\in I$ を除いて $a_i=0$ とおく。このとき、

$$(\mathrm{id}\otimes f_i)(\kappa)=a_i\qquad\text{for all } i\in I$$

となる。よって、J は有限集合である。また、もし、$J=\emptyset$ ならば、すべての $i\in I$ に対して、$a_i=(\mathrm{id}\otimes f_i)(\kappa)=0$ となる。これは $\kappa=0$ となることを意味する。しかし

ながら、$\mu(\kappa)=1$ であるから、このようなことは起こり得ない。故に、$J \neq \emptyset$ を得る。
□

$$\kappa = \sum_{i \in J} a_i \otimes b_i$$

と書く。

このとき、任意の $a \in A$ が $\{a_i b_k \mid i,k \in J\}$ の線形結合で書くことができることを示す。

μ は左 A^e-加群準同型であるから、任意の $a \in A$ に対して、

$$\mu((1 \otimes a)\cdot\kappa) = (1 \otimes a)\cdot\mu(\kappa) = (1 \otimes a)\cdot 1 = a$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
a = \mu(1 \otimes a)\cdot\kappa) &= \sum_{i \in J} \mu(a_i \otimes b_i a) \\
&= \sum_{i \in J}\sum_{k \in I} \mu(a_i \otimes f_k(b_i a) b_k) \\
&= \sum_{k \in I}\sum_{i \in J} \mu(f_k(b_i a) a_i \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in I} \mu((\mathrm{id}_A \otimes f_k)((1 \otimes a)\cdot\kappa) \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in I} \mu((\mathrm{id}_A \otimes f_k)((a \otimes 1)\cdot\kappa) \otimes b_k) && \kappa \text{ は } A \text{ の準平均作用素} \\
&= \sum_{k \in I} \mu((a \cdot (\mathrm{id}_A \otimes f_k)(\kappa)) \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in J} \mu((a \cdot (\mathrm{id}_A \otimes f_k)(\kappa)) \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in J} \mu((\mathrm{id}_A \otimes f_k)((a \otimes 1)\cdot\kappa) \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in J} \mu((\mathrm{id}_A \otimes f_k)((1 \otimes a)\cdot\kappa) \otimes b_k) && \kappa \text{ は } A \text{ の準平均作用素} \\
&= \sum_{k \in J} \mu(\sum_{i \in J} f_k(b_i a) a_i \otimes b_k) \\
&= \sum_{k \in J}\sum_{i \in J} f_k(b_i a) a_i b_k
\end{aligned}$$

となる。故に、$\mathrm{dim} A < \infty$ を得る。 (Q.E.D.)

以上で、定理 4-4 を証明するための準備が整った。

(proof of Theorem 4-4)

(ii) と (iii) が同値であることは、すでに補題 4-5 で証明した。よって、(i) と (ii) が同値なことを証明すればよい。

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：

　Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とすると、A^{Ω} は Ω 上有限次元な半単純代数である。

　したがって、A^{Ω} は有限個の行列環の直和に同型である。

　したがって、例題 4-3 により、A^{Ω} には分離性冪等元が存在する。

　系 4-6 により、A には分離性冪等元が存在する。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：

　A が有限次元であることは補題 4-8 による。

　A が分離的であることを示す。任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ を考える。

　K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として半単純である。

　したがって、補題 4-7 により、$A \otimes K$ は半単純である。

　代数として $K \otimes A \cong A \otimes K$ であるから、$K \otimes A = A^{K}$ も半単純である。

　任意の体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して、A^{K} が半単純になることが示されたから、A は分離的である。 (Q.E.D.)

演習 4-5

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。

$\delta : A \longrightarrow A^{e}$ を $\delta(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a,\ a \in A$ により定義する。このとき、次を示せ。

(1) $\delta(ab) = (a \otimes 1)\delta(b) + (1 \otimes b)\delta(a)$ for all $a, b \in A$

(2) $\mathrm{Ker}\mu = A\delta(A)$

となる。但し、$A\delta(A) = \{\sum_{i}(a_i \otimes 1)\delta(b_i)$ ：有限和 $\mid a_i, b_i \in A\}$ である。

(3) $\kappa \in A^{e}$ について次の 3 つは同値である。

　(i) κ は準平均作用素である。

　(ii) $(\mathrm{Ker}\mu) \cdot \kappa = 0$

　(iii) $\delta(A) \cdot \kappa = 0$

解；

　(1)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= (a \otimes 1)(b \otimes 1 - 1 \otimes b) + (1 \otimes b)(a \otimes 1 - 1 \otimes a) \\
&= (ab \otimes 1 * 1 - a \otimes 1 * b) + (a \otimes b * 1 - 1 \otimes b * a) \\
&= ab \otimes 1 - a \otimes b + a \otimes b - 1 \otimes ab \\
&= \delta(ab) = \text{左辺}
\end{aligned}$$

　(2) μ は左 A^{e}-加群準同型であるから、$\mathrm{Ker}\mu$ は A^{e} の左イデアルである。このことと $\delta(A) \subset \mathrm{Ker}\mu$ であることから、$A\delta(A) \subset \mathrm{Ker}\mu$ を得る。

　逆向きの包含関係も成り立つことを示す。$\xi \in \mathrm{Ker}\mu$ を任意にとり、$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ とおく。

　$\mu(\xi) = 0$ より、$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ である。

　ここで、

$$a_i \otimes b_i = (1 \otimes b_i)(a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i) + 1 \otimes a_i b_i = (1 \otimes b_i)\delta(a_i) + 1 \otimes a_i b_i$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i &= \sum_{i=1}^{n}(1 \otimes b_i)\delta(a_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0 \text{ より} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{\delta(a_i b_i) - (a_i \otimes 1)\delta(b_i)\} \qquad (1) \text{ より} \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes 1)\delta(b_i) \ \in \ A\delta(A)\end{aligned}$$

となる。故に、$\xi \in A\delta(A)$ となり、$\mathrm{Ker}\mu \subset A\delta(A)$ が示された。よって、(2) は示された。

(3)

$$\begin{aligned}\kappa : A \text{ の準平均作用素} &\iff {}^{\forall}a \in A,\ \ (a \otimes 1)\kappa = (1 \otimes a)\kappa \\ &\iff {}^{\forall}a \in A,\ \ \delta(a)\kappa = 0\end{aligned}$$

となるので、(i) $\iff$ (iii) が示された。

また、(2) により、(ii) $\iff$ (iii) が示される。 (Q.E.D.)

演習 4-6

$\boldsymbol{k}$：代数閉体

A：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数　とする。

(1) B：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$：半単純

(2) $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$：半単純

となることを示せ。

解；

(1) 代数閉体上の有限次元半単純代数は分離的である (補題 4-1) から、A は有限次元分離的代数である。

したがって、命題 4-7 の証明の下の注意により、$A \otimes B$ は半単純である。

(2) A が半単純ならば、A^{op} も半単純である (演習 2-23) から、(1) の B を A^{op} にとることにより、包括代数 A^e が半単純であることがわかる。 (Q.E.D.)

演習 4-7

$\boldsymbol{k}$：完全体

A：$\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。次を示せ。

(1) A：分離的 $\iff$ A：半単純

(2) A：左 Artin 代数 $\Longrightarrow$ $A/\mathrm{rad}A$：分離的

注意：体 $\boldsymbol{k}$ が**完全体** (*perfect field*) であるとは、任意の代数拡大 $K/\boldsymbol{k}$ が分離的になるときをいう。例えば、標数 0 の体、代数閉体、有限体はすべて完全体である (例えば、拙著『あるてぃんの Galois Thoery』p.151〜154 参照)。

演習 4-7 の解；

(1) 分離性の定義から「$\Longleftarrow$」は自明に成り立つ。「$\Longrightarrow$」が成り立つことを証明する。

A が半単純であると仮定する。

$\boldsymbol{k}$ は完全体なので、$\boldsymbol{k}$ の任意の有限次拡大 $K/\boldsymbol{k}$ は分離的である ($\because$ 有限次拡大は代数的であるから)。

K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみても分離的であるから、$A^K = K \otimes A$ は分離的代数と半単純な代数とのテンソル積として半単純になる (命題 4-7 の証明の下の注意参照)。

故に、補題 4-2 により、A は分離的である。

(2) A は左 Artin 的なので、$A/\mathrm{rad}A$ は半単純である (系 2-6)。

よって、(1) により、$A/\mathrm{rad}A$ は分離的である。 (Q.E.D.)

演習 4-8

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

$$A,\ B\ \text{：分離的} \Longrightarrow A \otimes B\ \text{：分離的}$$

が成り立つことを示せ。

解；

$K/\boldsymbol{k}$ を任意の体の拡大とする。このとき、

$$(A \otimes B)^K \cong A^K \otimes_K B^K \qquad \text{as } K\text{-algebras}$$

が成り立つ (演習 1-76)。

仮定により、A^K は分離的であり (定義 4-1 の下の注意参照)、B^K は半単純である。

よって、命題 4-7 の下の注意から、$A^K \otimes_K B^K \cong (A \otimes B)^K$ は半単純である。

故に、$A \otimes B$ は分離的である。 (Q.E.D.)

演習 4-9

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数

M：完全可約な有限次元左 A-加群

N：完全可約な有限次元左 B-加群　とする。

$$M\text{：左 } A\text{-加群として分離的} \Longrightarrow M \otimes N\text{：完全可約な左 } A \otimes B\text{-加群}$$

となることを示せ。

解；

① まず、$M,\ N$ が既約な場合に証明する。

$D := (\mathrm{End}_A M)^{\mathrm{op}}$、$E := (\mathrm{End}_B N)^{\mathrm{op}}$ とおく。

演習 4-4 により、D は分離的であり、E は半単純である。

また、M は有限次元なので、D も有限次元である。

有限次元分離的代数と半単純代数のテンソル積は半単純である (命題 4-7 の下の注意参照) から、$D \otimes E$ は半単純である。

したがって、任意の左 $D \otimes E$-加群は完全可約である (命題 2-2)。特に、$M \otimes N$ は完全可約である。

② 次に、$M,\ N$ が一般の場合に証明する。

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \quad (\text{各 } M_i \text{ は既約な左 } A\text{-加群}),\ N = \bigoplus_{j \in J} N_j \quad (\text{各 } N_j \text{ は既約な左 } B\text{-加群})$$

とおく。このとき、

$$M \otimes N = \bigoplus_{i \in I,\ j \in J} M_i \otimes N_j$$

となる。分離的な加群の直和因子は分離的である (演習 4-3) から、各 $i \in I$ に対して M_i は分離的である。

したがって、①により、$M_i \otimes N_j$ は完全可約である。

完全可約な加群の任意個の直和はまた完全可約であるから、$M \otimes N = \bigoplus_{i \in I,\ j \in J} M_i \otimes N_j$ は完全可約である。 (Q.E.D.)

演習 4-10

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上のフロベニウス代数　とする。

命題1-24から、非退化な結合的双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が存在する。$\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n \subset A$ を

$$f(a_i, b_j) = \delta_{ij} \qquad \text{for } {}^{\forall} i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

を満たす２つの基底とする。

(1) $\kappa = \sum_{i=1}^n b_i \otimes a_i \in A^e$ は A の準平均作用素であって、$\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらないことを示せ。

(2) $\Gamma(A) := \{\sum_{i=1}^n b_i a a_i \mid a \in A\}$ とおく。次を示せ。

- (a) $\Gamma(A)$ は $Z(A)$ のイデアルである。
- (b) $\Gamma(A)$ は $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方、および、f の選び方によらない。
- (c) $\Gamma(A) = Z(A)$ ならば、ある $x \in A$ が存在して、$\sum_{i=1}^n b_i x \otimes a_i$ は A に対する分離性冪等元である。特に、A は分離的である。

解；

(1)・κ が A の準平均作用素であること：

$\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方により、任意の $x \in A$ に対して、

$$x = \sum_{j=1}^n f(x, b_j) a_j = \sum_{j=1}^n f(a_j, x) b_j$$

が成り立つ。よって、任意の $x \in A$ に対して

$$\sum_{i=1}^n x b_i \otimes a_i = \sum_{i,j=1}^n f(a_j, x b_i) b_j \otimes a_i \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ は結合的}}}{=} \sum_{i,j=1}^n b_j \otimes f(a_j x, b_i) a_i = \sum_{j=1}^n b_j \otimes a_j x$$

が成り立つ。

故に、κ は準平均作用素である。

・κ が $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらないこと：

$\{a'_i\}_{i=1}^n$, $\{b'_i\}_{i=1}^n$ を $f(a'_i, b'_j) = \delta_{ij}$ を満たすもう１組の基底であるとする。

任意の $x \in A$ に対して、

$$x = \sum_{j=1}^n f(x, b'_j) a'_j = \sum_{j=1}^n f(a_j, x) b_j$$

が成り立つことに注意すれば、先程と同様の式変形により、

$$\sum_{i=1}^{n} b'_i \otimes a'_i = \sum_{i,j=1}^{n} f(a_j, b'_i) b_j \otimes a'_i = \sum_{i,j=1}^{n} b_j \otimes f(a_j, b'_i) a'_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes a_j$$

を得る。故に、κ は $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらない。

(2) (a) まず、任意の $a \in A$ に対して、$\lambda(a) := \sum_{i=1}^{n} b_i a a_i \in Z(A)$ となることを示す。

(1) により κ は準平均作用素なので、任意の $x \in A$ について、$\sum_{i=1}^{n} x b_i \otimes a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes a_i x$ が成り立つ。この両辺に $a \otimes 1$ を右から掛けて

$$\sum_{i=1}^{n} x b_i a \otimes a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a \otimes a_i x$$

を得る。したがって、

$$\sum_{i=1}^{n} x b_i a a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a a_i x$$

を得る。 故に、$c(a) \in Z(A)$ である。

次に、$a, b \in A$ に対して、$\lambda(a) + \lambda(b) = \lambda(a+b) \in \Gamma(A)$ であり、

$a \in A,\ x \in Z(A)$ に対して、$x\lambda(a) = \lambda(xa) \in \Gamma(A)$ となる。

よって、$\Gamma(A)$ は $Z(A)$ のイデアルである。

(b) $\Gamma(A) = \kappa \cdot A$ と書き表わせるから、$\Gamma(A)$ は $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらない。ここで、$\kappa \cdot A$ における $\cdot$ は $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ の A への左作用を表わしている (第 1 章第 1 節参照)。

$\Gamma(A)$ が f の選び方にもよらないことを示そう。

$f_i : A \otimes A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ $(i = 1, 2)$ を 2 つの非退化な結合的双一次形式とする。このとき、

$$^{\exists} c \in A：A \text{ の可逆元 s.t. } f_1(x, y) = f_2(x, yc) \text{ for } {}^{\forall} x, y \in A$$

が成り立つ。

$\because$)

f_i に対応する左 A-加群の同型 ${}_A A \longrightarrow A_A^*$ を θ_i とおく (補題 1-27)：

$$f_i(x, y) = \langle \theta_i(y),\ x \rangle \qquad \text{for } {}^{\forall} x, y \in A$$

このとき、$\theta_2^{-1} \circ \theta_1 : {}_A A \longrightarrow {}_A A$ は左 A-加群の同型である。したがって、

$$^{\exists} c \in A \ \text{ s.t. } (\theta_2^{-1} \circ \theta_1)(x) = xc \ \text{ for } {}^{\forall} x \in A$$

となる。このとき、任意の $x, y \in A$ に対して

$$f_1(x, y) = \langle \theta_1(y),\ x \rangle = \langle \theta_2(yc),\ x \rangle = f_2(x, yc)$$

となる。

最後に、c が A における可逆元であることを示す。

$\theta_1^{-1} \circ \theta_2$ も左 A-加群の同型であることから、

$$^{\exists} d \in A \ \text{ s.t. } (\theta_1^{-1} \circ \theta_2)(x) = xd \ \text{ for } {}^{\forall} x \in A$$

となる。すると、任意の $x \in A$ に対して、

$$\theta_1(x) = \theta_2(xc) = \theta_1((xc)d) = \theta_1(x(cd))$$

となる。よって、$x = x(cd)$ が成り立つ。特に、$x = 1$ にとって、$1 = cd$ を得る。同様にして、$dc = 1$ が得られるから、c は A の可逆元である。 □

よって、A の２つの基底 $\{a_i\}_{i=1}^n$ と $\{b_i\}_{i=1}^n$ が $f_1(a_i, b_j) = \delta_{ij}\ \ (i, j = 1, \cdots, n)$ を満たすならば、２つの基底 $\{a_i\}_{i=1}^n$ と $\{b_i c\}_{i=1}^n$ は $f_2(a_i, b_j c) = \delta_{ij}\ \ (i, j = 1 \cdots, n)$ を満たすことがわかる。

このことから、$\Gamma(A)$ が f の選び方によらないことを示すには、

$$\{\sum_{i=1}^n b_i a a_i \mid a \in A\} = \{\sum_{i=1}^n (b_i c) a a_i \mid a \in A\}$$

となることを示せばよいが、これが成り立つことは、任意の $a \in A$ に対して

$$\sum_{i=1}^n b_i a a_i = \sum_{i=1}^n b_i c (c^{-1} a) a_i$$

となることことからわかる。

故に、$\Gamma(A)$ は f の選び方によらない。

(c) $\kappa \cdot A = \Gamma(A) = Z(A)$ ゆえ、$\kappa \cdot x = 1$ となる $x \in A$ が存在する。

$\epsilon := \sum\limits_{i=1}^n b_i x \otimes a_i \in A^e$ が A に対する分離性冪等元であることを示す。

① 分離性冪等元の 1 番目の条件が成り立つこと、すなわち、ϵ が準平均作用素であること：

(1) の κ を用いて $\epsilon = \kappa(x \otimes 1)$ と書くことができるから、任意の $y \in A$ に対して

$$(y \otimes 1)\epsilon = (y \otimes 1)\kappa(x \otimes 1) = (1 \otimes y)\kappa(x \otimes 1) = (1 \otimes y)\epsilon \qquad \text{in} \quad A^e$$

となる。故に、ϵ は準平均作用素である。

② 分離性冪等元の 2 番目の条件が成り立つこと：

$\mu : A^e \longrightarrow A$ を $\mu(a \otimes b) = ab,\ a, b \in A$ によって定義される線形写像とすると、$\mu(\epsilon) = \sum\limits_{i=1}^n b_i x a_i = \kappa \cdot x = 1$ となる。よって、分離性冪等元の 2 番目の条件が満たれる。

①と②により、ϵ は分離性冪等元である。 (Q.E.D.)

注意：上の演習問題では、フロベニウス代数 A が $\Gamma(A) = Z(A)$ を満たすならば、A は分離的であることを示した。実は、この逆も正しい (Higman)。すなわち、体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 A に対して

$$A：\text{有限次元分離的} \quad \Longleftrightarrow \quad A：\text{フロベニウス代数であって、}\Gamma(A) = Z(A)$$

が成り立つ (証明は、Curtis-Reiner・著『Representation theory of finite groups and associative algebras』p.482–p.485 を参照)。

演習 4-11

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元分離的代数
$\kappa = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A^e$：分離性冪等元　とする。
写像 $\lambda : A \longrightarrow A$ を $\lambda(a) = \sum_{i=1}^{n} b_i a a_i,\ a \in A$ によって定義する。このとき、
(1) $\mathrm{Ker}\lambda = [A, A]$
(2) $\lambda^2 = \lambda$
(3) $A = \lambda(A) \oplus [A, A]$　as $\boldsymbol{k}$-vector spaces
となることを示せ。但し、$[A, A]$ は $[a, b] := ab - ba \ \ (a, b \in A)$ なる形の元によって張られる A の部分空間を表わす。

解；

(1) $[A, A] \subset \mathrm{Ker}\lambda$ であること：$a, b \in A$ に対して

$$\lambda(ab) = \sum_{i=1}^{n} b_i a(ba_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii)}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (b_i b) a a_i = \lambda(ba) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

故に、$[A, A] \subset \mathrm{Ker}\lambda$ である。

$\mathrm{Ker}\lambda \subset [A, A]$ であること：$a \in A$ が $\lambda(a) = 0$ を満たしているとする。このとき、

$$a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{=} (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) a \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda(a)=0}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i a - \sum_{i=1}^{n} b_i a a_i = \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i a] \in [A, A]$$

となる。

故に、$\mathrm{Ker}\lambda \subset [A, A]$ である。

(2) 任意の $a \in A$ に対して

$$\lambda^2(a) = \lambda(\sum_{i=1}^{n} b_i a a_i) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{=} \lambda(a)$$

となる。

よって、$\lambda^2 = \lambda$ を得る。

(3) (2) により、$A = \mathrm{Im}\lambda \oplus \mathrm{Ker}\lambda$ となる。

(1) により、$\mathrm{Ker}\lambda = [A, A]$ であるから、

$$A = \lambda(A) \oplus [A, A] \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

が得られる。　(Q.E.D.)

注意 1°：多くの例では、$\lambda(A) = Z(A)$ となる。この条件を満たす有限次元分離的代数は、強分離的と呼ばれ、神崎熙夫や服部昭によって研究された。強分離的代数については第７節で詳しく扱う。

注意 2°：A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の対称代数とし、$\varGamma(A)$ を演習 4-10 で定義された $Z(A)$ のイデアルとする：

$$\varGamma(A) = \{\sum_{i=1}^{n} b_i a a_i \mid a \in A\}.$$

但し、$\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ は、非退化な結合的双一次形式 $f : A \times A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ に対して $f(a_i, b_j) = \delta_{ij}\ (i, j = 1, \cdots, n)$ を満たす A の２組の基底である。

A は対称代数であるから、$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A^e$ は準平均作用素となる (演習 4-10(1))。したがって、$\Gamma(A) = Z(A)$ のとき、$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i x \otimes b_i$ が A に対する分離性冪等元となるような $x \in A$ が存在する (演習 4-10(2)(c))。もし、x として $Z(A)$ の可逆元をとることができるならば、上の演習問題のように定義される λ について、

$$\lambda(A) = \Gamma(A) = Z(A)$$

が成り立つことがわかる。よって、A は強分離的になる。

§3. 分離性とコホモロジーの消滅

ここでは、有限次元分離的代数のコホモロジー群による特徴付けについて述べる。代数が有限次元分離的であるための必要十分条件は「1 次元 Hochschild コホモロジーが消えることである」ことを証明する。

定理 4-9

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、

A：有限次元、かつ、分離的　$\Longleftrightarrow$　任意の両側 A-加群 M に対して、$H^1(A, M) = 0$

(proof)

i. 必要性：

定理 4-4 により、A には分離性冪等元が存在する。

$\kappa = \sum_i a_i \otimes b_i$ を A に対する分離性冪等元とする。

M を任意の両側 A-加群とする。

$f \in \ker\delta^1$ とする。

$$f(ab) = af(b) + f(a)b \qquad (a, b \in A) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。今、$m = \sum_i a_i f(b_i) \ \in M$ とおく。

このとき、$\delta^0(m) = f$ となる。

$\because$)

$$\begin{aligned} f(a) \underset{\mu(\kappa)=1_A}{\uparrow}= \sum_i a_i b_i \cdot f(a) &\underset{①}{\uparrow}= \sum_i a_i \cdot \{f(b_i a) - f(b_i)a\} \\ &= \sum_i a_i f(b_i a) - ma \\ &= am - ma + \sum_i a_i f(b_i a) - \sum_i a a_i f(b_i) \\ &= \delta^0(m)(a) + \underline{\sum_i a_i f(b_i a) - \sum_i a a_i f(b_i)} \end{aligned}$$

ここで、$A \otimes A \xrightarrow{\varphi} M$ を $a \otimes b \longmapsto af(b)$ なる線形写像とすると、

$$\begin{aligned} \sim\sim\sim\sim\sim &= \varphi(\sum_i a_i \otimes b_i a - \sum_i a a_i \otimes b_i) \\ &= \varphi((1 \otimes a) \cdot \kappa - (a \otimes 1) \cdot \kappa) \\ &= \varphi(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。故に、$f = \delta^0(m)$ が示された。 □

故に、

$$\mathrm{Im}\delta^0 = \mathrm{Ker}\delta^1 \quad i.e. \quad H^1(A, M) = 0$$

が示された。

ii. 十分性：

$J = \mathrm{Ker}\mu$ とおく。J は自然に両側 A-加群の構造を持つ。

$\delta : A \longrightarrow J$ を $\delta(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a \quad (a \in A)$ によって定義する。

δ は $\delta(ab) = a\delta(b) - \delta(a)b,\ a, b \in A$ を満たすので、

$$\delta \in \mathrm{Ker}(\delta^1 : C^1(A, J) \longrightarrow C^2(A, J))$$

となる。$H^1(A, J) = 0$ ゆえ、

$${}^\exists\ \nu \in J \ \ \text{s.t.}\ \ \delta(a) = a\nu - \nu a \quad (a \in A)$$

となる。

$r : A^e \longrightarrow J$ を

$$r(\alpha) = \alpha\nu \qquad\qquad (\alpha \in A^e)$$

によって定義する。

r は左 A^e-加群準同型である。

実は、$r|_J = \mathrm{id}_J$ が成り立つ。

∵)

$$(r|_J \circ \delta)(a) = \delta(a)\nu = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)\nu \underset{\substack{\uparrow \\ J\ (\text{or } A^e)\ \text{への}\ A\ \text{の} \\ \text{左作用と右作用の定義}}}{=} a\nu - \nu a = \delta(a)$$

より、

$$r|_J \circ \delta = \delta = \mathrm{id}_J \circ \delta$$

を得る。

$$\therefore\ (r|_J - \mathrm{id}_J) \circ \delta = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

ところで、

$$J = A\delta(A) = \{\sum_i (a_i \otimes 1)\delta(b_i) \mid a_i, b_i \in A\}$$

であったから (演習 4-5)、任意に $x \in J$ をとり、$x = \sum_i (a_i \otimes 1)\delta(b_i)$ と書くと、②により、

$$\begin{aligned}(r|_J - \mathrm{id}_J)(x) &= (r|_J - \mathrm{id}_J)(\sum_i (a_i \otimes 1)\delta(b_i)) \\ &= \sum_i (a_i \otimes 1)\cdot(r|_J - \mathrm{id}_J)(\delta(b_i)) \\ &= 0\end{aligned}$$

$r|_J$ は左 A^e-準同型なので、$r|_J - \mathrm{id}_J$ もそうである。

となる。故に、$r|_J = \mathrm{id}_J$ となることが示された。 □

これより、左 A^e-加群としての直和分解

$$A^e = J \oplus \mathrm{Ker}\, r$$

を得る。したがって、$\mu : A^e \longrightarrow A$ に準同型定理を適用して、左 A^e-加群としての同型

$$\bar{\mu} : A^e/\mathrm{Ker}\mu \longrightarrow A$$

を得る。

$$\varphi : A \xrightarrow{\bar{\mu}^{-1}} A^e/J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\, r \hookrightarrow A^e$$

← ∵) $x \in A^e$ を任意にとると、
$x = \underbrace{r(x)}_{\in J} + \underbrace{(x - r(x))}_{\in \mathrm{Ker}\, r}$
$\therefore\ A^e = J + \mathrm{Ker}\, r$
また、$x \in J \cap \mathrm{Ker}\, r$ ならば、
$x = \mathrm{id}_J(x) = r(x) = 0$
となる。□

とおくと、φ は左 A^e-加群準同型で、$\mu \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ を満たす。
よって、定理 4-4 により、A は分離的な有限次元代数である。 (Q.E.D.)

系 4-10

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。
このとき、次の２つは同値である。
(i) A は有限次元分離的である。
(ii) 任意の両側 A-加群 M に対して、$H^n(A, M) = 0 \quad (n \geq 1)$

(proof)
「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」は定理 4-9 の十分性から従う。
「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」は定理 4-9 の必要性と演習 1-50 から従う。 (Q.E.D.)

§4. Wedderburn-Malcev の定理

有限次元代数 A に対し、その根基で割って得られる代数 $A/\mathrm{rad}A$ は半単純である (系 2-6)。もし、代数 $A/\mathrm{rad}A$ が分離的ならば、すなわち、どのような体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対しても、$(A/\mathrm{rad}A)^K$ が半単純になるならば、A は半単純な部分と冪零な部分の直和に「標準的に」分解される。この分解を Wedderburn-Malcev 分解と呼ぶ。ここでは、この事実を前節で述べた「分離的代数に関するコホモロジーの消滅定理」の応用として述べる。

定理 4-11(Wedderburn-Malcev)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$A/\mathrm{rad}A$：分離的

$\Longrightarrow\ {}^\exists B : A$ の部分代数 s.t. (i) B は半単純

(ii) $A = B \oplus \mathrm{rad}A$ as $\boldsymbol{k}$-vector spaces

さらに、$B_1,\ B_2$ がこのような条件を満たす2つの部分代数ならば、

$$^\exists n \in \mathrm{rad}A \ \text{ s.t. } \ B_2 = (1-n)^{-1}B_1(1-n)$$

となる。

(proof)

. B の存在：

$J = \mathrm{rad}A$ とおく。J は A の最大冪零イデアルである。

$J^k = 0$ となる最小の自然数 k に関する数学的帰納法で示す。

(i) $k = 1$ のとき

$J = 0$ であり、$A = A \oplus 0 = A \oplus J$ と分解される。

また、仮定により、$A \cong A/0 = A/J$ は分離的なので、半単純である。

(ii) $k = 2$ のとき

$\pi : A \longrightarrow A/J$ を自然な全射とする。π は代数準同型である。

また、$\mathrm{Ker}\pi = J$ は $(\mathrm{Ker}\pi)^2 = J^2 = 0$ を満たす。

よって、補題 1-20 より、J に両側 A-加群の構造が入り、(A, π, id_J) は J による A/J の拡大となる。

仮定により、A/J は有限次元分離的であるから、$H^2(A/J, J) = 0$ となる。

系 1-22 により、

$$^\exists B : A \text{ の部分代数 s.t. } A = \mathrm{Ker}\pi \oplus B = J \oplus B \ \text{ as vector spaces}$$

となる。さらに、$A/J \cong B$ as algebras が成立する。

$\because$)

ベクトル空間としての同型写像 $A/J \longrightarrow B$ は $\pi(a) \longmapsto a_2$ によって与えられる。但し、$a \in A$ を $a = a_1 + a_2,\ a_1 \in J,\ a_2 \in B$ と書き表わした。この写像が代数準同型になることを見る。

$\begin{array}{ll} a = a_1 + a_2 & (a_1 \in J,\ a_2 \in B) \\ b = b_1 + b_2 & (b_1 \in J,\ b_2 \in B) \end{array}$ に対して、

$$ab = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\underset{\sim}{a_1 b_1}} + \underset{\substack{\Cap \\ J}}{\underset{\sim}{a_1 b_2 + a_2 b_1}} + \underset{\substack{\Cap \\ B}}{\underset{\sim}{a_2 b_2}}$$

となるので、先程の写像で、$\pi(ab) \longmapsto a_2 b_2 = \pi(a)\pi(b)$ となる。

また、$1 = \underset{\substack{\Cap \\ J}}{\underset{\sim}{0}} + \underset{\substack{\Cap \\ B}}{\underset{\sim}{1}}$ より、$\pi(1) \longmapsto 1$ となる。 $\Box$

A/J は分離的であるから、B も分離的であり、特に、B は半単純である。

これで、$k=2$ の場合に示された。

(iii) $k>2$ とし、$k-1$ のときに成り立っていると仮定する。

$\bar{A}=A/J^2$ とおく。

$\bar{J}=J/J^2$ とおき、これを自然に $\bar{A}$ の部分空間とみなす。

$\mathrm{rad}\bar{A}=\bar{J}$ が成り立つ。

$\because$)

演習 1-25 より、

$$\mathrm{rad}\bar{A}=\mathrm{rad}(A/J^2)=\Big(\bigcap_{\substack{I\ :\ A\text{ の極大}\\ \text{左イデアルで}\\ J\subset I\text{ となるもの}}} I\Big)/J^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。I を A の極大左イデアルとすると、$J=\mathrm{rad}A\subset I$ となるから、$J^2\subset I$ が成り立つ。よって、

$$\{A\text{ の極大左イデアルで、}J^2\subset I\text{ となるもの全体}\}=\{A\text{ の極大左イデアル全体}\}$$

となる。したがって、$(*)$ の右辺は

$$\mathrm{rad}A/J^2=J/J^2=\bar{J}$$

に等しい。 $\square$

さらに、

$$\bar{A}/\bar{J}={}^{A/J^2}\Big/{}_{J/J^2}\cong A/J \quad \text{as algebras}$$

より、$\bar{A}/\bar{J}$ は分離的であって、$\bar{J}^2=(J/J^2)^2=0$ を満たす。これらのことから (ii) が使えて、

$$^{\exists}C:\bar{A}\text{ の部分代数 s.t.}\quad \begin{array}{l}\text{(i) } C\text{ は半単純}\\ \text{(ii) } \bar{A}=B\oplus\bar{J}\ \text{ as vector spaces}\end{array}$$

となる。

$\pi:A\longrightarrow\bar{A}=A/J^2$ を自然な射影とする。π は代数準同型である。

$B:=\pi^{-1}(C)$ とおく。B は A の部分代数であり、$A=B+J$ が成り立つ。

$\uparrow$

$\left(\begin{array}{l}\because \text{ 任意に } a\in A \text{ をとる。}\\ \pi(a)=c+\pi(j),\ c\in C,\ j\in J \text{ と書くことができる。}\\ c=\pi(b),\ b\in A \text{ とおくと、} b\in B \text{ となる。}\\ \text{さらに、} a-(b+j)\in J^2\subset J \text{ なので、}\\ a=b+(j+j'),\ j'\in J \text{ と書ける。故に、} A\subset B+J \text{ が示された。}\\ \text{逆向きの包含関係が成り立つことは明らか。} \square\end{array}\right)$

$B/_{B\cap J}\cong(B+J)/J=A/J$ は分離的である。

ここで、$\mathrm{rad}B=B\cap J=J^2$ が成り立つ。

$\because$)

・$\mathrm{rad}B=B\cap J$ であること

$B/_{B\cap J}$ は分離的であるから、半単純である。したがって、$\mathrm{rad}(B/_{B\cap J})=0$ となる。

演習 1-26 より、$B\cap J\subset\mathrm{rad}B$ を得る。

逆に、$B\cap J$ は B の冪零イデアルであるから、$B\cap J\subset \mathrm{rad}B$ を得る。
・$B\cap J=J^2$ であること
$\pi(B)=C,\ \pi(J)=\bar{J}$ ゆえ、$\pi(B\cap J)\subset C\cap\bar{J}=0$ となる。故に、$B\cap J\subset J^2$ である。
逆に、$x\in J^2$ ならば、$\pi(x)=0\ \in C$ であるから、$x\in\pi^{-1}(C)=B$ 。故に、$x\in B\cap J$ である。 $\square$

これより、

$$B/\mathrm{rad}B=B/_{B\cap J}:\text{分離的、かつ}\ \ (\mathrm{rad}B)^{k-1}=(J^2)^{k-1}\underset{\substack{\uparrow\\ k>2}}{=}0$$

を得る。
帰納法の仮定により、

$$^{\exists}D:B\ \text{の部分代数}\ \text{ s.t. }\ \begin{array}{l}\text{(i) } D\ \text{は半単純}\\ \text{(ii) } B=D\oplus\mathrm{rad}B\ \ \text{as vector spaces}\end{array}$$

となる。

$$A=D+\mathrm{rad}B+J=D+J^2+J=D+J$$

であるが、$D\cap J\subset B\cap J=J^2$ ゆえ、$D\cap J\subset D\cap J^2=D\cap\mathrm{rad}B=0$、すなわち、

$$D\cap J=0$$

となる。こうして、$A=D\oplus J$ が示され、帰納法が完成した。
. $B_1,\ B_2$ を半単純な部分代数であって、

$$A=B_1\oplus\mathrm{rad}A=B_2\oplus\mathrm{rad}A$$

を満たすものとする。
$J=\mathrm{rad}A$ とおき、$\pi:A\longrightarrow A/J$ を自然な全射とする。
このとき、$\pi_1:=\pi|_{B_1}:B_1\longrightarrow A/J,\ \pi_2:=\pi|_{B_2}:B_2\longrightarrow A/J$ は代数の同型となる。
$i_1:B_1\hookrightarrow A,\ i_2:B_2\hookrightarrow A$ を包含写像とし、$\psi_1:A/J\longrightarrow A,\ \psi_2:A/J\longrightarrow A$ をそれぞれ

$$\psi_1=i_1\circ\pi_1^{-1},\quad \psi_2=i_2\circ\pi_2^{-1}$$

によって定義する。$\psi_1,\ \psi_2$ は代数準同型であり、$\pi\circ\psi_i=\mathrm{id}_{A/J}\ (i=1,2)$ が成り立つ。
A/J の J への左作用と右作用をそれぞれ

$$\xi\cdot x=\psi_1(\xi)x,\quad x\cdot\xi=x\psi_2(\xi)\qquad\qquad (x\in J,\ \xi\in A/J)$$

によって定義する。J はこれらの作用に関して両側 A/J-加群になる。
このとき、写像 $f:A/J\longrightarrow J$ を

$$f(\xi)=\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)\qquad\qquad (\xi\in A/J)$$

によって定義することができ、$f\in\mathrm{Ker}(\delta^1:C^1(A/J,J)\longrightarrow C^2(A/J,J))$ となる。
$\because)$

$\xi \in A/J$ に対して、$f(\xi) \in J$ となる。実際、

$$\pi(f(\xi)) = \pi(\psi_1(\xi)) - \pi(\psi_2(\xi)) = \xi - \xi = 0$$

であるから、$f(\xi) \in \mathrm{Ker}\pi = J$ となる。これより、確かに、f は A/J から J への写像になっていることがわかった。

f は線形写像である。さらに、$\xi_1,\ \xi_2 \in A/J$ に対して、

$$\begin{aligned}
f(\xi_1\xi_2) &= \psi_1(\xi_1\xi 2) - \psi_2(\xi_1\xi_2) \\
&= \psi_1(\xi_1)\psi_1(\xi 2) - \psi_2(\xi_1)\psi_2(\xi_2) \\
&= \psi_1(\xi_1)(\psi_1(\xi 2) - \psi_2(\xi_2)) + (\psi_1(\xi 1) - \psi_2(\xi_1))\psi_2(\xi_2) \\
&= \psi_1(\xi_1)f(\xi_2) + f(\xi_1)\psi_2(\xi_2) \\
&= \xi_1 \cdot f(\xi_2) + f(\xi_1) \cdot \xi_2
\end{aligned}$$

となる。よって、$f \in \mathrm{Ker}(\delta^1 : C^1(A/J, J) \longrightarrow C^2(A/J, J))$ となることも示された。
□

定理 4-9 より、

$$^\exists x \in J \ \text{ s.t. } \ f = \delta^0 x \ \ i.e. \ \ f(\xi) = \xi \cdot x - x \cdot \xi \ \ \text{for } ^\forall \xi \in A/J$$

となる。故に、

$$\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi) = \xi \cdot x - x \cdot \xi = \psi_1(\xi)x - x\psi_2(\xi) \ \ \text{for } ^\forall \xi \in A/J$$

を得る。よって、

$$\psi_1(\xi)(1-x) = (1-x)\psi_2(\xi) \ \ \text{for } ^\forall \xi \in A/J$$

を得る。$\mathrm{Im}\psi_1 = B_1,\ \mathrm{Im}\psi_2 = B_2$ なので、

$$B_1(1-x) = (1-x)B_2$$

を得る。

さて、$x \in J = \mathrm{rad}A$ は冪零元であるから、$1-x$ は A の可逆元である ($x^n = 0$ のとき、$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ がその逆元である)。これより、

$$B_2 = (1-x)^{-1}B_1(1-x)$$

を得る。 (Q.E.D.)

