クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の決定とその関係性

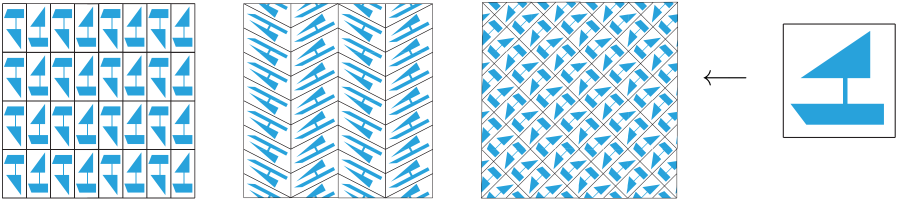
橋本　誠吾　(表現論研究室)

February, 17, 2016

紋様と被覆空間

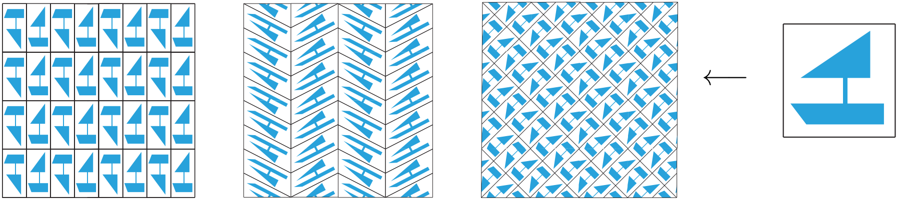
紋様と被覆空間

様々な紋様



紋様と被覆空間

様々な紋様



紋様のように図形のコピーを多数張り合わせた空間を“**被覆空間**”という．（上の三つの紋様は全ての基本となる絵柄が**クラインの壺**によって与えられた被覆空間である.)

疑問 紋様の違いをどのように捉えて, 分類すれば良いか？

疑問 紋様の違いをどのように捉えて, 分類すれば良いか？

$$\Downarrow$$

紋様は被覆空間の視点から捉えることができる.

疑問 紋様の違いをどのように捉えて, 分類すれば良いか？

$\Downarrow$

紋様は被覆空間の視点から捉えることができる.

$\Downarrow$

今回は基本となる絵柄をクラインの壷に固定し,
それをもとにした被覆空間にはどのようなものがあり,
どのくらいの種類が存在するのかを調べることにした.

疑問 紋様の違いをどのように捉えて, 分類すれば良いか？

$\Downarrow$

紋様は被覆空間の視点から捉えることができる.

$\Downarrow$

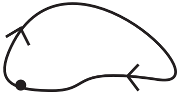
今回は基本となる絵柄をクラインの壺に固定し,
それをもとにした被覆空間にはどのようなものがあり,
どのくらいの種類が存在するのかを調べることにした.

どうやって？ $\Downarrow$

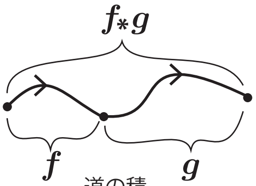
基本群を用いて調べることができる!!

ホモトピーと基本群

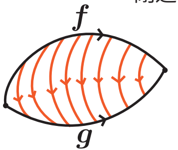
道



閉道



道の積



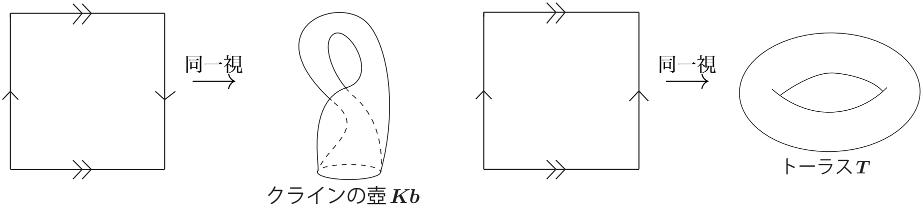
端点を固定してホモトープ

$\Longrightarrow \quad f \simeq_{\mathrm{rel}} g$

定義（基本群）

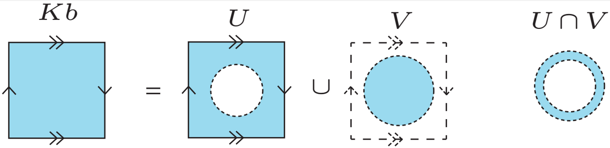
位相空間 X 内の閉道 f に対し, $[f] := \{\, g \mid f \simeq_{\mathrm{rel}} g \}$ とする.
$\pi_1(X, x_0) := \{\ [f] \mid f$ は x_0 を基点とする閉道 $\}$ を x_0 を基点とする X の**基本群**という.

クラインの壺とは

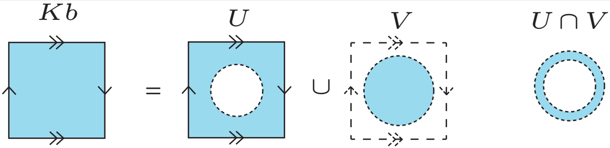


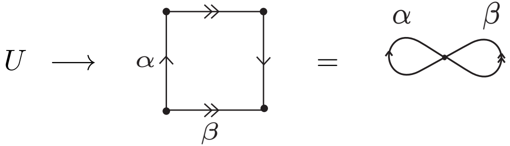
正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の対辺を上図左のように同一視して得られる図形を**クラインの壺**（Kb と書く），上図右のように同一視して得られる図形を**トーラス**（T と書く）という. クラインの壺やトーラスは $\mathbb{R}^2$ の商空間として取り扱うことができる.

クラインの壺の基本群

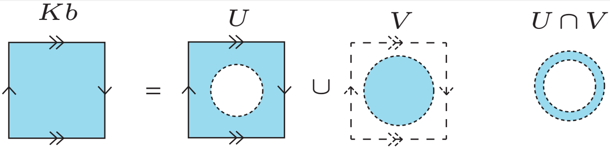


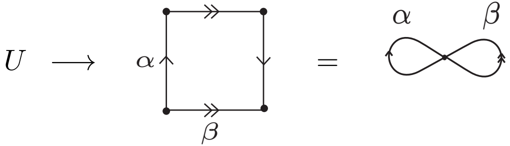
クラインの壺の基本群





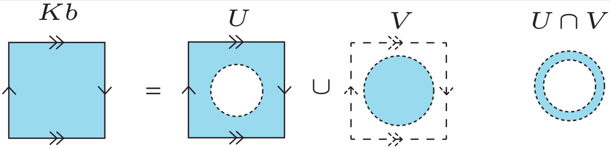
クラインの壺の基本群



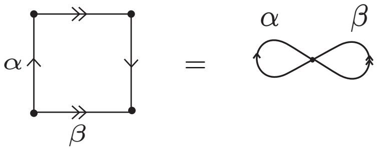


基本群は $\langle \alpha,\ \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

クラインの壺の基本群



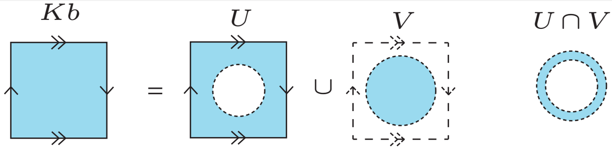
$U \longrightarrow$



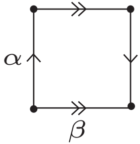
基本群は $\langle \alpha,\ \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$V \longrightarrow \bullet$

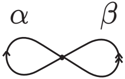
クラインの壺の基本群



$U \longrightarrow$



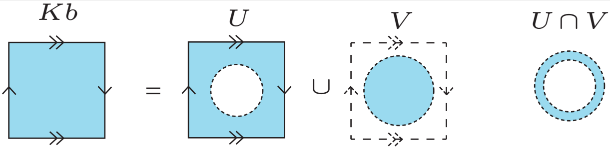
$=$

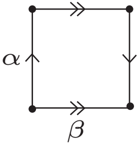


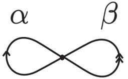
基本群は $\langle\alpha,\ \beta\rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$V \longrightarrow \bullet$ 　基本群は自明な基本群 $\{1\}$