系 4-12

$\boldsymbol{k}$：完全体 ($i.e.$ 任意の代数拡大 $K/\boldsymbol{k}$ が分離的)

A：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数

$\Longrightarrow\ ^\exists B : A$ の部分代数 s.t. (i) B は半単純

(ii) $A = B \oplus \mathrm{rad}A$ as $\boldsymbol{k}$-vector spaces

さらに、$B_1,\ B_2$ がこのような条件を満たす2つの部分代数ならば、

$$^{\exists}n \in \mathrm{rad}A \ \ \text{s.t.} \ \ B_2 = (1-n)^{-1}B_1(1-n)$$

となる。

(proof)

$\boldsymbol{k}$ は完全体なので、$A/\mathrm{rad}A$ は分離的である (演習 4-7)。

定理 4-11 の仮定が満たされるので、定理と同様の結果が成り立つ。 (Q.E.D.)

演習 4-12

$\boldsymbol{k}$：完全体

V：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間　とする。

任意の線形変換 $T \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ に対して、次の4つの条件を満たす線形変換 $S,\ N \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ が一意的に存在することを示せ。

(i) $T = S + N$

(ii) S は半単純 (*i.e.* V は左 $\boldsymbol{k}[S]$-加群として半単純)

(iii) N は冪零

(iv) $S \circ N = N \circ S$

さらに、このとき、$S,\ N \in \boldsymbol{k}[T]$ となる。

解；

V は有限次元なので、T によって生成される $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ の部分代数 $\boldsymbol{k}[T]$ も有限次元になる。

$\boldsymbol{k}$ は完全体であるから、系 4-12 によって、

$$^{\exists}B : \boldsymbol{k}[T] \text{ の部分代数 s.t. (i) } B \text{ は半単純}$$
$$\text{(ii) } \boldsymbol{k}[T] = B \oplus \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[T]) \ \ \text{as } \boldsymbol{k}\text{-vector spaces}$$

となる。この直和分解に応じて、T を

$$T = S + N \qquad\qquad (S \in B,\ N \in \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}[T]))$$

と書けば、S, N が求める条件を満たしていることがわかる。

$\because$)

(i) が成り立つことは、S, N の定め方から明らかである。また、有限次元代数の根基は冪零である (定理 1-17) から、(iii) も成り立つ。そして、S, N の定め方から $S, N \in \boldsymbol{k}[T]$ であり、$\boldsymbol{k}[T]$ は可換であるから、(iv) も成り立つ。

(ii) を示す。$\boldsymbol{k}[S]$ は可換な有限次元半単純代数 B の部分代数である。したがって、$\boldsymbol{k}[S]$ は半単純な代数代数である (演習 2-8)。演習 2-21 により、V は左 $\boldsymbol{k}[S]$-加群として半単純である。 □

これで、S, N の存在は証明された。次に、S, N の一意性を示す。

S', N' も (i)(ii)(iii)(iv) を満たす線形変換であるとする。

S, S' によって生成される $\boldsymbol{k}[T]$ の部分代数 $\boldsymbol{k}[S, S']$ を考える。

$\boldsymbol{k}[S, S']$ は半単純な有限次元可換代数である。

$\because$)

・$\boldsymbol{k}[S,S']$ が可換であること：

　$T = S'+N'$, $S' \circ N' = N' \circ S'$ ゆえ、$S' \circ T = T \circ S'$ である。したがって、また、$S \in \boldsymbol{k}[T]$ と可換である。よって、$\boldsymbol{k}[S,S']$ は可換である。

・$\boldsymbol{k}[S,S']$ が半単純であること：

　(ii) により、$\boldsymbol{k}[S]$, $\boldsymbol{k}[S']$ は有限次元半単純代数である (演習 2-21)。完全体上の代数について、半単純性と分離性は同値である (演習 4-7) から、$\boldsymbol{k}[S]$, $\boldsymbol{k}[S']$ は分離的である。したがって、$\boldsymbol{k}[S] \otimes \boldsymbol{k}[S']$ は半単純である (命題 4-7 の証明の下の注意参照)。写像

$$\varphi : \boldsymbol{k}[S] \otimes \boldsymbol{k}[S'] \longrightarrow \boldsymbol{k}[S,S'], \quad \varphi(f \otimes g) = f \circ g, \quad f \in \boldsymbol{k}[S],\ g \in \boldsymbol{k}[S']$$

は全射な代数準同型なので、$\boldsymbol{k}[S,S']$ は半単純である (演習 2-7(1))。　□

　したがって、$\boldsymbol{k}[S,S']$ の冪零元は 0 のみである (e が冪零元ならば $\boldsymbol{k}[S,S']e$ は $\boldsymbol{k}[S,S']$ の冪零イデアルになることと定理 2-4 による)。

　他方、$\boldsymbol{k}[S,S']$ が可換であるのと同じ理由で、N と N' は可換である。

　したがって、$N'-N = S-S' \in \boldsymbol{k}[S,S']$ は冪零である。

　故に、$N'-N=0$、すなわち、$N'=N$ でなければならない。このことからまた、$S=S'$ を得る。こうして、S,N の一意性も示された。　(Q.E.D.)

§5. 体の拡大の分離性と代数としての分離性

　体の代数的拡大 $K/\boldsymbol{k}$ が分離的であるとは、任意の元 $\alpha \in K$ に対し、その $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式が（任意の拡大体において）重根を持たない、ことをいった。一方、K を $\boldsymbol{k}$ 上の代数とみることにより、第 1 節で定義されたように、代数としての分離性も考えることができる。ここでは、体の有限次拡大に対して、体論の意味での分離性と代数の意味での分離性が一致することを示す。その結果として、標数 0 の体上の有限次元代数に対しては、半単純であることと分離的であることが同値になることも示す。

定理 4-13

$K/\boldsymbol{k}$：有限次の体の拡大　とする。このとき、

$$K/\boldsymbol{k} \text{ が分離的な体の拡大} \iff K \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ 上の代数として分離的}$$

が成り立つ。

　この定理を証明するためには少し準備が必要である。

　代数的な体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包 Ω が与えられたとき、

$$\iota(K/\boldsymbol{k}) := \sharp\{\sigma : K \longrightarrow \Omega \mid \sigma \text{ は単射な環準同型},\ \sigma(x) = x \ \ ({}^{\forall}x \in \boldsymbol{k})\}$$

とおく。$\iota(K/\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包 Ω の選び方によらない。

$\because$)

　Ω' を $\boldsymbol{k}$ の別の代数的閉包とする。

このとき、
$$^{\exists}f:\Omega\longrightarrow\Omega':\ \text{環準同型}\ \ \text{s.t.}\ \ f|_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{id}_{\boldsymbol{k}}$$
となる (系 A-5)。よって、
$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K,\Omega):=\{\sigma:K\longrightarrow\Omega\mid\sigma\ \text{は単射な環準同型},\ \sigma(x)=x\ \ (\ ^{\forall}x\in\boldsymbol{k})\}$$
とおくとき、
$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K,\Omega)\longrightarrow\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K,\Omega'),\qquad\sigma\longmapsto f\circ\sigma$$
および
$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K,\Omega')\longrightarrow\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K,\Omega),\qquad\tau\longmapsto f^{-1}\circ\tau$$
が定義されて、互いに他の逆写像になる。 □

注意：体から環への環準同型は常に単射である (定義 2-3 下注意 2°) から、
$$\iota(K/\boldsymbol{k}):=\sharp\{\sigma:K\longrightarrow\Omega\mid\sigma\ \text{は環準同型},\ \sigma(x)=x\ \ (\ ^{\forall}x\in\boldsymbol{k})\}$$
と定義してもよい。

体の拡大 $K/\boldsymbol{k}$ に対して、その拡大次数を $[K:\boldsymbol{k}]$ によって表わす：$[K:\boldsymbol{k}]=\dim_{\boldsymbol{k}}K$ 。

補題 4-14
$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次拡大
$\Longrightarrow\ \iota(K/\boldsymbol{k})\leq[K:\boldsymbol{k}]$

(proof)
Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。
$\sigma_1,\cdots,\sigma_n:K\longrightarrow\Omega$ を $\boldsymbol{k}$ の元を固定する相異なる n 個の環準同型とする。
拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.60 定理 2-11 により、
$$L=\{x\in K\mid\sigma_1(x)=\cdots=\sigma_n(x)\}$$
とおくと、$[L:\boldsymbol{k}]\geq n$ となる。故に、$[K:\boldsymbol{k}]\geq n$ を得る。
これより、$\iota(K/\boldsymbol{k})$ は有限の値でなければならず、したがってまた、$\iota(K/\boldsymbol{k})\leq[K:\boldsymbol{k}]$ でなければならない。 (Q.E.D.)

注意：$\iota(K/\boldsymbol{k})\geq 1$ である。
(proof)
K を含む $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包 Ω が存在する (系 A-3)。
このとき、包含写像 $i:K\hookrightarrow\Omega$ を考えることができる。i は単射な環準同型であって、$\boldsymbol{k}$ の元を動かさない。よって、$\iota(K/\boldsymbol{k})\geq 1$ である。 □

補題 4-15
$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次拡大とする。K と $\boldsymbol{k}$ の任意の中間体 L に対して、
$$\iota(K/\boldsymbol{k})=\iota(K/L)\iota(L/\boldsymbol{k})$$
が成り立つ。

(proof)

有限次拡大体は代数的であるから、$K/\boldsymbol{k}$ 代数的である。したがって、$\boldsymbol{k}$ の代数的閉包 Ω であって、

$$\Omega \supset K \supset \boldsymbol{k}$$

を満たすものが存在する (系 A-3)。

Ω は $K,\ L$ の代数的閉包でもある。

$\because$)

K を含む最小の代数閉体 Ω' は $\boldsymbol{k}$ を含む代数閉体である。

$$\therefore\ {}^{\exists}\Omega'' : \boldsymbol{k} \text{ の代数的閉包 s.t. } \Omega' \supset \Omega''$$

$\Omega,\ \Omega''$ が $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包で、$\Omega \supset \Omega''$ となっていることから、$\Omega = \Omega''$ を得る。

よって、$\Omega = \Omega'$ でもある。

L に関しても同様である。 $\square$

$\iota(K/L) = m,\ \iota(L/\boldsymbol{k}) = n$ とおく。また、

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K, \Omega) := \{\sigma : K \longrightarrow \Omega \mid \sigma \text{ は単射な環準同型},\ \sigma(x) = x \quad ({}^{\forall}x \in \boldsymbol{k})\}$$

とおく。

$$\sharp\mathcal{M}_L(K, \Omega) = m,\ \sharp\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(L, \Omega) = n$$

である。写像

$$F : \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(L, \Omega) \times \mathcal{M}_L(K, \Omega) \longrightarrow \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K, \Omega)$$

を以下のように定義する。まず、各 $\lambda \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(L, \Omega)$ は環の同型 $\tilde{\lambda} : \Omega \longrightarrow \Omega$ に拡張されることに注意する (系 A-5)。このような $\tilde{\lambda}$ を各 λ に対して 1 つ選んでおく。このとき、

$$F(\lambda, \mu) = \tilde{\lambda} \circ \mu$$

と定める。補題の証明を完成させるには、F が全単射であることを示せばよい。

i. F が単射であること：

$F(\lambda_1, \mu_1) = F(\lambda_2, \mu_2)$ とすると、$\tilde{\lambda_1} \circ \mu_1 = \tilde{\lambda_2} \circ \mu_2$ である。$\mu_i|_L = \mathrm{id}_L\ (i = 1, 2)$ なので、任意の $\alpha \in L$ に対して、

$$(\tilde{\lambda_1} \circ \mu_1)(\alpha) = \tilde{\lambda_1}(\alpha) = \lambda_1(\alpha),$$
$$(\tilde{\lambda_2} \circ \mu_2)(\alpha) = \tilde{\lambda_2}(\alpha) = \lambda_2(\alpha)$$

を得る。故に、$\lambda_1 = \lambda_2$ を得る。

一方、任意の $\xi \in K$ に対して $\tilde{\lambda_1}(\mu_1(\xi)) = \tilde{\lambda_2}(\mu_2(\xi))$ となるが、$\lambda_1 = \lambda_2$ であり、$\tilde{\lambda_1}$ は同型であるので、

$$\mu_1(\xi) = \mu_2(\xi)$$

を得る。故に、$\mu_1 = \mu_2$ を得る。こうして、F の単射性が示された。

ii. F の全射であること：

任意に $\gamma \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(K, \Omega)$ をとる。

$\gamma|_L : L \longrightarrow \Omega \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(L, \Omega)$ である。$\lambda := \gamma|_L$ とおく。

任意の $\alpha \in L$ に対して $(\tilde{\lambda}^{-1} \circ \gamma)(\alpha) = \alpha$ が成り立つ。よって、$\tilde{\lambda}^{-1} \circ \gamma \in \mathcal{M}_L(K, \Omega)$ である。$\mu := \tilde{\lambda}^{-1} \circ \gamma$ とおくと、

$$F(\lambda, \mu) = \tilde{\lambda} \circ \mu = \gamma$$

を得る。故に、F は全射である。　(Q.E.D.)

補題 4-16

$\boldsymbol{k}$：体

$f(X) \in \boldsymbol{k}[X] - \boldsymbol{k}$：既約かつモニックな多項式とする。

(1) $\boldsymbol{k}$ の標数が 0 $\implies$ $f(X)$ は分離的

(2) $\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ $\implies$ ${}^{\exists 1}e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ {}^{\exists 1}g(X) \in \boldsymbol{k}[X]$: 既約かつモニックかつ分離的 s.t. $f(X) = g(X^{p^e})$

さらに、$\deg g(X) = m$ とおくと、$f(X)$ は $\boldsymbol{k}$ の任意の代数的閉包において、m 個の相異なる根を持ち、これら m 個の根の重複度はいずれも p^e である。

(proof)

(1) 拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.100 系 3 を参照。

(2) $\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f(X) = u(X^{p^s}) \ \text{ for some } u(X) \in \boldsymbol{k}[X]\}$ とおく。

$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

$\because$)

$u(X)$ として $f(X)$ 自身をとり、$s = 0$ とすれば、$f(X) = u(X^{p^s})$ となる。故に、$0 \in \mathcal{S}$ □

$\mathcal{S}$ は有限集合である。

$\because$)

$s \in \mathcal{S} \implies f(X) = u(X^{p^s}) \ \text{ for some } \ u(X) \in \boldsymbol{k}[X]$

故に、$n = \deg f(X)$ とおくと、$n = p^s \deg u(X) \geq p^s$

$f(X)$ は定数でないので、$u(X)$ も定数でない。

$$\therefore \ \log n \leq s \log p$$

$$\therefore \ s \leq \frac{\log p}{\log n} \quad \square$$

よって、$e = \max \mathcal{S}$ とおくと、$e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり、

$$f(X) = g(X^{p^s}) \ \text{ for some } \ g(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

かつ

$$^{\forall}u(X) \in \boldsymbol{k}[X],\ f(X) \neq u(X^{p^{e+1}}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。$g(X)$ が既約かつモニックな分離多項式であることを示す。

① $g(X)$ がモニックになることは、$f(X)$ がモニックであることからただちに導かれる。

② $g(X)$ が既約であること：

$g(X) = g_1(X)g_2(X),\ \ g_i(X) \in \boldsymbol{k}[X]\ (i = 1, 2)$ と書けたと仮定する。

このとき、

$$f(X) = g(X^{p^e}) = g_1(X^{p^e})g_2(X^{p^e})$$

が成り立つ。$f(X)$ は既約であるから、$g_1(X^{p^e})$ または $g_2(X^{p^e})$ の一方は定数でないといけない。したがって、$g_1(X)$ または $g_2(X)$ の一方は定数でなければならない。故に、$g(X)$ は既約である。

③ $g(X)$ が分離的であること：

$g(X)$ がある $u(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ に対して、$g(X) = u(X^p)$ と表わされたと仮定すると、

$$f(X) = g(X^{p^e}) = u(X^{p^{e+1}})$$

となり、$(*)$ に矛盾する。よって、

$$g(X) \neq u(X^p) \quad \text{for } {}^\forall u(X) \in \boldsymbol{k}[X]$$

となる。このことは、『あるてぃんの Galois Theory』p.151 により、$g(X)$ が $\boldsymbol{k}$ 上分離的であることを意味する。

補題の条件を満たす e と $g(X)$ が一意的であることを示す前に、補題の後半部分を先きに示す。e と $g(X)$ を補題の条件を満たす整数と多項式とする。

Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。$\deg g(X) = m$ とおけば、$g(X)$ は分離的であるから、$\Omega[X]$ において $g(X)$ は相異なる一次式の積に分解する：

$$g(X) = (X-\beta_1)\cdots(X-\beta_m) \qquad \beta_1, \cdots, \beta_m \in \Omega,\ \beta_i \neq \beta_j\ (i \neq j)$$

多項式 $X^{p^e} - \beta_i$ の Ω における根の 1 つを α_i とおくと、$\alpha_i^{p^e} = \beta_i$ であるから、

$$\begin{aligned} f(X) = g(X^{p^e}) &= (X^{p^e}-\beta_1)\cdots(X^{p^e}-\beta_m) \\ &= (X^{p^e}-\alpha_1^{p^e})\cdots(X^{p^e}-\alpha_m^{p^e}) \\ &= (X-\alpha_1)^{p^e}\cdots(X-\alpha_m)^{p^e} \end{aligned}$$

$\Omega[X] \longrightarrow \Omega[X],\ \xi \longmapsto \xi^p$ は環の準同型より。
『あるてぃんの Galois Theory』p.102 命題 2-5

となる。したがって、$f(X)$ は重複度がいずれも p^e であるような相異なる m 個の根を Ω 内に持つ。

最後に、補題の条件を満たす e と $g(X)$ が一意的であることを示す。

そのためには $g_1(X), g_2(X) \in \boldsymbol{k}[X] - \boldsymbol{k}$ が分離的なとき、

$$g_1(X^{p^{e_1}}) = g_2(X^{p^{e_2}}) \implies g_1(X) = g_2(X) \ \text{ かつ } \ e_1 = e_2$$

となることを示せばよい。

$m_1 = \deg g_1(X),\ m_2 = \deg g_2(X)$ とおき、Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包ととする。このとき、先程のようにして、

$$\begin{aligned} g_1(X^{p^{e_1}}) &= (X-\alpha_1)^{p^{e_1}}\cdots(X-\alpha_{m_1})^{p^{e_1}}, \qquad \alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j), \\ g_2(X^{p^{e_2}}) &= (X-\beta_1)^{p^{e_2}}\cdots(X-\beta_{m_2})^{p^{e_2}}, \qquad \beta_i \neq \beta_j\ (i \neq j) \end{aligned}$$

のように $\Omega[X]$ において因数分解される。したがって、適当に順番を変えることにより、

$$m_1 = m_2,\ \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_{m_1} = \beta_{m_1},\ p^{e_1} = p^{e_2}$$

となる。よって、$e_1 = e_2$ であり、

$$\begin{aligned} g_1(X) &= (X - \alpha_1^{p^{e_1}}) \cdots (X - \alpha_{m_1}^{p^{e_1}}) \\ &= (X - \beta_1^{p^{e_2}}) \cdots (X - \beta_{m_2}^{p^{e_2}}) \\ &= g_2(X) \end{aligned}$$

となる。 (Q.E.D.)

定義 4-3

$\boldsymbol{k}$：体

$f(X) \in \boldsymbol{k}[X] - \boldsymbol{k}$：既約かつモニックな多項式とする。

このとき、$f(X)$ の**被約多項式** (*reduced polynomial*) であるとは、次のようにして定まる $\boldsymbol{k}$ 上の分離多項式のことをいう。

(1) $\boldsymbol{k}$ の標数が 0 のとき、$f(X)$ 自身

(2) $\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ のとき、補題 4-16(2) の多項式 $g(X)$

命題 4-17

$K/\boldsymbol{k}$：代数的な体の拡大、$K = \boldsymbol{k}(\alpha),\ \alpha \in K$ であると仮定する。

$f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ を α の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式とし、$g(X)$ をその被約多項式とする。このとき、

$$\iota(K/\boldsymbol{k}) = \deg g(X)$$

が成り立つ。

(proof)

Ω を K を含む $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。

$\deg g(X) = m$ とおく。$\iota(K/\boldsymbol{k}) = m$ となることを示す。

i. $\iota(K/\boldsymbol{k}) \geq m$ であること：

補題 4-16 により、$f(X)$ は Ω 内に相異なる m 個の根を持つ。これを $\alpha_1 := \alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ とおく。

$f(X)$ は α の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式であり、かつ、$f(\alpha_i) = 0\ (i = 1, \cdots, m)$ であるから、各 i に対して、

$$^\exists\omega_i \in \mathrm{Gal}(\Omega/\boldsymbol{k}) := \mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\Omega, \Omega) \ \text{ s.t. } \ \omega_i(\alpha) = \alpha_i$$

となる (系 A-5)。$\omega_i|_K : K \longrightarrow \Omega$ は環準同型 (したがって、単射) であり、$\boldsymbol{k}$ の元を動かさない。また、$i \neq j$ ならば、

$$(\omega_i|_K)(\alpha) = \alpha_i \neq \alpha_j = (\omega_j|_K)(\alpha)$$

ゆえ、$\omega_1|_K, \cdots, \omega_m|_K$ は相異なる。こうして、$\iota(K/\boldsymbol{k}) \geq m$ が示された。

ii. $\iota(K/\boldsymbol{k}) \leq m$ であること：

$\varphi : K \longrightarrow \Omega$ を環準同型であって、$\boldsymbol{k}$ の元を動かさないものとする。$\alpha' = \varphi(\alpha)$ とおくと、

$$f(\alpha') = f(\varphi(\alpha)) = \varphi(f(\alpha)) = 0$$

$$\hookleftarrow \left(\begin{array}{l} \varphi \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ の元を動かさない} \\ f(X) \in \boldsymbol{k}[X] \end{array} \right)$$

となるので、α' も $f(X)$ の Ω 内の根である。よって、α' は $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ のいずれかに一致する。$\alpha' = \alpha_j$ であったとすると、$\varphi|_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{k}}$ かつ $\varphi(\alpha) = \alpha_i$ であるから、$\varphi = \omega_i|_K$ となる。よって、

$$\iota(K/\boldsymbol{k}) \leq m$$

となる。

i. と ii. から、$\iota(K/\boldsymbol{k}) = m = \deg g(X)$ となることが示された。 (Q.E.D.)

系 4-18

$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次拡大 とする。このとき、

$$K/\boldsymbol{k}\text{：分離的} \iff \iota(K/\boldsymbol{k}) = [K:\boldsymbol{k}]$$

が成り立つ。

(proof)

i. 必要性：

$K/\boldsymbol{k}$ が分離的ならば、

$$^{\exists}\alpha \in K \ \ \text{s.t.} \ \ K = \boldsymbol{k}(\alpha)$$

となる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.150)。α は $\boldsymbol{k}$ 上分離的なので、α の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式 $f(X)$ は分離的である。したがって、$f(X)$ の被約多項式は $f(X)$ 自身である。命題 4-17 により、

$$\iota(K/\boldsymbol{k}) = \deg f(X) = [\boldsymbol{k}(\alpha):\boldsymbol{k}] = [K:\boldsymbol{k}]$$

となる。

ii. 十分性：

$K/\boldsymbol{k}$ は有限次拡大であるから、代数的である。$\alpha \in K$ を任意にとり、α の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式を $f(X)$、その被約多項式を $g(X)$ とおく。このとき、

$$\iota(\boldsymbol{k}(\alpha)/\boldsymbol{k}) \leq [\boldsymbol{k}(\alpha):\boldsymbol{k}], \qquad \iota(K/\boldsymbol{k}(\alpha)) \leq [K:\boldsymbol{k}(\alpha)]$$

となる (補題 4-14)。ところが、

$$[K:\boldsymbol{k}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{仮定}}}{=} \iota(K/\boldsymbol{k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 4-15}}}{=} \iota(K/\boldsymbol{k}(\alpha))\iota(\boldsymbol{k}(\alpha)/\boldsymbol{k}) \leq [K:\boldsymbol{k}(\alpha)][\boldsymbol{k}(\alpha):\boldsymbol{k}] = [K:\boldsymbol{k}]$$

が成り立つから、

$$\iota(\boldsymbol{k}(\alpha)/\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}(\alpha):\boldsymbol{k}], \qquad \iota(K/\boldsymbol{k}(\alpha)) = [K:\boldsymbol{k}(\alpha)]$$

でなければならない。特に、前者から、

$$\deg g(X) = \iota(\boldsymbol{k}(\alpha)/\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}(\alpha):\boldsymbol{k}] = \deg f(X)$$

を得る。このことは、$f(X) = g(X)$ を意味し、したがって、$f(X)$ は分離的である。$f(X)$ は α の最小多項式であったから、α は $\boldsymbol{k}$ 上分離的である。 (Q.E.D.)

注意：補題 4-15 と系 4-18 から、体の有限次拡大 E/K と K と E の中間体 L について、

$$E/K\text{：分離的} \iff E/L,\ L/K\text{：分離的}$$

が成り立つことがわかる。

次の命題が、定理 4-13 を証明する際の鍵である。

命題 4-19

$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次拡大、$n = [K : \boldsymbol{k}]$ とおく。
Ω：$\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とする。このとき、

$$K/\boldsymbol{k}\text{：分離的} \iff \Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \cong \underbrace{\Omega \oplus \cdots \oplus \Omega}_{n\text{ 個}} \quad \text{as } \Omega\text{-algebras}$$

(proof)

i. 必要性

系 4-18 により、$\iota(K/\boldsymbol{k}) = n$ となる。

$\sigma_1, \cdots, \sigma_n : K \longrightarrow \Omega$ を相異なる n 個の巻準同型であって、$\boldsymbol{k}$ への制限が恒等写像になるものとする。

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ を K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。

$\{1 \otimes w_1, \cdots, 1 \otimes w_n\}$ は $\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K$ の Ω 上の基底である。

写像 $\varphi : \Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \longrightarrow \underbrace{\Omega \oplus \cdots \oplus \Omega}_{n\text{ 個}}$ を

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} c_i(1 \otimes w_i)) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma_1(w_i), \cdots, \sigma_n(w_i)) \qquad (c_i \in \Omega,\ i = 1, \cdots, n)$$

により定義する。φ は Ω-線形である。ここで、φ は K の基底の選び方によらないことを注意しておく。

$\because)$

$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を別の K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする。

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} w_j \qquad (a_{ji} \in \boldsymbol{k})$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_{i=1}^{n} c_i(1 \otimes u_i)) &= \varphi(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i a_{ji}(1 \otimes w_j)) \\
&= \varphi(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ji})(1 \otimes w_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ji})(\sigma_1(w_j), \cdots, \sigma_n(w_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma_1(a_{ji}w_j), \cdots, \sigma_n(a_{ji}w_j)) \qquad a_{ji} \in \boldsymbol{k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_i(\sigma_1(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}w_j), \cdots, \sigma_n(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}w_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_i(\sigma_1(u_i), \cdots, \sigma_n(u_i)) \quad \square
\end{aligned}$$

① φ が線形同型写像であること：

$\dim_\Omega(\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K) = n = \dim_\Omega(\Omega)^n$ より、φ が単射になることを示せば十分である。

Ω^n の n 個のベクトル

$$\xi_1 = (\sigma_1(w_1), \cdots, \sigma_1(w_n)), \cdots\cdots, \xi_n = (\sigma_n(w_1), \cdots, \sigma_n(w_n))$$

は Ω 上一次独立である。実際、

$$c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n = 0 \qquad (c_i \in \Omega,\ i = 1, \cdots, n)$$

ならば、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\sigma_i(w_j) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

となる。

$$\therefore \ \sum_{i=1}^{n} c_i\sigma_i(\alpha) = 0 \ \text{ for } {}^\forall\alpha \in K$$

『あるてぃんの Galois Theory』p.59 定理 2-10 系により、$c_1 = \cdots c_n = 0$ を得る。よって、$\xi_1, \cdots, \xi_n$ は Ω 上一次独立である。このことは、$\xi_1, \cdots, \xi_n$ を行ベクトルとする n 次正方行列 $(\sigma_i(w_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\Omega)$ が可逆なことを意味する。したがって、その行列の列ベクトル

$$\eta_1 = (\sigma_1(w_1), \cdots, \sigma_n(w_1)), \cdots\cdots, \eta_n = (\sigma_1(w_n), \cdots, \sigma_n(w_n))$$

も一次独立になる。故に、φ は単射である。

② φ が代数準同型であること：

まず、積を保つことを見る。そのためには

$$\varphi((1 \otimes w_i)(1 \otimes w_j)) = \varphi(1 \otimes w_i)\varphi(1 \otimes w_j) \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

となることを示せばよい。

$$w_i w_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k w_k \qquad (\alpha_{ij}^k \in \boldsymbol{k})$$

と書くと、

$$\varphi((1 \otimes w_i)(1 \otimes w_j)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k \varphi(1 \otimes w_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k (\sigma_1(w_k), \cdots, \sigma_n(w_k))$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}
\varphi(1 \otimes w_i)\varphi(1 \otimes w_j) &= (\sigma_1(w_i), \cdots, \sigma_n(w_i))(\sigma_1(w_j), \cdots, \sigma_n(w_j)) \\
&= (\sigma_1(w_i)\sigma_1(w_j), \cdots, \sigma_n(w_i)\sigma_n(w_j)) \\
&= (\sigma_1(w_i w_j), \cdots, \sigma_n(w_i w_j)) \\
&= (\sigma_1(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k w_k), \cdots, \sigma_n(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k w_k))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^{k}\sigma_1(w_k), \cdots, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^{k}\sigma_n(w_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^{k}(\sigma_1(w_k), \cdots, \sigma_n(w_k))
\end{aligned}
$$

となる。故に、

$$
\varphi((1\otimes w_i)(1\otimes w_j)) = \varphi(1\otimes w_i)\varphi(1\otimes w_j) \qquad (1 \leq i, j \leq n)
$$

が示された。

次に、φ が単位元を保つことを見る。先程示したように、φ は K の基底の選び方によらない。そこで、K の $\boldsymbol{k}$ 上の基底 $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ として $w_1 = 1$ を満たすものをとり、φ を考える。すると、

$$
\varphi(1 \otimes 1) = \varphi(1 \otimes w_1) = (\sigma_1(w_1), \cdots, \sigma_n(w_1)) = (1, \cdots, 1)
$$

となる。よって、φ は単位元を保つ。

以上から、φ は Ω 上の代数としての同型写像である。

ii. 十分性

$\varphi : \Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \longrightarrow \Omega^n$ を Ω 上の代数としての同型写像とする。各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、$\sigma_i : K \longrightarrow \Omega$ を合成

$$
\begin{array}{ccccc}
K & \longrightarrow & \Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K & \xrightarrow{\omega_i} & \Omega \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
a & \longmapsto & 1 \otimes a & \longmapsto & \omega_i(1 \otimes a)
\end{array}
$$

によって定義する。σ_i は $\sigma_i|_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{k}}$ を満たす環準同型である。

$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が相異なることを示す。もし、$i \neq j$ であるようなある i, j に対して、$\sigma_i = \sigma_j$ と仮定する。このとき、$\Omega \otimes K$ の任意の元

$$
a = \sum_k c_k \otimes \alpha_k \qquad (c_k \in \Omega,\ \alpha_k \in K)
$$

に対して、

$$
\begin{aligned}
\omega_i(a) &= \omega_i(\sum_k c_k \otimes \alpha_k) = \omega_i(\sum_k c_k \cdot 1 \otimes \alpha_k) \qquad \omega_i \text{ は } \Omega\text{-線形} \\
&= \sum_k c_k \omega_i(1 \otimes \alpha_k) \\
&= \sum_k c_k \omega_i(\alpha_k) \\
&= \sum_k c_k \omega_j(\alpha_k) \\
&= \cdots\cdots\cdots = \omega_j(a)
\end{aligned}
$$

となる。つまり、$\omega_i = \omega_j$ となる。

これより、φ の行列表示として、第 i 行と第 j 行が同じものがとれるから、φ の Ω 上の線形写像としての階数は $n-1$ 以下になることがわかる。これは、φ が代数の同型であることに反する。故に、$\omega_1, \cdots, \omega_n$ は相異なる。補題 4-14 により、

$$
\iota(K/\boldsymbol{k}) = n
$$

がわかる。したがって、また、系 4-18 から、$K/\boldsymbol{k}$ は分離的なことがわかる。

これで、定理は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 4-13)

. $K/\boldsymbol{k}$ は分離的な体の拡大であるとする。$n=[K:\boldsymbol{k}]$ とおく。

Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とすると、命題 4-19 により、

$$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \cong \underbrace{\Omega \oplus \cdots \oplus \Omega}_{n\text{ 個}} \quad \text{as} \quad \Omega\text{-algebras}$$

となる。Ω は体であるから、Ω 上の代数として単純、したがって、その有限個の直和 Ω^n は半単純である (定理 2-20)。したがって、$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K$ は Ω 上の代数として半単純である。故に、K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として分離的である (補題 4-1)。

. K が $\boldsymbol{k}$ 上の代数として分離的であると仮定する。

Ω を $\boldsymbol{k}$ の 1 つの代数的閉包とする。このとき、$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K$ は Ω 上の代数として半単純となる、したがって、単純な Ω 上の代数の直和に同型である (定理 2-20) が、Ω は代数閉体なので、

$$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \cong \mathrm{M}_{n_1}(\Omega) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_k}(\Omega) \quad \text{as} \quad \Omega\text{-algebras}$$

となる (系 2-22)。ところで、K は体なので可換、したがって、$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K$ も Ω 上の可換な代数となる。よって、$n_1 = \cdots = n_k = 1$ でなければならない。こうして、

$$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K \cong \underbrace{\Omega \oplus \cdots \oplus \Omega}_{k\text{ 個}} \quad \text{as} \quad \Omega\text{-algebras}$$

が示された。$\dim_\Omega(\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} K) = \dim_{\boldsymbol{k}} K$ に注意すれば、上の同型の右辺の Ω の個数は $\dim_{\boldsymbol{k}} K$ 個でなければならないことがわかる。命題 4-19 より、K は $\boldsymbol{k}$ 上の分離的な拡大体である。(Q.E.D.)