クラインの壺の基本群



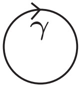
$U \longrightarrow$ 

$=$ 

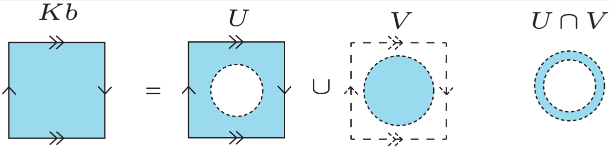
基本群は $\langle \alpha,\ \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$V \longrightarrow \bullet$

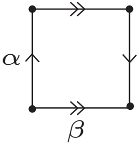
基本群は自明な基本群 $\{1\}$

$U \cap V \longrightarrow$ 

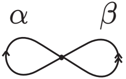
クラインの壺の基本群



$U \longrightarrow$



$=$

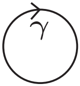


基本群は $\langle \alpha,\ \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$V \longrightarrow \bullet$

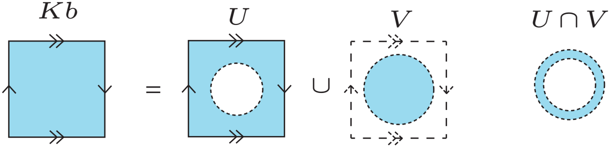
基本群は自明な基本群 $\{1\}$

$U \cap V \longrightarrow$

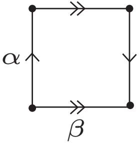


基本群は $\langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$

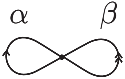
クラインの壺の基本群



$U \longrightarrow$



$=$

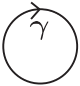


基本群は $\langle \alpha,\ \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$V \longrightarrow \bullet$

基本群は自明な基本群 $\{1\}$

$U \cap V \longrightarrow$



基本群は $\langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$

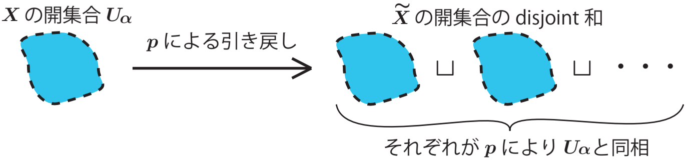
よってクラインの壺の基本群は $\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} = e \rangle$

被覆空間と分類定理

$X,\ \widetilde{X}$ を位相空間とし, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ を連続写像とする.

被覆空間と分類定理

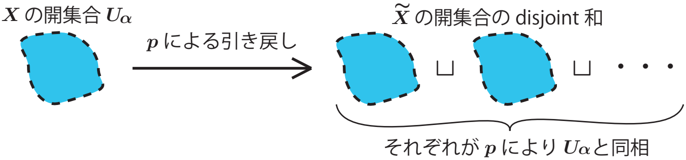
$X,\ \widetilde{X}$ を位相空間とし, $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ を連続写像とする.



上図のような開集合の族で X を被覆できるとき, 組 $(\widetilde{X},p)$ を X の**被覆空間**といい, 任意の $x\in X$ に対し, $\sharp\bigl(p^{-1}(x)\bigr)=n$ のとき, n **重被覆**という.

被覆空間と分類定理

X, $\widetilde{X}$ を位相空間とし, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ を連続写像とする.



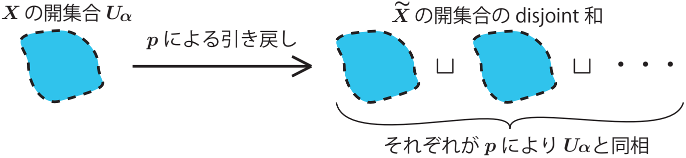
上図のような開集合の族で X を被覆できるとき, 組 $(\widetilde{X}, p)$ を X の**被覆空間**といい, 任意の $x \in X$ に対し, $\sharp(p^{-1}(x)) = n$ のとき, n **重被覆**という.

定義（被覆同型）

X を位相空間とし, $(\widetilde{X}, p_1)$,$(\widetilde{Y}, p_2)$ を X の被覆空間とする.
$p_1 = p_2 \circ f$ を満たす同相写像 $f : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ が存在するとき, $(\widetilde{X}, p_1)$ と $(\widetilde{Y}, p_2)$ は**被覆同型**であるという.