定理 4-13 の応用として、以下の 2 つの系を得る。

系 4-20

$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次分離拡大

A：$\boldsymbol{k}$ 上の半単純代数

$\Longrightarrow$ A^K：(K 上の代数として) 半単純

(proof)

① K は $\boldsymbol{k}$ 上の有限次分離的代数とみなされ得ること (定理 4-13)

② 有限次分離的代数と半単純代数とのテンソル積は半単純であること (命題 4-7 の下の注意参照)

の 2 つの事実から、A^K は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として半単純である。

したがって、A^K は K 上の代数としても半単純である (演習 2-4)。 (Q.E.D.)

系 4-21

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の体

A：$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。このとき、

$$A：分離的 \iff A：半単純$$

(proof)

必要性は、「代数が分離的であること」の定義から明らかである。

十分性を示す。

$\boldsymbol{k}$ の任意の有限次拡大 K に対して、A^K が半単純になることを示せば十分である (補題 4-2)。まず、$K/\boldsymbol{k}$ は有限次であって、$\boldsymbol{k}$ の標数が 0 なので $K/\boldsymbol{k}$ は分離的である (『あるてぃんの Galois Theory』p.100 系 3 参照)。この事実と A が半単純であることから、A^K は半単純な代数であることがわかる (系 4-20)。故に、A は分離的である。 (Q.E.D.)

注意：A が有限次元の Hopf 代数ならば、体の標数が 0 でなくても、上の同様の結論が成り立つ (S.Montgomery・著『Hopf algebras and their actions on rings』Corollary2.2.2)。

演習 4-13

$K/\boldsymbol{k}$：代数的な体の拡大　とする。このとき、

$$S := \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ 上分離的}\}$$

は $\boldsymbol{k}$ を含む K の部分体であることを示せ。

S は $\boldsymbol{k}$ の K における**分離閉包**と呼ばれる。

解；

・<u>$\boldsymbol{k} \subset S$ である。</u>

任意の $a \in \boldsymbol{k}$ は $X - a \in \boldsymbol{k}[X] - \boldsymbol{k}$ の根である。$X - a$ は分離多項式 (任意の拡大体において重根を持たない) ゆえ、$a \in S$ となる。故に、$\boldsymbol{k} \subset S$ である。

・<u>$\alpha, \beta \in S$ とする。$\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)$ は $\boldsymbol{k}$ 上分離的である。</u>

$\alpha, \beta \in K$ より、α, β は $\boldsymbol{k}$ 上代数的である。したがって、$\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)$ も $\boldsymbol{k}$ 上代数的である。しかも、$\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)$ は $\boldsymbol{k}$ の有限次拡大である (『あるてぃんの Galois Theory』p.46 系 2 参照)。

$K_1 = \boldsymbol{k}(\alpha)$ とおくと、$\boldsymbol{k}(\alpha, \beta) = K_1(\beta)$ が成り立つ。

β は K_1 上分離的である。

$\because$)

β は $\boldsymbol{k}$ 上分離的ゆえ、β の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式は重根をもたない。β の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式は、$K_1[X]$ の元であり、β を根に持つ。よって、それは β の K_1 上の最小多項式で割り切れる。よって、β の K_1 上の最小多項式も重根を持たない。　□

命題 4-17 より、

$$\iota(K_1/\boldsymbol{k}) = \deg(\alpha \text{ の } \boldsymbol{k} \text{ 上の最小多項式}) = [K_1 : \boldsymbol{k}]$$

$$\iota(\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)/K_1) = \deg(\beta \text{ の } K_1 \text{ 上の最小多項式}) = [\boldsymbol{k}(\alpha, \beta) : K_1]$$

であるから、

$$\iota(\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)/\boldsymbol{k}) = \iota(\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)/K_1)\iota(K_1/\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}(\alpha, \beta) : K_1][K_1 : \boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{k}(\alpha, \beta) : \boldsymbol{k}]$$

を得る (補題 4-15)。よって、系 4-18 により、$\boldsymbol{k}(\alpha, \beta)/\boldsymbol{k}$ は分離的である。 (Q.E.D.)

演習 4-14

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数 とする。
$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ を Wedderburn 分解とする。このとき、

A：分離的 $\iff$ ${}^{\forall}i = 1, \cdots, n$ に対して、$Z(A_i)$ は $\boldsymbol{k}$ の分離的拡大体

が成り立つことを示せ。

解；

$$\begin{aligned} A : \text{分離的} &\iff i = 1, \cdots, n \text{ に対して、} A_i \text{ は分離的} \\ &\iff i = 1, \cdots, n \text{ に対して、} Z(A_i) \text{ は分離的} \end{aligned}$$

である (演習 4-1)。各 $i = 1, \cdots, n$ に対して A_i は単純であるから、$Z(A_i)$ は体になる。

体の有限次拡大について、その拡大体が体として分離的であることと代数として分離的であることは同値である (定理 4-13) から、$Z(A_i)$ が $\boldsymbol{k}$ 上の代数として分離的であることと $Z(A_i)$ が $\boldsymbol{k}$ の分離的な拡大体であることとは同値になる。 (Q.E.D.)

演習 4-15

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数
$E/\boldsymbol{k}$：体の有限次分離的拡大 とする。
M：完全可約な左 A-加群であって、$\mathrm{End}_A M$ 上有限生成
　$\Longrightarrow$ M^E：完全可約な左 A^E-加群
が成り立つことを示せ。

解；

演習 2-12 により

$$A_M = \{A \text{ の } M \text{ への左作用全体}\}$$

は半単純である。

E は $\boldsymbol{k}$ の有限次分離的な拡大体なので、$(A_M)^E$ は E 上の代数として半単純である (系 4-20)。

故に、M^E は左 $(A_M)^E$-加群として完全可約である (命題 2-2)。

したがってまた、M^E は左 A-加群として完全可約である。 (Q.E.D.)

注意：完全可約な左 A-加群 M が $\boldsymbol{k}$ 上有限次元の場合には、演習 4-9 を用いても証明することができる。演習 4-9 における A, B, M, N をそれぞれ $E, A, {}_E E, M$ にとればよい。

演習 4-16

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数
$E/\boldsymbol{k}$：体の有限次分離的拡大
　$\Longrightarrow$ $\mathrm{rad}(A^E) = (\mathrm{rad} A)^E$
が成り立つことを示せ。

解；

有限次元代数は左 Artin 代数であるから、$(\mathrm{rad}A)^E \subset \mathrm{rad}(A^E)$ となる (演習 1-70)。

逆向きの包含関係が成り立つことを示す。

左正則 A-加群 ${}_AA$ の商加群 $M := A/\mathrm{rad}A$ を考える。

M は完全可約である。

∵)

　系 2-6 により、商代数 $\bar{A} = A/\mathrm{A}$ は半単純である。したがって、その正則 $\bar{A}$-加群 ${}_{\bar{A}}\bar{A}$ は完全可約である。${}_{\bar{A}}\bar{A}$ への $\bar{A}$ の左作用を自然な射影 $A \longrightarrow \bar{A}$ を通して左 A-加群とみなしたものが M に他ならないから、M は左 A-加群として完全可約である。 □

$E/\boldsymbol{k}$ は有限次分離的拡大であって、M は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元であるから、演習 4-15 により、M^E は完全可約な左 A^E-加群である。

したがって、$(\mathrm{rad}(A^E))M^E = 0$ を得る (系 2-7)。

左 A^E 加群として、$M^E \cong A^E/(\mathrm{rad}A)^E$ である (演習 1-70) から、

$$\mathrm{rad}(A^E) \subset (\mathrm{rad}A)^E$$

を得る。

∵)

$$(\mathrm{rad}(A^E))M^E = 0 \implies (\mathrm{rad}(A^E))\Big(A^E/(\mathrm{rad}A)^E\Big) = 0 \implies \mathrm{rad}(A^E) \subset (\mathrm{rad}A)^E$$

となる。 □

以上より、$\mathrm{rad}(A^E) = (\mathrm{rad}A)^E$ が示された。 (Q.E.D.)

§6. 有限次元分離的代数の分解体

有限次元代数 A の基礎体の拡大体 E が A の分解体であるとは、係数体を E へ拡大することにより得られる代数 A^E が有限個の行列代数の直和に分解されるときをいう。ここでは、任意の有限次元分離的代数には分解体が存在し、その分解体は基礎体の有限次分離拡大によって実現されることを証明する。

定義 4-4

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数　とする。

E：$\boldsymbol{k}$ 上の A **の分解体** (*splitting field*)

$$\iff \begin{cases} \text{i)} & E \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ の拡大体} \\ \text{ii)} & E \otimes_{\boldsymbol{k}} A \cong \mathrm{M}_{n_1}(E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_k}(E) \ \ \text{as } E\text{-algebras} \end{cases}$$

有限次元代数 A が分離的ならば、それは必ず分解体を持つ。実際、$\boldsymbol{k}$ の代数的閉包は A の分解体の 1 つである。

∵)

　Ω を $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包とすれば、$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ は代数的閉体上の半単純な有限次元代数になる。したがって、$\Omega \otimes_{\boldsymbol{k}} A$ は行列代数の直和になり、Ω は A の分解体である。 □

次の定理は、有限次元分離的代数 A の分解体が基礎体 $\boldsymbol{k}$ の有限次分離的拡大体の中から得られることを主張している。

定理 4-22

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元分離的代数

$\Longrightarrow$ $\ {}^{\exists}E$：$\boldsymbol{k}$ の有限次分離的拡大体 s.t. E は A の分解体

この定理を証明するために、まず、次の補題を証明する。

補題 4-23

D：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数 とする。このとき、

D：中心的 $\Longrightarrow$ D の極大な部分体は D の分解体

(proof)

L を D の極大な部分体とする。L は単純である。

補題 2-30 により、$\boldsymbol{k}$ 上の代数として、

$$D \otimes L^{\mathrm{op}} \cong Z_D(L) \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。L の極大性により、

$$Z_D(L) = L \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ (演習 2-39 の証明参照)。

①②と L の可換性、および $L \otimes D \cong D \otimes L$ as $\boldsymbol{k}$-algebras から、$\boldsymbol{k}$ 上の代数として

$$L \otimes D \cong L \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となることがわかる。写像の作り方 (補題 2-30) をみることにより、この対応は L 上の代数としての同型対応になっていることがわかる。

$\because$)

$l \in L$ に対して、①の対応の下で、

$$1 \otimes l \quad \longleftrightarrow \quad l \otimes \mathrm{id}_L$$

となっていることを確認すればよい。

①の同型対応を f とおく。f は次の図式を可換にする線形写像である。

$$\begin{tikzcd}
Z_D(L) \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L \arrow[d, "f"'] & {= \ Z_D(L) \otimes Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L}(\boldsymbol{k}\mathrm{id}_L) \ =} & Z_{D\otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L}(L \otimes \boldsymbol{k}\mathrm{id}_A) \arrow[d] & \ni x \arrow[d, mapsto] \\
D \otimes L^{\mathrm{op}} & {D \otimes L_r = Z_D(\boldsymbol{k}) \otimes Z_{\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L}(L_l) =} \arrow[l] & Z_{D\otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L}(\boldsymbol{k}1 \otimes L_l) & \ni uxu^{-1} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
d \otimes p(1) & d \otimes p \arrow[l, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

但し、$L_l = \{ \ L$ 上の左正則作用全体 $\}$, $L_r = \{ \ L$ 上の右正則作用全体 $\}$ であり、$u \in D \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L$ は２つの代数準同型

$$\begin{cases} \sigma : L \longrightarrow D \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L, & l \longmapsto l \otimes \mathrm{id}_L, \\ \tau : L \longrightarrow D \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}L, & l \longmapsto 1 \otimes \rho_l(l) \quad (\ \rho_l(l) \text{ は } l \in L \text{ の左正則作用}) \end{cases}$$

に、Skolem-Noether の定理を適用して得られるある可逆元である：

$$u^{-1}(1 \otimes \rho_l(l))u = l \otimes \mathrm{id}_L \quad \text{for } {}^\forall l \in L$$

したがって、

$$f(l \otimes \mathrm{id}_L) = 1 \otimes \rho_l(l)(1) = 1 \otimes \rho_r(l)(1) = 1 \otimes l$$

となっていることがわかる。 □

故に、$r = \dim_{\boldsymbol{k}} L$ とおくと

$$L \otimes D \cong L \otimes \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} L \cong L \otimes \mathrm{M}_r(\boldsymbol{k}) \cong \mathrm{M}_r(L) \qquad \text{as } L\text{-algebras}$$

となることがわかる。よって、L は D の分解体である。 (Q.E.D.)

系 4-24

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次中心的単純代数
D：A に属する可除代数
L：D の極大な部分体
$\Longrightarrow$ L：A の分解体

(proof)

A が中心的なので、それに属する可除代数 D も中心的である。したがって、補題 4-23 より、

$$^\exists r \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ D \otimes L \cong \mathrm{M}_r(L) \quad \text{as } L\text{-algebras}$$

となる。

$$A \cong \mathrm{M}_n(D) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras}$$

とすると、L 上の代数として、

$$A \otimes L \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \otimes D \otimes L \cong \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \otimes \mathrm{M}_r(L) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{演習 1-4(2)}}}{\cong} \mathrm{M}_{nr}(L)$$

となる。

よって、L は A の分解体である。 (Q.E.D.)

命題 4-25

D：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的可除代数
$\Longrightarrow$ $^\exists L$：D の極大な部分体 s.t. L は $\boldsymbol{k}$ 上分離的

(proof)

・$\boldsymbol{k}$ の標数が 0 のとき：

D の極大な部分体 L は $\boldsymbol{k}$ の有限次拡大体であるから、任意の $x \in L$ はある多項式 $f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ の根になる。$\boldsymbol{k}$ の標数は 0 なので、$f(X)$ は $\boldsymbol{k}$ 上分離的な多項式になる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.100 系 3)。したがって、$x \in L$ は $\boldsymbol{k}$ 上分離的である。

・$\boldsymbol{k}$ の標数が $p > 0$ のとき：

$D \neq \boldsymbol{k}$ の場合に証明すればよい。まず、

$$^\exists E \subset D：\boldsymbol{k} \text{ の分離的拡大体 s.t. } \boldsymbol{k} \neq E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示す。背理法で示す。すなわち、$\boldsymbol{k}$ の任意の分離的拡大体は $\boldsymbol{k}$ に一致すると仮定する。

　このとき、任意の $x \in D-\boldsymbol{k}$ の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式の被約多項式は一次式になる。　$\cdots\cdots(**)$

　$\because)$

　D は $\boldsymbol{k}$ 上有限次元なので、$x \in D-\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{k}$ 上代数的である。x の最小多項式を $f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ とおくと、補題 4-16 から、

$$^{\exists 1}e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ ^{\exists 1}g(X) \in \boldsymbol{k}[X] : \text{既約、モニック、分離的} \ \text{ s.t. } \ f(X) = g(X^{p^e})$$

となる。$g(X) \neq X-a$ であるとすると、$f(X) = g(X^{p^e}) \neq X^{p^e}-a$ となるので、$x^{p^e} \notin \boldsymbol{k}$ である。

　一方、x^{p^e} は分離多項式 $g(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ の根であるから、x^{p^e} は $\boldsymbol{k}$ 上分離的である。

　したがって、$\boldsymbol{k} \subsetneqq \boldsymbol{k}(x^{p^e})$ は D に含まれる $\boldsymbol{k}$ の分離拡大体となる。これは背理法の仮定に矛盾する。　□

　今、$x \in D-\boldsymbol{k}$ を勝手に 1 つとり、固定する。$(**)$ から x の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式は $X^{p^e}-a$ $(e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a \in \boldsymbol{k})$ の形をしている。$x \notin \boldsymbol{k}$ ゆえ、$e \geq 1$ である。そこで、

$$\lambda := x^{p^{e-1}}$$

とおき、写像 $\sigma : D \longrightarrow D$ を $\sigma(d) = \lambda^{-1}d\lambda,\ \ d \in D$ によって定義する。

$$^{\exists}y \in D \ \text{ s.t. } \ \begin{cases} (\sigma - \mathrm{id}_D)(y) \neq 0 \\ (\sigma - \mathrm{id}_D)^2(y) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。

　$\because)$

$$(\sigma - \mathrm{id}_D)^p \underset{\substack{\uparrow \\ \boldsymbol{k}\text{ の標数は } p>0}}{=} \sigma^p - \mathrm{id}_D \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda^p = x^{p^e} \in \boldsymbol{k}}}{=} 0$$

である。

　一方、$\lambda \notin Z(D) = \boldsymbol{k}$ より $\sigma \neq \mathrm{id}_D$ となる。

　したがって、

$$^{\exists}r \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ (\sigma - \mathrm{id}_D)^r \neq 0, \ \ (\sigma - \mathrm{id}_D)^{r+1} = 0$$

を得る。

$$\therefore \ \ ^{\exists}d \in D \ \text{ s.t. } \ (\sigma - \mathrm{id}_D)^r(d) \neq 0$$

となる。よって、$y := (\sigma - \mathrm{id}_D)^{r-1}(d)$ とおくと、$(\sigma - \mathrm{id}_D)(y) \neq 0$ かつ $(\sigma - \mathrm{id}_D)^2(y) = 0$ が満たされる。　□

　そこで、$z := (\sigma - \mathrm{id}_D)(y)$ とおき、$u = z^{-1}y$ を考える。

$$\sigma(u) = \sigma(z^{-1})\sigma(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma(z) = z = \sigma(y) - y}}{=} z^{-1}(y+z) = 1 + z^{-1}y = 1 + u \neq u$$

が成り立つ。

$\sigma|_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{k}}$ ゆえ、$u \notin \boldsymbol{k}$ であることがわかる。さらに、代数の同型写像 $\sigma|_{\boldsymbol{k}(u)} : \boldsymbol{k}(u) \longrightarrow \boldsymbol{k}(u)$ が導かれ、$\sigma|_{\boldsymbol{k}(u)} \neq \mathrm{id}$ であることもわかる。故に、

$$\iota(\boldsymbol{k}(u)/\boldsymbol{k}) \geq 2$$

が得られた。ところが、$(**)$ によって $u \in D - \boldsymbol{k}$ の最小多項式の被約多項式は一次式である。したがって、

$$\iota(\boldsymbol{k}(u)/\boldsymbol{k}) = \deg(u \text{ の } \boldsymbol{k} \text{ 上の最小多項式の被約多項式}) = 1$$

でなければならない (命題 4-17)。ここに矛盾が生じた。故に、$(*)$ が成り立つ。

L を D に含まれる $\boldsymbol{k}$ の分離拡大体であって、極大なものとする。$(*)$ によって、$L \neq \boldsymbol{k}$ に注意する。

実は、L は D の極大な部分体になっていることを示す。そのためには、$Z_D(L) = L$ となることを示せばよい。

$\because$)

$Z_D(L) = L$ が示されたとする。

L' を L を含む D の部分体とする。

L' の可換性から、$L' \subset Z_D(L) = L$ となる。よって、$L' = L$ となり、L は D の極大な部分体である。 □

$Z_D(L)$ は L 上の有限次元中心的可除代数とみなすことができる。

$\because$)

D は有限次元可除代数であるから、$Z_D(L)$ は L 上の有限次元可除代数とみなすことができる。

また、D は $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数であり、$L \subset D$ はその単純な部分代数であるから、$Z(Z_D(L)) = Z(L) = L$ が成り立つ (定理 2-29)。

よって、$Z_D(L)$ は L 上の中心的である。 □

$L \subsetneqq Z_D(L)$ であると仮定すると、上の議論において $\boldsymbol{k}$ のかわりに L を、D のかわりに $Z_D(L)$ をとることにより、

$$^{\exists}L' \subset Z_D(L) : L \text{ の分離拡大体} \quad \text{s.t.} \quad L \neq L'$$

となる。$L/\boldsymbol{k},\ L'/L$ は有限次分離的であるから、$L'/\boldsymbol{k}$ も分離的になる (系 4-18 の下の注意参照)。

これは L の取り方に反する。故に、$Z_D(L) = L$ でなければならない。

こうして、L は D の極大な部分体になっていることが示された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 4-22)

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元分離的代数とする。

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \qquad (A_i : \text{単純},\ i = 1, \cdots, n)$$

を A の Wedderburn 分解とする。A は分離的なので、各 $Z(A_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ は $\boldsymbol{k}$ 上分離的な拡大体である (演習 4-14)。

A_i に属する可除代数を D_i とおく。D_i は体 $K_i := Z(D_i)$ 上の中心的可除代数とみなせるから、系 2-21 と命題 4-25 より

$$^{\exists}E_i \subset D_i:\text{極大な部分体}\ \ \text{s.t.}\ \ E_i/K_i:\text{分離的}\ \ \text{かつ}\ \ E_i\ \text{は}\ A_i\ \text{の分解体}$$

となる。$K_i \cong Z(A_i)$ は $\boldsymbol{k}$ の有限次分離的拡大体であって (定理 4-13 および定理 2-19 の証明の下の注意 2°)、E_i/K_i は分離的であるから、体の拡大 $E_i/\boldsymbol{k}$ は有限次分離的である (系 4-18 の下の注意参照)。

$K_i/\boldsymbol{k}$ および $E_i/\boldsymbol{k}$ は有限次分離的であるから、

$$\begin{aligned} &^{\exists}\theta_i \in K_i\ \ \text{s.t.}\ \ K_i = \boldsymbol{k}(\theta_i) \\ &^{\exists}\alpha_i \in E_i\ \ \text{s.t.}\ \ E_i = \boldsymbol{k}(\alpha_i) \end{aligned}$$

となる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.150 参照)。

$$\begin{aligned} &f_i(X) \in \boldsymbol{k}[X]:\theta_i\ \text{の最小多項式} \\ &g_i(X) \in \boldsymbol{k}[X]:\alpha_i\ \text{の最小多項式} \end{aligned}$$

とおくと、これらは分離的な多項式である (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.74 補題 2-25 参照)。

積 $f_1(X)\cdots f_n(X)g_1(X)\cdots g_n(X)$ の分解体を E とおく。

E は $\boldsymbol{k}$ に有限個の分離的な元を添加して得られる体であるから、体の拡大 $E/\boldsymbol{k}$ は有限次分離的である (演習 4-13) ことに注意する。

E は A の分解体にもなっている。以下、これを示す。

$$K_i \cong \boldsymbol{k}[X]/(f_i(X)) \quad \text{as } \boldsymbol{k}\text{-algebras} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

∵)

$\varphi:\boldsymbol{k}[X] \longrightarrow K_i$ を $\varphi(f(X)) = f(\theta_i),\ f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ によって定義する。

φ は全射な代数準同型である。

$f(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi \ni f(X) &\iff f(\theta_i)=0 \\ &\iff f(X)\ \text{は}\ f_i(X)\ \text{で割り切れる} \\ &\iff f(X) \in (f_i(X)) \\ \therefore\ \ \boldsymbol{k}[X]/(f_i(X)) &\cong K_i \quad \square \end{aligned}$$

このことから、E 上の代数として

$$E \otimes_{\boldsymbol{k}} K_i \cong E \otimes_{\boldsymbol{k}} \big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big) \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{イ})}}{\cong} E[X]/((f_i(X)) \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{ロ})}}{\cong} \overbrace{E \oplus \cdots \oplus E}^{\deg f_i(X)\ \text{個}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

∵)

(ロ) の証明：

$f_i(X)$ は分離的であって、$f_i(X)$ は $E[X]$ 内で一次式の積に分解するから、

$$f_i(X) = (X-\beta_1)\cdots(X-\beta_s) \quad \text{in} \quad E[X] \qquad\qquad (\beta_1,\cdots,\beta_s \in E \text{ は相異なる})$$

となる。写像 $\psi : E[X] \longrightarrow \overbrace{E\oplus\cdots\oplus E}^{s\text{ 個}}$ を

$$\psi(f(X)) = (f(\beta_1),\cdots,f(\beta_s)) \qquad\qquad (f(X)\in \boldsymbol{k}[X])$$

により定義する。ψ は E-代数準同型である。

$$h_j(X) = \frac{f_i(X)}{X-\beta_j} \quad \in E[X] \qquad\qquad (j=1,\cdots,s)$$

とおく。

任意の $(\gamma_1,\cdots,\gamma_s) \in \overbrace{E\oplus\cdots\oplus E}^{s\text{ 個}}$ に対して、

$$f(X) = \gamma_1 h_1(\beta_1)^{-1}h_1(X) + \cdots + \gamma_s h_s(\beta_s)^{-1}h_s(X) \quad \in E[X]$$

とおくと、$\psi(f(X)) = (\gamma_1,\cdots,\gamma_s)$ となる。よって、ψ は全射である。

$\mathrm{Ker}\psi = (f_i(X))$ となるので、E 上の代数として

$$E[X]/(f_i(X)) \cong \overbrace{E\oplus\cdots\oplus E}^{\deg f_i(X)\text{ 個}}$$

となる。

(イ) の証明：

$\varphi : E\times \big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big) \longrightarrow E[X]/(f_i(X))$ を

$$\varphi(e,[f(x)]) = [ef(X)] \qquad\qquad (e\in E,\ f(X)\in\boldsymbol{k}[X])$$

によって定義する。φ は矛盾なく定義されていて、$\boldsymbol{k}$ 上の双線形写像である。よって、$\boldsymbol{k}$-線形写像

$$\bar{\varphi} : E\otimes\big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big) \longrightarrow E[X]/(f_i(X))$$

が誘導される。$\bar{\varphi}$ は全射である。実際、$e_0+e_1X+\cdots+e_tX^t \in E[X]$ に対して

$$\bar{\varphi}(e_0\otimes[1] + e_1\otimes[X] + \cdots + e_t\otimes[X^t]) = [e_0+e_1X+\cdots+e_tX^t]$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\dim_{\boldsymbol{k}}\big(E\otimes_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big)\big) &= \dim_{\boldsymbol{k}} E\cdot \dim_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big) \quad (*)\\
&= \dim_{\boldsymbol{k}} E\cdot \deg f_i(X)\\
&\underset{\underset{(\text{ロ})}{\uparrow}}{=} \dim_{\boldsymbol{k}}\big(E[X]/(f_i(X))\big)
\end{aligned}$$

である。ここで、$(*)$ は $\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X)) \cong K_i = \boldsymbol{k}(\theta_i)$ であり $f_i(X)$ は θ_i の最小多項式であることから従う (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.44 定理 2-6 参照)。したがって、$\bar{\varphi}$ は $\boldsymbol{k}$ 上の線形同型写像である。

$\bar{\varphi}$ の定義から、$\bar{\varphi}$ が E 上の線形写像になっていることがわかるから、E 上の代数として、

$$E \otimes \big(\boldsymbol{k}[X]/(f_i(X))\big) \cong E[X]/(f_i(X))$$

が成り立つ。 □

よって、②により

$$\begin{aligned} E \otimes_{\boldsymbol{k}} A_i &\cong E \otimes_{\boldsymbol{k}} (K_i \otimes_{K_i} A_i) \\ &\cong (E \otimes_{\boldsymbol{k}} K_i) \otimes_{K_i} A_i \\ &\cong (\underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{\deg f_i(X)\ \text{個}}) \otimes_{K_i} A_i \\ &\cong \underbrace{(E \otimes_{K_i} A_i) \oplus \cdots \oplus (E \otimes_{K_i} A_i)}_{\deg f_i(X)\ \text{個}} \quad \text{as } E\text{-algebras} \end{aligned}$$

を得る。ところで、各 E_i は K_i 上中心的な単純代数 A_i の分解体であったから、

$$^{\exists}n_i \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ E_i \otimes_{K_i} A_i \cong \mathrm{M}_{n_i}(E_i) \quad \text{as } E_i\text{-algebras}$$

となる。これを使って E 上の代数としての同型

$$E \otimes_{K_i} A_i \cong (E \otimes_{E_i} E_i) \otimes_{K_i} A_i \cong E \otimes_{E_i} (E_i \otimes_{K_i} A_i) \cong E \otimes_{E_i} \mathrm{M}_{n_i}(E_i) \cong \mathrm{M}_{n_i}(E)$$

を得る。以上で得られた式をまとめることにより

$$E \otimes_{\boldsymbol{k}} A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (E \otimes_{\boldsymbol{k}} A_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (\underbrace{\mathrm{M}_{n_i}(E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_i}(E)}_{\deg f_i(X)\ \text{個}}) \qquad \text{as } E\text{-algebras}$$

が得られる。これで E が A の分解体になることが示された。 (Q.E.D.)

演習 4-17 (Eilenberg-中山)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元半単純代数

$\Longrightarrow$ A：対称代数

となることを示せ。

解；

Wedderburn の構造定理により、

$$A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_m}(D_m) \qquad \text{as algebras}$$

となる。但し、$D_1, \cdots, D_m$ は $\boldsymbol{k}$ 上の可除代数である。

対称代数の直和は対称代数である (演習 1-55 注意 3°) から、各 $\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ が対称代数であることを示せばよい。そのためには、D_i が対称代数であることを示せばよい。

∵)

・$\boldsymbol{k}$ 上の代数として $\mathrm{M}_{n_i}(D_i) \cong \mathrm{M}_{n_i}(\boldsymbol{k}) \otimes D_i$ であること (演習 1-4)

・対称代数のテンソル積は対称代数であること (演習 1-55 注意 3°)

・$\mathrm{M}_{n_i}(\boldsymbol{k})$ は対称代数であること (演習 1-55 注意 2°)

の 3 点から、D_i が対称代数であれば、$\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ も対称代数になる。 □

以下、D を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元可除代数とし、これが対称代数であることを示す。

0 でない任意の $p \in D^*$ は命題 1-24(iii) の条件を満たしていたことを思い出そう (例題 1-28(2))。

命題 1-24(iii) の条件を満たす $p \in D^*$ に対応する非退化な結合的双一次形式 $f : D \times D \longrightarrow \boldsymbol{k}$ は

$$f(x, y) = p(xy) \qquad (x, y \in D)$$

によって与えられる (補題 1-25(1)、補題 1-27)。

したがって、D が対称代数であること、すなわち、f が対称であることを示すためには、0 でない $p \in D^*$ の中に、任意の $x, y \in D$ に対して $p(xy) = p(yx)$ となるものが存在することを示せばよい。

$[D, D]$ を $\{ab - ba \mid a, b \in D\}$ によって生成される D の部分線形空間とする。

もし、$[D, D] \neq D$ であることが分かれば、$p([D, D]) = 0$ かつ $p \neq 0$ となる $p \in D^*$ の存在がわかる。よって、以下、

$$[D, D] \neq D$$

を証明する。

$K = Z(D)$ とおくと、D は K 上の有限次元中心的可除代数である。すると、D の極大な部分体 L に対して、

$$D^L = L \otimes D \cong \mathrm{M}_r(L) \qquad \text{as } L\text{-algebras}$$

が成り立つ (補題 4-23 の証明参照)。

$[\mathrm{M}_r(L), \mathrm{M}_r(L)]$ に属する行列のトレースはすべて 0 であるが、$\mathrm{M}_r(L)$ にはトレースが 0 でない行列も存在するから、

$$[\mathrm{M}_r(L), \mathrm{M}_r(L)] \neq \mathrm{M}_r(L)$$

である。これを同型で写して

$$[D^L, D^L] \neq D^L$$

を得る。ここから、

$$[D, D] \neq D$$

が従う。こうして、証明が終わった。 (Q.E.D.)