被覆空間と分類定理

X, $\widetilde{X}$ を位相空間とし, $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ を連続写像とする.



上図のような開集合の族で X を被覆できるとき, 組 $(\widetilde{X}, p)$ を X の**被覆空間**といい, 任意の $x \in X$ に対し, $\sharp\bigl(p^{-1}(x)\bigr) = n$ のとき, n **重被覆**という.

定義（被覆同型）

X を位相空間とし, $(\widetilde{X}, p_1)$,$(\widetilde{Y}, p_2)$ を X の被覆空間とする.
$p_1 = p_2 \circ f$ を満たす同相写像 $f : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ が存在するとき, $(\widetilde{X}, p_1)$ と $(\widetilde{Y}, p_2)$ は**被覆同型**であるという.

問題 どのようにして被覆空間を分類すれば良いか?

被覆空間の分類定理

位相空間 X に対し，

$$\{X \text{ の連結な } n \text{ 重被覆の被覆同型類全体}\}$$
$$1 \text{ 対 } 1 \Updownarrow$$
$$\{\pi_1(X, x_0) \text{ から } S_n \text{ への推移的な反準同型の同値類全体}\}$$

被覆空間の分類定理

位相空間 X に対し,

$$\{X \text{ の連結な } n \text{ 重被覆の被覆同型類全体 }\}$$
$$1 \text{ 対 } 1 \Updownarrow$$
$$\{\pi_1(X, x_0) \text{ から } S_n \text{ への推移的な反準同型の同値類全体 }\}$$

定義（推移的な反準同型）

G を群とし, $\phi, \phi' : G \longrightarrow S_n$ とする.

- 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し, $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_2)\phi(g_1)$ となるとき, ϕ を**反準同型写像**という.
- 2 つの反準同型写像 ϕ と ϕ' が**同値**であるとは, $\phi' = \sigma^{-1}\phi\sigma$ となる $\sigma \in S_n$ が存在するときをいう.
- 任意の $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し $\phi(g)(i) = j$ となる $g \in G$ が存在するとき, ϕ は**推移的**であるという.

クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の見つけ方

①推移的な反準同型 $\phi : \pi_1(Kb, x_0) \longrightarrow S_n$ の同値類 $[\phi]$ を求める.

$$\phi(\alpha)\phi(\beta)\phi(\alpha)\big(\phi(\beta)\big)^{-1} = e$$

となる推移的な反準同型を探す. 条件を満たす反準同型 ϕ の同値類を $C\big(\phi(\alpha), \phi(\beta)\big)$ と記述する.

クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の見つけ方

①推移的な反準同型 $\phi : \pi_1(Kb, x_0) \longrightarrow S_n$ の同値類 $[\phi]$ を求める.

$$\phi(\alpha)\phi(\beta)\phi(\alpha)\big(\phi(\beta)\big)^{-1} = e$$

となる推移的な反準同型を探す. 条件を満たす反準同型 ϕ の同値類を $C\big(\phi(\alpha), \phi(\beta)\big)$ と記述する.

$\boxed{\text{結果}}$ ・二重被覆は

$$c_1 = C\big((1\ 2), e\big)\ ,\ c_2 = C\big(e, (1\ 2)\big)\ ,\ c_3 = C\big((1\ 2), (1\ 2)\big)$$

に対応する 3 個

クラインの壺の二重被覆, 四重被覆の見つけ方

①推移的な反準同型 $\phi:\pi_1(Kb,x_0)\longrightarrow S_n$ の同値類 $[\phi]$ を求める.

$$\phi(\alpha)\phi(\beta)\phi(\alpha)\bigl(\phi(\beta)\bigr)^{-1}=e$$

となる推移的な反準同型を探す. 条件を満たす反準同型 ϕ の同値類を $C\bigl(\phi(\alpha),\phi(\beta)\bigr)$ と記述する.