§7. 強分離的代数

$\mu(\epsilon) = 1$ を満たす A^{op} の準平均作用素 $\epsilon \in A^e$ が存在するとき、A は強分離的であると呼ばれ、神崎熙夫 [29] によって導入された。驚くべきことに、強分離的代数は分離的である。ここでは、まず、強分離性の同値な条件について述べる。次に、強分離的代数の両側正則加群の既約分解について述べる。

定理 4-26(神崎熙夫、服部昭)

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、次の 3 つは同値な条件である。

(i) $^\exists \epsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A^e$ s.t. $\begin{cases} ① \sum_{i=1}^{n} a_i x \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x b_i \quad \text{for all } x \in A \\ ② \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1 \end{cases}$

(ii) A は有限次元分離的であり、$A = Z(A) \oplus [A, A]$ as $\boldsymbol{k}$-vector spaces

(iii) A は有限次元分離的であり、

$^\exists \lambda : A \longrightarrow Z(A)$：左 $Z(A)$-加群準同型 s.t. $\begin{cases} \lambda(xy) = \lambda(yx) \quad \text{for all } x, y \in A \\ \lambda(1) = 1 \end{cases}$

但し、$[A, A]$ は $\{ab - ba \mid a, b \in A\}$ によって生成される A の部分線形空間を表わす。

上記のいずれかの条件が満たされるとき、A は**強分離的** (*strongly separable*) であると呼ばれる。

注意：$\epsilon := \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A^e$ に対して、

ϵ が定理の (i) の第 1 番目の式を満たす $\iff$ $\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes a_i \in A^e$ が準平均作用素

が成り立つ。

例題 4-26

(1) G：有限群

$\boldsymbol{k}$：標数 0 の体、または、標数が $p > 0$ であって $|G|$ が p で割り切れない体

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{k}[G]$：強分離的

(2) $n \in \mathbb{N}$、$\boldsymbol{k}$：n が $\boldsymbol{k}$ の標数で割り切れない代数閉体

$\Longrightarrow$ $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$：強分離的

(proof)

(1) $\epsilon = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes g^{-1}$ は定理 4-26(i) の条件を満たす元になっている。

(2) $\boldsymbol{k}$ は代数閉体なので、$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$ は分離的である。

写像 $\lambda : \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}) \longrightarrow Z(\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k}))$ を

$$\lambda(X) = \frac{\mathrm{Tr} X}{n} I_n, \qquad X \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})$$

によって定義する。但し、I_n は n 次単位行列を表わす。ここで、

$$Z(\mathrm{M}_n(\boldsymbol{k})) = \{a I_n \mid a \in A\}$$

に注意すると、λ は左 $Z(A)$-加群準同型であって、定理 4-26(iii) の条件を満たしていることがわかる。 □

注意：一般に、標数 0 の体上の有限次元半単純なホップ代数は強分離的である。これは、ホップ代数の左積分を用いて定理 4-26(i) の等式を満たす元を構成することによって容易に示される。例題 4-26(1) はこの事実の特別な場合になっている。

上の定理を服部 [27] の論文に従い証明する。証明の主要な部分をいくつかの補題に分割する。

補題 4-28

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数　とする。このとき、
A が定理 4-26(i) の条件を満たす $\Longrightarrow$ A は定理 4-26(ii) の条件を満たす

(proof)

$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A^e$ を定理 4-26(i) の条件を満たす元とし、写像 $\mu : A \longrightarrow A$ を $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i,\ x \in A$ によって定義する。次が成り立つ。

① μ は左 $Z(A)$-加群準同型である。
② μ は $Z(A)$ 上恒等写像である。
③ $\mu([A,A]) = 0$

が成り立つ。

∵)

①は自明に成り立つ。②は (ii) から成り立つ。③を示す。(i) により、任意の $x, y \in A$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y \otimes x b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x y \otimes b_i$$

が成り立つから、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y x b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x y b_i$$

を得る。したがって、

$$\mu([xy - yx]) = \sum_{i=1}^{n} a_i (xy - yx) b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x y b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y x b_i = 0$$

を得る。 □

A の任意の元 x は

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i x a_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i x - b_i x a_i)$$

と書くことができる。$\sum_{i=1}^{n} b_i x a_i \in Z(A)$ かつ $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i x - b_i x a_i)$ であるから、$x \in Z(A) + [A,A]$ であることがわかる。

↑

∵ (i) により、任意の $y \in A$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} y b_i \otimes x a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes x a_i y$$

が成り立つ。この両辺の積をとることにより、

$$\sum_{i=1}^{n} y b_i x a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i x a_i y$$

が得られる。故に、

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x a_i \in Z(A) \quad \square$$

また、$Z(A) \cap [A,A] = 0$ であるから、$A = Z(A) \oplus [A,A]$ を得る。

特に、$1=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ に対して、この分解を適用する。すると、②③から

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mu\text{ の定義}}}{=} \mu(1)=\underbrace{\mu\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i 1 a_i\Big)}_{=\sum_{i=1}^{n} b_i a_i}+\underbrace{\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i 1-b_i 1 a_i)\Big)}_{=0}$$

を得る。$1=\sum_{i=1}^{n} b_i a_i$ となったので、$\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes a_i$ は分離性冪等元である。したがって、A は有限次元分離的である (定理 4-4)。 (Q.E.D.)

補題 4-29

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。このとき、

$A \oplus B$ が定理 4-26(i) の条件を満たす $\iff$ A および B が定理 4-26(i) の条件を満たす

(proof)

i. 必要性：

$\epsilon=\sum_{i=1}^{n}(a_i,u_i)\otimes(b_i,v_i)\in(A\oplus B)^e$ を定理 4-26(i) の条件を満たす元とする。

$p: A\oplus B \longrightarrow A$ を $p(a,b)=a,\ a\in A,\ b\in B$ によって定義される代数準同型とし、$p^{\mathrm{op}}: A^{\mathrm{op}}\oplus B^{\mathrm{op}} \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ を $p^{\mathrm{op}}(a,b)=a,\ a\in A^{\mathrm{op}},\ b\in B^{\mathrm{op}}$ によって定義される代数準同型とする。このとき、

$$\epsilon_A := (p\otimes p^{\mathrm{op}})(\epsilon)=\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$$

とおく。ϵ_A が定理 4-26(i) の条件を満たすことを示す。

(i) $x\in A$ を任意にとる。ϵ は定理 4-26(i) の条件を満たすから、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i x,u_i)\otimes(b_i,v_i) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i,u_i)(x,1)\otimes(b_i,v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_i,u_i)\otimes(x,1)(b_i,v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_i,u_i)\otimes(x b_i,v_i)\end{aligned}$$

が成り立つ。この両辺に $p\otimes p^{\mathrm{op}}$ を作用させて

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x\otimes b_i=\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes x b_i$$

を得る。

(ii) ϵ は定理 4-26(i) の条件を満たすから、

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i,u_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,u_i)(b_i,v_i)=1_{A\oplus B}=(1_A,1_B)$$

が成り立つ。この両辺に $p\otimes p^{\mathrm{op}}$ を作用させて $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i=1_A$ を得る。

これで、$\epsilon_A \in A^e$ が定理 4-26(i) の条件を満たすことが示された。

同様にして、$\epsilon_B := \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$ が定理 4-26(i) の条件を満たすことを示すことができる。

ii. 十分性：

$\epsilon_A = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i,\ \epsilon_B = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes v_j$ をそれぞれ定理 4-26(i) の条件を満たす元とする。このとき、

$$\epsilon := \sum_{i=1}^{n}(a_i, 0) \otimes (b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j) \otimes (0, v_j)$$

は定理 4-26(i) の条件を満たす $(A \oplus B)^e$ の元になる。これを示す。

(i) 任意の $(x, y) \in A \oplus B$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(a_i, 0)(x, y) \otimes (b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j)(x, y) \otimes (0, v_j)\\
=&\sum_{i=1}^{n}(a_i x, 0) \otimes (b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j y) \otimes (0, v_j)\\
=&\sum_{i=1}^{n}(a_i, 0) \otimes (x b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j) \otimes (0, y v_j)\\
=&\sum_{i=1}^{n}(a_i, 0) \otimes (x, y)(b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j) \otimes (x, y)(0, v_j)
\end{aligned}$$

となる。よって、定理 4-26(i) の第 1 番目の等式は満たされる。また、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i, 0)(b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j)(0, v_j) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i b_i, 0) + \sum_{j=1}^{m}(0, u_j v_j)\\
&= (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \sum_{j=1}^{m} u_j v_j)\\
&= (1_A, 1_B)\\
&= 1_{A \oplus B}
\end{aligned}$$

となるので、定理 4-26(ii) の第 1 番目の等式も満たされる。 (Q.E.D.)

補題 4-30

A：体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元中心的単純代数 とする。

A が分離的であって、次の条件 (i)(ii) を満たす線形写像 $\lambda : A \longrightarrow \boldsymbol{k}$ が存在する

(i) $\lambda(xy) = \lambda(yx)$ for all $x, y \in A$

(ii) $\lambda(1) = 1$

$\Longrightarrow$ A は定理 4-26(i) の条件を満たす。

(proof)

A は有限次元中心的単純代数であるから、両側正則加群 ${}_AA_A$ への A^e の左作用に対応する表現

$$\rho : A^e \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}A, \quad \rho(a \otimes b)(x) = axb, \quad a, b, x \in A$$

は代数の同型写像になる (系 2-31 の証明参照)。今、$\eta : \boldsymbol{k} \longrightarrow A$ を $\eta(1) = 1_A$ なる線形写像とする。このとき、$\eta \circ \lambda : A \longrightarrow A$ に対して

$$^\exists \epsilon \in A^e \ \text{ s.t. } \ \rho(\epsilon) = \eta \circ \lambda$$

となる。この $\epsilon \in A^e$ が求める元であることを示す。

$\epsilon = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ とおく。すると、任意の $x \in A$ について

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \rho(\epsilon)(x) = (\eta \circ \lambda)(x) = \lambda(x)1_A$$

となる。したがって、

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \lambda(1)1_A = 1_A$$

を得る。また、任意の $x, y \in A$ について

$$\begin{aligned}
\rho(\sum_{i=1}^n a_i x \otimes b_i)(y) &= \sum_{i=1}^n a_i x y b_i \\
&= \lambda(xy)1_A \\
&= \lambda(yx)1_A \\
&= \sum_{i=1}^n a_i y x b_i \\
&= \rho(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x b_i)(y)
\end{aligned}$$

となるから、

$$\sum_{i=1}^n a_i x \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes x b_i \quad \text{for all } x \in A$$

を得る。これで、$\epsilon \in A^e$ は定理 4-26(i) の 2 式を満たすことが示された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 4-26)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：補題 4-28 ですでに証明されている。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：

仮定により $A = Z(A) \oplus [A, A]$ なので、この直和分解に応じた A から $Z(A)$ への射影を $\lambda : A \longrightarrow Z(A)$ とおく。これが求める $Z(A)$-加群準同型であることを示す。

・λ が左 $Z(A)$-加群準同型であること：

任意に $a \in A$ をとり、$a = y + b$, $y \in Z(A)$, $b \in [A, A]$ と書く。このとき、任意の $x \in Z(A)$ に対して、$xy \in Z(A)$ かつ $xb \in [A, A]$ であるから、$\lambda(xa) = xy = x\lambda(a)$ となることがわかる。故に、λ は左 $Z(A)$-加群準同型である。

・任意の $x, y \in A$ に対して、$\lambda(xy) = \lambda(yx)$ となること：

　λ の定義により、$\lambda([A, A]) = 0$ となる。$xy - yx \in [A, A]$ であるから、$\lambda(xy - yx) = 0$、すなわち、$\lambda(xy) = \lambda(yx)$ を得る。

・$\lambda(1) = 1$ となること：

　これは、$1 \in Z(A)$ であることと λ の定義から直ちに従う。

　よって、(ii) ならば (iii) が成り立つ。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：

　仮定により、A は半単純であり、Wedderburn 分解することができる。A が (i) の条件を満たすことを示すには、補題 4-29 により、A の各 Wedderburn 成分が (i) の条件を満たすことを示せばよい。よって、A が有限次元単純の場合に「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」を証明すればよい。

　A が有限次元単純の場合、$K := Z(A)$ とおくと、A は K 上の代数としては有限次元中心的単純である。したがって、補題 4-30 から

$$^\exists \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_K v_i \in A \otimes_K A^{\mathrm{op}} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x \otimes_K v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \otimes_K x v_i \quad \text{for all } x \in A \\ \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i = 1 \end{cases}$$

となる。他方、$K = Z(A)$ は $\boldsymbol{k}$ 上の代数として有限次元分離的であるから (演習 4-2(1)、定理 4-13)、

$$^\exists \sum_{j=1}^{m} p_j \otimes q_j \in K \otimes K \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} c p_j \otimes q_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \otimes q_j c \quad \text{for all } c \in K \\ \sum\limits_{j=1}^{m} p_j q_j = 1 \end{cases}$$

となる (定理 4-4)。K は可換なので、上式の第 1 式は

$$\sum_{j=1}^{m} p_j c \otimes q_j = \sum_{j=1}^{m} p_j \otimes c q_j \quad \text{for all } c \in K$$

と同値であることに注意する。

　さて、写像 $\sigma : A \times A^{\mathrm{op}} \longrightarrow A \otimes_{\boldsymbol{k}} A^{\mathrm{op}}$ を

$$\sigma(a, b) = \sum_{j=1}^{m} a p_j \otimes b q_j \qquad (a, b \in A)$$

によって定義する。σ は $\boldsymbol{k}$-双線形写像であって、

$$\sigma(ac, b) = \sigma(a, cb) \qquad (a, b \in A,\ c \in K)$$

を満たす。したがって、σ は $\boldsymbol{k}$-線形写像 $\bar{\sigma} : A \otimes_K A^{\mathrm{op}} \longrightarrow A \otimes_{\boldsymbol{k}} A^{\mathrm{op}}$ を誘導する。

$$\epsilon := \sigma(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_K v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_i p_j \otimes v_i q_j$$

とおく。これが定理 (i) の 2 式を満たすことを示す。

まず、1 番目の等式が成り立つことを示す。任意の $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i p_j x \otimes v_i q_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i x p_j \otimes v_i q_j \quad \leftarrow\ x \in Z(A)\\ &= \bar{\sigma}(\sum_{i=1}^{n} u_i x \otimes_K v_i)\\ &= \bar{\sigma}(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_K x v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i p_j \otimes x v_i q_j\end{aligned}$$

となる。 よって、1 番目の等式は成り立つ。

次に、2 番目の等式が成り立つことを示す。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i p_j v_i q_j \underset{\substack{\uparrow\\ p_j \in Z(A)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i v_i p_j q_j = 1$$

となる。

よって、2 番目の等式も成り立つ。これで、定理 (i) の等式を満たす元が見つかった。(Q.E.D.)

次に、代数閉体上で定義された強分離的代数の両側正則加群を既約両側加群の直和に分解する規則について述べる。次の結果および証明は、有限群の群代数についてよく知られた結果および証明の類似物として得られる。

定理 4-31

$\boldsymbol{k}$：代数閉体

A：$\boldsymbol{k}$ 上の強分離的代数　とする。このとき、

$\{V_i\}_{i=0}^{m}$：既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系

$\quad\Longrightarrow\quad A \cong \bigoplus_{i=0}^{m}(V_i \otimes V_i^*)$ as left A^e-modules

が成り立つ。ここで、A の $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ への左作用は正則両側 (A, A)-加群に対応する作用 (第 1 章第 1 節参照) を考えており、$V_i \otimes V_i^*$ へ A^e の左作用は

$$(a \otimes b)\cdot(v \otimes p) = a \cdot v \otimes b \cdot p \qquad (a, b \in A,\ v \in V,\ p \in V^*)$$

で与えられる作用 (演習 1-15(3) 参照) を考えている。

注意：定理 4-26 により、強分離的ならば分離的であり、半単純になる。したがって、強分離的代数 A の既約な左 A-加群の同型類の個数は有限個である。

補題 4-32

$\boldsymbol{k}$：代数閉体

A：$\boldsymbol{k}$ 上の強分離的代数

V：既約な左 A-加群

$\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$：既約な左 A^e-加群

となる。但し、$A^e = A\otimes A^{\mathrm{op}}$ の $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ への左作用は

$$((a\otimes b)\cdot f)(v) = a\cdot f(b\cdot v) \qquad (a,b\in A,\ f\in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ v\in V)$$

によって与えられるもの (演習 1-15 参照) を考えている。

(proof)

定理 4-26 により、A は半単純である。命題 2-14 により、左 A^e-加群 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ が既約であることを示すには、$\mathrm{End}_A(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V)\cong \boldsymbol{k}$ となることを示せばよい。

A は強分離的であるから、

$$^\exists\epsilon = \sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \ \in\ A^e \ \text{ s.t. } \ \text{(i)} \sum_{i=1}^n xa_i\otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i x \quad (x\in A)$$
$$\text{(ii)} \sum_{i=1}^n b_i a_i = 1$$

となる (ϵ が定理 4-26(i) の ϵ と左右が入れ代わっていることに注意)。左 A^e-加群準同型 $\varphi:\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ に対して、線形写像 $\bar\varphi:\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\longrightarrow\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ であって、$\mathrm{Im}\bar\varphi\subset \mathrm{End}_A V$ となるものを定義したい。そのために、記号を用意する。

$f\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ \alpha\in V^*,\ w\in V$ に対して、$f_{\alpha,w}\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を

$$f_{\alpha,w}(v) = \alpha(f(v))w \qquad (v\in V)$$

によって定義する。$\{v_1,\cdots,v_m\}$ を V の基底とし、$\{v_1^*,\cdots,v_m^*\}$ をその双対基底とする。$\varphi:\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V\longrightarrow\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を左 A^e-加群準同型とする。このとき、各 $f\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ に対して、$\bar\varphi(f)\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V$ を

$$\bar\varphi(f)(w) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \varphi(f_{v_j^*\circ\underline{a_i},w})(b_i\cdot v_j) \qquad (w\in V)$$

によって定義する。但し、$\underline{a_i}$ は、$\underline{a_i}(v) = a_i\cdot v,\ v\in V$ によって与えられる V 上の線形変換を表わす。$\bar\varphi(f)$ は V の基底の選び方によらない (拙著『Young 図形と対称群の既約表現』p.48 参照)。さらに、

$$\bar\varphi(f)\in\mathrm{End}_A V$$

が成り立つ。

$\because$)

$a\in A,\ f\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ w\in V,\alpha\in V^*$ に対して

$$f_{\alpha,a\cdot w} = a\cdot f_{\alpha,w}$$

が成り立つので、 $\hookleftarrow (a\cdot f_{\alpha,w})(v) = a\cdot f_{\alpha,w}(v)$

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}(f)(a\cdot w) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(f_{v_j^*\circ \underline{a_i}, a\cdot w})(b_i\cdot v_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(a\cdot f_{v_j^*\circ \underline{a_i}, w})(b_i\cdot v_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a\cdot\varphi(f_{v_j^*\circ \underline{a_i}, w})(b_i\cdot v_j)\\
&= a\cdot\big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(f_{v_j^*\circ \underline{a_i}, w})(b_i\cdot v_j)\big)\\
&= a\cdot\bar{\varphi}(f)(w)
\end{aligned}
$$

が任意の $w\in V$ について成り立つ。故に、

$$\bar{\varphi}\in \mathrm{End}_A V$$

を得る。 □

これより、線形写像

$$
\begin{array}{ccccc}
F & : & \mathrm{End}_{A^e}(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(\mathrm{End}_A V)\\
 & & \Cup & & \Cup\\
 & & \varphi & \longmapsto & \bar{\varphi}|_{\mathrm{End}_A V}
\end{array}
$$

が定義される。F は単射である。これを示すには、次の❶❷が証明されればよい。

❶ $F(\varphi)=0 \implies \bar{\varphi}=0$

❷ $f\in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}V,\ v\in V$ に対して

$$\varphi(f)(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\bar{\varphi}(f_{v_j^*\circ \underline{a_i}, v})(b_i\cdot v_j)$$

❶の証明：$\epsilon=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i$ は A に対する分離性冪等元でもある (ϵ の定め方と補題 4-27 の証明を参照) から、

$$
\begin{cases}
\cdot\ \sum_{i=1}^{n}xa_i\otimes b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i x \quad \text{for all } x\in A & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\
\cdot\ \epsilon^2=\epsilon & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

が成り立つ。①から、

$$\epsilon\cdot f\in \mathrm{End}_A V \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が得られる。②から

$$\bar{\varphi}(\epsilon\cdot f)=\bar{\varphi}(f) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

が得られる。

∵)

$x\in A,\ v\in V$ に対して

$$(\epsilon\cdot f)(x\cdot v)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot f(b_i x\cdot v)\underset{①}{=}\sum_{i=1}^{n}xa_i\cdot f(b_i\cdot v)=x\cdot(\epsilon\cdot f)(v)$$

となるので、$(*)$ は成立する。

$(**)$ を示す。$\alpha \in V^*,\ w \in V,\ f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ に対して

$$(\epsilon \cdot f)_{\alpha,w}(v) = \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha \circ \underline{a_i},w}(b_i \cdot v) \qquad (v \in V)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}(\epsilon \cdot f)(w) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi((\epsilon \cdot f)_{v_j^* \circ \underline{a_i},w})(b_i \cdot v_j) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i} \circ \underline{a_k},w} \circ \underline{b_k})(b_i \cdot v_j) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi((1 \otimes b_k) \cdot f_{v_j^* \circ \underline{a_i a_k},w})(b_i \cdot v_j) \qquad \varphi：\text{左 } A^e\text{-加群準同型} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (1 \otimes b_k) \cdot \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i a_k},w})(b_i \cdot v_j) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i a_k},w})(b_k \cdot (b_i \cdot v_j)) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i a_k},w})(b_i \underset{\mathrm{op}}{\circ} b_k \cdot v_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i},w})(b_i \cdot v_j) \qquad ② \\
&= \bar{\varphi}(f)(w)
\end{aligned}$$

となる。但し、$\underset{\mathrm{op}}{\circ}$ は A^{op} における積を表わす。 □

故に、$F(\varphi) = 0 \implies \bar{\varphi}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \bar{\varphi}(\epsilon \cdot f) \underset{\substack{\uparrow \\ (**)}}{=} 0$ を得る。

❷の証明：

$$\begin{aligned}
\text{❷の右辺} &= \sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{m} \varphi((f_{v_j^* \circ \underline{a_i},v})_{v_k^* \circ \underline{a_l},b_i \cdot v_j})(b_l \cdot v_k) \\
&= \sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{m} \varphi(v_k^*(a_l \cdot v) f_{v_j^* \circ \underline{a_i},b_i \cdot v_j})(b_l \cdot v_k) \\
&= \sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{m} \varphi(f_{v_j^* \circ \underline{a_i},b_i \cdot v_j})(v_k^*(a_l \cdot v) b_l \cdot v_k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\#)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

・ $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} v_k^*(a_l \cdot v) b_l \cdot v_k = \sum_{l=1}^{n} b_l \sum_{k=1}^{m} v_k^*(a_l \cdot v) v_k = \sum_{l=1}^{n} b_l \cdot (a_l \cdot v) = v$

$$\cdot\ (\sum_{i=1}^{n} b_l \sum_{j=1}^{m} f_{v_j^* \circ \underline{a_i}, b_i \cdot v_j})(w) = \sum_{i=1}^{n} b_l \sum_{j=1}^{m} v_j^*(a_i f(w)) b_i \cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} b_l \sum_{j=1}^{m} b_i v_j^*(a_i f(w)) v_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot (a_j f(w)) = f(w)$$

となる。故に、$(\#) = \varphi(f)(v)$ となる。これで、❷も証明された。

❶❷により、$F(\varphi) = 0$ ならば、$\varphi = 0$ となることがわかる。よって、F は単射である。

特に、

$$\dim \mathrm{End}_{A^e}(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V) \leq \dim \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(\mathrm{End}_A V) \underset{\substack{\uparrow \\ V\ \text{の既約性}}}{=} \dim \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}) = 1$$

を得る。$\mathrm{id} \in \mathrm{End}_{A^e}(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V)$ ゆえ、

$$\mathrm{End}_{A^e}(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V) \neq 0$$

であるから、

$$\dim \mathrm{End}_{A^e}(\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V) = 1$$

となることが示された。これで証明が終わった。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem 4-31)

$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ を A の既約表現とする。ρ は左 A^e-加群準同型でもある。

A は有限次元分離的であるから A^e は半単純である (演習 4-6)。したがって、

$$A \cong \mathrm{Ker}\rho \oplus \mathrm{Im}\rho \quad \text{as left } A^e\text{-modules}$$

となる。

$\because$)

A をいつものように左 A^e-加群とみなす (両側正則 (A, A)-加群に対応するもの)。

$\mathrm{Ker}\rho$ は A の部分 A^e-加群であり、A^e は半単純であるから、

$$^{\exists}W : A \text{ の部分 } A^e\text{-加群 s.t. } A = \mathrm{Ker}\rho \oplus W$$

となる。一方、左 A^e-加群準同型 ρ に準同型定理を適用して、

$$A/\mathrm{Ker}\rho \cong \mathrm{Im}\rho \quad \text{as left } A^e\text{-modules}$$

となる。この 2 つの事実から、左 A^e-加群として $W \cong \mathrm{Im}\rho$ となっていることがわかる。したがって、

$$A \cong \mathrm{Ker}\rho \oplus \mathrm{Im}\rho \quad \text{as left } A^e\text{-modules}$$

を得る。 □

$\mathrm{Im}\rho$ は $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ の 0 でない部分 A^e-加群になっている (0 でないことは $\rho(1) = \mathrm{id}_V \neq 0$ であることによる) が、A が強分離的であることから $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ は既約な左 A^e-加群であり (補題 4- 32)、したがって、$\mathrm{Im}\rho = \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ となる。故に、

$$A \cong \mathrm{Ker}\rho \oplus \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V \quad \text{as left } A^e\text{-algebras} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。$\{V_1, \cdots, V_d\}$ を既約な左 A-加群の同型に関する完全代表系とし、各 $i=1,\cdots,d$ に対して A の V_i への左作用に対応する既約表現 $\rho_i : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i$ をとる。このとき、

$$A \cong (\bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i) \oplus \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}\rho_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことが上と同様の議論を繰り返すことによりわかる。

$\because$)

①により、左 A^e-加群として

$$A = \mathrm{Ker}\rho_1 \oplus W_1 \qquad (W_1 \subset A \text{ は } \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_1 \text{ と同型な左 } A^e\text{-部分加群})$$

となる。$\rho_2|_{\mathrm{Ker}\rho_1} : \mathrm{Ker}\rho_1 \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_2$ を考える。$\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2$ は $\mathrm{Ker}\rho_1$ の部分 A^e-加群である。A^e の半単純性により、

$$^{\exists}W_2 : \mathrm{Ker}\rho_1 \text{ の部分加群 s.t. } \mathrm{Ker}\rho_1 = (\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2) \oplus W_2$$

となる。よって、左 A^e-加群として、

$$A = W_1 \oplus W_2 \oplus (\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2)$$

となる。ここで、写像

$$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_1 = W_1 \xrightarrow{\rho_2|_{W_1}} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_2$$

は 0-写像であるから (②の証明参照)、

$$\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_2 \underset{\uparrow}{\cong} \rho_2(A) = \rho_2(W_1 \oplus \mathrm{Ker}\rho_1) = \rho_2(\mathrm{Ker}\rho_1) \underset{\uparrow}{\cong} W_2$$

となる。　①の証明参照　$\rho_2|_{\mathrm{Ker}\rho_1}$ に準同型定理を適用

次に、$\rho_3|_{\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2} : \mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2 \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_3$ について考える。A^e の半単純性により、

$$^{\exists}W_3 : \mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2 \text{ の部分加群 s.t. } \mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2 = (\bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\rho_i) \oplus W_3$$

となる。故に、左 A^e-加群として、$A = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus (\bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\rho_i)$ となる。ここで、写像

$$\begin{cases} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_1 = W_1 \xrightarrow{\rho_3|_{W_1}} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_3 \\ \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_2 \cong W_2 \xrightarrow{\rho_3|_{W_2}} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_3 \end{cases}$$

はともに 0-写像になるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_3 \cong \rho_3(A) &= \rho_3(W_1 \oplus W_2 \oplus (\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2)) \\ &= \rho_3(\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2) \\ &\cong (\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2)/\mathrm{Ker}(\rho_3|_{\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2}) \\ &\cong ((\bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\rho_i) \oplus W_3)/\mathrm{Ker}(\rho_3|_{\mathrm{Ker}\rho_1 \cap \mathrm{Ker}\rho_2}) \\ &\cong W_3 \end{aligned}$$

を得る。

以下、同様に考察して、左 A^e-加群として、

$$A = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_d \oplus (\bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}\rho_i)$$

であって、$W_i \cong \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i \ (i = 1, \cdots, d)$ となっていることがわかる。 □

$$W := \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}\rho_i \subset A$$

が 0 になることを示せば証明が終わる (∵ 演習 1-15 により $\mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i \cong V_i \otimes V_i^*$ as left A^e-modules であるから)。

$W \neq 0$ であったとする。A^e の作用を $A \otimes 1$ に制限して、W を左 A-加群とみなす。$W \neq 0$ であり、$\dim W < \infty$ であるから、W は既約な部分 A-加群 V を含む。さらに、A の半単純性から

$$^{\exists} W' \subset W : \text{部分 } A\text{-加群 s.t. } W = V \oplus W'$$

となる。よって、左 A-加群としての直和分解

$$A = (\bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i) \oplus V \oplus W'$$

が得られる。この直和分解に関する V への正射影 $p_V : A \longrightarrow A$ を考える：

$$p_V : \text{左 } A\text{-加群準同型},\ p_V^2 = p_V,\quad \mathrm{Im} p_V = V,\ p_V|_V = \mathrm{id}_V : V \longrightarrow V.$$

$e_V := p_V(1)$ とおく。すると

$$e_V \neq 0 \text{ かつ } \quad e_V \in V \quad \text{かつ } A \text{ の中で } e_V^2 = e_V$$

となる (拙著『Young 図形と対称群の既約表現』p.55 参照)。したがって、V に対応する A の表現を $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V$ とおくと、

$$\rho(V) \neq \{0\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となることがわかる。一方、$\{V_1, \cdots, V_d\}$ は既約な左 A-加群の完全代表系であるから、

$$^{\exists} i \in \{1, \cdots, d\} \text{ s.t. } V \cong V_i \text{ as left } A\text{-modules}$$

となる。このとき、

$$\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\rho_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ。

∵)

$\varphi : V \longrightarrow V_i$ を左 A-加群の同型とする。

$\tilde{\varphi} : \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V \longrightarrow \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i$ を

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \quad f \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{k}} V_i$$

によって定義する。$\tilde{\varphi}$ は左 A^e-加群準同型であり、

$$\rho_i = \tilde{\varphi} \circ \rho$$

を満たす (演習 1-16)。故に、$\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\rho_i$ が成り立つ。 $\square$

④と V の取り方から、

$$V \subset W = \bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}\rho_j \subset \mathrm{Ker}\rho_i = \mathrm{Ker}\rho$$

となる。これは $\rho(V) = \{0\}$ となることを意味し、③に矛盾する。

こうして、$W = 0$ となることが証明された。 (Q.E.D.)

演習 4-18

$A,\ B$：体 $\boldsymbol{k}$ 上の代数 とする。

(1) $A,\ B$：強分離的 $\iff$ $A \oplus B$：強分離的

(2) $A,\ B$：強分離的 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$：強分離的

となることを示せ。

解；

(1) 補題 4-29 による。

(2) 仮定により、$A \otimes B$ は有限次元分離的であり (演習 4-8)、

$$A = Z(A) \oplus [A, A], \qquad B = Z(B) \oplus [B, B]$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (Z(A) + [A, A]) \otimes (Z(B) + [B, B]) \\ &= Z(A) \otimes Z(B) + Z(A) \otimes [B, B] + [A, A] \otimes Z(B) + [A, A] \otimes [B, B] \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{cases} \cdot\ A \otimes [B, B],\ [A, A] \otimes B \subset [A \otimes B, A \otimes B] & \longleftarrow \\ \cdot\ Z(A) \otimes Z(B) = Z(A \otimes B) \quad \leftarrow \quad \text{演習 1-7} & \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \because \quad a \otimes (b_1 b_2 - b_2 b_1) \\ = (a \otimes b_1)(1 \otimes b_2) \\ -(1 \otimes b_2)(a \otimes b_1) \text{ など} \end{array} \right)$$

であるから、

$$A \otimes B = Z(A \otimes B) + [A \otimes B, A \otimes B]$$

を得る。$Z(A \otimes B) \cap [A \otimes B, A \otimes B] = 0$ ゆえ、

$$A \otimes B = Z(A \otimes B) \oplus [A \otimes B, A \otimes B]$$

を得る。よって、$A \otimes B$ は強分離的である。 (Q.E.D.)

Appendix A. 代数的閉包の存在と一意性

体 K が**代数閉体** (*algebraically closed field*) であるとは、定数でない任意の多項式 $f(X) \in K[X]$ が少なくとも 1 つ K 内に根をもつときをいう。体 K が体 $\boldsymbol{k}$ の**代数的閉包** (*algebraically closure*) であるとは、K が代数閉体であって、かつ、$\boldsymbol{k}$ の代数的拡大体であるときをいう。この付録では、任意の体に対して代数的閉包が存在すること、そして、それらは同型を除いて一意的であることを示す。

まず、代数的閉包の存在について述べよう。

定理 A - 1 (Steinitz)
任意の体に対して、その代数的閉包が存在する。

この定理を証明するために、次の定理を用いる (証明は、例えば、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.55 定理 2-8 参照)。

定理 A - 2 (分解体の存在)
$\boldsymbol{k}$: 体
$f(X) \in \boldsymbol{k}[X] - \boldsymbol{k}$
$\quad \Longrightarrow \ {}^{\exists}K : \boldsymbol{k}$ の拡大体 s.t. $f(X)$ は $K[X]$ において一次式の積に分解する

定理 A-1 の証明には、“無限個の変数”を持つ多項式代数の概念が必要になるので、それについて説明しておく。

$\boldsymbol{k}$ を体とし、$\mathcal{X}$ を空でない集合とする。このとき、$\boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$ という記号で書かれる代数を以下のように定義する。この代数は $\mathcal{X}$ の有限部分集合に対する多項式代数の帰納極限として得られる。

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{X} \text{ の有限部分集合の全体}\}$$

とおく。各 $S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対して、(通常の意味の) 多項式代数 $\boldsymbol{k}[S]$ を考え、それらの ($\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間としての) 直和 $\displaystyle\bigoplus_{S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]$ をとる。この直和に次のような積を導入する。

$S_1 \subset S_2$ を満たす $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対して、標準な単射準同型 $\boldsymbol{k}[S_1] \longrightarrow \boldsymbol{k}[S_2]$ が定まる。これを i_{S_2,S_1} と書くことにする。このとき、任意の $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ の組に対して、写像

$$m_{S_1,S_2} : \boldsymbol{k}[S_1] \times \boldsymbol{k}[S_2] \longrightarrow \boldsymbol{k}[S_1 \cup S_2]$$

を

$$m_{S_1,S_2} = m_{S_1 \cup S_2} \circ (i_{S_1 \cup S_2, S_1} \times i_{S_1 \cup S_2, S_2})$$

によって定義する。ここで、$m_{S_1 \cup S_2}$ は $\boldsymbol{k}[S_1 \cup S_2]$ 上の積を表わす。写像の族 $\{m_{S_1,S_2}\}_{S_1,S_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})}$ は直和 $\displaystyle\bigoplus_{S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]$ 上に結合的な積を誘導し、その積によって、$\displaystyle\bigoplus_{S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]$ が $\boldsymbol{k}$ 上の代数になることが確かめられる。各 $S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対して、直和 $\displaystyle\bigoplus_{S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]$ に附随する標準的な単射 $i_S : \boldsymbol{k}[S] \longrightarrow \displaystyle\bigoplus_{S \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]$ は代数準同型なっている。

さて、$\displaystyle\bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\boldsymbol{k}[S]$ の部分集合

$$\{i_{S_1}(x)-(i_{S_2}\circ i_{S_2,S_1})(x)\mid x\in\boldsymbol{k}[S_1],\ S_1\subset S_2,\ S_1,S_2\in\mathcal{P}(\mathcal{X})\}$$

によって張られる部分ベクトル空間 V を考える。$V\neq\displaystyle\bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\boldsymbol{k}[S]$ であって、V は代数 $\displaystyle\bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\boldsymbol{k}[S]$ のイデアルになっていることがわかる。

∵)

V が代数 $\displaystyle\bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\boldsymbol{k}[S]$ のイデアルになっていることをみるのは易しいから、$V\neq\displaystyle\bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\boldsymbol{k}[S]$ を証明する。任意の $S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対して $i_S(\boldsymbol{k}[S])\cap V=0$ となることを示せば十分である（∵ $i_S(\boldsymbol{k}[S])\cap V=0$ ならば、$i_S(\boldsymbol{k}[S])\not\subset V$ であるから)。そのためには V の元が $i_S(\boldsymbol{k}[S])$ に属するならば 0 となることを示せばよい。

$v\in V$ を

$$v=\sum_{i=1}^{l}((i_{S_i}\circ i_{S_i,T_i})(y_i)-(i_{U_i}\circ i_{U_i,T_i})(y_i))$$

但し、$y_i\in\boldsymbol{k}[T_i],\ T_i\subset S_i,\ T_i\subset U_i$、と書く。$v\in i_S(\boldsymbol{k}[S])$ であるとする。

$$\tilde{S}:=U_1\cup\cdots\cup U_l\cup S_1\cup\cdots\cup S_l\cup S$$

とおく。$\tilde{S}\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ であり、

$$U_i\subset\tilde{S}\ (i=1,\cdots,l),\ S_i\subset\tilde{S}\ (i=1,\cdots,l),\ S\subset\tilde{S}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}v=&\sum_{i=1}^{l}((i_{S_i}\circ i_{S_i,T_i})(y_i)-(i_{\tilde{S}}\circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i))\\&+\sum_{i=1}^{l}(i_{U_i}\circ i_{U_i,T_i})(-y_i)-(i_{\tilde{S}}\circ i_{\tilde{S},T_i})(-y_i))\end{aligned}$$

と書けるので、v は始めから、

$$v=\sum_{i=1}^{l}((i_{S_i}\circ i_{S_i,T_i})(y_i)-(i_{\tilde{S}}\circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i))\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の形であるとしてよい。但し、任意の i に対して $y_i\in\boldsymbol{k}[T_i],\ T_i\subset S_i,\ T_i\subset\tilde{S},\ S_i\subset\tilde{S}$ かつ $S\subset\tilde{S}$ である。

l に関する帰納法で $v=0$ を示す。

・$l=1$ のとき成立すること：

$$v=(i_{S_1}\circ i_{S_1,T_1})(y_1)-(i_{\tilde{S}}\circ i_{\tilde{S},T_1})(y_1)\in\boldsymbol{k}[S]$$

となる。

$S_1=\tilde{S}$ のとき、上式の右辺は 0 になるから、$v=0$ を得る。

$S_1 \neq \tilde{S}$ のとき、$S_1, \tilde{S}$ のどちらかは S でないから、$(i_{S_1} \circ i_{S_1,T_1})(y_1) = 0$ または $(i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_1})(y_1) = 0$ を得る。i_{S_1}, $i_{\tilde{S}}$, i_{S_1,T_1}, $i_{\tilde{S},T_1}$ はいずれも単射であるから、$y_1 = 0$ を得る。したがって、$v = 0$ を得る。

・$l > 1$ であるとし、$l-1$ 以下のとき成り立つと仮定する：

もし、$S_j = \tilde{S}$ となる j が存在すれば、$(*)$ の右辺は $(i_{S_j} \circ i_{S_j,T_j})(y_j) - (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_j})(y_j)$ を除く残りの $l-1$ 個の和となるので、帰納法の仮定により、$v = 0$ を得る。以下、任意の i について $S_i \neq \tilde{S}$ であるとする。

(1) $S_j \neq S$ となる j があるとき：

番号を適当につけかえることにより、$S_1 \neq S$ であるとしても一般性を失わない。

必要なら番号をつけかえることにより、$S_1 = S_2 = \cdots = S_a$ であって、それ以外の $S_{a+1}, \cdots, S_l$ は S_1 に一致しないと仮定しても差し支えない。

このとき、$(*)$ において、両辺の $\boldsymbol{k}[S_1]$-成分を比較することにより、

$$0 = \sum_{i=1}^{a} i_{S_i,T_i}(y_i)$$

が得られる。これは

$$i_{S_1,T_1}(y_1) = -\sum_{i=2}^{a} i_{S_i,T_i}(y_i)$$

と書き換えられる。これを $(*)$ 代入して、

$$v = \sum_{i=a+1}^{l} (i_{S_i} \circ i_{S_i,T_i})(y_i) - \sum_{i=1}^{l} (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i)$$

を得る。ここで、

$$(i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_1})(y_1) = (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},S_1} \circ i_{S_1,T_1})(y_1) = -\sum_{i=2}^{a} (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i)$$

であるから、

$$v = \sum_{i=a+1}^{l} (i_{S_i} \circ i_{S_i,T_i})(y_i) - \sum_{i=a+1}^{l} (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i)$$

を得る。帰納法の仮定により、$v = 0$ を得る。

(2) 任意の $j = 1, \cdots, l$ に対して $S_j = S$ であるとき：

$$v = \sum_{i=1}^{l} (i_{S_i} \circ i_{S_i,T_i})(y_i) = \sum_{i=1}^{l} (i_S \circ i_{S,T_i})(y_i) = i_S\left(\sum_{i=1}^{l} i_{S,T_i}(y_i)\right)$$

かつ

$$0 = \sum_{i=1}^{l} (i_{\tilde{S}} \circ i_{\tilde{S},T_i})(y_i) = i_{\tilde{S}}\left(\sum_{i=1}^{l} i_{\tilde{S},T_i}(y_i)\right)$$

となる。後者から、

$$0 = \sum_{i=1}^{l} i_{\tilde{S},T_i}(y_i) = \sum_{i=1}^{l} (i_{\tilde{S},S} \circ i_{S,T_i})(y_i) = i_{\tilde{S},S}\left(\sum_{i=1}^{l} i_{S,T_i}(y_i)\right)$$

が得られる。したがって、

$$0=\sum_{i=1}^{l} i_{S,T_i}(y_i)$$

が得られる ($\because$ $i_{\tilde{S},S}$ は単射)。故に、$v=0$ となる。

以上より、数学的帰納法により、$v=0$ となることが示された。 $\square$

したがって、商代数

$$\boldsymbol{k}[\mathcal{X}] := \bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S]/V$$

が得られる。

各 $S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ に対して、合成

$$\boldsymbol{k}[S] \xrightarrow{i_S} \bigoplus_{S\in\mathcal{P}(\mathcal{X})} \boldsymbol{k}[S] \xrightarrow{\text{natural proj.}} \boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$$

は単射な代数準同型であり ($\because$ 上で示したように、$i_S(\boldsymbol{k}[S])\cap V=0$ であるから)、この単射によって、$\boldsymbol{k}[S]\subset\boldsymbol{k}[\mathcal{X}]$ とみなす。

(proof of Theorem A-1)

$\boldsymbol{k}$ を体とする。

$\boldsymbol{k}[X]$ の既約でモニックな多項式全体からなる集合を $\{f_\lambda(X)\}_{\lambda\in\Lambda}$ とおく。$\mathrm{deg} f_\lambda(X)=d_\lambda$ とおき、各 $\lambda\in\Lambda$ に対して d_λ 個の変数 $Y_{\lambda,i}$ $(i=1,\cdots,d_\lambda)$ を用意して、有理関数体 $\boldsymbol{k}(X)$ 上の多項式代数

$$R := \boldsymbol{k}(X)[\{Y_{\lambda,i} \mid \lambda\in\Lambda,\ i=1,\cdots,d_\lambda\}]$$

を考える。各 $\lambda\in\Lambda$ に対して、$p_\lambda\in R$ を

$$p_\lambda = f_\lambda(X) - \prod_{i=1}^{d_\lambda}(X-Y_{\lambda,i})$$

によって定義する。

$$I := (\{p_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\} \text{ によって生成される } R \text{ のイデアル})$$

とおく。$I\neq R$ が成り立つ。これを示す。そのためには $1\notin I$ を示せばよい。

仮に、$1\in I$ であったとすると、

$$^{\exists}\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\Lambda,\ ^{\exists}\varphi_1,\ \cdots,\varphi_r\in R\ \text{ s.t. }\ 1=\sum_{j=1}^{r}\varphi_j p_{\lambda_j}$$

となる。K を $\boldsymbol{k}$ 上の多項式 $\prod_{j=1}^{r} f_{\lambda_j}(X)$ の分解体とする。各 $j=1,\cdots,r$ に対して

$$f_{\lambda_j}(X)=\prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}}(X-\alpha_{ji}) \qquad (\alpha_{ji}\in K,\ k=1,\cdots,d_{\lambda_j})$$

と書く ($d_{\lambda_j} = \mathrm{deg} f_{\lambda_j}(X)$ であったことに注意)。このとき、$Y_{\lambda_j,i} \longmapsto \alpha_{ji} \quad (i = 1, \cdots, d_{\lambda_j})$ という代入写像で $p_{\lambda_j} \in R$ を写したのものは 0 となる。したがってまた、$Y_{\lambda_j,i} \longmapsto \alpha_{ji} \quad (i = 1, \cdots, d_{\lambda_j},\ j = 1, \cdots, r)$ という代入写像 F で $\sum\limits_{j=1}^{r} \varphi_j p_{\lambda_j}$ を写したものは 0 となる (注：各 $\varphi_j\ (j = 1, \cdots, r)$ は $\{Y_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda,\ i = 1, \cdots, d_\lambda\}$ の有限個の元を変数とする $\boldsymbol{k}(X)$-係数多項式である。φ_j に現れるそのような変数からなる $\{Y_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda,\ i = 1, \cdots, d_\lambda\}$ の部分集合を $j = 1, \cdots, r$ について和をとり、さらに $\{Y_{\lambda_j,i} \mid i = 1, \cdots, d_{\lambda_j},\ j = 1, \cdots, r\}$ との和をとることによって、 $\{Y_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda,\ i = 1, \cdots, d_\lambda\}$ の有限部分集合を得る。F はこの有限部分集合を変数とする $\boldsymbol{k}(X)$-係数多項式の全体から $\boldsymbol{k}(X)$ への代入と考えている)。これより、

$$1 = F(1) = F(\sum_{j=1}^{r} \varphi_j p_{\lambda_j}) = 0$$

が得られてしまい、矛盾が生じる。故に、$1 \notin I$ でなければならない。

今、$I \subsetneqq R$ であることがわかったので、$I \subset \mathfrak{M} \subset R$ となる R の極大イデアルが存在する (極大イデアルの存在定理)。

$\Omega := R/\mathfrak{M}$ とおく。Ω は $\boldsymbol{k}(X)$ の拡大体であって、自然な射影 $R \longrightarrow R/\mathfrak{M} = \Omega$ による $Y_{\lambda,i}$ の像を $\beta_{\lambda,i}$ とおくと、Ω 内で

$$f_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{d_\lambda} (X - \beta_{\lambda,i})$$

となる。

$\because$)

後半部分の主張は自明であるから、Ω が $\boldsymbol{k}(X)$ の拡大体であることのみを示す。

合成写像 $\boldsymbol{k}(X) \hookrightarrow R \xrightarrow{\text{natural proj.}} R/\mathfrak{M} = \Omega$ が単射であることを示せばよい。そのためには、$\boldsymbol{k}(X) \cap \mathfrak{M} = 0$ となることをいえばよい。

もし、$\boldsymbol{k}(X) \cap \mathfrak{M} \neq 0$ であったと仮定すると、

$$0 \neq {}^{\exists} c \in \boldsymbol{k}(X) \cap \mathfrak{M}$$

となる。$\boldsymbol{k}(X)$ は体ゆえ、$c^{-1} \in \boldsymbol{k}(X) \subset R$ が考えられて、

$$1 = c^{-1} c \in \mathfrak{M}$$

となる。これは $R = \mathfrak{M}$ を意味し、$\mathfrak{M}$ の極大性に反する。 □

$$K := \boldsymbol{k}(\{\beta_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Lambda, i = 1, \cdots, d_\lambda\}) \subset \Omega$$

とおく。

K が $\boldsymbol{k}$ の代数的閉包であることを示す。

まず、$K/\boldsymbol{k}$ は代数的であることに注意する。

$\because$)

各 $\beta_{\lambda,i}$ が $\boldsymbol{k}$ 上代数的であることを示せばよい。

$\beta_{\lambda,i}$ は、その定義により、$f_\lambda(X)$ の根である。

$f_\lambda(X) \in \boldsymbol{k}[X]$ であるから、$\beta_{\lambda,i}$ は $\boldsymbol{k}$ 上代数的である。 $\square$

K が代数閉体であることを示す。そのためには、K 上既約な任意のモニック多項式 $g(X) \in K[X]$ の根が K に属することを示せばよい。

$g(X)$ の根 α は $\boldsymbol{k}$ 上代数的である ($\because$ $K/\boldsymbol{k}$ および $K(\alpha)/K$ は代数的。拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.48 補題 2-19 を参照) ので、α の $\boldsymbol{k}$ 上の最小多項式 $f(X)$ を考えることができる。$f(X)$ は $\boldsymbol{k}$ 上既約であるから、$f(X) = f_\lambda(X)$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。このとき、$K[X]$ において、

$$f(X) = \prod_{i=1}^{d_\lambda}(X - \beta_{\lambda,i})$$

となる。したがって、$K(\alpha)$ において

$$0 = f(\alpha) = \prod_{i=1}^{d_\lambda}(\alpha - \beta_{\lambda,i})$$

を得る。これは、ある i について $\alpha = \beta_{\lambda,i} \in K$ となることを意味する。故に、K は代数閉体である。 (Q.E.D.)

定理 A-1 の応用として、次を得る。

系 A - 3

E/K：体の代数的拡大

$\Longrightarrow$ $^\exists\Omega$：E を含む K の代数的閉包

(proof)

E の代数的閉包を $\bar{E}$ とおく (定理 A-1 により、代数的閉包の存在が保証されることに注意)。

$$\Omega := \{\alpha \in \bar{E} \mid \alpha \text{ は } K \text{ 上代数的}\}$$

と定める。

この Ω が求めるものである。実際、$\bar{E}$ は代数閉体なので、Ω は K の代数的閉包である (例えば、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.48 補題 2-18 を参照)。さらに、E/K は代数的なので、$E \subset \Omega$ が成り立つ。 (Q.E.D.)

次に、代数的閉包の一意性について示そう。

定理 A - 4

$\varphi : K \longrightarrow K'$：体の同型

$\Omega,\ \Omega'$：それぞれ $K,\ K'$ の代数的閉包

$\Longrightarrow$ $^\exists\tilde{\varphi} : \Omega \longrightarrow \Omega'$：体の同型 s.t. $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ for all $x \in K$

(proof)

$\mathcal{S} := \{(E,\psi) \mid E$: Ω/K の中間体, $\psi : E \longrightarrow \Omega'$: 単射準同型, $\psi(x) = \varphi(x)$ for all $x \in K\}$

とおく。$(K,\varphi) \in \mathcal{S}$ なので、$\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。

$(E_1,\psi_1),\ (E_2,\psi_2) \in \mathcal{S}$ に対して、関係 $\leq$ を

$$(E_1,\psi_1) \leq (E_2,\psi_2) \iff E_1 \subset E_2 \text{ かつ } \psi_2|_{E_1} = \psi_1$$

によって定義する。$\leq$ は $\mathcal{S}$ 上に順序関係を定める。

$\mathcal{S}$ が帰納的集合となることを示そう。

そのために、$\mathcal{S}$ の空でない全順序部分集合 $\mathcal{S}' = \{(E_\lambda,\psi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に 1 つとる。このとき、

$$E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$$

を考える。E は Ω の部分体で、K を含む。

$\because)$

E はその定義から K を含んでいるので、問題となるのは、Ω の部分体になっているかどうかである。

$a,b \in E$ を任意にとる。

$$^\exists\lambda,\mu \in \Lambda \ \text{ s.t. } \ a \in E_\lambda,\ b \in E_\mu$$

となる。$\mathcal{S}'$ は全順序部分集合であるから、

$$E_\lambda \subset E_\mu \ \text{ または } \ E_\mu \subset E_\lambda$$

の少なくともいずれか一方は成り立つ。一般性を失うことなく $E_\lambda \subset E_\mu$ であると仮定してよい。このとき、$a,b \in E_\mu$ となるが、E_μ は体なので、

$$a+b,\ ab \in E_\mu \subset E$$

が得られる。また、$a \neq 0$ のときには、$a^{-1} \in E_\mu \subset E$ となる。故に、E は Ω の部分体である。 $\square$

写像 $\psi : E \longrightarrow \Omega'$ を各 $a \in E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ に対して

$$\psi(a) = \psi_\lambda(a) \qquad (\text{但し、} a \in E_\lambda \text{ のとき})$$

によって定義する。ψ は矛盾なく定義されている。

$\because)$

$a \in E_\lambda \cap E_\mu$ であるとする。

$E_\lambda \subset E_\mu$ かつ $\psi_\mu|_{E_\lambda} = \psi_\lambda$

または

$E_\mu \subset E_\lambda$ かつ $\psi_\lambda|_{E_\mu} = \psi_\mu$

が成り立つ。いずれにしても $\psi_\mu(a) = \psi_\lambda(a)$ が成り立つ。故に、ψ は矛盾なく定義されている。 $\square$

ψ は単射な体の準同型であって、$\psi|_K = \varphi$ を満たす。
$\because$)

$\psi|_K = \varphi$ を満たすことは、ψ の定義からすぐにわかるので、ψ が単射な体の準同型であることを示す。

・ψ が体の準同型であること：

$a, b \in E$ とする。ψ が矛盾なく定義されていることの証明の中で述べたように、$\mathcal{S}'$ の全順序性から、

$$^{\exists}\lambda \in \Lambda \ \ \text{s.t.} \ \ a, b \in E_\lambda$$

となる。このとき、

$$\psi(a+b) = \psi_\lambda(a+b) = \psi_\lambda(a) + \psi_\lambda(b) = \psi(a) + \psi(b)$$
$$\psi(ab) = \psi_\lambda(ab) = \psi_\lambda(a)\psi_\lambda(b) = \psi(a)\psi(b)$$

となる。故に、ψ は体の準同型である。

・ψ が単射であること：

$a \in E$ は $\psi(a) = 0$ を満たすとする。

$a \in E_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ をとると、

$$0 = \psi(a) = \psi_\lambda(a)$$

となる。ψ_λ は単射であるから、上式は $a = 0$ に同値である。よって、ψ は単射である。
$\square$

以上より、$(E, \psi) \in \mathcal{S}$ であり、その定義からそれは $\mathcal{S}$ における $\mathcal{S}'$ の上界である。Zorn の補題により $\mathcal{S}$ 内に極大元が存在する。その 1 つを (L, ω) とおく。

$$L = \Omega, \ \omega(L) = \omega(\Omega) = \Omega' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを示そう。

まず、$L = \Omega$ が成り立つことを示す。

任意に $\alpha \in \Omega$ をとる。

Ω/L は代数的である（$\because$ Ω/K は代数的であるから、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.48 補題 2-19 により、Ω/L もそうである）から、α の L 上の最小多項式 $f(X) \in L[X]$ を考えることができる。$f(X)$ の既約性から $L[X]/(f(X))$ は体であり、L 上恒等的な体の同型

$$\lambda : L(\alpha) \longrightarrow L[X]/(f(X))$$

が存在する (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.44 参照)。

$L' = \omega(L) \subset \Omega'$ とおく。

ω は多項式代数の間の同型

$$\hat{\omega} : L[X] \longrightarrow L'[X]$$

を誘導する。このとき、$g(X) := \hat{\omega}(f(X))$ は $L'[X]$ に属するモニックな既約多項式になる。$g(\alpha') = 0$ となる $\alpha' \in \Omega'$ をとる (Ω' は代数的閉体であるから、このような α' は存在する)

と、$g(X)$ は α' の最小多項式である。先程と同じ理由により、L' 上恒等的な体の同型

$$\lambda' : L'(\alpha') \longrightarrow L'[X]/(g(X))$$

を得る。写像

$$\mu : L[X]/(f(X)) \longrightarrow L'[X]/(g(X))$$

を $\hat{\omega} : L[X] \longrightarrow L'[X]$ から誘導される体の同型とし、合成写像

$$\gamma := \lambda'^{-1} \circ \mu \circ \lambda : L(\alpha) \longrightarrow L'(\alpha') \subset \Omega'$$

を考える。γ は体の同型であり、$x \in L$ に対して、$\gamma(x) = \omega(x)$ を満たしていることがわかる。したがって、$\iota : L'(\alpha') \hookrightarrow \Omega'$ を包含写像とすると

$$(L(\alpha),\ \iota \circ \gamma) \in \mathcal{S} \qquad \text{かつ} \qquad (L, \omega) \leq (L(\alpha),\ \iota \circ \gamma)$$

が成り立つ。(L, ω) の極大性により、

$$L(\alpha) = L \qquad \text{かつ} \qquad \iota \circ \gamma = \omega$$

を得る。これより、特に、$\alpha \in L$ を得る。故に、$\Omega \subset L$ が示された。逆向きの包含関係はもともと成り立っているから、$\Omega = L$ となることが示された。

次に、$\omega(\Omega) = \Omega'$ となることを示す。これは、$\omega(\Omega)$ が代数的閉体であって、Ω' は $\omega(\Omega)$ の代数拡大体であることから従う。

$\because$)

任意に $\alpha' \in \Omega'$ をとる。

$\Omega'/\omega(\Omega)$ は代数的なので、α' の $\omega(\Omega)$ 上の最小多項式 $m(X)$ を考えることができる。

$\omega(\Omega)$ は代数的閉体であるから、$m(X)$ は $\omega(\Omega)[X]$ 内で一次式の積に分解する。したがって、$\alpha' \in \omega(\Omega)$ を得る。 □

以上から、ω は Ω から Ω' への体の同型写像であって、φ の拡張になっていることが示された。 (Q.E.D.)

定理 A-4 において、$\varphi = \mathrm{id}_K$ にとることによって、次を得る。

系 A - 5

K：体

$\Omega,\ \Omega'$：K の 2 つの代数的閉包

$\Longrightarrow\quad {}^{\exists} f : \Omega \longrightarrow \Omega'$：同型 s.t. $f|_K = \mathrm{id}_K$

Appendix B. 代数的整数と Dedekind 環

§1. 代数的整数

K を有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大体とするとき、K の元が代数的整数であるとは、それが最高次の係数が 1 の整数係数のある多項式の根となるときをいう。ここでの目標は、K が $\mathbb{Q}$ の有限次拡大のとき、その代数的整数全体からなる部分環 Z_K の構造を解析することである。Z_K の商体は K と一致すること、Z_K は $\mathbb{Z}$-加群として有限生成かつ自由であることを示す。

定義 B-1

R：環

$\tilde{R}$：R を部分環として含む環　とする。

$\alpha \in \tilde{R}$：R **上整** (*integral*) $\iff$ ${}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}c_1, \cdots, c_n \in R$

$$\text{s.t.} \quad \alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0$$

$\tilde{R}$ の任意の元が R 上整のとき、$\tilde{R}$ は R 上整であるという。

定義 B-2

K：有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分体として含む体　とする。

整数環 $\mathbb{Z}$ 上整であるような K の元を K 内の**代数的整数** (*algebraic integer*) と呼ぶ。

命題 B-1

R：環

$\tilde{R}$：R を部分環として含む環　とする。このとき、

$$\{\alpha \in \tilde{R} \mid \alpha \text{ は } R \text{ 上整}\}$$

は R を含む $\tilde{R}$ の部分環になる。

この部分環を R の $\tilde{R}$ における**整閉包** (*integral closure*) という。

上の命題を証明するために、いくつか補題を準備する。

補題 B-2

R：環

$\tilde{R}$：R を部分環として含む環　とする。

$\alpha \in \tilde{R}$ について、

$$\alpha \text{ が } R \text{ 上整} \iff R[\alpha] \subset \tilde{R} \text{ を } R\text{-加群とみたとき、有限生成}$$

(proof)

i. 必要性

α は R 上整なので、

$$\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\alpha + c_n = 0 \qquad (c_1, \cdots, c_n \in R)$$

が成り立つ。

$$\alpha^n = -c_1\alpha^{n-1} - \cdots - c_{n-1}\alpha - c_n$$

であるから、$R[\alpha]$ は $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ の R-係数の一次結合として書かれる元よりなる。したがって、$R[\alpha]$ は有限生成である。

ii. 十分性

$R[\alpha]$ は有限生成であると仮定する。

$f_1(\alpha),\ \cdots, f_m(\alpha)$ をその生成元とする。

各 $f_i(\alpha)$ $(i = 1, \cdots, m)$ はある多項式 $f_i(X) \in R[X]$ に $X = \alpha$ を代入することによって得られている。$N \in \mathbb{N}$ を $f_1(X),\ \cdots, f_m(X)$ のどの次数よりも大きい数とする。$\alpha^N \in R[\alpha]$ より、

$$\alpha^N = c_1 f_1(\alpha) + \cdots + c_m f_m(\alpha), \qquad c_1, \cdots, c_m \in R$$

と書くことができる。このことは α が N 次のモニックな多項式

$$X^N - c_1 f_1(X) - \cdots - c_m f_m(X)$$

の根になることを意味する。よって、α は R 上整である。 (Q.E.D.)

補題 B - 3

R：環

$\tilde{R}$：R を部分環として含む環　とする。

$\tilde{R}$ を R-加群としてみたとき、有限生成

$\Longrightarrow$ $\tilde{R}$ は R 上整

(proof)

$\tilde{R} = Ru_1 + \cdots + Ru_n$ であるとする。

$\alpha \in \tilde{R}$ を任意にとり、

$$\alpha u_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j, \qquad c_{ij} \in R$$

と書く。

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha\delta_{ij} - c_{ij}) u_j = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成立する。行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & \alpha - c_{22} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & \alpha - c_{nn} \end{pmatrix}$$

の行列式を $d \in \tilde{R}$ とおく。すると、A の余因子行列 $\mathrm{adj}A$ について

$$(\mathrm{adj}A)A = dI_n \qquad (I_n \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

となるので、$(*)$ により、

$$du_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

を得る。

$\because$)

│　これは、

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = (\mathrm{adj}A)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}(\alpha\delta_{1j}-c_{1j})u_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha\delta_{nj}-c_{nj})u_j\end{pmatrix} = (\mathrm{adj}A)A\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = dI_n\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}du_1\\ \vdots\\ du_n\end{pmatrix}$$

となることから従う。 □

これより、任意の $r \in \tilde{R}$ に対して $dr = 0$ であることがわかる。特に、$r = 1$ として、$d = 0$ を得る。

一方、d を α に関して展開すると、その係数は c_{ij} たちの $\mathbb{Z}$ 係数の多項式になることがわかる。したがって、d は α に関して R-係数のモニックな多項式として表わされる。

こうして、α は R 上整であることが証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Proposition B-1)

$R' = \{R$ 上整であるような $\tilde{R}$ の元の全体$\}$ とおく。

① $R \subset R'$ であること：

任意の $\alpha \in R$ は、$x - \alpha \in R[X]$ の根であるから、R 上整である。よって、$R \subset R'$ となる。

② R' が $\tilde{R}$ の部分環であること：

$1 \in R \subset R'$ であるから、②を証明するためには、$\alpha, \beta \in \tilde{R}$ が R 上整のとき、$\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ も R 上整になることを示せばよい。

α は R 上整であるから、補題 B-2 により、$R[\alpha]$ は有限生成 R-加群になる。

β は R 上整であるから、$R[\alpha]$ 上整でもある。再び、補題 B-2 により、$R[\alpha, \beta] = (R[\alpha])[\beta]$ は有限生成 $R[\alpha]$-加群になる。

故に、$R[\alpha, \beta]$ は有限生成 R-加群になる。

$\alpha + \beta,\ \alpha\beta \in R[\alpha, \beta]$ であるから、補題 B-2 により、$\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ は R 上整である。 (Q.E.D.)

$\mathbb{Q}$ を部分体として含む体 K に対して、

$$Z_K := \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ は } K \text{ 内の代数的整数}\}$$

とおく。命題 B-1 により、Z_K は $\mathbb{Q}$ を含む K の部分環である。そればかりでなく、K は体なので、その部分環 Z_K は整域になる。このことから、Z_K の商体 $Q(Z_K)$ を考えることができる。整域の商体は抽象的に構成することができるが、ここでは、次のように K 内に実現しておく：

$$Q(Z_K) = \{\alpha^{-1}\beta \mid \alpha, \beta \in Z_K,\ \alpha \neq 0\} \subset K$$

ここで、α^{-1} は K における α の逆元を表わしている。

次の命題は、この Appendix 内で最も基本的な事実の 1 つである。

命題 B - 4

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体

$\Longrightarrow\ Q(Z_K) = K$

この命題を証明するために、少し補題を準備をする。

補題 B - 5

$K/\boldsymbol{k}$：体の有限次拡大

$\Longrightarrow\ {}^\forall\alpha\in K$：$\boldsymbol{k}$ 上代数的

$\quad$ *i.e.* ${}^\exists f(X)\in\boldsymbol{k}[X]-\boldsymbol{k}\quad \text{s.t.}\quad f(\alpha)=0$

(proof)

$[K:\boldsymbol{k}]=n$ とおく。$1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^n$ は $\boldsymbol{k}$ 上一次従属である。よって、

$$c_0 1+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots+c_n\alpha^n=0,\qquad c_0,c_1,\cdots,c_n\in\boldsymbol{k},\ (c_0,c_1,\cdots,c_n)\neq(0,0,\cdots,0)$$

が成り立つ。ここで、$c_1,\cdots,c_n$ の少なくとも 1 つは 0 ではない。よって、

$$f(X)=c_0+c_1X+c_2X^2+\cdots+c_nX^n\quad\in\ \boldsymbol{k}[X]$$

とおくと $f(X)\notin\boldsymbol{k}$ であり、$f(\alpha)=0$ が成り立つ。故に、α は $\boldsymbol{k}$ 上代数的である。 (Q.E.D.)

$\mathbb{Z}$-係数の多項式 $g(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n$ が**原始多項式** (*primitive polymonial*) であるとは、

(i) $g(X)\neq 0$

(ii) $g(X)$ の係数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ が互いに素

となるときをいう。

補題 B - 6

$f(X)\in\mathbb{Q}[X]$

$\Longrightarrow\ {}^\exists c\in\mathbb{Q},\ {}^\exists g(X)\in\mathbb{Z}[X]$：原始多項式 $\quad\text{s.t.}\quad f(X)=cg(X)$

(proof)

$$f(X)=\frac{a_0}{b_0}X^n+\frac{a_1}{b_1}X^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}X+\frac{a_n}{b_n}\qquad(a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Z},\ b_0,b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{N})$$

と書く。$b_0,b_1,\cdots,b_n$ の最小公倍数を l とおく。

$$b_ib_i'=l\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

であるとすると、

$$lf(X)=(a_0b_0')X^n+(a_1b_1')X^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}b_{n-1}')X+a_nb_n'\quad\in\ \mathbb{Z}[X]$$

となる。$a_0b_0',a_1b_1',\cdots,a_{n-1}b_{n-1}',a_nb_n'$ の最大公約数を d とおき、

$$a_ib_i'=dc_i\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

とおくとき、$c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n$ は互いに素になる。このとき、

$$lf(X)=d(c_0X^n+c_1X^{n-1}+\cdots+c_{n-1}X+c_n)$$

となることから、

$$f(X)=\frac{d}{l}(c_0X^n+c_1X^{n-1}+\cdots+c_{n-1}X+c_n)$$

と書かれることがわかる。$c_0X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_{n-1}X + c_n$ は原始多項式になっているから、補題は証明された。 (Q.E.D.)

補題 B - 7

$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$：原始多項式　とする。このとき、
$f(X) = g(X)h(X), \ \ g(X), h(X) \in \mathbb{Z}[X]$
$\quad \Longrightarrow \ g(X), h(X)$：原始多項式

この補題の証明は、例えば、拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.39 補題 2-13 を参照。

系 B - 8

$f(X) \in \mathbb{Q}[X] - \mathbb{Q}$
$\quad \Longrightarrow \ {}^{\exists}c \in \mathbb{Q}, \ {}^{\exists}r \in \mathbb{N}, \ {}^{\exists}g_1(X), g_2(X), \cdots, g_r(X) \in \mathbb{Z}[X]$：$\mathbb{Z}$ 上既約な原始多項式
$\qquad$ s.t. $\ f(X) = cg_1(X)g_2(X)\cdots g_r(X)$

(proof)

補題 B-6、補題 B-7 から直ちに従う。 (Q.E.D.)

(proof of Proposition B-4)

$Q(Z_K) \subset K$ となることは $Q(Z_K)$ の定め方から明らかであるので、$K \subset Q(Z_K)$ となることを示す。

$\alpha \in K$ を任意にとる。

K は $\mathbb{Q}$ 上有限次の拡大体であるから、

$${}^{\exists}f(X) \in \mathbb{Q}[X] - \mathbb{Q} \ \text{ s.t. } \ f(\alpha) = 0$$

となる (補題 B-5)。したがって、

$${}^{\exists}g(X) \in \mathbb{Z}[X] : \text{既約な原始多項式} \ \text{ s.t. } \ g(\alpha) = 0$$

となる (系 B-8)。

$$g(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

とおく。このとき、多項式

$$h(X) := X^n + a_1X^{n-1} + a_0a_2X^{n-2} + \cdots + a_0^{n-1}a_n \ \ \in \ \mathbb{Z}[X]$$

に関して、$h(a_0\alpha) = 0$ が成り立つ。このことは $\beta := a_0\alpha$ が代数的整数であることを意味している。故に、

$$\alpha = \frac{\beta}{a_0} \in Q(Z_K)$$

が成り立つ。こうして、$K \subset Q(Z_K)$ が証明された。 (Q.E.D.)

定理 B - 9

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体
$\quad \Longrightarrow \ Z_K$：$\mathbb{Z}$-加群として有限生成かつ自由
$\qquad$ さらに、Z_K の $\mathbb{Z}$-自由加群としての階数は、拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ に一致する。

この定理の証明には、「有理数の中で代数的整数となるものは整数に限る」という事実が必要である。この事実は次の補題から導かれる。

補題 B - 10

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体　とする。

$\alpha \in K$ に対して、α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ と書く。このとき、

$$\alpha：K \text{ 内の代数的整数} \iff \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]$$

(proof)

i. 十分性

$\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ は α を根にもつモニックな多項式である。

したがって、$\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]$ ならば、α は $\mathbb{Z}$-係数のモニックな多項式 $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ の根になっている。故に、α は代数的整数である。

ii. 必要性

$\alpha \in K$ は代数的整数であるとすると、

$$^{\exists}f(X) \in \mathbb{Z}[X] - \mathbb{Z}：\text{モニック} \quad \text{s.t.} \quad f(\alpha) = 0$$

となる。$m(X) = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}[X]$ とおく。

$$f(X) = m(X)g(X), \qquad g(X) \in \mathbb{Q}[X]$$

と書くことができる。補題 B-6 から、

$$^{\exists}M(X) \in \mathbb{Z}[X]：\text{原始多項式}, \ ^{\exists}r \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad m(X) = rM(X)$$
$$^{\exists}G(X) \in \mathbb{Z}[X]：\text{原始多項式}, \ ^{\exists}r' \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad g(X) = r'G(X)$$

となる。このとき、

$$f(X) = M(X)G(X)$$

が成り立つ。

$\because$)

$$r = \frac{a}{b}, \quad r' = \frac{c}{d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$$

と書くと、

$$bdf(X) = acM(X)G(X) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。原始多項式の積は原始多項式である (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.34 補題 2-11 参照) から、$M(X)G(X)$ の係数たちの最大公約数は 1 である。したがって、$acM(X)G(X)$ の係数たちの最大公約数は ac となる。

一方、$f(X)$ はモニックであるから、$bdf(X)$ の係数たちの最大公約数は bd となる。故に、

$$bd = ac$$

を得る。ここで、$r, r' \neq 0$ ゆえ、$a, b, c, d \neq 0$ である。故に、$bd = ac \neq 0$ となり、$(*)$ から

$$f(X) = M(X)G(X)$$

を得る。 □

$M(X),\ G(X) \in \mathbb{Z}[X]$ および $f(X) = M(X)G(X)$ から、$M(X)$ の最大次係数は ± 1 でなければならないことがわかる。$m(X) = rM(X)$ の両辺の最大次係数を比較して、$r = 1$ または $r = -1$ であることがわかる。したがって、$m(X) = \pm M(X) \in \mathbb{Z}[X]$ が示された。

(Q.E.D.)