$\boxed{\text{結果}}$ ・二重被覆は

$$c_1=C\bigl((1\ 2),e\bigr)\ ,\ c_2=C\bigl(e,(1\ 2)\bigr)\ ,\ c_3=C\bigl((1\ 2),(1\ 2)\bigr)$$

に対応する 3 個

・四重被覆は

$$c_4=C\bigl(e,(1\ 2\ 3\ 4)\bigr)\ ,\ c_5=C\bigl((1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4)\bigr)\ ,$$

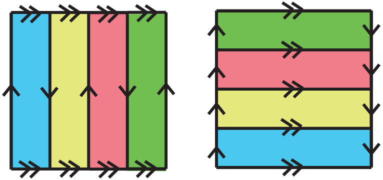
$$c_6=C\bigl((1\ 3)(2\ 4),(1\ 2\ 3\ 4)\bigr)\ ,\ c_7=C\bigl((1\ 2\ 3\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\bigr)$$

に対応する 4 個

②対応する被覆空間の形状を推察する.
$c_7 = C\big((1\ 2\ 3\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\big)$ に対応する被覆空間を求めてみよう.
考えたい空間は次の二つの性質を持つ.

②対応する被覆空間の形状を推察する.
$c_7 = C\big((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\big)$ に対応する被覆空間を求めてみよう.
考えたい空間は次の二つの性質を持つ.

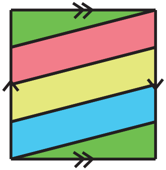
- 四つのクラインの壺が貼り合わされている.
  $\Rightarrow$ 空間がトーラスまたはクラインの壺であると推測.



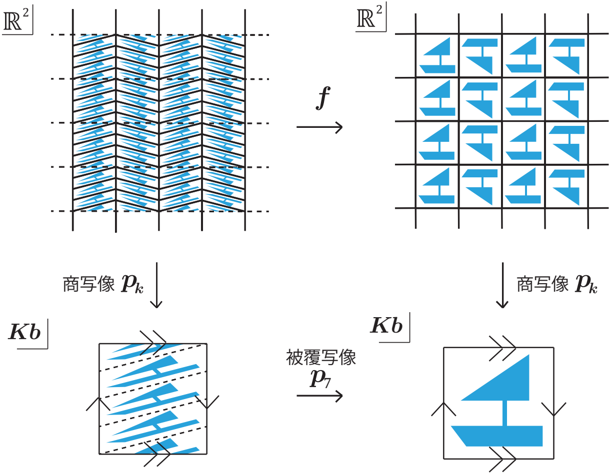
②対応する被覆空間の形状を推察する.
$c_7 = C\big((1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\big)$ に対応する被覆空間を求めてみよう.
考えたい空間は次の二つの性質を持つ.

- 四つのクラインの壺が貼り合わされている.
  $\Rightarrow$ 空間がトーラスまたはクラインの壺であると推測.
- 貼り合わされている四つのクラインの壺の $(0,0)$ に相当する点を x_i $(i \in \{1,2,3,4\})$ とする. 各クラインの壺に α, β と同様のものを考え, x_i が
  α によって $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_1$,
  β によって $x_1 \to x_4 \to x_1$, $x_2 \to x_3 \to x_2$ と写るように貼り合わされている.

$\boxed{\text{結果}}$:



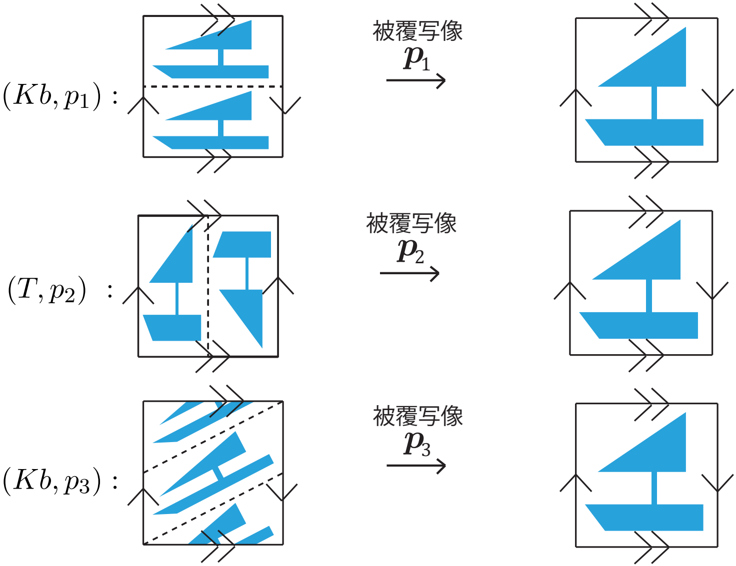
③被覆写像を求める.