系 B-11

$r \in \mathbb{Q}$：代数的整数 $\Longrightarrow$ $r \in \mathbb{Z}$

(proof)

$r \in \mathbb{Q}$ が代数的整数ならば、上の補題により、r の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $m(X) = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Z}[X]$ に属する。

一方、r の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X - r$ で与えられるから、

$$m(X) = X - r \in \mathbb{Z}[X]$$

となることがわかる。したがって、$r \in \mathbb{Z}$ であることが示された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem B-9)

K は $\mathbb{Q}$ 上有限次分離的であるから、

$$^{\exists}\gamma \in K \ \text{ s.t. } \ K = \mathbb{Q}(\gamma)$$

となる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.100 系 3 および p.150 参照)。命題 B-4 の証明から、

$$0 \neq {}^{\exists}a \in \mathbb{Z} \ \text{ s.t. } \ a\gamma \in Z_K$$

となる。

$$\alpha := a\gamma$$

とおく。このとき、$K = \mathbb{Q}(\alpha)$ であり、$\mathbb{Z}[\alpha] \subset Z_K$ となる。

$$0 \neq {}^{\exists}c \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } Z_K \subset c^{-1}\mathbb{Z}[\alpha] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示す。

$f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を α の最小多項式とする。このとき、

$$\deg f(X) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}]$$

が成り立つ (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.44 参照)。 $[K : \mathbb{Q}] = n$ とおく。

$K/\mathbb{Q}$ は分離的なので、$f(X)$ は分離的である。したがって、$f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体を E とおけば、$E/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大になる (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.80 定理 2-15

参照)。$f(X)$ の E 内の根を $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ とおくと、$E=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ となる。$f(X)$ の分離性により、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ は相異なっていることに注意する。

行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を考える。これは van der Monde 型の行列になっているから、

$$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j) \quad \in \ E$$

が成り立つ (佐武一郎・著『線型代数学』p.53 参照)。$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ は相異なるので、$|A|\neq 0$ であることがわかる。

$$c:=|A|^2 \quad \in \ \mathbb{Z}$$

である。

$\because$)

まず、$c\in\mathbb{Q}$ となることを示す。そのためには、$E/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であるから、$c=|A|^2\in E$ が Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ の作用の下で不変なことを示せばよい (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.82 命題 2-3 参照)。

$\sharp\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n\}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ であるから、

$$c=\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{\substack{i,j=1,\cdots,n\\ i\neq j}}(\alpha_i-\alpha_j)$$

である。

$f(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$ への $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ の作用を考えることにより、

$$\{\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$$

であることがわかる。したがって、任意の $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ に対して、

$$\begin{aligned}\sigma(c)&=\sigma((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j))\\ &=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i\neq j}(\sigma(\alpha_i)-\sigma(\alpha_j))\\ &=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j)=c\end{aligned}$$

となる。故に、

$$c\in E^{\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})}=\mathbb{Q}$$

が示された。

次に、c が E 内の代数的整数であることを示す。

$c=|A|^2$ は、その定義から、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ たちの $\mathbb{Z}$-係数の一次結合である。したがって、c が代数的整数であることを示すには、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ が E 内の代数的整数であることを示せばよい (命題 B-1)。

$\alpha_1=\alpha$ は代数的整数であるから、

$$\alpha^m+c_1\alpha^{m-1}+\cdots+c_{m-1}\alpha+c_m=0 \qquad (c_1,\cdots,c_{m-1},c_m\in\mathbb{Z}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\Diamond)$$

を満たす。Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ は $f(X)$ の根全体からなる集合 $\{\alpha_1=\alpha,\cdots,\alpha_n\}$ に推移的に作用する (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.189 補題 3-5 参照) から、任意の α_i に対して、$\sigma(\alpha)=\alpha_i$ となる $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ が存在する。故に、$(\Diamond)$ に σ を作用させることにより、

$$\alpha_i^m+c_1\alpha_i^{m-1}+\cdots+c_{m-1}\alpha_i+c_m=0$$

を得る。これは、α_i が代数的整数であることを意味する。

以上から、c は $\mathbb{Q}$ に属する代数的整数であることが判明したので、系 B-11 により、$c\in\mathbb{Z}$ であることがわかる。 □

今定義した $c\in\mathbb{Z}$ に関して、$Z_K\subset c^{-1}\mathbb{Z}[\alpha]$ となることを証明する。

$\beta\in Z_K$ を任意にとる。

$$\beta=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\alpha^i \qquad (b_i\in\mathbb{Q},\ \ i=0,1,\cdots,n-1)$$

と書く。

$$\beta=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\alpha^i=c^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(cb_i)\alpha^i$$

と書くことができるので、$\beta\in c^{-1}\mathbb{Z}[\alpha]$ を示すためには、$cb_i\in\mathbb{Z}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ となることを示せばよい。そのためには、$i=0,1,\cdots,n-1$ に対して

$$\begin{cases} ①cb_i\in\mathbb{Q} \\ ②\ cb_i \text{ は代数的整数} \end{cases}$$

となることを示せばよい (系 B-11)。

①は $c\in\mathbb{Z}$ および $b_i\in\mathbb{Q}$ から直ちに従う。

②について示す。

$\beta_1=\beta,\beta_2,\cdots,\beta_n\in E$ を

$$\beta_i=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\alpha_j^i \quad (j=1,\cdots,n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\#)$$

によって定義する。これを $b_0, b_1, \cdots, b_n$ を未知数とする連立一次方程式と考えて、Cramer の方法で解く。γ_{ij} を A の (i,j)-成分に関する余因子とする：$\mathrm{adj}^t A = (\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ 。このとき、

$$
\begin{aligned}
(\#) \iff \quad & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \mathrm{adj}^t A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
\iff \quad & b_{i-1} = |A|^{-1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\beta_j \quad (i = 1, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は E 内の代数的整数なので、γ_{ij} $(i,j = 1, \cdots, n)$ も E 内の代数的整数である (命題 B-1)。

また、β_i も E 内の代数的整数である。

∵)

まず、$\beta_1 = \beta \in Z_K$ である。

次に、$i = 1, \cdots, n$ を 1 つ固定する。

$\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ を $\sigma(\alpha) = \alpha_i$ を満たす元とする ($c \in \mathbb{Z}$ の証明参照)。このとき、

$$\sigma(\beta) = \beta_i$$

が成り立つことがわかる。$\beta \in Z_K$ なので、β はあるモニックな $\mathbb{Z}$-係数の多項式の根になる。この多項式に σ を作用させることにより、β_i も同じ $\mathbb{Z}$-係数の多項式の根になることがわかる。したがって、β_i は E 内の代数的整数である。 □

したがって、$|A|$ は E 内の代数的整数だから、$cb_0, cb_1, \cdots, cb_{n-1}$ は E 内の代数的整数である (命題 B-1)。以上から、$Z_K \subset c^{-1}\mathbb{Z}[\alpha]$ となることが示された。

$\alpha \in Z_K$ ゆえ、$c^{-1}\mathbb{Z}[\alpha]$ は有限生成 $\mathbb{Z}$-加群である (補題 B-2)。したがって、その部分加群になっている Z_K も有限生成になる (拙著『代数系入門』p.147 定理 28 参照)。さらに、Z_K にはねじれ元が存在しない。

∵)

Z_K は整域なので、$n \in \mathbb{Z}$ と $\delta \in Z_K$ について、$n\delta = 0$ ならば、

$$n \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ Z_K \text{ の単位元}}}{1} = 0 \quad \text{または} \quad \delta = 0$$

でなければならない。

Z_K の単位元は K の単位元であり、K の標数は 0 なので、$n \cdot 1 = 0$ ならば、$n = 0$ となる。故に、Z_K にはねじれ元が存在しない。 □

有限生成アーベル群の分解定理から、Z_K は有限生成自由アーベル群である。

K の任意の元が Z_K の元に $\mathbb{Z}$ の元の逆元を掛けた形に表せる (命題 B-4) ことから、Z_K の $\mathbb{Z}$ 上の基は K の $\mathbb{Q}$ 上の基にもなっていることがわかる。故に、Z_K の $\mathbb{Z}$-加群としての階数は $[K:\mathbb{Q}]=n$ に等しい。 (Q.E.D.)

§2. 代数的整数と Dedekind 環

ここでは、$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体における代数的整数全体が Dedekind 環をなすことを証明する。ここでは、Dedekind 環を体でない 整閉な Noether 整域であって、0 でない任意の素イデアルが極大イデアルであるものとして定義する。

定義 B - 3

R：整域 とする。

R：**整閉** (*integrally closed*) $\iff$ $\alpha \in Q(R)$ が R 上整ならば $\alpha \in R$

例題 B - 12

$\mathbb{Z}$ は整閉である。

(proof)

系 B-11 による。 (Q.E.D.)

補題 B - 13

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体

$\Longrightarrow$ Z_K：整閉

(proof)

$\gamma \in Q(Z_K)$ は Z_K 上整であるとする。

すると $Z_K[\gamma]$ は有限生成 Z_K-加群となる (補題 B-2)。

Z_K は有限生成 $\mathbb{Z}$-加群である (定理 B-9) から、$Z_K[\gamma]$ もまた有限生成 $\mathbb{Z}$-加群になることがわかる。

$\mathbb{Z}[\gamma]$ は $Z_K[\gamma]$ の部分 $\mathbb{Z}$-加群とみなされる。これより、$\mathbb{Z}[\gamma]$ も有限生成 $\mathbb{Z}$-加群になることがわかる (拙著『代数系入門』p.147 定理 28 参照)。補題 B-2 から $\gamma \in Z_K$ を得る。 (Q.E.D.)

環 R が **Noether 環**であるとは、R のイデアルの任意の昇鎖列 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots\cdots$ について、

$$I_n = I_{n+1} = \cdots\cdots$$

となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在するときをいう。補題 1-7 の証明と同様にして、

$$R\text{：Noether 環} \iff R \text{ の任意のイデアルは } R\text{-加群とみて有限生成}$$

となることが証明される。

補題 B - 14

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体

$\Longrightarrow$ Z_K：Noether 環

(proof)

Z_K の任意のイデアル I が Z_K-加群として有限生成となることを示せばよい。

I を Z_K の部分 $\mathbb{Z}$-加群とみなす。

Z_K は $\mathbb{Z}$-加群として有限生成である (定理 B-9) ので、その部分加群である I も $\mathbb{Z}$ 上有限生成となる (拙著『代数系入門』p.147 定理 28 参照)。したがって、また、I は Z_K-加群としても有限生成である。よって、Z_K は Noether 環である。 (Q.E.D.)

定義 B - 4

R：環 とする。

$$R：\textbf{Dedekind 環}\,(\textit{Dedekind ring}) \iff \begin{cases} ① \ R：\text{体でない Noether 整域} \\ ② \ R：\text{整閉} \\ ③ \ R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアルは極大イデアル} \end{cases}$$

注意 1°：環 R の空でない部分集合 P が**素イデアル** (*prime ideal*) であるとは、次の 3 つの条件が成り立つときをいう。

① P：R のイデアル

② $P \neq R$

③ $a, b \in R,\ ab \in P \implies a \in P$ または $b \in P$

この定義から、直ちに、極大イデアルは素イデアルであることがわかる。

注意 2°：環 R が体になるための必要十分条件は、R のイデアルが 0 または R の 2 つしか存在しないことである。したがって、R が体でないという条件は、「R に 0 でない素イデアルが存在する」ことに同値である。

定理 B - 15

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体

$\implies Z_K$：Dedekind 環

(proof)

補題 B-13 および補題 B-14 より、

(i) Z_K：体でない整域

(ii) Z_K の 0 でない素イデアルは極大イデアル

となることを示せばよい。

(i) の証明：

Z_K は体 K の部分環であるから整域である。

Z_K が体でないことを示す。

Z_K が体であったと仮定すると、$Z_K = Q(Z_K) = K \supset \mathbb{Q}$ となる。これは、$Z_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ である (系 B-11) ことに矛盾している。故に、Z_K は体でない。

(ii) の証明：

$P\ (\neq 0)$ を Z_K の素イデアルであるとする。

$P \cap \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の 0 でない素イデアルである。

$\because$)

$P \cap \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルであり、$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ について

$$\alpha\beta \in P \cap \mathbb{Z} \implies \alpha \in P \cap \mathbb{Z} \text{ または } \beta \in P \cap \mathbb{Z}$$

を満たすことはすぐにわかる。

・$P \cap \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ であること：

これは、$1 \notin P$ よりただちに従う。

・$P \cap \mathbb{Z} \neq 0$ であること：

$0 \neq \alpha \in P$ を 1 つとり、固定する。

α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を $m(X)$ とおくと、α が代数的整数であることから、$m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ となる (補題 B-10)。

$$m(X) = X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m \qquad (a_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \cdots, m)$$

と書く。$\alpha \neq 0$ および $m(\alpha) = 0$ であることから、$a_m \neq 0$ であることに注意する。さらに、

$$a_m = -(\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha) \ \in \ \mathbb{Z} \cap P$$

となる。よって、$P \cap \mathbb{Z} \neq 0$ であることがわかった。

以上により、$P \cap \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の 0 でない素イデアルであることが示された。 □

これより、$P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ (p は素数) と書くことができる。したがって、

$$P \cap \mathbb{Z} \text{ は } \mathbb{Z} \text{ の極大イデアル}$$

であることがわかる。

背理法を用いて、P が Z_K の極大イデアルであることを示そう。

P が Z_K の極大イデアルでなかったとすると、

$$^{\exists}I : Z_K \text{ のイデアル} \quad \text{s.t.} \quad P \subsetneqq I \subsetneqq Z_K$$

となる。このとき、

$$P \cap \mathbb{Z} = I \cap \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

$\because$)

$I \cap \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルであって、$P \cap \mathbb{Z} \subset I \cap \mathbb{Z}$ を満たす。

また、$I \subsetneqq Z_K$ より、$1 \notin I$ であり、したがって、$I \cap \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ となる。

$P \cap \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルであったから、上の状況から、$P \cap \mathbb{Z} = I \cap \mathbb{Z}$ でなければならないことがわかる。 □

さて、$\beta \in I$ であって $\beta \notin P$ となるものをとる。β の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を $f(X)$ とおく。$\beta \in Z_K$ であるから、$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ となる (補題 B-10)。

$$f(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n \qquad (b_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \cdots, n)$$

と書く。このとき、

$$b_n = -(\beta^n + b_1\beta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\beta) \ \in \ \mathbb{Z} \cap I = P \cap \mathbb{Z}$$

となるから、

$$\beta(\beta^{n-1} + b_1\beta^{n-2} + \cdots + b_{n-1}) \in P$$

を得る。P は素イデアルであって、$\beta \notin P$ であるから、

$$\beta^{n-1} + b_1\beta^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \in P$$

を得る。上と同様にして、

$$b_{n-1} \in I \cap \mathbb{Z} = P \cap \mathbb{Z}$$

が得られ、したがってまた、$\beta^{n-2} + b_2\beta^{n-3} + \cdots + b_{n-2} \in P$ が得られる。以下、これを繰り返すことにより、$\beta \in P$ となることがわかる。これは、$\beta \notin P$ に矛盾している。これで、P が Z_K の極大イデアルになっていることが示された。 (Q.E.D.)

§3. Dedekind 環におけるイデアルの素イデアル分解と分数イデアルの可逆性

ここでは、Dedekind 環の一般論を少しだけ扱う。Dedekind 環内の 0 でない任意のイデアルは、並べ方の順番を無視すれば、素イデアルの積に一意的に分解されることが証明される。そのためには、分数イデアルの概念が必要となる。整域 R のイデアル I とその商体の元 x $(\neq 0)$ に対して、商体の部分 R-加群 Ix は分数イデアルと呼ばれる。R が Dedekind 環のときには、商体の部分 R-加群が分数イデアルであること、それが R 上有限生成であること、それが可逆であることの 3 つは互いに同値になる。この事実の証明が、Dedekind 環における素イデアル分解の存在と一意性の証明において重要な部分を占める。

Dedekind 環内のイデアルに対する素イデアル分解の存在と一意性を 2 つの定理にわけて述べよう。

定理 B - 16

R：Dedekind 環
I：R のイデアル　とする。このとき、
$I \neq 0,\ R \implies {}^{\exists}P_1, \cdots, P_n$：$R$ の 0 でない素イデアル s.t. $I = P_1 \cdots P_n$

注意：定理の逆も正しい。すなわち、0 でない素イデアルの有限個の積は 0 でも R でもない。
(proof)
$P_1, \cdots, P_n$ を R の 0 でない素イデアルとする。
R は整域なので、$P_1 \cdots P_n \neq 0$ である。
また、$P_1 \neq R$ であるから、

$$P_1 \cdots P_n \subset P_1 \subsetneqq R$$

が成り立つ。 □

定理 B - 17

R：Dedekind 環

$P_i\ (i=1,\cdots,n),\ Q_j\ (j=1,\cdots,m)$：$R$ の 0 でない素イデアル　とする。このとき、

$P_1\cdots P_n \subset Q_1\cdots Q_m \quad\Longrightarrow\quad m\leq n$ かつ $Q_1,\cdots,Q_m$ は $P_1,\cdots,P_n$ の部分列を適当に並べかえたものに一致する。

注意：上の定理から、R のイデアル $I\ (\neq 0,R)$ を素イデアルの積として書く書き表わし方は、順番を除いて一意的なことがわかる。

上の 2 つの定理を証明するためには、少し準備が必要である。まず、基本的な補題を 2 つ述べる。

補題 B - 18

R：Noether 環

$I\ (\neq 0)$：R のイデアル　とする。このとき、

$$^{\exists}P_1,\cdots,P_r：R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル} \ \ \text{s.t.}\ \ I\supset P_1\cdots P_r$$

(proof)

$$S:=\left\{ I：R\text{ のイデアル} \;\middle|\; \begin{array}{l} I\neq 0,\ \text{任意の自然数 } r \text{ と任意の } 0 \text{ でない素イデアル} \\ P_1,\cdots,P_r \text{ に対して } I\not\supset P_1\cdots P_r \end{array} \right\}$$

とおく。$S\neq\emptyset$ と仮定する。

R は Noether 環なので、S には極大元が存在する。

$\because$)

$S\neq\emptyset$ より、$I\in S$ が存在する。

I が S の極大元でなければ、$I\subsetneqq I_1$ となる $I_1\in S$ が存在する。

I_1 が S の極大元でなければ、$I_1\subsetneqq I_2$ となる $I_2\in S$ が存在する。

この操作が途中で終わらなかったとすると、R の中に真に増大するイデアルの列 $I\subsetneqq I_1\subsetneqq I_2\subsetneqq\cdots\cdots$ が得られてしまう。これは、R が Neoether 環であることに反する。 $\square$

極大元の 1 つを J とおく。

$J\in S$ なので、$J\neq 0$ であり、J は素イデアルでない。したがって、

$$^{\exists}\alpha,\beta\in R\ \ \text{s.t.}\ \ \alpha\beta\in J\ \ \text{かつ}\ \ \alpha,\beta\notin J$$

となる。よって、

$$J\subsetneqq J+\alpha R\ \ \text{かつ}\ \ J\subsetneqq J+\beta R$$

である。J の S における極大性から $J+\alpha R,\ J+\beta R$ は有限個の 0 でない素イデアルの積を含む。

一方、$\alpha\beta\in J$ ゆえ

$$(J+\alpha R)(J+\beta R)\subset JJ+\alpha J+\beta J+\alpha\beta R\subset J$$

となる。このことと $J+\alpha R,\ J+\beta R$ が有限個の 0 でない素イデアルの積を含むことから、J は有限個の 0 でない素イデアルの積を含むことになる。これは $J \in S$ に矛盾する。故に、$S=\emptyset$ でなければならない。これで、補題は証明された。 (Q.E.D.)

補題 B - 19

R：Dedekind 環
$P_1,\cdots,P_r$：0 でない R の素イデアル
P：R の極大イデアル　とする。このとき、

$$P_1\cdots P_r \subset P \implies {}^{\exists}i \in \{1,\cdots,r\}\ \text{ s.t. }\ P=P_i$$

(proof)

任意の $i=1,\cdots,r$ に対して、$P \neq P_i$ であると仮定する。

R は Dedekind 環なので、素イデアル P_i は R の極大イデアルである。したがって、$P \neq P_i$ でああるためには

$$P_i \not\subset P$$

でなければならない。これより、

$$^{\exists}\alpha_i \in P_i\ \text{ s.t. }\ \alpha_i \notin P$$

となる。このとき、

$$\alpha_1\cdots\alpha_r \in P_1\cdots P_r \subset P$$

となる。ところで、P は極大イデアルなので素イデアルである。したがって、$\alpha_1\cdots\alpha_r \in P$ となることは、ある i について $\alpha_i \in P$ となることを意味する。ここに矛盾が生じた。故に、ある i に対して、$P=P_i$ となっていなければならない。 (Q.E.D.)

次に、可逆イデアルの概念を導入する。

R を整域とし、$K=Q(R)$ とおく。K を R-加群とみなし、

$$\mathfrak{M}_R(K) := \{K \text{ の部分 } R\text{-加群全体}\}$$

とおく。$I,J \in \mathfrak{M}_R(K)$ に対して、積 $IJ \in \mathfrak{M}_R(K)$ を

$$IJ := \{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in I,\ b_i \in J\ (i=1,\cdots,n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

によって定義する。この積に関して、$\mathfrak{M}_R(K)$ は単位元を持つ可換な半群になる。単位元は R によって与えられる。

定義 B - 5

R：整域　とする。$K=Q(R)$ とおく。

$I \in \mathfrak{M}_R(K)$：**可逆イデアル** (*invertible ideal*) $\iff$ ${}^{\exists}J \in \mathfrak{M}_R(K)$ s.t. $IJ=R$

可逆イデアル I の $\mathfrak{M}_R(K)$ における逆元 I^{-1} は、具体的に次で与えられる：

$$I^{-1}=\{x \in K \mid Ix \subset R\}$$

$\because$)

$I' := \{x \in K \mid Ix \subset R\}$ とおく。

I' は、その定義より、K の部分 R-加群であり、$II' \subset R$ である。

$I \in \mathfrak{M}_R(K)$ が可逆のとき、$R \subset II'$ となることを示す。

I は可逆なので、$IJ = R$ となる $J \in\in \mathfrak{M}_R(K)$ が存在する。したがって、I' の定義により、

$$J \subset I'$$

が成り立つ。両辺に I を掛けて

$$R = IJ \subset II'$$

を得る。故に、$II' = R$ となることが示された。 □

定理 B - 20

R：Dedekind 環 とする。このとき、

$$I：R \text{ の } 0 \text{ でないイデアル} \implies I：\text{可逆}$$

上の定理を使うと、定理 B-16 および定理 B-17 が以下のようにして証明される。

(proof of Theorem B-16)

自然数 n に対して、

$$\mathcal{S}_n := \{I：R \text{ のイデアル} \mid P_1 \cdots P_n \subset I \ \text{ for some non-zero prime ideals } P_1, \cdots, P_n\}$$

とおく。補題 B-18 により、

$$\{R \text{ の } 0 \text{ でないイデアル全体}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

となる。

n に関する数学的帰納法で

$$^{\forall}I \in \mathcal{S}_n - \{R\} \implies {}^{\exists}P_1, \cdots, P_r：0 \text{ でない } R \text{ の素イデアル } \ \text{s.t. } I = P_1 \cdots P_r \quad \cdots\cdots\cdots (\sharp)$$

を証明する。

. $I \in \mathcal{S}_1$ のとき

$$^{\exists}P_1：R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル} \quad \text{s.t.} \quad P_1 \subset I$$

となる。$I \neq R$ なので、$I \subset P$ となる R の極大イデアルが存在する。このとき、$P_1 \subset P$ となる。ところが、R は Dedekind 環なので、素イデアル P_1 は極大イデアルであるであるから、$P_1 = P$ でなければならない。したがって、$I = P_1 = P$ を得る。

. $\mathcal{S}_{n-1}$ に属する任意のイデアル J $(\neq R)$ に対して、定理は成り立っていると仮定する。$I \neq R$ であるような $I \in \mathcal{S}_n$ を考える。

$I \in \mathcal{S}_n$ なので、

$$^{\exists}P_1, \cdots, P_n：R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル } \ \text{s.t. } P_1 \cdots P_n \subset I$$

となる。$I \neq R$ なので、$I \subset P$ となる R の極大イデアル P が存在する。

このとき、$P_1 \cdots P_n \subset P$ となるので、補題 B-19 により、P はある P_i に一致する。必要ならば番号を付け変えることにより、$P = P_1$ であると仮定しても差し支えない。このとき、

$$P_2 \cdots P_n = RP_2 \cdots P_n = P^{-1}PP_2 \cdots P_n \subset P^{-1}I \subset P^{-1}P = R \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。よって、$P^{-1}I \in \mathcal{S}_{n-1}$ となる。

$\because$)

$P^{-1}I$ は P^{-1}, $I \in \mathfrak{M}_R(K)$ の積であるから、$\mathfrak{M}_R(K)$ に属する。このことと $P^{-1}I \subset R$ であること ($(*)$ による) から、$P^{-1}I$ は R のイデアルであることがわかる。

また、$I \neq 0$ より、$P^{-1}I \neq 0$ である。

故に、$P^{-1}I$ は R の 0 でないイデアルである。

$(*)$ により、$P_2 \cdots P_n \subset P^{-1}I$ なので、$P^{-1}I \in \mathcal{S}_{n-1}$ となっていることがわかる。

□

・$P^{-1}I = R$ のとき：$I = P$ となり、I について $(\sharp)$ は成り立つ。

・$P^{-1}I \neq R$ のとき：$P^{-1}I \in S_{n-1} - \{R\}$ となる。帰納法の仮定により、

$$^\exists Q_1, \cdots, Q_r：R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル} \quad \text{s.t.} \quad P^{-1}I = Q_1 \cdots Q_r$$

となる。故に、

$$I = PQ_1 \cdots Q_r$$

となり、I について $(\sharp)$ は成り立つ。

数学的帰納法により、定理は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem B-17)

R は Dedekind 環なので、0 でない素イデアルは極大イデアルであることに注意する。

m に関する数学的帰納法で証明する。

. $m = 1$ のとき：補題 B-19 により、成立する。

. $m > 1$ であるとし、$m - 1$ のとき定理の主張は正しいと仮定する。

$P_1 \cdots P_n \subset Q_1 \cdots Q_m \subset Q_1$ であるから、Q_1 は $P_1, \cdots, P_n$ のどれかと一致する (補題 B-19)。必要ならば番号をつけなおすことにより、$Q_1 = P_1$ であるとしてよい。もし、$n = 1$ であったと仮定すると、

$$R = P_1^{-1}P_1 \subset Q_1^{-1}Q_1Q_2 \cdots Q_m = RQ_2 \cdots Q_m = Q_2 \cdots Q_m$$

となる。よって、$Q_2 \cdots Q_m = R$ となる。これは、

$$Q_2 \cdots Q_m \subset Q_2 \neq R$$

であることに矛盾する。故に、$n > 1$ であり、

$$P_2 \cdots P_n = P_1^{-1}P_1P_2 \cdots P_n \subset Q_1^{-1}Q_1Q_2 \cdots Q_m = Q_2 \cdots Q_m$$

となる。帰納法の仮定から、$m - 1 \leq n - 1$ であり、適当な番号の付け替えの後に $Q_2 = P_2, \cdots, Q_m = P_m$ が成り立つ。したがって、m の場合にも定理は成り立つ。 (Q.E.D.)

以下、定理 B-20 の証明を目指す。そのために、分数イデアルの概念を導入する。

定義 B - 6

R：整域　とする。$K = Q(R)$ とおく。
$J \subset K$：R の**分数イデアル** (*fractional ideal*)
$\iff$ ${}^{\exists}x \in K - \{0\},\ {}^{\exists}I$：$R$ のイデアル　s.t.　$J = Ix$

注意：R のイデアルは R の分数イデアルである。

命題 B - 21

R：整域　とし、$K = Q(R)$ とおく。
$I \in \mathfrak{M}_R(K)$ に対して、

I：可逆イデアル $\implies$ I：R 上有限生成 $\implies$ I：分数イデアル

が成り立つ。

(proof)
・「I：可逆イデアル $\implies$ I：R 上有限生成」の証明：
　I を可逆イデアルとすると、$I^{-1}I = R$ となる。よって、

$$1 = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i \qquad (a_i \in I,\ b_i \in I^{-1})$$

と表わすことができる。
　さて、$a \in I$ を任意にとる。このとき、

$$a = a \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} (ab_i) a_i$$

と表わすことができる。各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、$b_i \in I^{-1},\ a \in I$ ゆえ、$ab_i \in R$ となる。したがって、

$$I \subset \sum_{i=1}^{n} Ra_i$$

を得る。逆向きの包含関係が成立することは、$a_i \in I\ (i = 1, \cdots, n)$ であることと I が K の R-部分加群であることから従う。こうして、

$$I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$$

を得る。故に、I は R 上有限生成である。
・「I：R 上有限生成 $\implies$ I：分数イデアル」の証明：
　I を K の有限生成な部分 R-加群とすると、

$$I = \sum_{i=1}^{n} Ra_i \qquad (a_i \in K,\ i = 1, \cdots, n)$$

と書くことができる。各 a_i を

$$a_i = \frac{t_i}{s_i} \qquad (t_i, s_i \in R,\ s_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, n)$$

のように表わす。このとき、

$$s := s_1 \cdots s_n \in R$$

とおく。$s \neq 0$ であって、任意の $i = 1 \cdots, n$ に対して、$a_i s \in R$ が成り立つ。したがって、

$$J := Is \subset R$$

が成り立つ。J は R のイデアルであり、$I = J \cdot \dfrac{1}{s}$ となるので、I は R の分数イデアルである。 (Q.E.D.)

Dedekind 環の場合には、上の命題において逆向きの矢印が成立する。

命題 B-22

R：Dedekind 環 とし、$K = Q(R)$ とおく。このとき、
$0 \neq I \in \mathfrak{M}_R(K)$ に対して、

$$I：R \text{ の分数イデアル} \iff I：R \text{ 上有限生成} \iff I：\text{可逆イデアル}$$

注意：この命題により、Dedekind 環 R においては、0 でない R の分数イデアルは可逆なことがわかる。このことから、定理 B-20 が直ちに従う ($\because$ R のイデアルは分数イデアルなので)。

上の命題の左側の「$\iff$」は次の補題による。

補題 B-23

R：Noether 整域 とし、$K = Q(R)$ とおく。
K を R-加群とみなすとき、$J \subset K$ について

$$J：K \text{ の有限生成な部分 } R\text{-加群} \iff J \text{ は } R \text{ の分数イデアル}$$

が成り立つ。

(proof)

必要性は命題 B-21 ですでに示した。
J を R の分数イデアルであるとすると、

$$^{\exists}x \in K - \{0\},\ ^{\exists}I：R \text{ のイデアル} \ \text{ s.t. } \ J = Ix$$

となる。R の Noether 性により、I は R-加群として有限生成であり、したがって、J もまた、R-加群として有限生成である。 (Q.E.D.)

命題 B-22 の右側の「$\iff$」を証明するには少し準備が必要である。

記号

以下、$I \in \mathfrak{M}_R(K)$ が可逆でない場合にも、I^{-1} を次のように定義する。すなわち、

$$I^{-1} := \{x \in K \mid Ix \subset R\}$$

とおく。このとき、$I^{-1} \in \mathfrak{M}_R(K)$ である。I が可逆な場合には、この I^{-1} は $\mathfrak{M}_R(K)$ における I の逆元に一致していることに注意する。

補題 B - 24

R：Noether 整域
$I\ (\neq 0)$：R のイデアル
　　$\Longrightarrow$ I^{-1}：R の分数イデアル、$R \subset I^{-1}$
さらに、R：Dedekind 環, $I \neq R \Longrightarrow R \subsetneqq I^{-1}$

(proof)

　I を 0 でない R のイデアルとする。

・I^{-1}：R の分数イデアル　であること：

　R は Noether 整域であるから、$I^{-1} = \{x \in K \mid Ix \subset R\}$ が $K = Q(R)$ の有限生成な部分 R-加群となることを示せばよい (補題 B-23)。

　$0 \neq a \in I$ を 1 つとる。このとき、$x \in K$ に対して

$$x \in I^{-1} \Longrightarrow Ix \subset R \Longrightarrow ax \in R \Longrightarrow x \in Ra^{-1}$$

となる。故に、I^{-1} は有限生成 R-加群 Ra^{-1} の部分 R-加群となる。R は Noether 環であるから、有限生成 R-加群の部分加群もまた有限生成である (補題 1-7 参照)。故に、I^{-1} もまた R 上有限生成となる。

・$R \subset I^{-1}$ であること：

　$I \subset R$ であるから、任意の $x \in R$ に対して、$Ix \subset R$ となる。したがって、$R \subset I^{-1}$ である。

・R が Dedekind 環で $I \neq R$ のとき、$R \subsetneqq I^{-1}$ であること：

　$0 \neq \alpha \in I$ を 1 つ固定する。補題 B-18 により、

$$^{\exists}P_1, \cdots, P_r：R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル} \ \ \text{s.t.} \ \ P_1 \cdots P_r \subset \alpha R \subset I$$

となる。今、集合

$$\{\{P_1, \cdots, P_r\} \mid P_i\ (i = 1, \cdots, r) \text{ は } R \text{ の } 0 \text{ でない素イデアル}, \ P_1 \cdots P_r \subset \alpha R\}$$

に属する元の要素の個数が最小となるものを 1 つ選び、それを $\{P_1, \cdots, P_r\}$ とおく。

　$I \subset P$ を満たす R の極大イデアル P をとる ($I \neq R$ なので、このような R の極大イデアルは存在する) と、$P_1 \cdots P_r \subset P$ となる。したがって、

$$^{\exists}i \in \{1, \cdots, r\} \ \ \text{s.t.} \ \ P = P_i$$

となる (補題 B-19)。

　$P = P_1$ であるとしても一般性を失わない。このとき

$$PP_2 \cdots P_r \subset I \subset P$$

が得られる。

　$\{P_1, \cdots, P_r\}$ の選び方から、$P_2 \cdots P_r \not\subset \alpha R$ となる。したがって、

$$^{\exists}\beta \in P_2 \cdots P_r \ \ \text{s.t.} \ \ \beta \notin \alpha R$$

となる。そこで、$\lambda := \beta\alpha^{-1} \in K$ とおく。

$\beta \notin \alpha R$ より、$\lambda \notin R$ である。一方、

$$I\lambda \subset I\beta\alpha^{-1} \subset P\beta\alpha^{-1} \subset PP_2 \cdots P_r\alpha^{-1} \subset R$$

であるから、$\lambda \in I^{-1}$ となる。こうして、$R \subsetneq I^{-1}$ となることが示された。 (Q.E.D.)