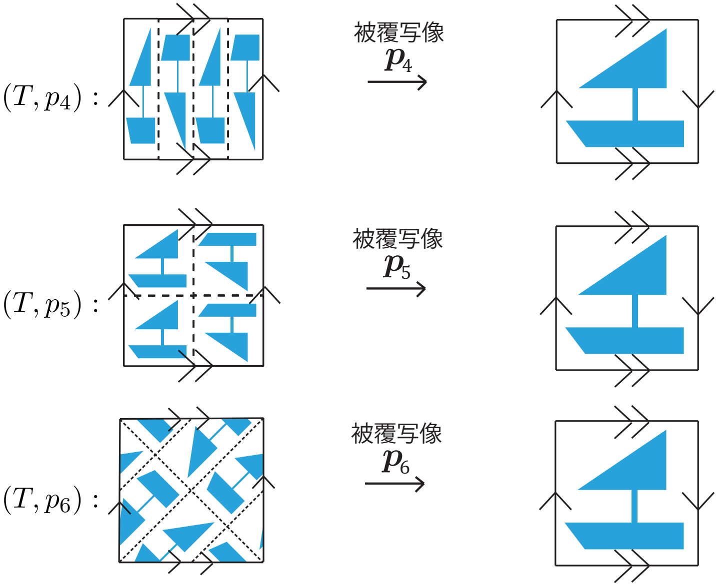
上図のような $\mathbb{R}^2$ 上の同相写像 f を定め, f により誘導される写像 p を考えればよい. この (Kb, p_7) が c_7 に対応する被覆空間となっている.

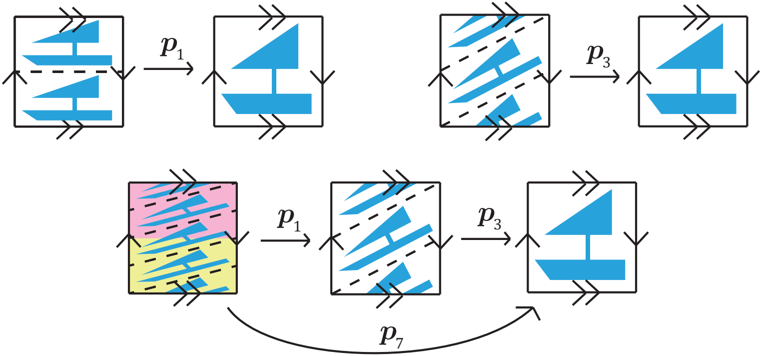
同様にして c_1 から c_6 に対応する被覆空間が次のように得られた.

・二重被覆（上から c_1, c_2, c_3 に対応）

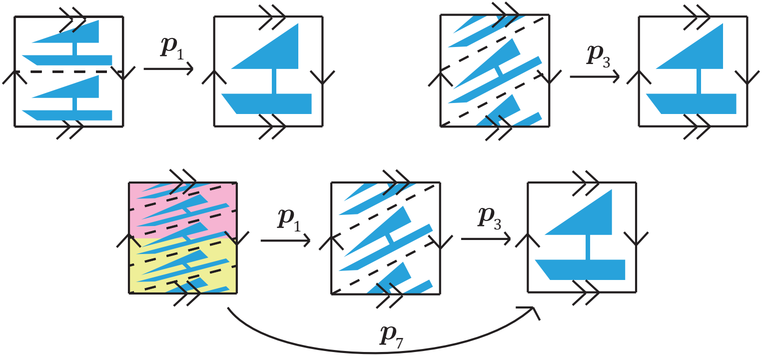


- 四重被覆（上から c_4, c_5, c_6 に対応）





p_1
p_3
p_1
p_3
p_7



(Kb, p_7) は上図のようにクラインの壺の二重被覆を経由して得られている. その他の四重被覆はクラインの壺の二重被覆とトーラスの二重被覆を経由して得られることがわかった.