(proof of Proposition B-18)

命題 B-18 を証明するためには、$0 \neq I \in \mathfrak{M}_R(K)$ に対して、

① I：R の分数イデアル $\iff$ I：R 上有限生成

② I：R の分数イデアル $\iff$ I：可逆イデアル

の２つを証明するればよい。①については、補題 B-23 で証明されている。また、「I：可逆イデアル $\Longrightarrow$ I：R の分数イデアル」も命題 B-21 で証明されている。したがって、②において「$\Longrightarrow$」が成立することを示せばよい。

まず、I $(\neq 0)$ が R のイデアルの場合に考える。このとき、I が $\mathfrak{M}_R(K)$ における可逆元であること、すなわち、$II^{-1} = R$ が成り立つことを示す。

$J := II^{-1}$ とおき、$J = R$ を示す。I^{-1} の定義より、$J \subset R$ であり、J は R の 0 でないイデアルである。R は Dedekind 環なので、$J^{-1} = R$ ならば $J = R$ である (補題 B-24)。よって、$J^{-1} = R$ となることを示せばよい。そのためには、$J^{-1} \subset R$ となることを示せばよい ($\because$ $J \subset R$ なので、補題 B-24 から、$R \subset J^{-1}$)。

$\beta \in J^{-1}$ を任意にとる。このとき、$I^{-1}[\beta] \subset I^{-1}$ が成り立つ。

$\because$)

$$I(I^{-1}\beta) \subset II^{-1}J = JJ^{-1} \subset R$$

であるから、

$$I^{-1}\beta \subset I^{-1}$$

を得る。したがって、また、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$I^{-1}\beta^m \subset I^{-1}$$

となることが、m に関する帰納法で証明できる。故に、

$$I^{-1}[\beta] \subset I^{-1}$$

となることが示された。 □

$R \subset I^{-1}$ である (補題 B-24) から、$R[\beta] \subset I^{-1}$ を得る。I^{-1} は R 上有限生成 (補題 B-23 と補題 B-24 参照) なので、その部分加群である $R[\beta]$ も R 上有限生成になることがわかる ($\because$ R の Noether 性)。このことは、$\beta \in J^{-1} \subset K$ が R 上整であることを意味する (補題 B-2)。R は整閉であるから、$\beta \in R$ でなければならない。こうして、$J^{-1} \subset R$ となることが示された。

次に、I $(\neq 0)$ が R の分数イデアルの場合に考える。このとき、I が可逆イデアルであることを示す。

I^{-1} の定義から $II^{-1} \subset R$ であり、$1 \in R \subset I^{-1}$ かつ $I \neq 0$ より、$II^{-1} \neq 0$ である。よって、II^{-1} は R の 0 でないイデアルである。したがって、前半部分の議論により、II^{-1} は可逆イデアルである。$\mathfrak{M}_R(K)$ におけるその逆元を J とおけば、$II^{-1}J = R$ となる。このこ

とから、I が $\mathfrak{M}_R(K)$ において可逆なことがわかる。これで、②における「$\Longrightarrow$」が示され、命題の証明が終わった。 (Q.E.D.)

命題 B-22 の帰結として、定理 B-20 が得られる。

(proof of Theorem B-20)
R のイデアルは R の分数イデアルでもあるから、命題 B-22 により、Dedekind 環 R における 0 でない任意のイデアルは可逆である。 (Q.E.D.)

定理 B-20 の有用な応用を述べよう。

命題 B - 25

R：Dedekind 環
$I,\ J$：R の分数イデアル　とする。このとき、

$$I^n \supset J^n \text{ となる } n \in \mathbb{N} \text{ が存在する} \implies I \supset J$$

(proof)
$K = Q(R)$ とおく。
$J = 0$ のとき、示すべきことはなにもない。
$I = 0$ のときは、$0 = I^n \supset J^n$ なので、$J^n = 0$ となる。$J^n \subset K$ であり、K は体であるから、$J^n = 0$ ならば、$J = 0$ でなければならない。故に、$I \supset J$ が成り立つ。
以下、$I \neq 0$ かつ $J \neq 0$ を仮定する。

$$I = \mathfrak{A}_1 x, \qquad J = \mathfrak{A}_2 y \qquad\qquad (\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2 : R \text{ のイデアル},\ x, y \in K - \{0\})$$

とおき、

$$x = \frac{a}{b}, \qquad y = \frac{c}{d} \qquad\qquad (a, b, c, d \in R - \{0\})$$

とおく。$I \supset J$ となることを示すには、

$$\mathfrak{A}_1 ad \supset \mathfrak{A}_2 bc \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せばよい。ここで、$\mathfrak{A}_1 ad,\ \mathfrak{A}_2 bc$ は R の 0 でないイデアルであることに注意する。
次の 3 つの場合に分けて証明する。

① $\mathfrak{A}_1 ad = R$ のとき
② $\mathfrak{A}_2 bc = R$ のとき
③ $\mathfrak{A}_1 ad \neq R$ かつ $\mathfrak{A}_2 bc \neq R$ のとき

①の場合：
$\mathfrak{A}_1 ad = R \supset \mathfrak{A}_2 bc$ となり、$(*)$ が成り立つ。
②の場合：
$(\mathfrak{A}_1 ad)^n \supset (\mathfrak{A}_2 bc)^n = R$ より、$(\mathfrak{A}_1 ad)^n = R$ となる。
もし、$\mathfrak{A}_1 ad \neq R$ ならば、$\mathfrak{A}_1 ad$ は 0 でない有限個の素イデアルの積で書くことができる (定理 B-16)。したがって、$(\mathfrak{A}_1 ad)^n$ も 0 でない有限個の素イデアルの積で書ける。しかし、

このようなものが R と一致することはない (定理 B-16 の下の注意参照)。ここに矛盾が生じた。故に、$\mathfrak{A}_1 ad = R$ でなければならない。
③の場合：

定理 B-16 により、

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_1 ad = P_1 \cdots P_m & (P_1, \cdots, P_m : P_i,\ i = 1, \cdots, m \text{ は } 0 \text{ でない素イデアル}) \\ \mathfrak{A}_2 bc = Q_1 \cdots Q_l & (Q_1, \cdots, Q_l : Q_j,\ j = 1, \cdots, l \text{ は } 0 \text{ でない素イデアル}) \end{cases}$$

と書き表わすことができる。$(\mathfrak{A}_1 ad)^n \subset (\mathfrak{A}_2 bc)^n = R$ より、

$$P_1^n \cdots P_m^n \supset Q_1^n \cdots Q_l^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を得る。したがって、$l \geq m$ であり、各 P_i はある Q_j と一致する (定理 B-17)。

$P_i = Q_{j_i},\ i \in \{1, \cdots, m\}$ とおく。$j_1, \cdots, j_m$ は相異なるように選ぶことができる。

$\because$)

P_1 は $Q_1, \cdots, Q_l$ のどれかと一致する (定理 B-17) ので、必要ならば番号を付け替えることにより、$P_1 = Q_1$ であるとする。$(**)$ の両辺に P_1^{-1} を n 回掛けて、

$$P_2^n \cdots P_m^n \supset Q_2^n \cdots Q_l^n$$

を得る。P_2 は $Q_2, \cdots, Q_l$ のどれかと一致する (定理 B-17) ので、必要ならば番号を付け替えることにより、$P_2 = Q_2$ であるとする。このとき、$P_2^n \cdots P_m^n \supset Q_2^n \cdots Q_l^n$ の両辺に P_2^{-1} を n 回掛けて、

$$P_3^n \cdots P_m^n \supset Q_3^n \cdots Q_l^n$$

を得る。以下、同様にして、適当な番号の付け替えの後に、

$$P_1 = Q_1,\ P_2 = Q_2,\ \cdots,\ P_m = Q_m$$

が成り立つことがわかる。 □

したがって、

$$\mathfrak{A}_1 ad = P_1 \cdots P_m = Q_{j_1} \cdots Q_{j_m} \supset Q_1 \cdots Q_l = \mathfrak{A}_2 bc$$

を得る。

以上で、③の場合にも示された。 (Q.E.D.)

§4. Dedekind 環上の捩れがない有限生成加群の構造定理

ここでは、Dedekind 環上の捩れがない有限生成加群が分数イデアルの有限個の直和に同型であることを証明する。

定義 B - 7

R：環

M：R-加群　とする。

M：**捩れがない** (*torsion-free*)

$\iff$　$\alpha \in R,\ m \in M$ について $\alpha m = 0$ ならば $\alpha = 0$ または $m = 0$

注意 1°：M：捩れがない R-加群, N：M の部分 R-加群 $\Longrightarrow$ N：捩れがない

注意 2°：M, N：捩れがない R-加群 $\Longrightarrow$ $M \oplus N$：捩れがない

R が整域のとき、捩れのない R-加群 M に対して、体 $K := Q(R)$ 上のベクトル空間 KM を構成することができる。以下、その構成方法を説明する。

まず、$M \times (R - \{0\})$ 上に関係 $\sim$ を

$$(m_1, \alpha_1) \sim (m_2, \alpha_2) \iff \alpha_2 m_1 = \alpha_1 m_2$$

によって定義する。$\sim$ は同値関係になる (推移律の証明に「M に捩れがないこと」が必要になる)。そこで、

$$KM := M \times (R - \{0\}) / \sim$$

と定義する。KM は次の和とスカラー倍に関して、K 上のベクトル空間になる。

$$\begin{array}{ll} \text{和：} & [m_1, \alpha_1] + [m_2, \alpha_2] = [\alpha_2 m_1 + \alpha_1 m_2, \alpha_1 \alpha_2] \\ \text{スカラー倍：} & \dfrac{\beta}{\gamma}[m, \alpha] = [\beta m, \gamma \alpha],\ \ \gamma \neq 0 \end{array}$$

写像 $i_M : M \longrightarrow KM$ を

$$i_M(m) = [m, 1], \qquad m \in M$$

によって定義する。i_M は単射な R-加群準同型である。この写像により、$m \in KM$ とみなす。すると、KM の任意の元 $[m, \alpha]$ は

$$[m, \alpha] = \frac{1}{\alpha}[m, 1] = \alpha^{-1} m$$

のように書くことができる。

補題 B - 26

R：整域　とし、$K = Q(R)$ とおく。

$M,\ N$：捩れがない R-加群　とする。

$\theta : M \longrightarrow N$：$R$-加群準同型

$\Longrightarrow$ $^{\exists 1}\bar{\theta} : KM \longrightarrow KN$：$K$-線形写像　s.t.　次の図式が可換

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "i_M"'] & N \arrow[d, "i_N"] \\ KM \arrow[r, "\bar{\theta}"] & KN \end{tikzcd}$$

(proof)

$\bar{\theta} : KM \longrightarrow KN$ を

$$\bar{\theta}([m, \alpha]) = [\theta(m), \alpha], \qquad m \in M,\ \alpha \in R - \{0\}$$

によって定義したい。$\bar{\theta}$ が矛盾なくて定義されていることを確かめる。

$$\begin{aligned}(m_1,\alpha_1)\sim(m_2,\alpha_2) &\implies \alpha_2 m_1=\alpha_1 m_2\\ &\implies \theta(\alpha_2 m_1)=\theta(\alpha_1 m_2)\\ &\implies \alpha_2\theta(m_1)=\alpha_1\theta(m_2)\\ &\implies (\theta(m_1),\alpha_2)\sim(\theta(m_2),\alpha_1)\end{aligned}$$

これで、$\bar{\theta}$ は矛盾なく定義されていることが確かめられた。

その定義から、$\bar{\theta}$ は K-線形写像であり、補題の可換図式を満たす。これで、補題の図式を可換にする K-線形写像 $\bar{\theta}$ の存在が示された。

$\bar{\theta}$ の一意性は補題の図式を可換にしなければならないことからすぐにわかる。 (Q.E.D.)

定義 B-8

R：整域

M：捩れがない R-加群　とする。$K=Q(R)$ とおく。

K 上のベクトル空間 KM の次元を M の R 上の**階数** (*rank*) と呼ぶ。

定理 B-27

R：Dedekind 環

M：R-加群　とする。このとき、

M：階数 n、捩れがない、有限生成

$\iff$ $^\exists I_1,\cdots,I_n$：0 でない R の分数イデアル　s.t.　$M\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n$　as R-modules

定理 B-27 を証明するためには、少し長い準備が必要である。

補題 B-28

R：Noether 整域　とし、$K=Q(R)$ とおく。

(1) R の 0 でない分数イデアルは、階数 1 の捩れがない有限生成 R-加群である。

(2) 階数 1 の捩れがない有限生成 R-加群は、R の 0 でないある分数イデアルと、R-加群として同型である。

(proof)

(1) J を R の 0 でない分数イデアルとする。

補題 B-23 により、J は有限生成 R-加群である。

また、$J\subset K$ であり、K は体なので、J には捩れがない。

さらに、$J=Ix$ ($x\in K-\{0\}$, I：R の分数イデアル) と書くことができるので、$KJ=Kx$ となる。したがって、$\dim_K(KJ)=1$ となり、J の階数は 1 であることがわかる。

(2) M を階数 1 の捩れがない有限生成 R-加群とする。

KM は K 上 1 次元なので、

$$KM=Km \qquad (m\in M,\ m\neq 0)$$

と表わすことができる。

$$J := \{\alpha \in K \mid \alpha m \in M\}$$

とおく。J は K の部分 R-加群である。

$\because$)

J が K の和に関して閉じていることは、すぐに確かめられる。

$\alpha \in J,\ r \in R$ に対して、

$$(r\alpha)m = r \cdot (\underset{\substack{\Cap \\ M}}{\underline{\alpha m}}) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ M \text{ は } R\text{-加群}}}{\in} \quad M$$

$\therefore\ r\alpha \in J$ □

$f : J \longrightarrow M$ を $f(\alpha) = \alpha m$ によって定義する。

f は R-加群の同型である。

$\because$)

f の定義により、f は R-加群準同型である。また、M には捩れがないので、f は単射である。

f が全射なことを証明する。

任意に $m' \in M$ をとる。$m' \in KM$ とみなせるので、

$$m' = \alpha m \qquad (\alpha \in K)$$

と書き表わすことができる。このとき、$f(\alpha) = m'$ が成り立つから、f は全射である。

以上より、f は R-加群の同型である。 □

M は R 上有限生成なので、J もそうである。よって、補題 B-23 により、J は R の分数イデアルである。 (Q.E.D.)

定義 B - 9

R：環

M：R-加群

N：M の部分 R-加群　とする。

N：**純** (*pure*) $\iff$ ${}^{\forall}\alpha \in R$ に対して、$\alpha N = N \cap \alpha M$

注意：M 自身、または 零加群 0 は M の純部分 R-加群である。

補題 B - 29

R：整域　とし、$K = Q(R)$ とおく。

M：捩れがない R-加群　とする。このとき、

任意の $m \in M$ に対して、$N := Km \cap M$ は M の純部分 R-加群になる。

(proof)

N が M の部分 R-加群であることはただちにわかる。

N が M の純純部分 R-加群であることを示すには、任意の $\alpha \in R$ に対して $N \cap \alpha M \subset \alpha N$ となることを示せばよい。

そのためには、$\alpha \in R,\ \alpha \neq 0,\ m' \in M$ が $\alpha m' \in N$ を満たすとき、$m' \in N$ となることを示せばよい。

$\alpha m' \in N = Km \cap M$ であることから、$\alpha m' = am\ (a \in K)$ と書くことができる。したがって、

$$m' = \alpha^{-1} am$$

と書ける。これは $m' \in Km$ となることを意味する。

$$\therefore\ m' \in Km \cap M = N$$

これで、補題は示された。 (Q.E.D.)

M の部分 R-加群 N が純であることと、商加群 M/N に捩れがないこととは、次のように、密接に関係している。

補題 B - 30

R：環
M：R-加群
N：M の部分 R-加群　とする。
(1) M/N：捩れがない $\Longrightarrow$ N：純
(2) M：捩れがない、N：純 $\Longrightarrow$ M/N：捩れがない

(proof)

自然な射影 $M \longrightarrow M/N$ による $m \in M$ の像を $\bar{m}$ によって表わすことにする。

(1) $\alpha \in R,\ m \in M$ が $\alpha m \in N$ を満たしているとする。このとき、

$$0 = \overline{\alpha m} = \alpha \cdot \bar{m} \ \text{ in }\ M/N$$

となる。M/N に捩れがないとすると、$\alpha = 0$ または $\bar{m} = 0$ が成り立つ。すなわち、$\alpha = 0$ または $m \in N$ が成り立つ。よって、

$\alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad m \in N \qquad \therefore\ \alpha m \in \alpha N$

$\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha m = 0 \in \alpha N$

となる。いずれにしても、$\alpha m \in \alpha N$ を得る。故に、$N \cap \alpha M \subset \alpha N$ となることが示された。よって、N は M の純部分加群である。

(2) $\alpha \in R$ と $\bar{m} \in M/N$ が $\alpha \bar{m} = 0$ を満たしているとする。

$$\overline{\alpha m} = \alpha \bar{m} = 0 \ \text{ in }\ M/N$$

を満たすので、$\alpha m \in N$ となる。故に、$\alpha m \in N \cap \alpha M$ であることがわかる。

N は M の純部分加群であるから、$\alpha m \in \alpha N$ となるが、M に捩れがないことから、$\alpha \neq 0$ ならば、$m \in N$ でなければならないことがわかる。

よって、

$$\alpha \bar{m} = 0,\ \alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{m} = 0$$

となることが示された。これは M/N に捩れがないことを意味する。 (Q.E.D.)

補題 B - 31

R：整域　とし、$K=Q(R)$ とおく。

M：捩れがない R-加群

N：M の純部分 R-加群

$$\Longrightarrow \quad K(M/N) \cong KM/KN \qquad \text{as } K\text{-vector spaces}$$

さらに、M が有限生成のとき、(M/N の階数)=(M の階数)-(N の階数) が成り立つ。

(proof)

$p : M \longrightarrow M/N$ を自然な射影とする。

定義 B-7 注意 1° と補題 B-26(2) により、N および M/N は捩れがない。

p は次の図式を可換にする K-線形写像 $\bar{p} : KM \longrightarrow K(M/N)$ を誘導する (補題 B-26)。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ p\ } & M/N \\ {\scriptstyle i_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{M/N}} \\ KM & \xrightarrow{\ \bar{p}\ } & K(M/N) \end{array}$$

$\bar{p}$ は

$$\bar{p}([m,\alpha]) = [p(m),\alpha], \qquad m \in M,\ \alpha \in R-\{0\}$$

によって与えられるから、p の全射性により、全射である。また、$m \in M,\ \alpha \in R-\{0\}$ に対して、

$$\begin{aligned} [m,\alpha] \in \mathrm{Ker}\bar{p} &\iff [p(m),\alpha] = 0 \\ &\iff [p(m),\alpha] = [p(0),1] \\ &\iff 1\cdot p(m) = \alpha \cdot p(0) \\ &\iff p(m) = p(0) \\ &\iff m \in \mathrm{Ker}p = N \end{aligned}$$

となる。故に、$\bar{p}$ に準同型定理を適用して

$$KM/KN \cong K(M/N) \qquad \text{as } K\text{-vector spaces}$$

を得る。さらに、M が有限生成のとき、この両辺の次元を比較することにより

等式 (M/N の階数)=(M の階数)-(N の階数) を得る。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem B-27)

十分性：定義 B-7 の下の注意 2° と補題 B-28(1) から、直ちに得られる。

必要性：M を階数 n の捩れがない有限生成 R-加群とする。

$$\mathcal{S} := \{ M/N \mid N：M \text{ の純部分 } R\text{-加群} \}$$

とおく。$\mathcal{S}$ の任意の元は捩れがない有限生成 R-加群となる (補題 B-30(2))。$M \in \mathcal{S}$ なので、$\mathcal{S}$ の任意の元について、定理の必要性が成り立つことを示せばよい。$\mathcal{S}$ の元の階数に関する数学的帰納法による。

N を M の純部分 R-加群とし、M/N の階数は 1 であるとする。このとき、補題 B-28(2) から、M/N は R の 0 でない分数イデアルと R-加群として同型になる。

階数が $r-1$ であるような $\mathcal{S}$ の元については、定理の必要性は成り立っていると仮定する。

N を M の純部分 R-加群とし、$V := M/N$ の階数は r であるとする。

$K = Q(R)$ とおき、通常の方法で $V \subset KV$ とみなす。

$0 \neq v \in V$ をとり、$W = Kv \cap V$ とおく。W は V の純部分加群である (補題 B-29)。

したがって、V/W は捩れがない有限生成 R-加群になる (補題 B-30(2))。

さらに、V/W の階数は $r-1$ である。

$\because$)

補題 B-31 より、

$$(V/W \text{ の階数}) = (V \text{ の階数}) - (W \text{ の階数})$$

である。一方、W の定義から $KW = Kv$ であるから

$$(W \text{ の階数}) = \dim KW = \dim Kv = 1$$

である。故に、V/W の階数は $r-1$ である。 $\square$

さて、$p : M \longrightarrow M/N = V$ を自然な射影とすると、$M/p^{-1}(W) \cong V/W$ が成り立つ。よって、帰納法の仮定から

$$^{\exists}I_1, \cdots, I_{r-1} : 0 \text{ でない分数イデアル} \quad \text{s.t.} \quad V/W \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1} \quad \text{as } R\text{-modules}$$

が成り立つ。W は捩れがない階数 1 の R-加群である (捩れがない加群の部分加群は捩れがないことと $KW = Kv$ による) から、W は 0 でない分数イデアルと同型になる (補題 B-28)。このことから、帰納法を完成させるためには、W が V の R-加群としての直和因子になっていることを示せばよい。

$\because$)

W が V の R-加群としての直和因子であれば、

$$V = T \oplus W \qquad (T : M \text{ の部分 } R\text{-加群})$$

と書くことができる。したがって、

$$T \cong V/W \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1} \quad \text{as } R\text{-modules}$$

となる。また、W は 0 でない分数イデアルと同型なので、

$$^{\exists}I_r : 0 \text{ でない分数イデアル} \quad \text{s.t.} \quad W \cong I_r \quad \text{as } R\text{-modules}$$

である。よって、

$$V \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1} \oplus I_r \quad \text{as } R\text{-modules}$$

となる。 $\square$

以下、定理の証明を完成させるために、W が V の直和因子であることを証明する。

$V/W \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1}$ であるから、

$$^\exists\varphi : V \longrightarrow I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1}：全射な\ R\text{-加群準同型} \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Ker}\varphi = W$$

となる。各 $j = 1, \cdots, r-1$ に対して $V_j := \varphi^{-1}(I_j)$ とおく。

$$^\exists T_j：V_j\ の部分\ R\text{-加群} \quad \text{s.t.} \quad V_j = T_j \oplus W \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることが示されれば、W が V の R-加群としての直和因子であることがわかる。

∵)

$V = (T_1 + \cdots + T_{r-1}) \oplus W$ が成り立つことを示す。

① $V = (T_1 + \cdots + T_{r-1}) + W$ であること：任意の $j = 1, \cdots, r-1$ に対して

$$I_j = \varphi(V_j) = \varphi(T_j \oplus W) \underset{\substack{\uparrow \\ W = \mathrm{Ker}\varphi}}{=} \varphi(T_j)$$

が成り立つ。したがって、

$$\varphi(T_1 + \cdots + T_{r-1}) = \varphi(T_1) + \cdots + \varphi(T_{r-1}) = I_1 + \cdots + I_{r-1} = \varphi(V)$$

が成り立つ。よって、任意の $x \in V$ に対して、$\varphi(x) = \varphi(x')$ となる $x' \in T_1 + \cdots + T_{r-1}$ が存在する。

$$x = x' + \underset{\substack{\Cap \\ \mathrm{Ker}\varphi = W}}{\underset{\sim\sim\sim}{(x - x')}}$$

であるから、

$$V = (T_1 + \cdots + T_{r-1}) + W$$

が示された。

② $(T_1 + \cdots + T_{r-1}) \cap W = \{0\}$ であること：

$t_j \in T_j\ (j = 1, \cdots, r-1)$ が $t_1 + \cdots + t_{r-1} \in W$ を満たしているとする。$W = \mathrm{Ker}\varphi$ であるから、

$$\varphi(t_1) + \cdots + \varphi(t_{r-1}) = 0$$

を得る。ところが、$\varphi(t_j) \in I_j\ (j = 1, \cdots, r-1)$ であって、$I_1 + \cdots + I_{r-1}$ は直和であるから、

$$\varphi(t_j) = 0 \quad (j = 1, \cdots, r-1)$$

を得る。よって、$t_j \in W \cap T_j = \{0\}$、すなわち、$t_j = 0$ を得る。こうして、$(T_1 + \cdots + T_{r-1}) \cap W = \{0\}$ が示された。

①と②から、$V = (T_1 + \cdots + T_{r-1}) \oplus W$ であることが示された。 □

以下、$(*)$ を証明する。

R は Dedekind 環なので、R の 0 でない分数イデアルは可逆である。したがって、$I_j I_j^{-1} = R$ が成り立つ。よって、

$$^\exists\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in I_j,\ ^\exists\beta_1, \cdots, \beta_t \in I_j^{-1} \quad \text{.s.t.} \quad \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_t\beta_t = 1$$

となる。φ は全射なので、各 $i = 1, \cdots, t$ に対して

$$\varphi(x_i) = \alpha_i$$

となる $x_i \in V$ が存在する。$\alpha_i \in I_j$ であることと V_j の定義から、$x_i \in V_j\ (i = 1, \cdots, t)$ である。

$0 \neq \gamma \in I_j$ を 1 つ固定し、

$$z := (\gamma\beta_1)x_1 + \cdots + (\gamma\beta_t)x_t \quad \in V_j$$

とおく。$\beta_i \in I_j^{-1}$ より $\gamma\beta_i \in R\ (i = 1, \cdots, t)$ であることに注意する。このとき、

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{t} (\gamma\beta_i)\varphi(x_i) = \sum_{i=1}^{t} (\gamma\beta_i)\alpha_i \underset{\uparrow}{=} \gamma \sum_{i=1}^{t} \beta_i\alpha_i = \gamma \quad \cdots\cdots\cdots ❶$$

となる。　　　　K の元として

$T_j := Kz \cap V_j$ とおく。このとき、

$$V_j = T_j \oplus W \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ❷$$

が成り立つ。これを示す。

(i) $T_j \cap W = \{0\}$ であること：

$x \in T_j \cap W$ を任意にとる。$x \in T_j \subset Kz$ より、$x = \xi z\ (\xi \in K)$ と書くことができる。このとき、K において

φ を K-線形 $KV \longrightarrow K(I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1})$ に拡張 (補題 B-26)

$$0 \underset{\uparrow}{=} \varphi(x) = \varphi(\xi z) \overset{\downarrow}{=} \xi\varphi(z) \underset{\uparrow}{=} \xi\gamma$$

$x \in W = \mathrm{Ker}\varphi$　　　　❶

となる。$\gamma \neq 0$ ゆえ、$\xi = 0$ を得る。故に、$x = \xi z = 0$ となり、$T_j \cap W = \{0\}$ が示された。

(ii) $V_j = T_j + W$ であること：

任意に $x \in V_j$ をとり、$\xi := \varphi(x) \in I_j$ とおく。任意の $i = 1, \cdots, t$ に対して $\beta_i \in I_j^{-1}$ であるから、

$$\xi\beta_i \in R$$

となる。

$$w := (\xi\beta_1)x_1 + \cdots + (\xi\beta_t)x_t \quad \in \ V_j$$

を考える。z の定義から

$$w = \xi\gamma^{-1}z \ \in Kz$$

であることがわかるので、

$$w \in Kz \cap V_j = T_j$$

を得る。また、

$$\begin{aligned}
\varphi(x - w) &= \varphi(x) - \varphi(w) && \\
&= \varphi(x) - \varphi(\xi\gamma^{-1} \cdot z) && x \in V_j \\
&= \xi - \xi\gamma^{-1}\varphi(z) && \varphi \text{ を } KV \longrightarrow K(I_1 \oplus \cdots \oplus I_{r-1}) \text{ に拡張} \\
&= \xi - \xi\gamma^{-1}\gamma && \\
&= 0 &&
\end{aligned}$$

であるから、$x-w\in W$ を得る。こうして、

$$x = w + (x-w) \ \in \ T_j + W$$

となることが示された。

(i)(ii) により❷は示され、ようやく、帰納法が完成した。 (Q.E.D.)

系 B - 32 (Dedekind 環上の捩れがない有限生成加群の構造定理)

R：Dedekind 環

M：捩れがない有限生成 R-加群

$r := (M$ の階数$)$ とおく。このとき、

$$^{\exists}m_1, \cdots, m_r \in M, \ \ ^{\exists}I_1, \cdots, I_r : R \text{ の } 0 \text{ でない分数イデアル}$$
$$\text{s.t.} \ \ M = I_1 m_1 \oplus \cdots \oplus I_r m_r$$

(proof)

M を階数 r の捩れがない有限生成 R-加群とする。

定理 B-27 より、

$$^{\exists}I_1, \cdots, I_r : R \text{ の } 0 \text{ でない分数イデアル} \ \ \text{s.t.} \ \ M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \ \ \text{as } R\text{-modules} \quad \cdots\cdots (*)$$

となる。x

R は Dedekind 環なので、各 I_j $(j=1,\cdots,r)$ に対して

$$^{\exists}\alpha_j \in K - \{0\} \ \ \text{s.t.} \ \ I_j\alpha_j \supset R$$

となる。

∵)

R は Dedekind 環なので、各 I_j $(j=1,\cdots,r)$ は可逆である。したがって、

$$I_j I_j^{-1} = R$$

が成り立つ。よって、

$$1 = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n \qquad (\beta_i \in I_j, \ \gamma_i \in I_j^{-1}, \ i = 1, \cdots, n)$$

と書くことができる。

$$\beta_i = \frac{a_i}{b_i} \qquad (a_i, b_i \in R, b_i \neq 0)$$

とおき、

$$b := b_1 c \ldots b_n$$

とおくと、$b\beta_i \in R$ であり、

$$1 = \frac{1}{b}((b\beta_1)\gamma_1 + \cdots + (b\beta_n)\gamma_n) \ \ \text{in} \ \ \frac{1}{b}I_j$$

となる。故に、$R \subset \dfrac{1}{b}I_j$ が成り立つ。$\alpha_j := \dfrac{1}{b}$ が求める K の元 (の 1 つ) である。 □

このとき、

① $I_j\alpha_j$ $(j=1,\cdots,r)$ は R の 0 でない分数イデアルである。
② R-加群として、$I_j \cong I_j\alpha_j$ $(j=1,\cdots,r)$
③ $M \cong (I_1\alpha_1)\oplus\cdots\oplus(I_r\alpha_r)$ as R-modules

が成り立つ。

$\because$)

②③は $\alpha_j \neq 0$ であることからすぐにわかる。

①について：$I_j \neq 0,\ \alpha_j \neq 0$ であること、および K が整域であることから、$I_j\alpha_j \neq 0$ を得る。また、I_j は K の部分 R-加群なので、$I_j\alpha_j \subset K$ も K の部分 R-加群になっている。さらに、I_j は R-上有限生成なので、$I_j\alpha_j$ もそうである。補題 B-23 により、$I_j\alpha_j$ は R の分数イデアルである。 $\square$

したがって、$(*)$ における分数イデアル I_j $(j=1,\cdots,r)$ は $I_j \supset R$ を満たしていると仮定して差し支えない。このとき、R-加群の同型

$$\varphi : M \longrightarrow I_1\oplus\cdots\oplus I_r$$

に対して、$m_j \in M$ を

$$\varphi(m_j) = (0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ 番目}}}{1},0,\cdots,0)$$

によって定義する。

$$M = I_1m_1\oplus\cdots\oplus I_rm_r$$

が成り立つ。

$\because$)

・$M = I_1m_1+\cdots+I_rm_r$ であること：

$m\in M$ を任意にとり、$\varphi(m)=(x_1,\cdots,x_r)$ とおく。通常の方法で、$M\subset KM$ とみなす。$\overline{\varphi} : KM \longrightarrow K(I_1\oplus\cdots\oplus I_r)$ を φ の K-線形な拡張 (補題 B-26) とする。このとき、

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(x_1m_1+\cdots+x_rm_r) &= x_1\overline{\varphi}(m_1)+\cdots+x_r\overline{\varphi}(m_r)\\
&= x_1\varphi(m_1)+\cdots+x_r\varphi(m_r)\\
&= x_1(1,0,\cdots,0)+\cdots+x_r(0,\cdots,0,1)\\
&= (x_1,\cdots,x_r)\\
&= \varphi(m)\\
&= \overline{\varphi}(m)
\end{aligned}$$

となる。φ が R-同型なので、$\overline{\varphi}$ は K-同型となるから、

$$m = x_1m_1+\cdots+x_rm_r$$

を得る。このことは、$M \subset KM$ の下で、

$$M \subset I_1m_1 + \cdots + I_rm_r$$

となることを意味する。逆に、$(x_1, \cdots, x_r) \in I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ を任意にとり、$\varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_r) = m$ とおいて上と同じ議論を行うことにより、

$$M \supset I_1m_1 + \cdots + I_rm_r$$

が得られる。故に、$M = I_1m_1 + \cdots + I_rm_r$ が成り立つ。

・$I_1m_1 + \cdots + I_rm_r$ が直和であること：

$(x_1, \cdots, x_r) \in I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ が

$$x_1m_1 + \cdots + x_rm_r = 0$$

を満たしているとする。このとき、

$$0 = \overline{\varphi}(0) = \overline{\varphi}(x_1m_1 + \cdots + x_rm_r) = (x_1, \cdots, x_r)$$

となる。故に、各 x_i $(i = 1, \cdots, r)$ は 0 である。これは $I_1m_1 + \cdots + I_rm_r$ が $I_1m_1,\ \cdots,\ I_rm_r$ の直和になっていることを意味する。 □

以上により、系は証明された。 (Q.E.D.)

演習 B-1

R：整域、$K = Q(R)$ とおく。
M：捩れがない R-加群　とする。
(1) M：R 上有限生成 $\Longrightarrow$ KM：K 上有限次元
(2) M：$m_1, \cdots, m_t$ を基としてもつ自由 R-加群
　$\Longrightarrow$ KM：$[m_1, 1], \cdots, [m_t, 1]$ を基底としてもつ有限次元 K-ベクトル空間

解；

(1) $m_1, \cdots, m_t$ を M の R 上の生成元とする。このとき、$m_1, \cdots, m_t$ は KM の K 上の生成元でもあることを示す。

KM の任意の元は

$$\alpha^{-1}m \qquad (\alpha \in R - \{0\},\ m \in M)$$

と書くことができる。$m_1, \cdots, m_t$ は R 上 M を生成するから、

$$m = \alpha_1m_1 + \cdots + \alpha_tm_t \qquad (\alpha_i \in R,\ i = 1, \cdots, t)$$

と表わすことができる。このとき、

$$\alpha^{-1}m = \alpha^{-1}(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_t m_t) \underset{\uparrow}{=} \alpha^{-1}\alpha_1 \cdot m_1 + \cdots + \alpha^{-1}\alpha_t \cdot m_t$$

が成り立つ。

$$\left(\begin{array}{l} \quad [\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_t m_t, 1] \\ = [\alpha_1 m_1, 1] + \cdots + [\alpha_t m_t, 1] \\ = \dfrac{\alpha_1}{1}[m_1, 1] + \cdots + \dfrac{\alpha_t}{1}[m_t, 1] \text{ より、} \\ \quad \alpha^{-1}[\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_t, 1] \\ = \alpha^{-1}\Big(\dfrac{\alpha_1}{1}[m_1, 1] + \cdots + \dfrac{\alpha_t}{1}[m_t, 1]\Big) \\ = \dfrac{\alpha_1}{\alpha}[m_1, 1] + \cdots + \dfrac{\alpha_t}{\alpha}[m_t, 1] \end{array}\right)$$

故に、$m_1, \cdots, m_t$ は KM の K 上の生成元である。

(2) $m_1, \cdots, m_t$ は M の R 上の基であるとする。

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}m_1 + \cdots + \frac{\alpha_t}{\beta_t}m_t \qquad\qquad (\alpha_i, \beta_i \in R,\ \beta_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, t)$$

とおく。このとき、上式の両辺に $\beta_1 \cdots \beta_t$ を掛けて

$$\alpha_1(\beta_2 \cdots \beta_t)m_1 + \cdots + \alpha_t(\beta_1 \cdots \beta_{t-1})m_t = 0$$

を得る。この等式は M における等式と考えてよい。よって、各 $i = 1, \cdots, t$ に対して

$$\alpha_i(\beta_1 \cdots \beta_{i-1}\beta_{i+1} \cdots \beta_t) = 0$$

を得る。$\beta_1, \cdots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \cdots, \beta_t$ はいずれも 0 ではなく、R は整域であるから、

$$\beta_1 \cdots \beta_{i-1}\beta_{i+1} \cdots \beta_t \neq 0$$

である。故に、$\alpha_i = 0$ でなけらばならず、したがって、$m_1, \cdots, m_t$ は K 上一次独立である。(1) により、$m_1, \cdots, m_t$ は KM を K 上生成するから、$m_1, \cdots, m_t$ は KM の基底であることがわかる。 (Q.E.D.)

§5. 代数的整数のイデアル類群と類数

有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 K 内の代数的整数全体のなす環 Z_K を考える。Z_K の 0 でない分数イデアルの全体を関係「$I_1 \sim I_2 \iff {}^{\exists}x \in K - \{0\}$ s.t. $I_2 = I_1 x$」によって割ると、イデアルの積から誘導される積に関してアーベル群になる。ここでは、まず、このアーベル群が有限群であることを示す。このアーベル群をイデアル類群といい、その位数を K の類数と呼ぶ。次に、K のある有限次拡大 K' をとると、Z_K の任意の分数イデアルは $Z_{K'}$ の単項な分数イデアルを誘導することを示す。同時に、その K' を、拡大次数が K の類数以下となる拡大体の中から取ることができることも示す。

Dedekind 環 R の 0 でない分数イデアルの全体を $\mathcal{I}(R)$ と書く。$K = Q(R)$ とおく。$\mathcal{I}(R)$ は $\mathfrak{M}_R(K)$ の可逆元全体からなる (命題 B-22) ので、群をなす (この群はアーベル群であることに注意)。

$\mathcal{I}(R)$ 上に関係 $\sim$ を

$$I_1 \sim I_2 \iff {}^{\exists}x \in K - \{0\} \text{ s.t. } I_2 = I_1 x$$

によって定める。$\sim$ は $\mathcal{I}(R)$ 上の同値関係である。さらに、$I_1, I_2, J_1, J_2 \in \mathcal{I}(R)$ について

$$I_i \sim J_i\ (i = 1, 2) \implies I_1 I_2 \sim J_1 J_2$$

が成り立つ。したがって、商集合 $\mathcal{I}(R)/\sim$ には、自然な射影 $\mathcal{I}(R) \longrightarrow \mathcal{I}(R)/\sim$ が群準同型となるような、群の構造が一意的に入る。こうして得られる群 $\mathcal{I}(R)/\sim$ を**イデアル類群** (*ideal class group*) という。

定理 B - 33

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体　とする。
$Z_K = \{x \in K \mid x$ は K 内の代数的整数$\}$　とおく。このとき、

$$\mathcal{I}(Z_K)/\sim \text{ は有限アーベル群}$$

となる。この群の位数を Z_K または K の**類数** (*ideal class number*) という。

定理を証明するために、少し準備する。

補題 B - 34

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体　とする。
$n = [K : \mathbb{Q}]$　とおく。
(1) $I \in \mathcal{I}(Z_K) \implies I$ は階数 n の自由 $\mathbb{Z}$-加群
(2) $I,\ J \in \mathcal{I}(Z_K) \implies {}^{\exists}m \in \mathbb{N}$ s.t. $mI \subset J$

(proof)
(1)・I が自由 $\mathbb{Z}$-加群であること：
Z_K-加群 I を $\mathbb{Z} \subset Z_K$ によって、$\mathbb{Z}$-加群とみなす。
I は Z_K 上有限生成であり ($\because$ 命題 B-22 により、Z_K の分数イデアルは Z_K 上有限生成)、Z_K は $\mathbb{Z}$ 上有限生成である (定理 B-9) から、I は $\mathbb{Z}$ 上有限生成である。また、$I \subset K = Q(Z_K)$ より、I は捩れがない。
故に、有限生成アーベル群の分解定理から、I は自由 $\mathbb{Z}$-加群である。
・I の階数が n であること：
ベクトル空間 $\mathbb{Q}I$ が $\mathbb{Q}$ 上 n 次元であることを示せばよい (演習 B-1(2))。
さて、次が成り立つ。

$$\mathbb{Q}I \underset{\substack{\uparrow \\ ①}}{=} \mathbb{Q}Z_K I \underset{\substack{\uparrow \\ ②}}{=} KI \underset{\substack{\uparrow \\ ③}}{=} K$$

$\because$)
①の証明：
I は Z_K-加群より、$Z_K I \subset I$ が成り立つ。逆に、$1 \in Z_K$ より、$I = 1 \cdot I \subset Z_K I$ となる。故に、$I = Z_K I$ が成り立つ。
②の証明：
命題 B-4 の証明から、任意の $x \in K$ は $x = \dfrac{\alpha}{z}$ $(\alpha \in Z_K,\ z \in \mathbb{Z},\ z \neq 0)$ と書くことができる。故に、$K \subset \mathbb{Q}Z_K$ となる。逆向きの包含関係は $\mathbb{Q},\ Z_K \subset K$ から従う。

③の証明：
$I \neq 0$ なので、$0 \neq \alpha \in I$ が存在する。$\alpha^{-1} \in K$ について、$1 = \alpha^{-1}\alpha \in KI$ となる。故に、$K \subset KI$ を得る。逆向きの包含関係は $I \subset K$ から従う。 □

$$\therefore\ \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}I) = \dim_{\mathbb{Q}} K = [K : \mathbb{Q}] = n$$

(2) (1) の証明より、

$$I \subset \mathbb{Q}I = \mathbb{Q}J$$

が成り立つ。故に、
・$\{x_1, \cdots, x_n\}$ を I の $\mathbb{Z}$ 上の基底
・$\{y_1, \cdots, y_n\}$ を J の $\mathbb{Z}$ 上の基底
とすれば、任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} y_j \qquad (\alpha_{ji} \in \mathbb{Q},\ j = 1, \cdots, n)$$

と書き表わすことができる。各 α_{ji} を

$$\alpha_{ji} = \frac{b_{ji}}{a_{ji}} \qquad (b_{ji}, a_{ji} \in \mathbb{Z},\ a_{ji} > 0)$$

と書く。

$$m := \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{ji} \ > \ 0$$

とおくと、任意の $i, j = 1, \cdots, n$ について $m\alpha_{ji} \in \mathbb{Z}$ になるので、任意の $i = 1, \cdots, n$ について、

$$m x_i = \sum_{j=1}^{n} (m\alpha_{ji}) y_j \quad \in \quad J$$

を得る。こうして、$mI \subset J$ が示された。 (Q.E.D.)

補題 B - 35

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体
$I\ (\neq 0)$：Z_K のイデアル
$\Longrightarrow$ I を Z_K の加法部分群とみて作った商集合 Z_K/I は有限集合
以下、商集合 Z_K/I の元の個数 $|Z_K/I|$ を $N(I)$ によって表わす。

(proof)
$I \in \mathcal{I}(Z_K)$ であるから、Z_K と I について補題 B-34(2) を適用して

$$^{\exists} q \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ qZ_K \subset I$$

となる。これより、加法群の全射準同型

$$Z_K/qZ_K \longrightarrow Z_K/I$$

が存在する。Z_K/I が有限集合であることを示すには、Z_K/qZ_K が有限集合であることを示せばよい。

$n=[K:\mathbb{Q}]$ とおくと、$\mathbb{Z}$-加群として、$Z_K \cong \mathbb{Z}^n$ が成り立つ (定理 B-9) から、$\mathbb{Z}^n/q\mathbb{Z}^n$ が有限集合であることを示せばよい。

しかるに、

$$\mathbb{Z}^n/q\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n \quad \text{as } \mathbb{Z}\text{-modules}$$

が成り立つ。

$\because$)

$\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$ を

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$$

によって定義する。但し、$x\in\mathbb{Z}$ に対して、$\bar{x}$ は $q\mathbb{Z}$ による x の剰余類を表わす。φ は全射な $\mathbb{Z}$-加群準同型であって、$\mathrm{Ker}\varphi = q\mathbb{Z}^n$ が成り立つ。準同型定理によって、

$$\mathbb{Z}^n/q\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n \quad \text{as } \mathbb{Z}\text{-modules}$$

が成り立つ。 □

故に、

$$|\mathbb{Z}^n/q\mathbb{Z}^n| = |\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}|^n = q^n \ < \ \infty$$

を得る。これで、補題は示された。 (Q.E.D.)

補題 B - 36

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体　とする。
$n:=[K:\mathbb{Q}]$ とおき、$\{u_i\}_{i=1}^n$ を Z_K の $\mathbb{Z}$ 上の基底とする。
$u\in Z_K$ に対して、

$$u_i u = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(u)u_j \qquad\qquad (\rho_{ij}(u)\in\mathbb{Z},\ j=1,\cdots,n)$$

と書き表わし、

$$N(u) := \det(\rho_{ij}(u))_{1\le i,j\le n} \ \ \in \ \mathbb{Z}$$

とおく。
(1) 任意の $u,v\in Z_K$ に対して、$N(uv)=N(u)N(v)$ が成り立つ。
(2) $u\in Z_K,\ u\neq 0$ ならば、$|N(u)|=N(Z_K u)$ が成り立つ。

注意：(2) により、$u\in Z_K$ が 0 でないならば、$N(u)$ の絶対値は Z_K の基底 $\{u_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらないことがわかる。

(proof of Lemma B-36)
(1) $u\in Z_K$ に対して、$R(u)=(\rho_{ij}(u))_{1\le i,j\le n}$ とおく。

$$R(uv)=R(u)R(v)$$

となることを示せば、両辺の行列式をとることにより、$N(uv) = N(u)N(v)$ が得られる。

$R(uv) = R(u)R(v)$ となることは次のようにしてわかる。任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して、

$$\begin{aligned} u_i uv &= (u_i u)v \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(u) u_j v \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \rho_{ij}(u) \rho_{jk}(v) u_k \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore \ \rho_{ik}(uv) = \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(u) \rho_{jk}(v)$$

を得る。これより、$R(uv) = R(u)R(v)$ を得る。

(2) $v_i := u_i u \ \ (i = 1, \cdots, n)$ とおく。$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ は $Z_K u$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底になる：

$$Z_K u = \mathbb{Z} v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} v_n$$

$\because$)

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ が $Z_K u$ を $\mathbb{Z}$ 上生成することは、$\{u_1, \cdots, u_n\}$ が Z_K を $\mathbb{Z}$ 上生成することから直ちにわかる。

また、$m_1 v_1 + \cdots + m_n v_n = 0 \ \ (m_i \in \mathbb{Z}, \ i = 1, \cdots, n)$ とおくと、

$$(m_1 u_1 + \cdots + m_n u_n) u = 0 \quad \text{in} \quad Z_K$$

となる。Z_K は整域であり、$u \neq 0$ であるから、

$$m_1 u_1 + \cdots + m_n u_n = 0$$

を得る。$\{u_i\}_{i=1}^{n}$ は Z_K の $\mathbb{Z}$ 上の基底であるから、

$$m_1 = \cdots = m_n = 0$$

を得る。以上より、$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ は $Z_K u$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底であることが示された。 □

(1) のように $R(u) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ を定めると、

$$(v_1 \ \cdots \ v_n) = (u_1 \ \cdots \ u_n)\, {}^t R(u)$$

と表わすことができる。ここで、

$${}^{\exists} P, \ Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), \ {}^{\exists} m_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \cdots, n)$$

$$\text{s.t.} \ \ ① \ \det P = \pm 1, \ \det Q = \pm 1 \quad ② \ P\, {}^t R(u) Q = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \text{O} \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & \ddots \\ & & & & m_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ (例えば、松村英之・著『代数学』(数理科学ライブラリー 8) 朝倉書店 1990, p.116 定理 20.5 を参照) から、②の両辺の行列式をとって、

$$(\det P)N(u)(\det Q) = (\det P)(\det {}^t R(u))(\det Q) = m_1 \cdots m_n$$

を得る。この両辺の絶対値をとると、

$$|N(u)| = |m_1 \cdots m_n| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。一方、Z_K の基底 $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^n$ と $Z_K u$ の基底 $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^n$ を

$$\begin{array}{l} (\bar{u}_1 \ \cdots \ \bar{u}_n) = (u_1 \ \cdots \ u_n)P^{-1} \quad \leftarrow \ \det P = \pm 1 \text{ より } P^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ に注意} \\ (\bar{v}_1 \ \cdots \ \bar{v}_n) = (v_1 \ \cdots \ v_n)Q \end{array}$$

によって定めると、

$$(\bar{v}_1 \ \cdots \ \bar{v}_n) = (\bar{u}_1 \ \cdots \ \bar{u}_n)P {}^t R(u) Q$$

となることから、

$$\bar{v}_i = m_i \bar{u}_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

を得る (これより、$m_i \neq 0$ であることもわかる)。故に、

$$\begin{aligned} Z_K &= \mathbb{Z}\bar{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\bar{u}_n \\ Z_K u &= \mathbb{Z}m_1\bar{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}m_n\bar{u}_n \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$Z_K / Z_K u \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$$

を得る。両辺の元の個数を数えることにより、

$$N(Z_K u) = |Z_K / Z_K u| = |m_1| \cdots |m_n| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を得る。$(*)$ と $(**)$ より

$$|N(u)| = N(Z_K u)$$

が示された。 (Q.E.D.)

補題 B - 37

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体

$\Longrightarrow$ $^{\exists}c \in \mathbb{R},\ c > 0$ s.t. Z_K の任意のイデアル $I\ (\neq 0)$ に対して

$|N(x)| \leq cN(I)$ となる $0 \neq x \in I$ が存在する。

(proof)

$\{u_i\}_{i=1}^n$ を Z_K の $\mathbb{Z}$ 上の基底とし、各 $u \in Z_k$ に対して、

$$u_i u = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(u) u_j$$

によって $\rho_{ij}(u) \in \mathbb{Z}$ を定め、行列 $R(u) := (\rho_{ij}(u))_{1 \leq i,j \leq n}$ を考える。写像 $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \det(\xi_1 R(u_1) + \cdots + \xi_n R(u_n))$$

によって定義する。$F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ は $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に関して n 次の斉次多項式になっている。したがって、

$$|\xi_i| \leq a \quad (i = 1, \cdots, n) \quad \Longrightarrow \quad |F(\xi_1, \cdots, \xi_n)| \leq c \cdot a^n$$

となる $a > 0$ によらない正の定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在する。この c が求めるものである。これを示す。

I を 0 でない Z_K のイデアルとする。集合

$$\mathcal{S} = \{ b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n \mid b_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq b_i \leq \sqrt[n]{N(I)} \quad (i = 1, \cdots, n) \}$$

を考える。この集合の元の個数は $N(I)$ よりも多い。

$\because$)

$r = \sqrt[n]{N(I)}$ とおく。

$[r]$ によって r を越えない最大の整数を表わすことにすると

$$r - 1 < [r] \leq r$$

となる。よって、

$$\sharp\mathcal{S} = ([r] + 1)^n > ((r-1)+1)^n = r^n = N(I)$$

を得る。 $\square$

したがって、$\mathcal{S}$ の中のある異なる２つの元は $\mathrm{mod} I$ で合同である。

x をその２つの差とすれば、$x \neq 0$ であって、$x \in I$ かつ

$$x = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \qquad (a_i \in \mathbb{Z},\ |a_i| \leq \sqrt[n]{N(I)},\ i = 1, \cdots, n)$$

と書き表わすことができる。このとき、

$$|N(x)| = |\det R(x)| = |\det(a_1 R(u_1) + \cdots + a_n R(u_n))| = |F(a_1, \cdots, a_n)| \leq c \cdot N(I)$$

となる。これで、 c が補題の条件を満足することが示された。 (Q.E.D.)

補題 B - 38

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体　とする。

$0 < c \in \mathbb{R}$ は

「Z_K の任意のイデアル $I\ (\neq 0)$ に対して、$|N(x)| \leq cN(I)$ となる $0 \neq x \in I$ が存在する」

を満たしているとする。このとき、

$$^\forall I \in \mathcal{I}(Z_K),\ ^\exists I' \in \mathcal{I}(Z_K) \ \ \text{s.t.}\ \ I \sim I',\ Z_K \subset I',\ [I' : Z_K] \leq c$$

が成り立つ。ここで、$[I' : Z_K]$ は I' の Z_K による剰余類の個数 $|I'/Z_K|$ を表わす。

(proof)

$I \in \mathcal{I}(Z_K)$ を任意にとると

$$0 < {}^\exists m \in \mathbb{Z} \ \ \text{s.t.}\ \ mI \subset Z_K$$

となる (補題 B-34(2))。

$I \sim mI$ であるから、最初にとってきた I は $I \subset Z_K$ を満たしていると仮定しても一般性を失わない。すると、I は Z_K の 0 でないイデアルとなるから、

$$0 \neq {}^\exists x \in I \ \ \text{s.t.}\ \ |N(x)| \leq cN(I)$$

となる (補題 B-37)。

$$I' = Ix^{-1}$$

とおく。$I' \in \mathcal{I}(Z_K)$ であって、$I' \sim I$ が成り立つ。

さらに、$x \in I$ であるから、$Z_K = Z_K x x^{-1} \subset Ix^{-1} = I'$ も満たしている。

補題の証明を完成させるためには、$[I' : Z_K] \leq c$ となることを示せばよい。

まず、

$$[I' : Z_K] = [Ix^{-1} : Z_K][I : Z_K x] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となることに注意しよう。

∵)

写像 $f : I \longrightarrow Ix^{-1}$ を $f(a) = ax^{-1}$ によって定義すると、f は $\mathbb{Z}$-加群としての同型である。$f(Z_K x) = Z_K$ であるから、f は $\mathbb{Z}$-加群としての同型

$$I/Z_K x \xrightarrow{\cong} Ix^{-1}/Z_K$$

を引き起こす。　□

また、

$$[I : Z_K x] = [Z_K : Z_k x]/[Z_K : I] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことに注意しよう。

∵)

$x \in I$ かつ I は Z_K-加群であるから、Z_K 上の恒等写像は、全射な $\mathbb{Z}$-加群準同型

$$Z_K/Z_K x \longrightarrow Z_K/I$$

を誘導する。この写像の核は $I/Z_K x$ であるから、$\mathbb{Z}$-加群として

$$(Z_K/Z_K x)/(I/Z_K x) \cong Z_K/I$$

が成り立つ。両辺の位数を比較して

$$[Z_K : Z_k x]/[I : Z_K x] = [Z_K : I]$$

を得る ($[Z_K : Z_k x]$, $[Z_K : I]$ は補題 B-35 により、有限。$I/Z_K x$ は $Z_K/Z_K x$ に含まれるので有限集合。したがって、$[I : Z_K x]$ も有限)。 □

①②と補題 B-37 より

$$[I' : Z_K] = [Z_K : Z_K x]/[Z_K : I] = N(Z_K x)/N(I) = |N(x)|/N(I) \le c$$

となる。これで、示された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem B-33)

補題 B-37 のような実数 $c > 0$ をとる。補題 B-38 により、定理を証明するには、$Z_K \subset I$ かつ $[I : Z_K] \le c$ を満たす $I \in \mathcal{I}(Z_K)$ が有限個であることを示せばよい。そのためには、$1 \le m \le c$ を満たす任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して、$Z_K \subset I$ かつ $[I : Z_K] = m$ を満たす $I \in \mathcal{I}(Z_K)$ が有限個しか存在しないことを示せばよい。

$$I \in \mathcal{I}(Z_K),\ Z_K \subset I,\ [I : Z_K] = m \implies mZ_K \subset mI \subset Z_K$$

となる。

∵)

$Z_K \subset I$ より $mZ_K \subset mI$ が従う。

$mI \subset Z_K$ であることを示す。

$[I : Z_K] = m$ であるから、I/Z_K は加法に関して位数 m のアーベル群である。よって、任意の $x \in I$ に対して

$$m\bar{x} = 0 \ \text{ in } \ I/Z_K$$

を得る。但し、$\bar{x}$ は I/Z_K における x の剰余類を表わす。これは、

$$mx \in Z_K$$

と同値である。故に、$mI \subset Z_K$ が示された。 □

よって、写像

$$\begin{array}{ccc} \{I \in \mathcal{I}(Z_K) \mid Z_K \subset I,\ [I : Z_K] = m\} & \longrightarrow & \{mZ_K \text{ を含む } Z_K \text{ の部分群全体}\} \\ \Cup & & \Cup \\ I & \longmapsto & mI \end{array}$$

を考えることができる。この写像は単射である (∵ $I \in \mathcal{I}(Z_K)$ に対して $mI \subset K$ かつ K は体)。したがって、

$$\sharp\{mZ_K \text{ を含む } Z_K \text{ の部分群全体}\} < \infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となることを示せば定理の証明は終わる。

$n=[K:\mathbb{Q}]$ とおくと Z_K は階数 n の自由 $\mathbb{Z}$-加群になる (定理 B-9) ので、次の 1 対 1 対応が存在することがわかる。

$$\begin{aligned}\{mZ_K \text{ を含む } Z_K \text{ の部分群全体}\} &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{Z_K/mZ_K \text{ の部分アーベル群全体}\}\\ &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\mathbb{Z}^n/m\mathbb{Z}^n \text{ の部分アーベル群全体}\}\\ &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \text{ の部分アーベル群全体}\}\end{aligned}$$

最後の集合 $\{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ の部分アーベル群全体$\}$ は有限集合であるから、$(*)$ は証明された。これで、定理は証明された。 (Q.E.D.)

K：$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体
K'/K：体の有限次拡大
$I \in \mathcal{I}(Z_K)$ とする。このとき、

$$I' := \{\sum_{i=1}^{r} \xi_i a_i \mid r \in \mathbb{N},\ \xi_i \in Z_{K'},\ a_i \in I \quad (i=1,\cdots,r)\ \} \subset K'$$

とおく。$I' \in \mathcal{I}(Z_{K'})$ が成り立つ。

$\because$)

$0 \neq I \subset I'$ より $I' \neq 0$ である。
$I' \in \mathcal{I}(Z_{K'})$ となることを示すには、I' が $Z_{K'}$ 上有限生成なことを示せばよい。
$a_1,\cdots,a_n$ を I の Z_K 上の生成元とすると、

$$I = Z_K a_1 + \cdots + Z_K a_n$$

と表わすことができる。このとき、$a \in I$ を任意にとり、

$$a = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \qquad (x_1,\cdots,x_n \in Z_K)$$

と表わす。このとき、任意の $\xi \in Z_{K'}$ について

$$\xi a = (\xi x_1) a_1 + \cdots (\xi x_n) a_n$$

と書けて、$\xi x_i \in Z_{K'}$ $(i=1,\cdots,n)$ であるから、I' は $Z_{K'}$ 上 $a_1,\cdots,a_n$ によって生成されることがわかる。 □

上の I' を I **から誘導される** $Z_{K'}$ **の分数イデアル**という。

$$(Z_K)' = Z_{K'}$$

であり、任意の $I,\ J \in \mathcal{I}(Z_K)$ に対して

$$(I+J)' = I' + J', \qquad (IJ)' = I'J'$$

が成り立つ。

定理 B - 39

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体
h：K の類数 とする。このとき、

$^\exists K'$: K の有限次拡大体 s.t. (i) $[K':K] \leq h$
(ii) 任意の $I \in \mathcal{I}(Z_K)$ に対して、I から誘導される $Z_{K'}$ の分数イデアル I' は単項、すなわち、
$^\exists \alpha \in Z_{K'}$ s.t. $I' = Z_{K'}\alpha$

(proof)

イデアル類群 $\mathcal{I}(Z_K)/\sim$ は位数 h のアーベル群になるから、

$$\mathcal{I}(Z_K)/\sim\ \cong C_1 \times \cdots \times C_r \qquad \text{as groups}$$

となる。但し、C_i $(i=1,\cdots,r)$ は有限巡回群である。C_i の位数を n_i とおくと、$h = n_1 \cdots n_r$ が成り立つ。各 $i \in \{1,\cdots,r\}$ に対して C_i の生成元に対応する $\mathcal{I}(Z_K)/\sim$ の元の代表元 I_i をひとつ選ぶ。

$I_i^{n_i} \sim Z_K$ であるから、

$$I_i^{n_i} = a_i Z_K \quad \text{for some } a_i \in K - \{0\}$$

となる。各 i $(i=1,\cdots,r)$ に対して、$X^{n_i} - a_i$ の根（K のある代数的閉体内の根）を 1 つとり、それを α_i とおく。

$K' := K(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ とおくと、K' は K 上

$$\{\alpha_1^{t_1} \cdots \alpha_r^{t_r} \mid 0 \leq t_i \leq n_i - 1 \ \ (i=1,\cdots,r)\}$$

によって生成されるから、

$$[K':K] \leq n_1 \cdots n_r = h$$

を得る。よって、(i) が示された。

次に、(ii) が成り立つことを示す。まず、$I = I_i$ $(i=1,\cdots,r)$ の場合に証明する。

$$I_i^{n_i} = a_i Z_K = \alpha^{n_i} Z_K$$

より、I_i から誘導される $Z_{K'}$ の分数イデアル I_i' について

$$(I_i')^{n_i} = (I_i^{n_i})' = (\alpha_i^{n_i} Z_K)' = \alpha_i^{n_i} Z_{K'} = (\alpha_i Z_{K'})^{n_i} \qquad \text{in} \quad K'$$

が成り立つ。$I_i',\ \alpha_i Z_{K'}$ はともに $Z_{K'}$ の分数イデアルであるから、

$$I_i' = \alpha_i Z_{K'}$$

を得る (命題 B-25)。よって、$I = I_i$ の場合に (ii) は示された。

次に、$I \in \mathcal{I}(Z_K)$ が任意の場合に考える。I は

$$I = b I_1^{m_1} \cdots I_r^{m_r} \qquad\qquad (b \in K - \{0\},\ 0 \leq m_i \leq n_i - 1 \ \ (i=1,\cdots,r))$$

と書き表わすことができる。このとき、

$$\begin{aligned} I' &= (b I_1^{m_1} \cdots I_r'^{m_r})' \\ &= b(I_1')^{m_1} \cdots (I_r')^{m_r} \\ &= b(\alpha_1 Z_{K'})^{m_1} \cdots (\alpha_r Z_{K'})^{m_r} \\ &= b\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_r^{m_r} Z_{K'} \end{aligned}$$

となるので、I' は単項である。 (Q.E.D.)

定理 B - 40

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体
K'：K の有限次拡大体　とする。このとき、写像

$$\mathcal{I}(Z_K) \longrightarrow \mathcal{I}(Z_{K'}), \quad I \longmapsto I'$$

は単射な群準同型である。

この定理の単射性の部分は次の補題から得られる。

補題 B - 41

K：$\mathbb{Q}$ の有限次元拡大体
K'：K の有限次拡大体　とする。このとき、
$I \in \mathcal{I}(Z_K)$
　$\Longrightarrow$ $I' \cap K = I$

(proof)

K'/K は単純拡大である。

$\because$)

K の標数は 0 なので、定数でない K-係数の任意の多項式は K 上分離的である (拙著『あるてぃんの Galois Theory』p.100 系 3)。体の拡大 K'/K は有限次拡大なので、代数的である。したがって、K'/K は有限次分離的である。『あるてぃんの Galois Theory』p.150 により、K'/K は単純拡大である。 □

$K' = K(\theta)$ とおく。K'/K は有限次拡大であるから、θ は K 上代数的である。$m(X) \in K[X]$ を θ の K 上の最小多項式とする。

E を $m(X)$ の K 上の分解体とする。$\theta \in E$ かつ $K \subset E$ より $K' = K(\theta) \subset E$ となる。また、E は分離多項式の分解体なので、E/K は Galois 拡大となる (『あるてぃんの Galois Theory』p.80)。

$G = \mathrm{Gal}(E/K)$ とおき、G の位数を N とおく。

各 $\xi \in E$ に対して、G の元による ξ の像を $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(N)}$ と書く。但し、$\xi^{(1)} = \xi$ としておく。

さて、$b \in I' \cap K$ を任意にとる。$b \in I'$ なので

$$b = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n \qquad (\xi_i \in Z_{K'},\ a_i \in I,\ i = 1, \cdots, n)$$

と書くことができる。$b \in K$ なので、b は G の元で動かない。よって、任意の $j = 1, \cdots, N$ に対して

$$b = b^{(j)} = \xi_1^{(j)} a_1 + \cdots + \xi_n^{(j)} a_n$$

となる。これより、

$$b^N = \prod_{j=1}^{N}(\xi_1^{(j)}a_1 + \cdots + \xi_n^{(j)}a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。このとき、任意の $\sigma \in G$ に対して、

$$b^N \underset{\substack{\uparrow \\ b \in K}}{=} \sigma(b^N) = \prod_{j=1}^{N}(\sigma(\xi_1^{(j)})a_1 + \cdots + \sigma(\xi_n^{(j)})a_n)$$

となるので、$(*)$ の右辺を展開し、$a_{i_1} \cdots a_{i_N}$ に関して整理したとき、その係数は σ で不変になっていることがわかる。

$\because$)

$X_1, \cdots, X_n$ の多項式

$$b(X_1, \cdots, X_n) = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_n X_n \ \in \ E[X_1, \cdots, X_n]$$

を考える。G は多項式環 $E[X_1, \cdots, X_n]$ に自然に作用する。

$$B(X_1, \cdots, X_n) = \prod_{j=1}^{N}(\xi_1^{(j)}X_1 + \cdots + \xi_n^{(j)}X_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\sharp)$$

とおくと、$B(X_1, \cdots, X_n)$ は G のすべての元 τ に渡たる

$$\tau b(X_1, \cdots, X_n) = \tau(\xi_1)X_1 + \cdots + \tau(\xi_n)X_n$$

の積であるから、σ の作用で不変である。よって、$(\sharp)$ の両辺に σ を作用させて

$$B(X_1, \cdots, X_n) = \prod_{j=1}^{N}(\sigma(\xi_1^{(j)})X_1 + \cdots + \sigma(\xi_n^{(j)})X_n)$$

を得る。よって、

$$\prod_{j=1}^{N}(\xi_1^{(j)}X_1 + \cdots + \xi_n^{(j)}X_n) = \prod_{j=1}^{N}(\sigma(\xi_1^{(j)})X_1 + \cdots + \sigma(\xi_n^{(j)})X_n)$$

を得る。この両辺を展開し、$X_{i_1} \cdots X_{i_N}$ の係数を比較すれば、求める結果が得られる。

□

E/K は Galois 拡大なので、その係数は K の元になる。

一方、$(*)$ の右辺を展開したときの $a_{i_1} \cdots a_{i_N}$ の係数は $\{\xi_i^{(j)} \mid i = 1, \cdots, n, \ j = 1, \cdots, N\}$ たちの積の整数係数の一次結合である。

$\xi_i^{(j)} \in Z_E$ なので、
$(*)$ の右辺を展開したときの $a_{i_1} \cdots a_{i_N}$ の係数は
Z_E に属することがわかる ($\because$ Z_E は環)。 $\longleftarrow$

(まず、$\xi_i \in Z_{K'} \subset Z_E$ $(i = 1, \cdots, n)$ である。
ξ は整数係数のモニックな多項式の根である。
よって、任意の $\sigma \in G$ に対して
$\sigma(\xi) \in E$ は同じ多項式の根である。
したがって、$\sigma(\xi) \in Z_E$ となる。)

先程、その係数は K の元でもあることを示したから、その係数は $Z_K = Z_E \cap K$ に属することがわかる。

$$\therefore \ b^N \in I^N$$

がわかった。故に、

$$b^N Z_K \subset I^N \qquad i.e. \qquad (bZ_K)^N \subset I^N$$

を得る。命題 B-25 により、$bZ_K \subset I$ を得るので、$b \in I$ となることがわかる。

こうして、$I' \cap K \subset I$ となることが示された。

逆向きの包含関係 $I \subset I' \cap K$ は明らかになりたっているから、補題は証明された。 (Q.E.D.)

(proof of Theorem B-40)

与えられた写像は、補題 B-41 により、単射である。また、任意の $I, J \in \mathcal{I}(Z_K)$ に対して $(IJ)' = I'J'$ が成り立つから、与えられた写像は、群の準同型である。

これで、定理は証明された。 (Q.E.D.)

参 考 文 献

◇日本語の教科書

[1] 服部昭・著『群とその表現』(共立数学講座 18) 共立出版、1967 年

[2] 堀田良之・著『代数入門—群と加群—』(数学シリーズ) 裳華房、1987 年

[3] 永尾汎・津島行男・共著『有限群の表現』(数学選書 8) 裳華房、1987 年

[4] 松村英之・著『代数学』(数理科学ライブラリー 8) 朝倉書店、1990 年

[5] 山崎圭次郎・著『環と加群』(岩波基礎数学選書) 岩波書店、1990 年

[6] 藤崎源二郎・著『体とガロア理論』(岩波基礎数学選書) 岩波書店、1991 年

[7] 近藤武・著『群論』(岩波基礎数学選書) 岩波書店、1991 年

[8] 阿部英一・著『ホップ代数』(数学選書) 岩波書店、1977 年

[9] 木下素夫・訳『ブルバキ数学原論　可換代数 1 』東京図書、1971 年

※このノートを書き上げた直後に、次の本が出版されたので、参考文献に追加しておく。

・岩永恭雄・佐藤眞久・共著『環と加群のホモロジー代数的理論』日本評論社、2002 年

◇英語の教科書

[10] F. Kasch・著『Modules and rings』(London Math. Society Monograph 17) Academic Press、1982 年（1978 年にドイツ語で出版されたものの D. A. R. Wallace による英訳）

[11] T. Y. Lam・著『Lectures on modules and rings』(G.T.M.189) Springer、1999 年

[12] T. Y. Lam・著『Exercises in classical ring theory』Springer-Verlag、1995 年

[13] C. W. Curtis and I. Reiner・共著『Representation theory of finite groups and associative algebras』 Interscience Publishers、1962 年

[14] C. W. Curtis and I. Reiner・共著『Methods of representation theory with applications to finite groups and orders volume 1』John Wiley & Sons、1981 年

[15] G. Karpilovsky・著『Group represenations Volume 1 Part A: Background material』(North-Holland Math. Stud. 175) North-Holland、1992 年

[16] G. Karpilovsky・著『Structure of blocks of group algebras』(Pitman Manographs and survey in Pure and Applied Math.) Longman Scientific & Technical、1987 年

[17] F. W. Anderson and K. R. Fuller・共著『Rings and categories of modules』(G.T.M. 13) Springer、1974 年

[18] B. Farb and R. K. Dennis・共著『Noncommutative algebra』(G.T.M. 144) Springer、1993 年

[19] N. Jacobson・著『Basic algebras 』W.H.Freeman and Company、1980 年

[20] B. Stenström・著『Rings of quotients』Springer-Verlag、1975 年

[21] F. DeMeyer and E. Ingraham・共著『Separable algebras over commutative rings』(Lecture Notes in Math. 181) Springer、1971年

[22] W. Feit・著『The representation theory of finite groups』North-Holland、1982年

[23] I. M. Isaacs・著『Character Theory of finite groups』 Academic Press、1976年

◇論説・論文など

[24] 梅田亨・著「双対定理としてのGalois理論／基本定理の単純な見方」数学セミナー、1996年9月号、p.26–31

[25] M. Auslander・著「Large modules over Artin algebras」in "Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg)" edited by Alex Heller and Myles Tierney, Academic Press, 1976, p.1–17

[26] T. Nakayama・著「On Frobenius algebras」Annals of Math. **40** (1939) p.611–633

[27] A. Hattori・著「On strongly separable algebras」Osaka J. Math. **2** (1965) p.369–372

[28] A. Hattori・著「Rank element of a projective module」Nagoya Math. J. **25** (1965) p.113–120

[29] T. Kanzaki・著「A type of separable algebra」J. of Math. Osaka City Univ. **13** (1962) p.41–43

[30] T. Kanzaki・著「Special type of separable algebra over a commutative ring」Proc. of the Japan Academy **40** (1964) p.781–786

[31] J. C. Wilkinson・著「Injective endomorphisms and maximal left ideals of left artinian rings」Glasgow Math. J. **30** (1988) p.195–201

[32] K. Yamagata・著「Frobenius algebras」in "Handbook of algebra vol. 1" edited by M. Hazewinkel, Elsevier Science B.V., 1996, p.842–887

索　　引

な行

は行

ま行

や行

ら行

記　号　索　引